

**О.І. ЛИТВИНОВ, Л.І. МОРОЗ**

---

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК  
ДЛЯ ОКР  
«МОЛОДШИЙ СПЕЦІАЛІСТ»**

---

**НІЖИН – 2012**

**О.І. ЛИТВИНОВ, Л.І. МОРОЗ**

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК  
ДЛЯ ОКР  
«МОЛОДШИЙ СПЕЦІАЛІСТ»**

**НІЖИН-2012**

УДК 531.(075.8)  
ББК 22.21Я 73  
Б81

Рекомендовано Вченою радою Ніжинського  
агротехнічного інституту НУБіПУ.  
Протокол № 1 від « 30 » серпня 2012 р.

*Рецензенти:*

**Ю.М. Андрєєв**, доктор технічних наук, професор Національного технічного університету «ХП».

**І.В. Головач**, доктор технічних наук, професор Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Укладачі навчального посібника висловлюють глибоку вдячність студентці факультету механізації сільського господарства (гр.БМ122ск) Супрун Ользі Миколаївні за допомогу в підготовці рукопису.

**О.І. Литвинов, Л.І. Мороз**

Технічна механіка. Навчальний посібник для ОКР «Молодший спеціаліст».  
Ніжин: ПП Лисенко М.М., 2012. 480 с.

Навчальний посібник відповідає програмі навчальної дисципліни «Технічна механіка» для студентів з підготовки ОКР «Молодший спеціаліст».

Матеріали посібника складаються із трьох частин, в яких висвітлюється основна тематика курсів теоретичної механіки, опору матеріалів і деталей машин.

У контексті навчального посібника викладаються основні теоретичні положення, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу має сприяти засвоєнню теоретичного матеріалу, а також має за мету допомогти у самостійній роботі студентів, розв'язуванні задач, виконанні лабораторно-практичних і розрахунково-графічних робіт.

Для студентів технічного і технологічного профілів, а також може бути корисний викладачам, інженерно-технічним працівникам.

- © О.І. Литвинов, Л.І. Мороз, 2012
- © Ніжинський агротехнічний інститут НУБіПУ
- © Циклова комісія загальнотехнічних дисциплін, оригінал-макет, 2012

---

## ЗМІСТ

Передмова .....	16
Вступ .....	17
<b>ЧАСТИНА I. ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ</b>	
<b>Предмет теоретичної механіки. Структура курсу .....</b>	<b>22</b>
<b>СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА</b>	
<b>1.1. Предмет і задачі статички. Механічні в'язі, реакції в'язей.....</b>	<b>26</b>
1.1.1. Предмет статички. Основні поняття. ....	26
1.1.2. Задачі статички. Основні визначення .....	27
1.1.3. Аксиоми статички .....	29
1.1.4. Невільне тверде тіло. Механічна в'язь і реакція в'язі. Реакції основних типів в'язей .....	32
1.1.5. Класифікація систем сил. Метод перерізів.....	37
<i>Запитання для самоконтролю .....</i>	<i>39</i>
<b>1.2. Система збіжних сил. Визначення рівнодійної.</b>	
<b>Умови рівноваги тіла .....</b>	<b>39</b>
1.2.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної. Векторний спосіб додавання сил.....	39
1.2.2. Умова рівноваги системи збіжних сил у векторній формі .....	41
1.2.3. Проекція сили на вісь і на площину .....	42
1.2.4. Визначення сили за її проекціями .....	44
1.2.5. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь.....	45
1.2.6. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил .....	45
1.2.7. Умови рівноваги системи збіжних сил .....	46
1.2.8. Методика розв'язування задач статички. Приклади .....	47
<i>Запитання для самоконтролю .....</i>	<i>51</i>
<b>1.3. Теорія моментів і пар сил на площині .....</b>	<b>51</b>
1.3.1. Алгебраїчний момент сили відносно центра (точки).....	51
1.3.2. Момент сили відносно центра як вектор .....	53
1.3.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної збіжних сил .....	55
1.3.4. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил....	57
1.3.5. Пара сил. Момент пари сил.....	58
Властивості пари сил .....	59
Теорема про еквівалентність пар сил.....	61
Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил на площині .....	62
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>63</i>
<b>1.4. Плоска система довільних сил. Додавання сил і умови рівноваги.....</b>	<b>63</b>

1.4.1. Система сил, довільно розміщених на площині. Теорема про паралельне перенесення лінії дії сили.....	63
1.4.2. Зведення плоскої системи довільних сил до заданого центра. Основна теорема статички .....	64
1.4.3. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил.....	66
1.4.4. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи паралельних сил .....	68
1.4.5. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил.....	69
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	71
<b>1.5. Розрахунок системи із декількох тіл .....</b>	<b>71</b>
1.5.1. Зосереджені сили і розподілені навантаження .....	71
1.5.2. Статично визначені і статично невизначені задачі .....	72
1.5.3. Рівновага системи із декількох твердих тіл .....	73
1.5.4. Методика і приклади розв'язування задач на рівновагу системи тіл .....	73
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	74
<b>1.6. Розрахунок плоских ферм.....</b>	<b>75</b>
1.6.1. Характеристика ферм. Порядок розрахунку .....	75
1.6.2. Метод вирізування вузлів.....	76
1.6.3. Метод Ріттера (метод перетину).....	79
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	81
<b>1.7. Тертя ковзання і тертя кочення.....</b>	<b>100</b>
1.7.1. Рівновага тіла з урахуванням тертя. Сили тертя ковзання .....	82
1.7.2. Кут і конус тертя ковзання.....	82
1.7.3. Рівновага тіла на похилій площині .....	86
1.7.4. Тертя кочення .....	87
1.7.5. Тертя нитки і шорсткої циліндричної поверхні.....	88
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	91
<b>1.8. Просторова система сил. Момент сили відносно осі.....</b>	<b>91</b>
1.8.1. Система сил у просторі.....	91
1.8.2. Момент сили відносно осі.....	91
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	93
<b>1.9. Головний вектор і головний момент системи сил.....</b>	<b>94</b>
1.9.1. Зведення просторової системи довільних сил до центра. Головний вектор і головний момент системи.....	94

1.9.2. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи довільних сил .....	95
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	96
<b>1.10. Рівновага тіла під дією просторових систем сил</b> .....	97
1.10.1. Умови рівноваги тіла у просторі .....	97
1.10.2. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи паралельних сил .....	97
1.10.3. Методика і приклади розв'язання задач просторової системи довільних сил .....	98
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	99
<b>1.11. Центр паралельних сил і центр ваги</b> .....	100
1.11.1. Центр паралельних сил .....	100
1.11.2. Координати центра паралельних сил .....	101
1.11.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії .....	103
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	106
1.11.4. Способи визначення координат центра ваги тіла .....	106
1.11.5. Центр ваги деяких однорідних тіл .....	108
Центр ваги дуги кола .....	108
Центр ваги трикутника .....	109
Центр ваги сектора .....	110
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	110
<b>КІНЕМАТИКА</b>	
<b>1.12. Вступ. Кінематика матеріальної точки</b> .....	111
1.12.1. Предмет кінематики .....	111
1.12.2. Основні положення кінематики точки .....	113
1.12.3. Способи задання руху матеріальної точки. Векторний спосіб .....	114
1.12.4. Координатний спосіб завдання руху точки .....	117
Траєкторія точки .....	118
Швидкість точки .....	119
Прискорення точки .....	119
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	120
1.12.5. Натуральний спосіб задання руху матеріальної точки .....	120
1.12.6. Зв'язок між координатним і натуральним способами .....	122
1.12.7. Натуральний тригранник і натуральні осі координат .....	123
1.12.8. Кривина кривої .....	124
1.12.9. Прискорення точки в натуральних осях координат .....	125

1.12.10. Окремі випадки руху матеріальної точки.....	129
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	132
<b>1.13. Кінематика твердого тіла</b> .....	132
1.13.1. Поступальний рух твердого тіла .....	132
1.13.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.	
Закон обертального руху.....	134
Кутова швидкість і кутове прискорення обертового тіла.....	135
Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі.....	136
Розподіл лінійних швидкостей і прискорень точок обертового тіла.....	138
Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла.....	140
Векторний вираз лінійної швидкості точки обертового тіла. Формула Ейлера .....	141
Передача обертального руху.....	144
Методика і приклади розв'язування задач .....	145
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	146
1.13.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла.....	146
Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи.....	147
Аналітичні дослідження плоскопаралельного руху тіла .....	148
Визначення швидкостей точок плоскої фігури .....	149
Визначення прискорень точок плоскої фігури .....	150
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	152
Миттєвий центр швидкостей .....	152
Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей .....	153
Визначення швидкостей точок фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей.....	154
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	156
<b>1.14. Складний рух матеріальної точки</b> .....	156
1.14.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи точки .....	156
1.14.2. Теорема про додавання швидкостей точки .....	157
1.14.3. Теорема Коріоліса про додавання прискорень точки .....	158
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	160
Модуль і напрям прискорення Коріоліса .....	160
1.14.4. Методика розв'язання задач і приклад на	

складний рух точки.....	163
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	165
<b>ДИНАМІКА</b>	
<b>1.15. Динаміка матеріальної точки</b> .....	166
1.15.1. Вступ. Задачі динаміки. Динаміка вільної матеріальної точки.....	166
1.15.2. Закони динаміки матеріальної точки .....	168
1.15.3. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки ...	174
1.15.4. Дві задачі динаміки матеріальної точки .....	175
1.15.5. Інтегрування диференціальних рівнянь руху вільної точки ..	177
1.15.6. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки	182
1.15.7. Принцип д'Аламбера для невільної матеріальної точки .....	183
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	185
1.15.8. Коливання матеріальної точки .....	186
1.15.9. Кінематика гармонічних коливань.....	186
1.15.10. Класифікація коливань .....	187
1.15.11. Динаміка коливань. Вільні коливання матеріальної точки ..	188
1.15.12. Згасаючі коливання матеріальної точки .....	192
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	195
1.15.13. Змушені коливання точки без урахування опору .....	196
1.15.14. Явище механічного резонансу.....	198
1.15.15. Змушені коливання точки з урахуванням в'язкого тертя .....	200
1.15.16. Загальні властивості змущених коливань .....	204
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	204
<b>1.16. Матеріальна система. Геометрія мас</b> .....	204
1.16.1. Маса і центр мас матеріальної системи. ....	205
1.16.2. Моменти інерції матеріальної системи (тіла) .....	205
1.16.3. Радіус інерції тіла.....	207
1.16.4. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей .....	207
1.16.5. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми.....	208
1.16.6. Відцентрові моменти інерції тіла .....	209
1.16.7. Момент інерції тіла відносно довільної осі, що перетинає задану точку .....	210
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	212
<b>1.17. Рух центра мас матеріальної системи</b> .....	212
1.17.1. Класифікація сил і їхні властивості .....	212



1.17.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи .....	213
1.17.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи.....	214
1.17.4. Закон збереження руху центра мас .....	215
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	216
<b>1.18. Основні (загальні) теореми динаміки .....</b>	<b>216</b>
1.18.1. Міри механічного руху і міри дії сил.....	217
1.18.2. Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи....	217
1.18.3. Імпульс сили .....	218
1.18.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки .....	219
1.18.5. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи .....	220
1.18.6. Закон збереження кількості руху матеріальної системи.....	221
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	221
<b>1.19. Момент кількості руху матеріальної точки і кінетичний момент системи.....</b>	<b>221</b>
1.19.1. Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі .....	221
1.19.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і закон його збереження.....	223
1.19.3. Кінетичний момент системи відносно центра і осі .....	224
1.19.4. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання ....	225
1.19.5. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи і закон його збереження.....	225
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	227
<b>1.20. Динаміка твердого тіла. ....</b>	<b>227</b>
1.20.1. Основні задачі. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла .....	227
1.20.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла ..	228
1.20.3. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла.....	230
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	232
<b>1.21. Робота і потужність сили .....</b>	<b>232</b>
1.21.1. Елементарна робота сили .....	232
1.21.2. Робота сили на кінцевому переміщенні. Потужність сили ....	233
1.21.3. Теорема про роботу рівнодійної сили.....	235
1.21.4. Робота сили в окремих випадках.....	236
Робота сили ваги .....	236
Робота лінійної сили пружності .....	237
Робота і потужність сили, прикладеної до обертового тіла ...	238

<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	239
<b>1.22. Кінетична енергія матеріальних точки і системи</b> .....	239
1.22.1. Визначення кінетичної енергії. Теорема Кьоніга .....	239
1.22.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки .....	241
1.22.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла .....	243
1.22.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи .....	244
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	247
<b>1.23. Кінетостатика невільної матеріальної системи</b> .....	247
1.23.1. Принцип д'Аламбера для матеріальної системи .....	247
1.23.2. Зведення сил інерції системи матеріальних точок до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції .....	249
1.23.4. Визначення динамічних реакцій підшипників .....	253
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	255
<b>Список літератури</b> .....	256

## ЧАСТИНА II. ОСНОВИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

<b>2.1. Вступ. Основні положення</b> .....	252
2.1.1. Задачі опору матеріалів.....	252
2.1.2. Методи опору матеріалів і моделі об'єктів дослідження .....	253
2.1.3. Класифікація зовнішніх сил, діючих на конструкцію .....	255
2.1.4. Поняття про деформацію. Метод перерізів.....	255
2.1.5. Основні типи деформацій.....	257
2.1.6. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів .....	259
2.1.7. Поняття про напруження у перерізі .....	260
<b>2.2. Центральний розтяг і стиск</b> .....	261
2.2.1. Визначення напружень на площадках, перпендикулярних до осі стрижня.....	261
2.2.2. Деформації при розтягу і стиску стрижня. Закон Гука. Коефіцієнт Пуассона .....	265
2.2.3. Експериментальне дослідження розтягу і стиску матеріалів. Діаграма напружень .....	268
2.2.4. Допустимі напруження.....	272
2.2.5. Розрахунок міцності стрижнів при розтягу і стиску... ..	273
2.2.6. Вплив власної ваги на деформацію стрижня .....	276
2.2.7. Розрахунок ідеальної (гнучкої) нитки.....	279
2.2.8. Напруження у стрижнях при зміні температури .....	280
2.2.9. Деформація зминання .....	281
<b>2.3. Деформація зсуву</b> .....	283
2.3.1. Дотичні напруження .....	283
2.3.2. Розрахунок на міцність при деформації зсуву .....	284

2.3.3. Закон парності дотичних напружень .....	286
2.3.4. Закон Гука при деформації зсуву .....	287
2.3.5. Напруження в похилих перерізах при лінійному напруженому стані .....	289
2.3.6. Напруження в похилих перерізах при плоскому напруженому стані.....	291
2.3.7. Про теорії міцності і руйнування .....	293
<b>2.4. Деформація кручення .....</b>	<b>295</b>
2.4.1. Відомості про деформацію кручення .....	295
2.4.2. Епюри крутильних моментів.....	297
2.4.3. Закон Гука при крученні. Напруження і деформації	299
2.4.4. Розрахункові формули на міцність і жорсткість при крученні .....	303
2.4.6. Потенціальна енергія деформації при крученні .....	306
<b>2.5. Плоский згин прямого бруса .....</b>	<b>307</b>
2.5.1. Загальні поняття про деформацію згину. Навантаження і типи опор балок.....	307
2.5.2. Визначення згинальних моментів і поперечних сил.....	309
2.5.3. Теорема про диференціальну залежність між згинальним моментом і поперечною силою .....	311
2.5.4. Побудова епюр згинальних моментів і поперечних сил.....	312
2.5.5. Визначення нормальних напружень при згині .....	322
2.5.6. Розрахункова формула міцності балки на згин	327
2.5.7. Визначення дотичних напружень.....	329
2.5.8. Визначення головних напружень при згині .....	332
2.5.9. Перевірка міцності балки на згин.....	333
2.5.10. Визначення деформацій балок при згині.....	334
2.5.11. Статично невизначені балки .....	339
<b>2.6. Складні деформації .....</b>	<b>339</b>
2.6.1. Деформація косоного згину .....	339
2.6.2. Деформація згину і розтягу (стиску).....	342
2.6.3. Деформація згину і кручення .....	345
<b>2.7. Стійкість елементів конструкцій ..</b>	<b>349</b>
2.7.1. Подовжній згин .....	349
2.7.2. Формула Ейлера .....	351
2.7.3. Розрахунки стиснених стрижнів на стійкість .....	354
<b>2.8. Динамічні навантаження і напруження ..</b>	<b>358</b>
2.8.1. Деякі загальні положення .. .....	358
2.8.2. Напруження при рівноприскореному русі. ....	359
2.8.3. Розрахунок на удар. ....	360
2.8.4. Розрахунок на міцність при змінних напруженнях .....	363

---

<b>Список літератури</b> .....	366
--------------------------------	-----

## ЧАСТИНА ІІІ. ОСНОВИ КУРСУ

### ДЕТАЛІ МАШИН

<b>3.1. Основні положення</b> .....	367
3.1.1. Вимоги до машин та їх деталей.....	368
3.1.2. Відомості про машинобудівні матеріали.....	370
3.1.3. Стандартизація і взаємозамінність деталей машин.....	372
3.1.4. Нерознімні з'єднання.....	373
3.1.5. Заклепочні з'єднання .....	374
3.1.6. Зварні з'єднання .....	377
3.1.7. Клейові і інші нерознімні з'єднання .....	381
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	383
<b>3.2. Рознімні з'єднання</b> .....	384
3.2.1. Різьбові з'єднання .....	384
3.2.2. Розрахунок різьбових з'єднань.....	389
3.2.3. Шпонкові з'єднання.....	393
3.2.4. Шліцьові з'єднання.....	397
3.2.5. Клинові і штифтові з'єднання.....	399
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	402
<b>3.3. Загальні відомості про передачі</b> .....	402
3.3.1. Фрикційні передачі .....	407
3.3.2. Пасові передачі.....	411
3.3.3. Ланцюгові передачі.....	419
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	423
<b>3.4. Зубчасті передачі. Загальні відомості</b> .....	424
3.4.1. Елементи теорії зубчастого зачеплення.....	426
3.4.2. Геометрія стандартного евольвентного зубчастого зачеплення .....	429
3.4.3. Виготовлення зубчастих коліс і види їх руйнування .....	432
3.4.4. Прямозуба циліндрична передача .....	433
3.4.5. Косозубі і шевронні циліндричні передачі.....	437
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	441
<b>3.5. Просторові зубчасті передачі</b> .....	442
3.5.1. Конічні зубчасті передачі.....	442
3.5.2. Черв'ячні передачі .....	447

---

<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	455
<b>3.6. Осі, вали, муфти</b> .....	456
3.6.1. Опори валів і осей. Підшипники ковзання.....	458
3.6.2. Підшипники кочення .....	461
3.6.3. Муфти.....	467
3.6.4. Редуктори.....	473
<i>Запитання для самоконтролю</i> .....	477
<b>Список літератури</b> .....	478

---

## ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник відповідає типовій програмі навчальної дисципліни «Технічна механіка» для підготовки фахівців ОКР «Молодший спеціаліст». Матеріали посібника складаються із трьох частин, в яких висвітлюється основна тематика курсів теоретичної механіки, опору матеріалів та деталей машин. Усі ці складові технічної механіки тісно пов'язані між собою і доповнюють одна одну.

Технічна механіка розвивається у тісному зв'язку з практикою, розвитком виробництва і потребами техніки. Роль механіки в галузі сільськогосподарської техніки постійно зростає внаслідок подальшого ускладнення завдань, що пов'язані з проблемами екології, механізації і автоматизації виробничих процесів.

Основний зміст посібника з курсу «Технічна механіка» написаний на базі досвіду викладання цього предмету фахівцями Циклової комісії загально-технічних дисциплін і кафедри загально-технічних дисциплін Ніжинського агротехнічного інституту НУБіПУ. У матеріалах видання опрацьована українська технічна термінологія не тільки теоретичної і прикладної механіки, але і інших інженерно-технічних дисциплін.

Матеріал посібника відповідає сучасним вимогам до курсу технічної механіки для навчальних техніко-технологічних закладів освіти і викладений таким чином, що може бути корисним як для студентів денної та дистанційної форм навчання, які вивчають курс у повному обсязі, так і для студентів, які навчаються за скороченими програмами. Частина матеріалу призначена для самостійного опрацювання.

У кожному розділі посібника надаються приклади і контрольні запитання для самопідготовки.

Довідкові відомості, необхідні для розрахункових робіт, у посібнику не надаються. Це дозволило авторам зберегти достатню повноту викладення фізичної сутності питань, що вивчаються, з висновками розрахункових формул.

Всю потрібну широку довідкову інформацію можна отримати в наведених у списку літератури довідниках.

**Автори**

---

## ВСТУП

Основною метою вивчення дисципліни «Технічна механіка» є підготовка кваліфікованих молодших спеціалістів, здатних забезпечити самостійне розв'язання багатьох технічних задач раціональної експлуатації і обслуговуванню сучасної техніки, інженерних конструкцій, приладів і обладнання агропромислового комплексу.

Основним змістом дисципліни є дослідження законів руху фізичних об'єктів та умов їхньої рівноваги, розрахунок конструкцій і деталей машин з метою забезпечення їхньої міцності, стійкості і жорсткості в реальних умовах інженерної практики.

Матеріали посібника орієнтовані на забезпечення практичних і лабораторних занять, виконання різних видів самостійної роботи студентів. Вивчення курсу допомагає формуванню у студентів інженерного розуміння фізичної сутності роботи механізмів, умінь і навичок її оцінювати, вмінню визначати та розраховувати основні кінематичні і динамічні характеристики для керування технологічними процесами і режимами, спроможності передбачати розвиток цих процесів.

Прогрес сучасної техніки незаперечно засвідчує, що технічна механіка є актуальною в наш час не тільки як засіб інформації про основні закони природи, на підставі яких моделюються механічні процеси, але і як засіб виховання у майбутніх молодших спеціалістів навичок щодо наукових узагальнень і розвитку творчих здібностей.

Автори намагались поєднати ємність матеріалу з лаконічністю викладення. Поряд з доступністю і чіткістю викладення матеріалу особливу увагу в посібнику приділено тлумаченню основних понять і положень технічної механіки та їхнього зв'язку з реальною дійсністю та виробничо-технічною практикою.

Запитання для самоконтролю і методичні вказівки, що наводяться після кожної глави, сприятимуть після їх опрацювання засвоєнню курсу технічної механіки та застосуванню її методів в практиці.

За змістом посібник складається із трьох частин. Теоретична механіка містить статику, кінематику і динаміку; друга частина – опір матеріалів; третя частина – деталі машин.

В матеріалах посібника висвітлюються основні теоретичні положення цих розділів, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу має сприяти засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає студентам у самостійній роботі, розв'язуванні задач, виконанні лабораторно-практичних робіт. Значне місце відводиться розв'язанню практичних технічних задач, у тому числі в галузі машинобудування і приладобудування, тут наводяться оригінальні авторські розрахунки.

---

Структура розташування параграфів відповідає програмі дисципліни і загальноприйнятій схемі викладання курсу. Спочатку подаються загальні відомості про предмет висвітлення, означення, а далі викладається теорія і практичні методи їх аналізу, орієнтування студентів на самостійну роботу. Така побудова дозволяє краще розуміти фізичну сутність процесів і явищ, полегшує вивчення предмету.

Матеріали технічної механіки недостатньо повно висвітлені у вітчизняній літературі. Посібників українською мовою, які могли б задовольнити всю гаму спеціальностей технічного профілю, недостатньо. Крім того, сучасні тенденції розвитку освіти в країні викликають необхідність більш спрямованого орієнтування курсу на творчу самостійну роботу студентів і наближення його до майбутньої спеціальності. У посібнику поряд з теоретичним матеріалом наведено багато прикладів з типових задач, надається методика їх розв'язування різними способами, що має сприяти розвитку у студентів навичок моделювання реальних технічних об'єктів.

*У розділі «Статика»* у традиційному стилі викладено основні поняття механіки, аксіоми та теореми статички, розглянуто рівновагу тіл і систем тіл під дією різних систем сил і наведено умови їхньої рівноваги. Наведено методику і приклади розв'язування задач статички твердого тіла. У відповідних місцях посібника нагадуються і пояснюються відомості з векторної алгебри і векторного аналізу, що необхідно для викладення тих чи інших положень теоретичної механіки.

*Розділ «Кінематика»* складається з кінематики точки і кінематики твердого тіла для простого і складного рухів. У цьому розділі механічний рух досліджується незалежно від сил і без урахування мас тіл, тобто як чиста геометрія, як опис руху. Розділ механіки, в якому розглядаються тільки методи опису рухів, а не знаходження законів руху під дією сил, називається кінематикою. Кінематика вважається, з одного боку, вступом до динаміки, а, з другого боку, методи кінематики мають і самостійне практичне значення. Саме під впливом машинобудування кінематика і набула самостійності як розділ теоретичної механіки.

У природі не існує ні матеріальних точок, ні абсолютно твердих чи абсолютно пружних тіл, якими оперує механіка. Все це абстракції, якими користується наука за для того, щоб правильно відобразити тільки ті основні властивості реальних об'єктів, які обов'язково необхідно врахувати під час розв'язання даної конкретної задачі. Зазначені абстракції не відображають всі властивості реальних тіл, але це і не обов'язково, якщо це помітно не відбивається на характері вивчаємого явища. Застосування абстракції суттєво спрощує розв'язання будь-якої задачі. Проте, потрібно застосовувати ті абстракції, які правильно відображають тільки ті властивості реальних об'єктів, які відіграють головну роль в



---

розглянутих рухах.

Слід зауважити, що в самій теорії не можуть міститися докази правомірності застосування цих абстракцій. Тільки узгодженість теорії з дослідом слугує саме таким доказом. Тому в механіці, як і у всіх дослідних науках, під час співвіднесення теорії з дослідом визначальне слово належить останньому.

*У третьому розділі «Динаміка»* викладається динаміка матеріальної точки, твердого тіла, матеріальної системи. Розв'язується багато прикладів і задач за основних тем.

Послідовність висвітлення матеріалу, компоновка посібника, теоретичні обґрунтування основних положень, що підкріплені великою кількістю прикладів з їх розв'язками і прикладів для самостійного опрацювання, створюють необхідні передумови для успішного засвоєння матеріалу студентами.

Основним завданням навчального процесу під час вивчення технічної механіки є отримання міцних знань і творчих навичок, які широко використовуються студентами не тільки у подальшому навчанні, але і у розв'язанні технічних задач після закінчення навчання. Безперервний процес ускладнення машин, приладів і технічних пристроїв, поява нових принципів і схем технологічних процесів потребують глибокого розуміння основ технічної механіки.

Розумне наближення навчальних задач до сучасної техніки сприятиме розвитку відношення з боку студента до технічної механіки як до засадничої дисципліни. І чим ближче навчальні задачі до задач практики, тим ефективніше процес навчання.

*Друга частина* посібника присвячена «*Опору матеріалів*». Це наука про методи розрахунку елементів машин, споруд і приладів на міцність, жорсткість і стійкість. За методами опору матеріалів виконуються не тільки проектувальні розрахунки, але і проводиться перевірка міцності елементів існуючих конструкцій, визначення допустимих навантажень тощо.

Елементи конструкцій не мають працювати на межі руйнування або втрати стійкості, а повинні мати необхідний запас міцності. Недостатній запас міцності може спричинити аварію, а надмірний запас визначає недосконалість конструкції: збільшує собівартість і витрати матеріалів.

Опір матеріалів є розділом більш загальної науки про міцність, яка називається будівельною механікою, де крім того розглядається теорія пружності, теорія пластичності, будівельна механіка стрижневих систем.

Опір матеріалів тісно поєднує теорію і дослід. Для розрахунків на міцність треба досконало знати властивості матеріалу, із якого буде виготовлений елемент, що розраховується. Ці властивості вивчаються в лабораторії шляхом механічних випробувань на спеціальних машинах.

---

*Третя частина* посібника присвячена розділу «*Деталі машин*». Це завершальний етап технічної механіки, в якому використовується інформація від попередніх курсів теоретичної механіки і опору матеріалів.

Той факт, що машини складаються із деталей, не можна спростувати. Найважливішими критеріями, якими мають відповідати деталі машин є міцність, жорсткість, зносостійкість, термостійкість, вібростійкість тощо. Для забезпечення таких критеріїв необхідно правильно визначати розміри деталей і обирати відповідні матеріали. Тільки тоді деталі задовольнятимуть умови експлуатаційної надійності машин, здатність виконувати задані функції протягом розрахункового терміну експлуатації при збереженні мінімально необхідної вартості виготовлення.

Тому, від кваліфікації розраховувача безпосередньо залежить якість конструкцій машин, споруд і приладів, що експлуатуються в країні.

Досконалість конструкції деталей оцінюють за їх надійністю, економічністю і конкурентоспроможністю. Надійність – властивість виробу зберігати свою працездатність протягом заданого строку служби. Економічність визначає вартість матеріалів, витрати на виробництво і експлуатацію. Конкурентоспроможність визначається наявністю у виробі кількості новітньої наукової інформації.

Отже, *у кожній конструкції віддзеркалюються творчі здібності, знання і досвід спеціаліста*. Розвитку цих якостей у студентів і сприяє *вивчення технічної механіки*.

## ЧАСТИНА I

### ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

#### ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. СТРУКТУРА КУРСУ

**Теоретична механіка** – це природнича фундаментальна наука, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху і рівноваги матеріальних тіл і матеріальних систем.

Під механічним рухом матеріальних тіл розуміють зміну у просторі протягом часу положень одних матеріальних тіл і систем відносно іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу і є, фактично, науковою базою майже всіх галузей сучасної техніки.

Традиційно теоретична механіка ділиться на чотири основні розділи: *статику, кінематику, динаміку і аналітичну механіку.*

*Статика* вивчає умови рівноваги тіла під дією різних систем сил, умови спільної дії останніх на тіло або систему тіл, а також розробляє методи спрощення складних систем сил.

*Кінематика* вивчає *геометричні властивості руху матеріальних тіл без урахування їх мас і незалежно від діючих сил.* Цей розділ складається з кінематики точки і кінематики твердого тіла для простого і складного рухів. У цьому розділі механічний рух досліджується незалежно від сил і без урахування мас тіл, тобто як чиста геометрія, як опис руху. Підходячи до розв'язання задач механіки, необхідно перш за все розглянути методи опису рухів. Розділ механіки, в якому розглядаються тільки методи опису рухів, а не ставиться питання про знаходження законів руху під дією сил, називається кінематикою. Кінематика вважається, з одного боку, вступом до динаміки, тому що тут потрібні кінематичні залежності і закони руху, а, з другого боку, методи кінематики мають і самостійне практичне значення. Саме під впливом машинобудування кінематика і виділилась у самостійний розділ теоретичної механіки.

У природі не існує ні матеріальних точок, ні абсолютно твердих тіл, ні абсолютно пружних тіл, якими оперує теоретична механіка. Все це абстракції, якими користується наука за для того, щоб правильно відобразити ті властивості реальних об'єктів, які обов'язково необхідно

врахувати під час розв'язання даної конкретної задачі.

***Динаміка вивчає закони руху матеріальних тіл під дією прикладених сил, які цей рух спричинюють.***

Предметом теоретичної або загальної механіки є матеріальні тіла у вигляді простіших моделей, які розглядаються у зв'язку зі зміною їхнього взаємного розміщення. Теоретична механіка вивчає спільні закономірності механічного руху матеріальних тіл і механічних, силових взаємодій між ними, а також взаємодій тіл з фізичними силовими полями. Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Тому теоретична механіка належить до фундаментальних природознавчих наук. У той же час, на відміну від ряду загально-інженерних дисциплін теоретична механіка вивчає найбільш загальні властивості руху і взаємодії тіл як абстрактних моделей.

У загальнонауковому контексті механіка охоплює цілий комплекс дисциплін, що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл і середовищ. Це, наприклад, аеромеханіка, небесна механіка; теорія коливань; електродинаміка; біомеханіка, що вивчає рух і взаємодію біологічних об'єктів тощо. Теоретичні положення механіки допомагають зрозуміти життєві явища, а також передбачати їх закономірності. Отже, критерієм істинності наших знань є практика.

Теоретична механіка широко застосовує у своїх теоремах методи математики і формальної логіки, методи подібності і абстракції. Предметом її досліджень є не самі матеріальні об'єкти, а їхні еквівалентні моделі. Як відомо, розвиток науки, у тому числі і природознавчої, йде від живого спостереження до абстрактного мислення, а від останнього – до практики. Це є справжній шлях пізнання істини.

Теоретична механіка має велике значення у підготовці інженерів усіх галузей народного господарства. Вона є науковим фундаментом для вивчення таких загально-інженерних дисциплін як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, приладів і роботів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеродинаміка, гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування тощо.

Розуміння положень, методів і законів теоретичної механіки, які правильно відображають об'єктивні реалії механічних процесів, існуючих взаємозв'язків механічних рухів і перетворення енергії, дає змогу науково передбачати закономірності у нових задачах, що виникають у процесі розвитку науки, техніки і технології. Таким чином, задача механіки – відкриття, пізнання і наступне практичне застосування кількісних і якісних закономірностей механічного руху, який має місце в природі та здійснюється людиною в його практичній діяльності. Механіка збагачує людей новими методами розкриття таємниць природи, справжнього змісту

її різноманітних явищ і технічної практики.

Всесвіт – це матерія, яка закономірно і взаємопов'язано рухається у просторі і часі. Знаючи про такі зв'язки між матеріальними об'єктами світу, М.В. Ломоносов писав: «Для изучения явлений природы необходимо выпрашивать у осторожной и догадливой геометрии, советоваться с точною и замысловатою механикой, выведывать через проницательную оптику». У сучасної науки арсенал засобів дослідження явищ природи незрівнянно ширший.

Матерія вічно перебуває у неперервному русі і безперервно розвивається. Рух є основним атрибутом матерії і формою її існування. Світ є безмежними у просторі і нескінченними у часі формами існування матерії. Притаманний матерії рух є способом збереження матерії, переконливим доказом нерозривності матерії та руху, матерії та енергії, взаємозв'язку та взаємного переходу різних форм матерії. Відмінність форм руху матерії становить об'єктивну базу для окремих відповідних галузей науки, що вивчають окремі закономірності природи. Закономірності найпростішої механічної форми руху матерії вивчає механіка, проте вона має відношення до всіх явищ природи і творень техніки, до всього природознавства, тому що механічний рух тією чи іншою мірою супроводжує всі інші форми руху матерії.

Загальна механіка пронизує всі механічні процеси у мікро- і макросвіті. Вона необхідна при вивченні поведінки плазми у магнітному полі і вона становить значну частину науки про Землю, без неї неможливе проектування і будівництво. Без знання механіки неможливо провести розрахунки технологічних процесів у машинобудуванні, металургії, легкій промисловості тощо. Теоретична механіка – це частина загальної механіки, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху макроскопічних тіл.

Оскільки наукові уявлення про простір і час розвиваються у зв'язку з розвитком понять про матерію, рух і взаємодію, то з відносних уявлень про всесвіт наука поступово наближається до абсолютної істини. Наблизитись до абсолютної істини в принципі можливо, якщо наша технічна цивілізація зможе не руйнувати своїми «могутніми силами» наданий їй у тимчасове користування найдорожчий нині для нас «простір і час».

На думку І. Ньютона, засновника класичної механіки, простір існує сам по собі, незалежно від речей, і є необмеженою порожниною, абсолютним вакуумом, що має три виміри: довжину, ширину й висоту. Простір вважається нерухомим і незмінним, абсолютно проникним, який не впливає на рух тіл і сам не зазнає впливу з боку тіл, що його наповнюють. А час – це тривалість, яка існує незалежно від подій, що відбуваються, і спливає безперервно і рівномірно від минулого до майбутнього. Різні моменти часу відрізняються один від одного лише

подіями, що відбуваються в ці моменти.

Методом ідеалізації Ньютон пропонує упорядкувати уявлення про простір і час як деякі вмістища тіл, які не залежать від цих тіл та їх руху. За сучасними уявленнями цей абсолютний евклідів тривимірний однорідний та ізотропний простір і абсолютний арифметизований час лише наближено відображає реальні властивості природи. Але кількісні відхилення законів сучасної механіки від законів класичної виявляються під час руху тіл поблизу великих мас зірок або при швидкостях, близьких до швидкості світла. За багатовіковим досвідом під час руху тіл зі швидкостями, значно меншими від швидкості світла, ідеалізація Ньютоніа дає достатню для практики точність як перше наближення до реального простору і часу. Тому класична механіка є надійним фундаментом і апаратом для теоретичних і практичних висновків сучасної науки і техніки.

Традиційно склалося, що за характером задач теоретична механіка поділяється на статику, кінематику, динаміку та аналітичну механіку. Такий розподіл значно полегшує вивчення механічного руху тіл і дозволяє пов'язати вивчення теоретичної механіки з іншими дисциплінами інженерно-технічних спеціальностей.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютоніа, тому вона називається ньютонівською класичною механікою, на відміну від інших напрямів у механіці як, наприклад, релятивістська механіка. Класична механіка спирається на систему аксіом, які накопичені у галузі механіки історичною практикою.

---

## СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

---

### 1.1. Предмет і задачі статички. Механічні в'язі, реакції в'язей

#### 1.1.1. Предмет статички. Основні поняття

Теоретична механіка як наука, вивчаючи певну форму руху матерії, розглядає не реальну природу з усім її різноманіттям, а ідеальні об'єкти – моделі: матеріальну точку, матеріальну систему, абсолютно тверде тіло.

Згадаємо про ці основні поняття теоретичної механіки, які добре відомі з елементарного курсу фізики. Найпоширенішою моделлю, яка відображає протяжність, тобто, геометричну форму матеріального тіла і розподіл маси у деякому геометричному об'ємі, є абсолютно тверде тіло.

*Абсолютно тверде тіло* – це матеріальне тіло, в якому в процесі взаємодії з іншими тілами відстані між двома довільними точками не змінюються, тобто, деформації тіла під дією сил вважаються малими і можуть не враховуватися.

Розглядаючи матеріальні тіла як абсолютно тверді, можна значно спростити дослідження умов взаємодії цих тіл, а також умов збереження свого початкового механічного стану. Ця модель є достатньо досконалою лише для вивчення окремого випадку руху тіла – стану спокою, оскільки рух окремих точок тіла у загальному випадку не однаковий. Тому доводиться починати дослідження руху з найбільш простої моделі – матеріальної точки.

*Матеріальна точка* – це матеріальне тіло певної маси, розмірами і формою якого, вивчаючи його рух, можна знехтувати в умовах певної задачі.

Чи можливо розглядати заданий об'єкт як матеріальну точку, визначається не розмірами цього об'єкта, а ступенем ідеалізації і властивостями руху. Так, рух планет сонячної системи відносно і навколо Сонця можна розглядати як рух взаємопов'язаних точок, що доведено багаторічною практикою астрономів.

*Система матеріальних точок (матеріальна система)* – це сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємозумовлені.

Матеріальні системи або механічні системи, можуть бути змінними і незмінними. У змінній системі відстані між точками в процесі руху або спокою можуть змінюватися.

У незмінній системі взаємне розміщення точок під час її руху або

спокою зберігається. Оскільки кожне матеріальне тіло є системою матеріальних точок, то абсолютно тверде тіло є незмінною системою точок, які безперервно заповнюють деяку частину простору.

Вивчення руху рідини, газів, повітряних потоків, а також механічного руху тіл, який суттєво залежить від їхньої деформації, ґрунтується на такій абстракції, як *суцільне середовище*. Найпростішим прикладом суцільного середовища є модель абсолютно твердого тіла. Більш загальний образ суцільного середовища об'єднує пружні, рідинні, газові та інші тіла. Серед таких моделей можна відзначити *абсолютно пружне тіло, пластичне тіло, ідеальну рідину, в'язку рідину*.

### **1.1.2. Задачі статички. Основні визначення**

Перш, ніж вивчати перший розділ теоретичної механіки – статику, сформулюємо задачі статички:

- визначення умов рівноваги тіл під дією різних систем сил як на площині, так і у просторі;
- розробка методів перетворення довільних векторних систем сил з метою їх спрощення і заміни найменшою кількістю силових факторів.

В основу цього розділу механіки покладено аксіоми статички, які розглянемо далі. А зараз зупинимося на основних поняттях статички, серед яких одним із головних є поняття сили, а також – на деяких визначеннях.

Дослідами доведено, якщо рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку відхиляється від рівномірного і прямолінійного руху, то ця точка взаємодіє з навколишніми тілами

*Сила, прикладена до конкретного тіла, – це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, інтенсивність і напрямок взаємодії.*

З цього класичного визначення сили і з спостережень випливає, що *сила* є величиною векторною, а тому має *три* визначальних *параметри*: чисельне значення або *величина* сили (модуль), *напрямок* дії у просторі і *точку прикладання*. Дія сили на точку залежить від напрямку сили і від чисельного значення сили.

Напрямок сили визначається тим напрямком, за яким починає рухатися точка, що була у стані спокою, якщо до неї прикладається сила. Чисельне значення сили (модуль сили) є величиною, що дорівнює добутку маси точки на модуль прискорення, яке надає тілу ця сила (закон Ньютона).

*Взаємодія* означає *залежність руху* однієї частки матерії *від руху* і наявності *інших часток* матерії. Це перше, що виступає перед нами, коли ми розглядаємо рухому матерію загалом. Фізичні властивості простору і часу, пов'язані з фізичними полями, не враховуються в початкових уявленнях класичної механіки про простір і час у тій формі, в якій вона



## Частина перша

реалізується в реальному світі. Класична механіка не розглядає фізичних причин впливу матерії на рух і тому вводить ще одну ідеалізацію – **силову взаємодію**. Заслугою І. Ньютона є те, що він поклав в основу механіки кількісні закони дії сил незалежно від їхньої фізичної природи. Лише механічний ефект взаємодії між матеріальними тілами пов'язаний зі зміною кінематичного стану тіл.

На розрахункових силових схемах **силу зображують у вигляді вектора** довільної довжини (крім випадків графічної статистики, де силу креслять у масштабі). Покажемо, наприклад, (рис. 1.1) довільну силу  $\vec{F}$ , зображену вектором  $\overline{AB}$  і прикладену у точці  $A$ , яка діє вздовж лінії дії сили  $MN$ .

У Міжнародній системі одиниць (СІ) одиницею вимірювання сили є ньютон (Н) або кілоньютон (кН). Один ньютон – це така величина сили, яка тілу масою 1 кг надає прискорення  $1 \text{ м с}^{-2}$ .

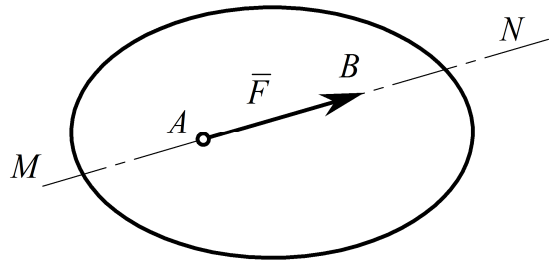


Рис. 1.1

**Зосереджені сили** – це сили, що **прикладаються** до тіла у будь-якій окремій його **точці**. **Сили**, що діють **на всі точки** цієї частини поверхні або об'єму тіла, називаються **розподіленими**.

Поняття зосередженої сили є умовним: практично неможливо прикласти силу в одній точці. Зосереджені сили є, фактично, рівнодійними деяких систем розподілених сил. Наприклад, сила ваги твердого тіла прикладається у центрі ваги рівнодійною сил ваги окремих частинок тіла.

**Система сил** – це **сукупність декількох сил**, які діють на це тіло або матеріальну систему одночасно. Окремі сили системи сил – **складові** цієї системи.

**Еквівалентні системи сил** – це такі системи сил, які в разі заміни на таку саму іншу **не порушують** кінематичного **стану тіла**. Еквівалентність систем означає, що ці системи викликають однаковий кінематичний стан тіла. Якщо система сил еквівалентна нулю, то така система називається **зрівноваженою системою сил**.

**Рівнодійна сила системи сил** – це така сила, **дія якої еквівалентна** дії заданої **системи сил**  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ .

$$\vec{R} \Leftrightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n).$$

**Зрівноважувальна сила** – це сила, яка за величиною **дорівнює** **рівнодійній силі**, розміщена з нею на одній прямій, але **протилежна за напрямом**.

### 1.1.3. Аксиоми статички

В основу статички покладено аксиоми, тобто, деякі твердження, що приймаються без доведення, тому що вони підтверджені багатовіковою практичною діяльністю, дослідями і спостереженнями. В аксіомах статички про сили відображено властивості сил, що діють на тверде тіло.

#### Перша аксіома (про дві сили)

Абсолютно тверде **тіло** перебуває в **рівновазі** під дією двох сил, якщо вектори цих сил **рівні за модулем** (числовим значенням), спрямовані на одній прямій у протилежних напрямках.

Це аксіома про дві сили, які є найпростішою системою зрівноваженої системи сил. На рис. 1.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , які мають однакові модулі  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ , розміщені на одній прямій  $MN$  і мають протилежні напрямки. Точки прикладання сил можуть збігатися. Таким чином,  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . Ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла. У разі деформованого твердого тіла вона не завжди справедлива.

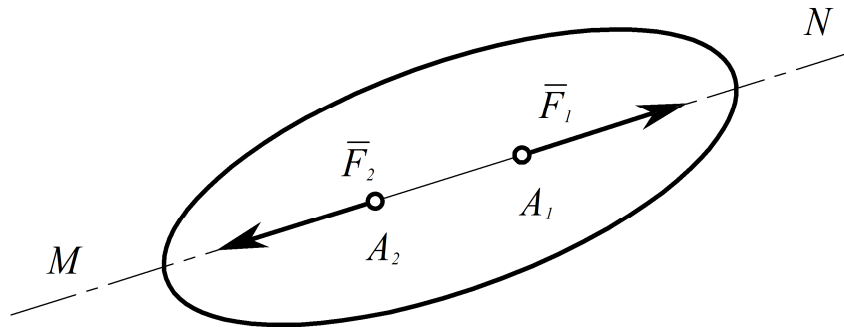


Рис. 1.2

#### Друга аксіома (про виключення сил).

Первісний стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил.

Систему зрівноважених сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  показано на рис. 1.2. Ця аксіома носить назву аксиоми виключення сил. Аксиома надає можливість побудови еквівалентних систем сил, вводячи поняття **векторного нуля** як простішої системи двох рівних за величиною і протилежних за напрямком сил, якою користуються під час доведення теорем.

#### Наслідок

Дія сили на тіло не зміниться, якщо точку прикладання сили перенести в іншу довільну точку вздовж лінії дії сили в межах цього тіла.

## Частина перша

Наслідок з двох перших аксіом інформує, що **вектор сили є ковзним вектором**, тобто точка його прикладання може бути перенесена в іншу довільну точку вздовж лінії дії сили без порушення рівноваги. Доведемо це твердження.

Припустимо, що на тіло (рис. 1.3) діє вектор сили  $\vec{F}_1$ , який прикладений в точці  $A$  і має лінію дії  $MN$ . Прикладемо в довільній точці  $B$  на лінії дії  $MN$  дві рівні за модулем сили  $\vec{F}_2$  і  $\vec{F}_3$ , такі, що  $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$ , а  $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1$ . Згідно з першою аксіомою ці сили зрівноважені, а згідно з другою – їх можна приєднати, не змінюючи кінематичного стану тіла.

Але цю систему трьох сил можна розглядати по-іншому: як силу  $\vec{F}_2$ , яка дорівнює силі  $\vec{F}_1$  і перенесена з точки  $A$  в точку  $B$ , і зрівноважену систему двох сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_3)$ , яку можна відкинути. Наслідок доведений.

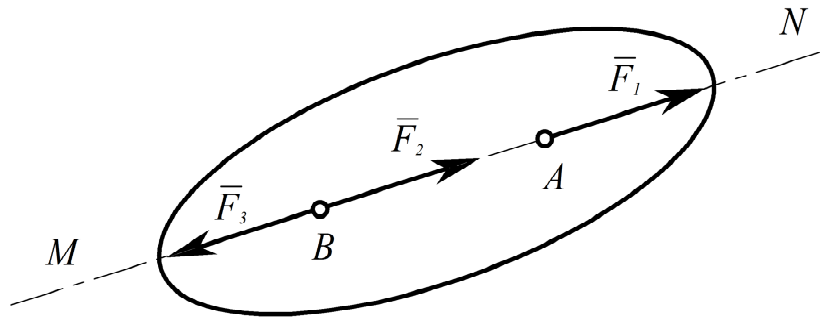


Рис. 1.3

**Третя аксіома** (про паралелограм сил).

*Рівнодійна двох непаралельних сил, прикладених до тіла в одній точці, визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах і прикладена в точці їх перетину.*

Припустимо, що до тіла (рис. 1.4) у точці  $A$  прикладені дві непаралельні сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ .

Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку  $A$  діагональ, яка і буде рівнодійною  $\vec{R}_{1,2}$  цих сил.

Таким чином, третя аксіома статки дає можливість геометрично, векторно додати дві сили, що прикладені в одній точці, тобто, визначає модуль, точку прикладання і

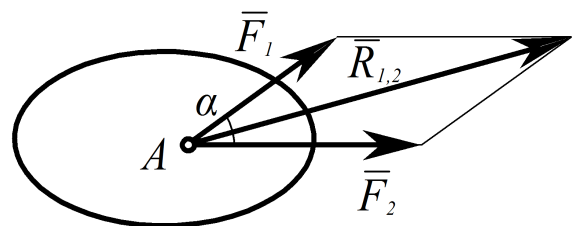


Рис. 1.4

напрямок рівнодійної як векторної суми двох сил.

$$\overline{R}_{1,2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \quad (1.1)$$

Заміна двох сил однією рівнодійною силою за правилом паралелограма називають **векторним додаванням** сил.

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто, модуль рівнодійної, визначається за допомогою теореми косинусів

$$R_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

Пропонується самостійно визначити рівнодійну, якщо сили прикладено в одній точці і розміщено під прямим кутом, а також, якщо вони збігаються за напрямком або спрямовані у протилежні боки.

Більш зручним способом визначення модуля і напрямку рівнодійної сили відносно до прямокутних осей координат для кількості сил більше за дві є аналітичний метод проєкцій, який розглядається далі.

#### **Четверта аксіома (про дію і протидію).**

Ця аксіома носить назву аксіоми про рівність дії і протидії і є одним із основних законів механіки. Ньютон сформулював її так: «будь-якій силі дії є рівна, але протилежна сила протидії». У статичці цю аксіому застосовують для твердих тіл, які контактують шляхом стикання або на відстані за допомогою силових полів.

|| *Сили взаємодії, з якими два тіла діють одне на одне, дорівнюють за модулем, спрямовані вздовж спільної прямої у протилежні сторони.*

Слід зазначити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, вони не утворюють зрівноважену систему сил, тому що вони прикладені до різних тіл або до різних точок одного і того самого тіла, що взаємодіють одна з одною. Під дією цих сил вільні тіла рухатимуться, віддаляючись чи наближаючись одне до одного.

#### **П'ята аксіома (принцип затвердіння).**

|| *Якщо деформоване (нетверде) тіло перебуває у стані рівноваги під дією системи сил, то цей стан не порушиться, якщо, не змінюючи форми, розмірів і положення цього тіла у просторі, подати його у вигляді відповідного абсолютно твердого тіла.*

Ця аксіома має назву принципу *затвердіння* і дає змогу розв'язувати задачі статички гнучких тіл (нитка, трос, пас, канат, ланцюг тощо) методами статички твердого тіла.

Із аксіоми випливає, що умови рівноваги твердого тіла є необхідними і для рівноваги деформованого тіла, але ці умови не достатні для рівноваги деформованого тіла.

Сформульовані у цьому параграфі аксіоми є тією основою, на якій

будується вся статика сил, що прикладені до твердого тіла. Аксиоми статички характеризують властивості сил, прикладених до тіла. Але вони не враховують матеріальних властивостей тіла, пов'язаних з наявністю маси чи її розподілом, що суттєво впливає під час руху тіла. У повному обсязі згадане врахування міститься в законах динаміки.

#### **1.1.4. Невільне тверде тіло. Механічна в'язь і реакція в'язі. Реакції основних типів в'язей**

У теоретичній механіці тверді тіла і матеріальні системи поділяються на вільні і невольні. **Тіло або матеріальна система вважаються вільними**, якщо вони мають можливість під дією прикладених сил рухатись у просторі в будь-якому напрямі, Це означає, що на рух тіла або системи не накладені обмеження, тобто, вони не контактують з іншими тілами або фізичними полями.

Тіло, свобода переміщення якого у просторі обмежується іншими тілами або умовами, вважається **невільним**.

**Тіла, фізичні поля або умови, які обмежують рух цього тіла і зберігаються за будь-яких сил, прикладених до твердого тіла, називаються в'язями.**

Якщо тіло невольне, то вважають, що на нього накладені в'язі. **Силова, механічна дія в'язі на це тверде тіло має назву сили реакції в'язі** (в подальшому «реакція»). Це виходить з того, що ефект дії в'язі такий самий, як і дія сили, внаслідок чого дії в'язей можна замінити відповідними силами, які і називаються **реакціями в'язей**. Слід зауважити, що за законом про дію і протидію і тіло діє на в'язь із силою, яка дорівнює реакції, але їй протилежна.

**Реакції в'язей** за своєю природою відрізняються від інших сил, які діють на тіла і які прийнято називати **активними**. Ця різниця полягає у тому, що реакція в'язі не завжди визначається самою в'яззю, її модуль, а іноді і напрямок залежить ще і від інших сил, що діють на систему.

Активні ж сили, діючи на систему у стані спокою, можуть надати їй той чи інший рух. Реакції в'язей цією властивістю не володіють, внаслідок чого їх називають **пасивними силами**.

Напрямок сили реакції в'язі збігається з тим напрямком, за яким в'язь перешкоджає переміщенню тіла (якщо таких напрямків декілька, то напрямок реакції визначається залежно від характеру активних сил). У загальному вигляді встановити напрям вектора реакції на підставі лише геометричних властивостей поверхонь тіл і опор неможливо. Тому потрібно розглядати деякі окремі випадки в'язей, що частіше зустрічаються на практиці і під час розв'язування задач. У статичці розглядаються найпростіші в'язі у формі різних твердих і гнучких тіл. Розглянемо основні типи в'язей як розрахункові моделі, які зустрічаються

під час розв'язання задач механіки. Кожна з цих в'язей має свою назву, умовне графічне зображення і свої реакції.

1. **Ідеально гладенька поверхня** (рис. 1.5 а) перешкоджає поступальному переміщенню тіла у середину поверхні за нормаллю до неї, на самій же поверхні тіло може ковзати. Реакція цієї в'язі  $\bar{R}$  спрямована перпендикулярно до поверхні в точці дотику, вздовж нормалі у бік від поверхні до тіла. **Гладенька поверхня накладає одну в'язь**: вона унеможливорює рух за нормаллю до поверхні, тому реакція спрямована проти напрямку втраченого переміщення внаслідок накладання в'язі. Якщо гладенька поверхня сферична (рис. 1.5 б), то реакція  $\bar{R}_A$  прямує крізь центри сфер  $O$  і  $O_1$  вздовж нормалі  $n$  (перпендикулярно до дотичної  $\tau$ ).

2. **Точкова опора** (рис. 1.5 в). Якщо гладенька площина вироджується у лінію або точку, то реакції в'язей  $\bar{R}_A$  і  $\bar{R}_B$  спрямовані вздовж перпендикуляра до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в цій точці.

3. **Шарнірно-нерухома опора** або нерухомий циліндричний шарнір (підшипник) (рис. 1.5 г) перешкоджає переміщенню тіла у площині, що є перпендикулярною до осі шарніра. Реакція шарнірно-нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і заздалегідь невідома за напрямком.

Невідомий вектор реакції у разі аналітичного визначення уявляється двома складовими вздовж осей координат  $\bar{R}_x$  і  $\bar{R}_y$ . Зрозуміло, що ця опора накладає дві в'язі: перешкоджає вертикальному і горизонтальному переміщенням, а тому і потребує двох складових реакції у заданій площині.

4. **Шарнірно-рухома опора** або коток (рис. 1.5 д).

Реакція цієї в'язі  $\bar{R}$  спрямована перпендикулярно до площини, якою рухається коток або перпендикулярно до площини встановлення шарніра.

5. **Жорстке закріплення** (глухе защемлення) перешкоджає поступальному лінійному переміщенню за будь-яким напрямком і повороту тіла відносно будь-якої осі у загальному випадку.

Реакція цієї в'язі для плоскої системи (рис. 1.5 е) уявляється двома складовими вектора сили  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$  і реактивної пари сил з моментом  $M_R$ . Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: вона перешкоджає вертикальному і горизонтальному лінійним переміщенням і повороту навколо осі, перпендикулярній площині рисунка.

6. **Ідеальний стрижень** – це жорсткий однорідний невагомий тонкий стрижень, на кінцях якого встановлено точкові шарніри, розмірами яких можна знехтувати (рис. 1.5 ж).

Реакція цієї в'язі  $\bar{R}$  спрямована вздовж прямої, що з'єднує центри кінцевих шарнірів стрижня і прикладена у центрі шарніра за напрямком: від вузлів (точок  $A$  і  $B$ ), якщо стрижень розтягнутий, і до вузлів, якщо стрижень стиснутий.

**Частина перша**

7. **Ідеальна нитка** – це невагома нерозтяжна нитка, в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 1.5 з).

Ця **в'язь є однобічною** і працює тільки за умови розтягу.

Реакція цієї в'язі  $\bar{T}$  заважає поступальному переміщенню тіла від точки підвісу, тому вона спрямована вздовж нитки від тіла і прикладена у точці  $A$  закріплення нитки.

У пасовій передачі (рис. 1.5 з) натяги в її гілках  $\bar{T}_1$  і  $\bar{T}_2$  є реакціями гнучкої в'язі.

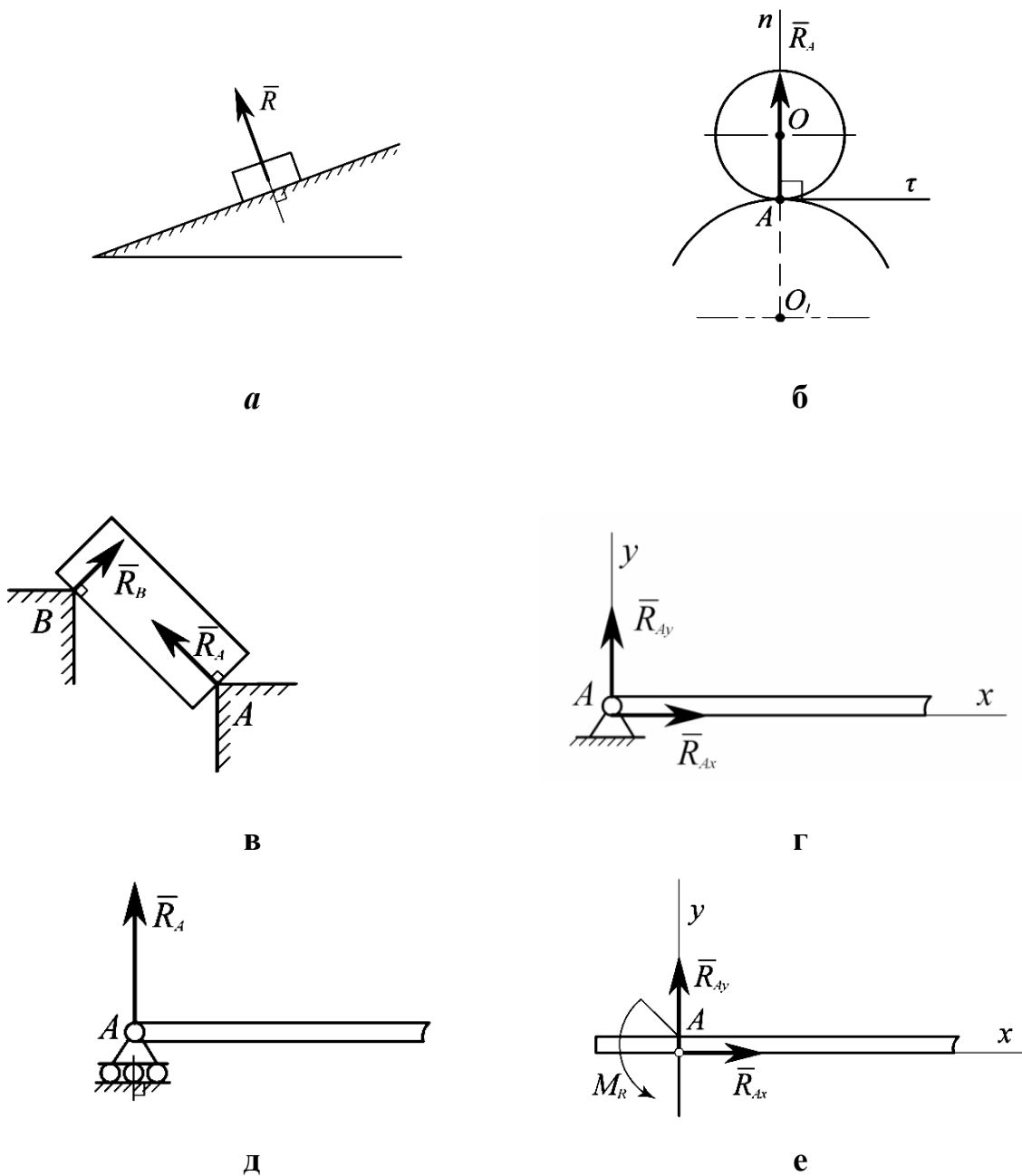
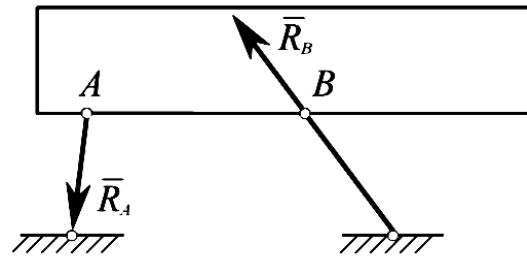
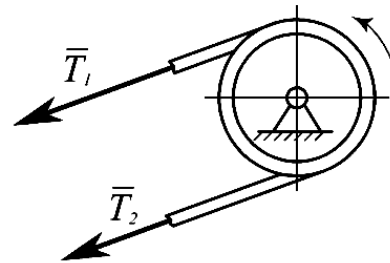
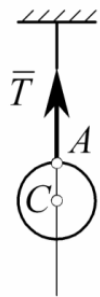


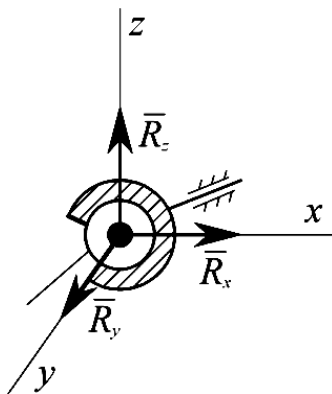
Рис. 1.5



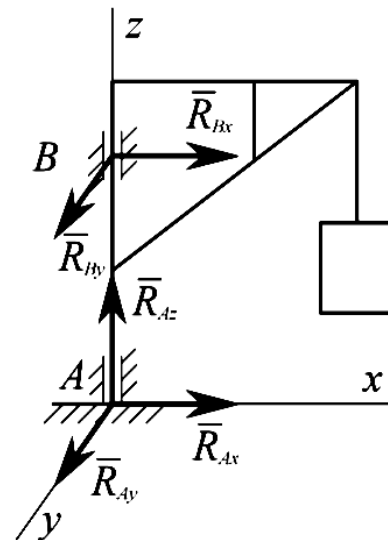
Ж



З



И



К

Рис. 1.5 (продовження)

8. *Просторовий сферичний шарнір* або його окремий випадок – *підп'ятник* (рис. 1.5 и, к).



## Частина перша

Ця в'язь забезпечує нерухомість центра сфери або опорного центра підп'ятника, тому у випадку ідеально гладких поверхонь вектори реакції прикладені у згаданих центрах, але напрямок цих векторів невідомий.

Відповідні реакції цих в'язей зображуються трьома складовими  $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ , спрямованими вздовж осей прямокутної просторової системи декартових координат  $x$  у  $z$  з початком у центрі сферичного шарніра або центрі підп'ятника.

9. **Криволінійний стрижень** (рис. 1.6). Наприклад, тіло зв'язано з опорою в точці  $A$  криволінійним стрижнем. Конструкцію цієї невагомої в'язі, яка може бути криволінійною з двома зовнішніми точковими шарнірами на кінцях, можна розглядати як стрижень, напрямок реакції якого  $\vec{S}$  проходить вздовж прямої, що з'єднує точкові шарніри  $A$  і  $B$ .

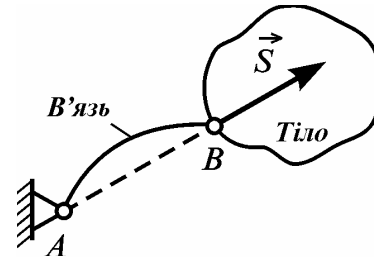


Рис. 1.6

10. **Просторове жорстке закріплення**. На відміну від плоскої системи (рис. 1.5 е) у випадку просторової задачі (рис. 1.7) вектор реакції жорсткого закріплення (защемлення)  $\vec{R}_A$  подають трьома складовими відносно просторової системи координат, а вектор-момент реактивної пари  $\vec{M}_p$  – трьома відповідними складовими на ті самі осі.

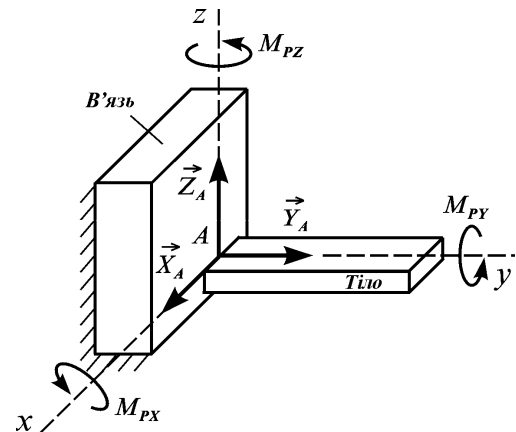


Рис. 1.7

Зауважимо, що ідеальною називають в'язь, лінія дії реакції якої відома (гладенька поверхня, невагомі мотузок і стрижень, коток тощо). У зв'язку з розгляданням поняття в'язей вводиться шоста і сьома аксіоми статички, які носять назви аксіоми про звільнення від в'язей і аксіоми про накладення нових в'язей.

**Шоста аксіома** (про звільнення від в'язей).

*Первісна рівновага невіЛЬНОГО матеріального тіла не порушиться, якщо відкинути фізичні в'язі, накладені на тіло, і замінити їх дію силами реакцій в'язей.*

Проілюструємо аксіому на прикладі (рис. 1.8 а). Згідно з цією аксіомою дане невіЛЬНО тіло (наприклад, брус вагою  $\vec{G}$ ), що перебуває під дією прикладеної до нього активної сили (сила ваги  $\vec{G}$ , яка прикладена в центрі ваги точці  $C$ ) і накладених в'язей (горизонтальна площина в точці

А, вертикальна стінка в точці  $B$  і вертикальний трос у точці  $D$ ) можна розглядати як вільне, якщо відкинути накладені в'язі (опори, троси, тобто, фізичні конструкції) і прикласти реакції цих відкинутих в'язей, рисунок 1.8б (реакції опор  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  і натяг тросу  $\bar{T}$ ), а потім вже застосовувати до тіла закони і методи теоретичної механіки.

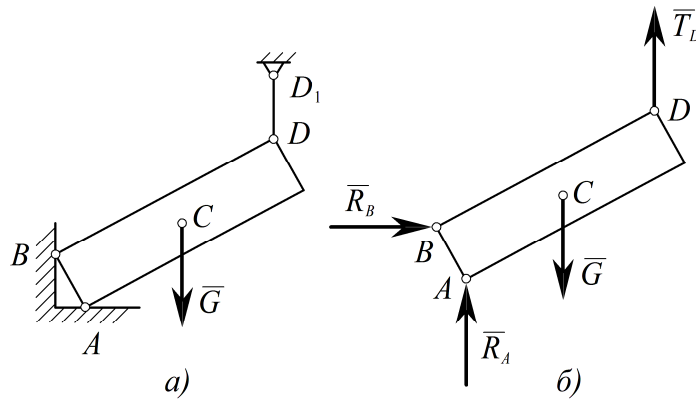


Рис. 1.8

### Сьома аксіома (про накладання нових в'язей)

Рівновага невільного матеріального тіла не порушиться, якщо на нього накласти нові в'язі.

### 1.1.5. Класифікація систем сил. Метод перерізів

За характером розміщення всі системи сил, прикладені до одного тіла або системи тіл, можна поділити на плоскі і просторові системи сил. Плоска система сил відрізняється тим, що вектори всіх сил розміщені тільки в одній заданій площині. У просторовій системі сил вектори сил розміщуються як завгодно у просторі.

Крім того, кожна з цих систем сил може бути поділена на систему збіжних сил, систему паралельних сил і систему довільних сил. Зробимо такі визначення:

– **система збіжних сил** (пучок сил) на площині або у просторі, прикладена до твердого тіла, характеризується тим, що **лінії дії** усіх сил **перетинаються в одній точці** (центрі пучка);

– **система паралельних сил** на площині або у просторі: лінії дії всіх сил паралельні;

– **система довільних сил** на площині і система довільних сил у просторі: **лінії дії сил розміщені як завгодно** на площині або у просторі.

Отже, можна констатувати, що маємо **шість** різних **систем сил**, беручи до уваги як плоску, так і просторову системи сил, під дією яких тіло може перебувати у стані рівноваги або рухатись за певним законом.

За характером дії сил, незважаючи їх фізичне походження, у теоретичній механіці існує ще два способи класифікації сил.

## Частина перша

Згідно з першим способом, розрізняють сили активні або задані і реакції в'язей.

*Активними* називають сили, які викликають як прискорення точок системи, так і реакції в'язей.

Другий спосіб полягає у поділі всіх сил на зовнішні і внутрішні сили щодо системи.

*Зовнішніми* називають сили, з якими точки, що входять до матеріальної системи, взаємодіють з тілами, які системі не належать.

*Внутрішніми* називають сили взаємодії між точками однієї системи.

Наведені класифікації сил існують незалежно одна від одної. Так, наприклад, у невіільній системі реакції в'язей є внутрішніми силами. Внутрішні сили взаємодії двох зарядів, якщо їх розглядати разом, – активні сили. Внутрішні сили задовольняють третій закон І. Ньютона незалежно від стану матеріальної системи:

*Взаємодія двох матеріальних точок, що входять до системи, завжди відбувається з однаковими за величиною і протилежно напрямленими силами, які мають спільну лінію дії.*

Помилкою буде ототожнювати це з аксіомою про абсолютно тверде тіло, бо вона справджується лише для стану рівноваги одного абсолютно твердого тіла. Отже, *внутрішні сили утворюють систему сил, еквівалентну нулю.*

На підставі означень такі сили не можуть змінити кінематичний стан абсолютно твердого тіла, тому їх не можна визначити з рівнянь руху або рівноваги твердого тіла. Але визначення внутрішніх сил дуже важливе, особливо в механіці деформованих тіл. У цьому випадку застосовують метод перерізів, за допомогою якого задача визначення внутрішніх сил зводиться до визначення зовнішніх сил. Припустимо, що треба визначити внутрішні сили в шарнірі А, який з'єднує два тіла АВ і АС, що знаходяться під дією зовнішніх сил  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$  (рис. 1.9 а).

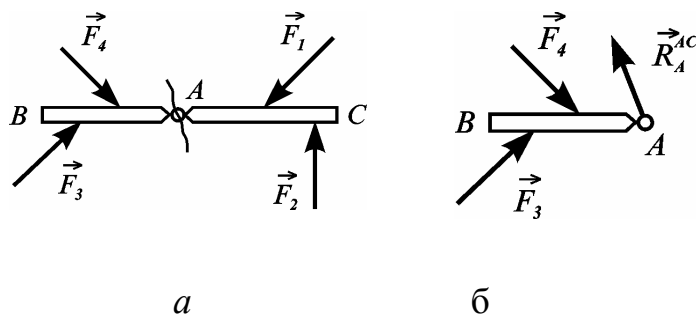


Рис. 1.9

Проведемо переріз крізь шарнір  $A$  і розглядатимемо, наприклад, тіло  $AC$  як в'язь відносно тіла  $BA$ . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, прикладемо в точці  $A$  силу реакції  $\vec{R}_A^{AC}$  відкинутого тіла  $AC$  як механічну дію відкинутого тіла на шарнір  $A$ . Тепер внутрішня сила реакції згаданого шарніра (рис. 1.9 а) стає зовнішньою силою відносно тіла  $BA$  (рис. 1.9 б) і може бути визначена звичайними методами для даної системи сил ( у цьому разі – це плоска система довільних сил).

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає теоретична механіка? Що таке механічний рух?
2. Що вивчає статика? Задачі статички.
3. У чому полягає суть понять матеріальна точка і абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Назвіть три параметри, що характеризують силу.
5. Що таке система сил? Які системи сил Ви знаєте?
6. Яка сила є рівнодійною системи сил? Як формулюються аксіоми статички?
7. Якими є поняття про простір і час у класичній механіці?
8. Що таке матеріальна система?
9. За якими умовами сила може розглядатись як ковзний вектор?
10. Як формулюється теорема про паралелограм сил?
11. Як розуміти вільне і невільне матеріальні тіла?
12. Що таке механічні в'язі і які типи в'язей Ви знаєте?
13. Що таке реакції в'язей і як вони спрямовуються?
14. Які реакції в'язей утворює жорстке закріплення у площині?
15. Які реакції утворюють під'ятник і сферичний шарнір?
16. Які реакції в'язей утворює жорстке закріплення у просторі?
17. Як спрямувати силу реакції криволінійного стрижня?
18. Чим відрізняються внутрішні сили від зовнішніх і які властивості мають перші?
19. Що таке метод перетину і як внутрішні сили перетворити у зовнішні?
20. За якими силами відбувається взаємодія двох матеріальних точок?

## 1.2. Система збіжних сил. Визначення рівнодійної.

### Умови рівноваги тіла

#### 1.2.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної.

##### Векторний спосіб додавання сил

Якщо вектори всіх сил, прикладені до твердого тіла, розміщені в одній площині або у просторі і лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву *системи збіжних сил* (пучок сил). Для ілюстрації вищезгаданого покажемо на рис. 1.10 довільне тіло, до якого прикладений просторовий пучок системи збіжних сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$ . При цьому лінії дії всіх сил перетинаються у центрі пучка точці  $A$ .

Спробуємо провести еквівалентне перетворення просторової системи збіжних сил,  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$ , зображеної на рис. 1.10, у більш просту систему. Візьмемо (умовно) дві перші сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  і на підставі третьої аксіоми статички про паралелограм сил знайдемо їх рівнодійну  $\vec{R}_{1,2}$ , для чого на векторах цих сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , як на сторонах, побудуємо

### Частина перша

паралелограм<sup>1</sup>, діагональ якого, прикладена у точці  $A$ , і є їхньою рівнодійною  $\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

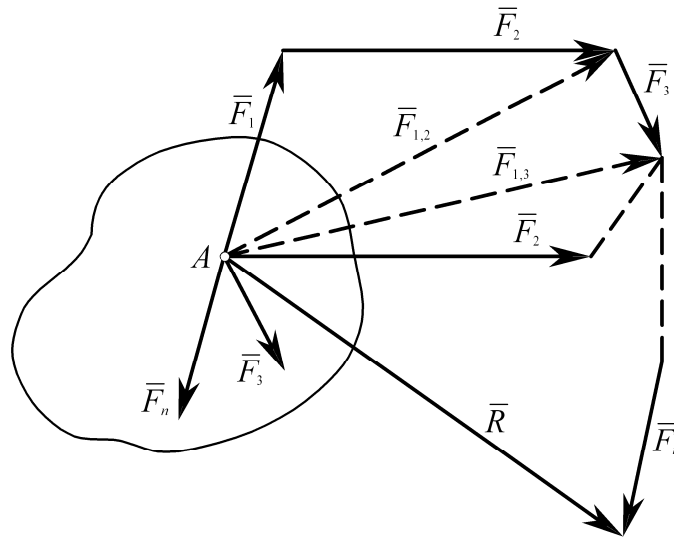


Рис. 1.10

Далі векторно додамо дві наступні сили  $\vec{R}_{1,2}$  і  $\vec{F}_3$  і на векторах цих сил, як на сторонах, побудуємо другий паралелограм, діагональ якого дорівнює

$$\vec{R}_{1,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Продовжуємо цей процес до останньої сили  $\vec{F}_n$ . Ще побудуємо паралелограм і остання діагональ буде рівнодійною  $\vec{R}$  системи заданих збіжних сил, оскільки під час перетворень системи використовувалися засоби, які не призводять до зміни кінематичного стану твердого тіла.

Якщо уважно придивитися до геометричної побудови трикутників, то можна побачити, що до кінця вектора сили  $\vec{F}_1$  було приєднано вектор сили  $\vec{F}_2$  (тобто в кінець вектора  $\vec{F}_1$  перенесено паралельно вектор  $\vec{F}_2$ ) і так далі. Зрозуміло, що тут не потрібні проміжні рівнодійні  $\vec{R}_{1,2} \dots$

Так, на підставі третьої аксіоми можна прийти до **правила многокутника сил** або **силового многокутника**.

Отже, векторний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови **силового многокутника** для визначення рівнодійної. Він будується шляхом паралельного перенесення у деякому масштабі векторів сил, де початок вектора наступної сили приєднується до кінця вектора попередньої сили.

Тоді вектор рівнодійної з'єднає початок вектора першої сили з кінцем вектора останньої сили (рис. 1.10), тобто, **вектор рівнодійної є**

<sup>1</sup> Тут показаний не паралелограм, а його половина, тобто, трикутник сил.

**замикальною стороною силового многокутника.** Підсумок процесу додавання пучка збіжних сил у векторній формі можна записати алгебраїчно

$$\bar{R} = F_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n \quad (1.3)$$

Рівнодійну сил визначили як векторну суму сил, а дію системи збіжних тіл звели до дії однієї сили, рівнодійної, яку визначили геометричним або векторним додаванням сил.

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до сторін многокутника, але конфігурація силового многокутника буде іншою.

Для просторової системи збіжних сил силовий многокутник є **просторовою фігурою**, а для плоскої системи – **плоскою фігурою**.

Для плоскої системи рівнодійну можна визначити графічно шляхом побудови у вибраному для сил масштабі замикальної сторони силового многокутника. Для просторової системи збіжних сил потрібно було б будувати силовий многокутник у просторі із жорстких стрижнів або проектувати його на прямокутний декартов тригранник.

*Отже, система збіжних сил у загальному випадку зводиться до однієї сили – рівнодійної цієї системи сил, яка зображується замикальною стороною силового многокутника, побудованого на силах системи, і прикладена в центрі пучка.*

### **1.2.2. Умова рівноваги системи збіжних сил у векторній формі**

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила, то про рівновагу цього тіла, згідно з першою аксіомою, не може бути мови. Розглядаючи систему збіжних сил, зведену до рівнодійної, яка не дорівнює нулю, можна сказати, що і в цьому разі тіло не може бути у рівновазі.

*Для рівноваги твердого тіла під дією системи збіжних сил, прикладеної до цього тіла, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи сил дорівнювала нулю.*

$$\bar{R} = F_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = 0. \quad (1.4)$$

Отже, **рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, якщо силовий многокутник цієї системи буде замкненим**, тобто, якщо початок вектора першої сили збігається з кінцем вектора останньої сили (див. рис. 1.10: якщо рівнодійна дорівнює нулю, то кінець останнього вектора  $\bar{F}_n$  збігатиметься з точкою  $A$ , а замикальна сторона  $\bar{R}$  перетвориться в точку). Ця умова рівноваги називається векторною або графічною умовою рівноваги (у векторній або графічній формах).

Необхідність умови рівноваги впливає з того, що дана система збіжних сил еквівалентна одній силі – рівнодійній, проте, очевидно, що під

## Частина перша

дією однієї сили тверде тіло може перебувати у стані рівноваги тільки тоді, коли ця сила дорівнює нулю.

*Достатність* цієї умови рівноваги: оскільки система сил має рівнодійну, що дорівнює нулю, то діюча на тверде тіло система сил є зрівноваженою або еквівалентною нулю, тому вона не може змінити кінематичного стану цього тіла. Якщо тіло перебувало у стані рівноваги до моменту дії сил, то воно залишиться у цьому стані і під дією цієї системи сил.

### 1.2.3. Проекція сили на вісь і на площину

Уявимо силу  $\vec{P}$ , вектор якої довільно розміщений у площині креслення (рис. 1.11).

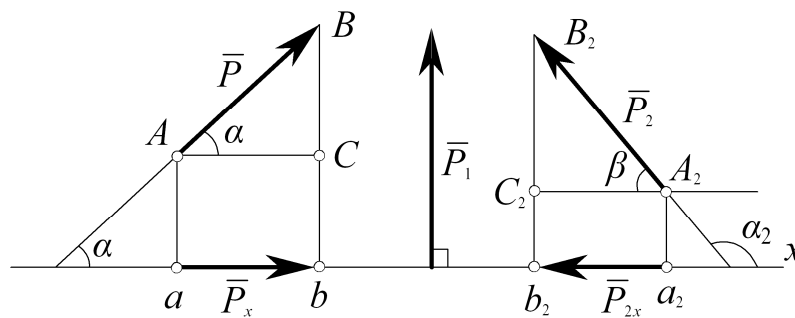


Рис. 1.11

Виберемо у цій площині вісь, наприклад вісь  $x$ , і спроектуємо вказану силу  $\vec{P}$  на цю вісь. Позначимо спочатку кінці вектора сили  $\vec{P}$  літерами  $A, B$  і опустимо з них на вісь  $x$  перпендикуляри. Точки перетину перпендикулярів з віссю  $x$  (позначимо їх відповідними малими літерами  $a$  і  $b$ ) утворили на осі  $x$  напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили  $\vec{P}$  на вісь  $x$ . За величиною цей відрізок, що можна побачити із трикутника  $\Delta ABC$ , дорівнює добутку модуля сили  $|\vec{P}|$  на косинус кута, під яким вектор сили перетинає вісь:

$$P_x = (ab) = (AC) = (AB) \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos \alpha. \quad (1.5)$$

За знаком проекція сили на вісь додатна, якщо кут  $\alpha$  (кут між вектором сили і віссю) є гострим. Цілком зрозуміло, якщо цей кут дорівнює  $90^\circ$ , то проекція сили  $\vec{P}_1$  на вісь  $x$  дорівнюватиме нулю. Легко зрозуміти, якщо кут між вектором сили і віссю дорівнює нулю, то цей вектор проектується в натуральну величину.

Якщо кут  $\alpha_2$  буде тупий, то проекція сили  $\vec{P}_2$  на вісь  $x$  матиме від'ємний знак. Значення проекції у такому випадку:

$$P_{2x} = (a_2 b_2) = (A_2 C_2) = P_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

Але практично більш зручно використовувати не тупий кут  $\alpha_2$ , а гострий доповняльний кут  $\beta$  між вектором сили  $\vec{P}_2$  і напрямком осі  $x$ . Знак проекції легко при цьому визначається зі схеми

$$P_{2x} = -P_2 \cdot \cos \beta.$$

Отже, проекція сили на вісь – це спрямований відрізок на осі між перпендикулярами, опущеними з кінців вектора сили на задану вісь.

**Проекція вектора сили на вісь** – це скалярна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямком вектора сили і додатним напрямком осі.

Далі знайдемо проекцію вектора сили на площину і на осі координат.

Візьмемо силу  $\vec{F}$ , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.12). Виберемо у просторі прямокутну систему декартових координат  $Oxyz$ , початок відліку якої (точка  $O$ ) суміщений з точкою прикладення вектора сили  $\vec{F}$ .

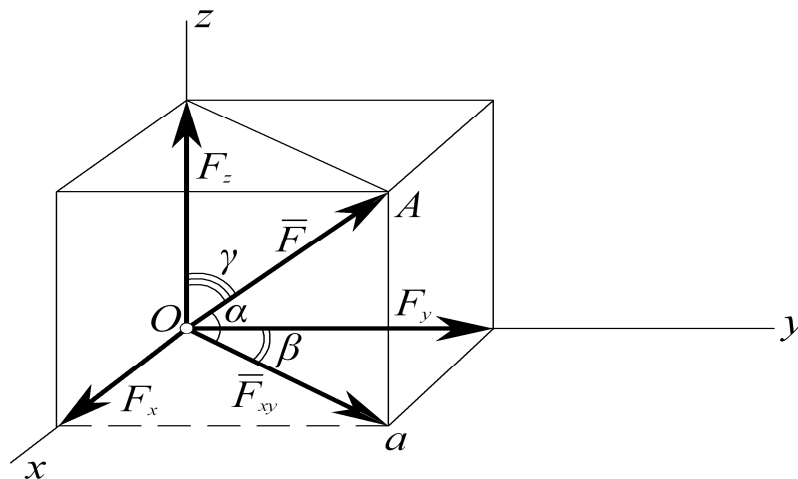


Рис. 1.12

Визначимо проекцію вектора сили  $\vec{F}$  на площину  $xOy$ . Для цього опустимо з точки  $A$  (кінець вектора сили) перпендикуляр на вказану площину, який перетне останню в точці  $a$ .

На заданій площині  $xOy$  утворено вектор  $\vec{Oa}$ , який і є проекцією  $\vec{F}_{xy}$  вектора сили на площину. За модулем ця проекція дорівнює:

$$F_{xy} = F \cos \alpha, \quad (1.6)$$

де  $\alpha$  – кут між напрямком вектора сили  $\vec{F}$  та площиною  $xOy$ .

Слід зазначити:

**проекція вектора сили на площину є вектором, який розміщений між проекціями початку і кінця вектора сили на цю площину.**

Спроектуємо вектор сили  $\vec{F}$  на координатні осі  $x$  і  $y$  за відомим



правилом:

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos(90^\circ - \beta) = F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (1.7)$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (1.8)$$

Аналізуючи вирази (1.7) і (1.8), можна помітити, що для здобуття проекції сили на координатну вісь необхідно провести подвійне проектування: спочатку знайти проекцію вектора сили на площину, в якій розміщені ці осі, а вже потім – на самі осі.

Що стосується третьої осі  $z$ , то є можливість спроектувати вектор сили  $\vec{F}$  на цю вісь безпосередньо за відомим правилом (1.5):

$$F_z = F \cdot \cos \gamma, \quad (1.9)$$

де  $\gamma$  – кут між вектором сили  $\vec{F}$  і віссю  $z$ .

#### 1.2.4. Визначення сили за її проекціями

Припустимо, що маємо в площині рисунка прямокутну систему декартових координат  $Oxy$ , задані дві проекції сили –  $F_x$  і  $F_y$  (рис. 1.14). Треба за даними проекціями обчислити модуль вектора самої сили  $\vec{F}_{xy}$ , а також його напрямок.

На заданих проекціях, як на сторонах, будуємо прямокутник, діагональ якого, що проходить крізь точку перетину проекцій, і є шуканим вектором сили  $\vec{F}_{xy}$ . Модуль вектора сили  $\vec{F}_{xy}$  можна визначити з виразу:

$$F_{xy} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (1.10)$$

Кути між вектором сили  $\vec{F}_{xy}$  і осями  $x, y$  можна визначити за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos \alpha = \cos(x, \vec{F}_{xy}) = \frac{F_x}{F_{xy}}, \quad \cos \beta = \cos(y, \vec{F}_{xy}) = \frac{F_y}{F_{xy}}. \quad (1.11)$$

Знаючи напрямні косинуси, є можливість знайти величини кутів за допомогою функції арккосинуса.

Аналогічно для просторової системи сил (рис. 1.14) можна побудувати паралелепіпед на проекціях як на сторонах, а модуль сили  $\vec{F}$  визначити як діагональ цього паралелепіпеда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок вектора цієї сили визначається за напрямними косинусами його кутів з відповідними осями координат  $x, y, z$ :

$$\cos(x, \wedge \bar{F}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(y, \wedge \bar{F}) = \frac{F_y}{PF}, \quad \cos(z, \wedge \bar{F}) = \frac{F_z}{F}.$$

Далі, за функціями арккосинусів визначають величини самих кутів.

### 1.2.5. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь

Маємо систему сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4)$ , яка зведена до рівнодійної  $\bar{R}$  за допомогою силового многокутника (рис. 1.13). Введемо на площині прямокутну систему декартових координат  $Oxy$  і спроектуємо на вісь  $x$  всі сили.

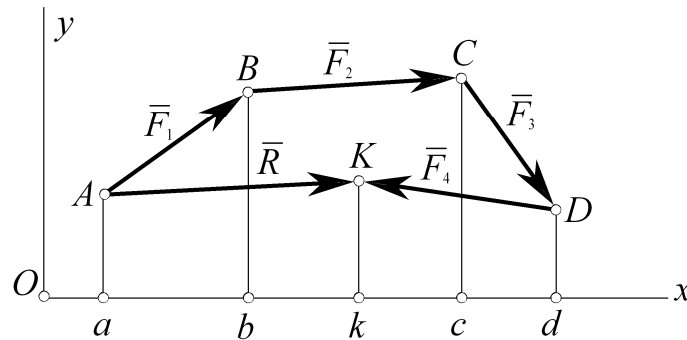


Рис. 1.13

Для цього позначимо кінці векторів всіх сил літерами  $A, B, C, D, K$  і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь  $x$ . Точки перетину перпендикулярів з віссю, що позначені відповідними малими літерами  $a, b, c, d, k$ , утворили на осі  $x$  спрямовані відрізки, які і є проекціями всіх сил на цю вісь:

$$|ab| = F_{1x}; \quad |bc| = F_{2x}; \quad |cd| = F_{3x}; \quad |-dk| = F_{4x}. \quad (1.12)$$

Додамо алгебраїчно всі проекції і підрахуємо, чому ця сума дорівнює:

$$ab + bc + cd - dk = ak. \quad (1.13)$$

Але відрізок  $ak$  і є проекцією рівнодійної сили  $\bar{R}$  на вісь  $x$ . Цей підрахунок стосувався чотирьох сил, але, поширюючи цю суму на  $n$  сил, можна записати:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.14)$$

### 1.2.6. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил

Для можливості аналітичного додавання сил скористуємося теоремою векторної алгебри:

**проекція підсумкового вектора або рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів складових сил на ту саму вісь.**

На підставі теореми

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.15)$$

Аналогічно проекції рівнодійної сили на осі  $y$  і  $z$  дорівнюють:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad (1.16)$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (1.17)$$

Модуль рівнодійної:  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ .

Кути між вектором рівнодійної  $\bar{R}$  і осями координат  $x, y, z$  визначимо через функції напрямних косинусів кутів між відповідною віссю та рівнодійною:

$$\cos(x, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_z}{R}. \quad (1.18)$$

### **1.2.7. Умови рівноваги системи збіжних сил**

Систему збіжних сил можна звести до однієї рівнодійної сили. Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи дорівнювала нулю (вираз 1.4). А якщо рівнодійна сила дорівнює нулю, то і її проекції на осі  $x, y, z$  теж дорівнюють нулю. Оскільки проекції рівнодійної дорівнюють алгебраїчним сумах проекцій складових сил (вирази 1.14 – 1.17), то умови рівноваги просторової системи збіжних сил мають такий вигляд:

$$\left. R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \right\} \quad (1.19)$$

**Для рівноваги твердого тіла, що перебуває під дією просторової системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на кожен із трьох координатних осей дорівнювали нулю.**

У випадку плоскої системи збіжних сил одну із осей координат, частіше  $Oz$ , вибирають перпендикулярною до площини дії сил. Тоді третя умова із системи умов (1.19) перетворюється у тотожність. Відкидаючи її, отримуємо умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил:

$$\left. R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \right\} \quad (1.20)$$

**Для рівноваги твердого тіла під дією прикладеної до нього плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій цих сил на кожен із двох координатних осей, розміщених у цій площині, дорівнювали нулю.**

### **1.2.8. Методика розв'язування задач статички. Приклади**

Задачі статички, що потребують розв'язування, можуть бути одного з двох типів. У задачах першого типу відомі діючі на тіло активні сили і необхідно знайти, в якому положенні або за яких співвідношень між діючими силами задане тіло може перебувати у стані рівноваги. У задачах другого типу попередньо відомо, що задане тіло перебуває у стані рівноваги, а необхідно визначити, чому при цьому дорівнюють деякі діючі сили і реакції опор. Реакції в'язей завжди є величинами, попередньо невідомими у всіх задачах статички. Алгоритм розв'язування задач статички твердого тіла наступний.

*1. З'ясувати, рівновагу якого твердого тіла або точки потрібно розглянути.*

Для розв'язання задачі розглядається рівновага тіла, до якого прикладені задані і шукані сили. Якщо ж на тіло діє система збіжних сил, то необхідно визначити точку, в якій перетинаються лінії дії сил і реакцій. Якщо задані сили діють на одне тіло, а шукані сили – на друге або ці сили діють одночасно на декілька тіл, то може бути необхідним розглянути послідовно рівновагу кожного тіла окремо.

*2. Скласти розрахунково-силову схему.*

Важливе значення має охайне креслення, навіть чернетка рисунка, що може допомогти швидше знайти правильний шлях розв'язування задачі і уникнути помилок під час складання умов рівноваги.

*а) показати на схемі задані активні сили, що діють на тверде тіло;*

з'ясувавши, рівновагу якого тіла потрібно розглянути, слід зобразити на рисунку всі діючі на задане тіло зовнішні сили, включаючи як задані, так і шукані сили;

*б) показати на схемі сили реакцій в'язей, що обмежують рух твердого тіла;*

відкинути за аксіомою про звільнення від в'язей задані фізичні опорні елементи, конструкції і замінити їхню дію реакціями в'язей згідно з рекомендаціями щодо основних типів в'язей (див. пп. 1.1.4). Напрямок стрілок невідомих реакцій задаємось довільно. Таким чином, до тіла або точки прикладатимуться задані активні сили і сили реакцій в'язей;

*в) раціонально вибрати систему координат;*

особливо це важливо для системи збіжних сил, прикладеної до твердого тіла. Для зручності початок координат розміщуємо в точці рівноваги. Бажано, щоб одна із осей координат збігалася з перпендикуляром до напрямку шуканої сили – в цьому разі одне з рівнянь

## **Частина перша**

---

рівноваги опиниться з одним невідомим, з якого легко визначити шукану величину.

*3. Встановити, яка система сил за класифікацією діє на задане тверде тіло.*

Це необхідно, щоб з'ясувати, якими умовами рівноваги тіла під дією заданих сил і реакцій в'язей необхідно користуватися, і вибрати відповідну систему умов рівноваги.

*4. На підставі відповідної системи умов рівноваги скласти рівняння рівноваги твердого тіла.*

Геометричні умови рівноваги слід застосовувати, якщо на тіло діє не більше трьох заданих і шуканих сил, розміщених на площині. У випадку рівноваги силовий трикутник, побудований з цих сил, має бути замкненим, з нього і визначають шукані сили.

Аналітичними умовами рівноваги можна користуватися за будь-якої кількості сил, що діють на тверде тіло. Корисно при цьому, особливо на початку вивчення матеріалу, попередньо обчислювати проєкції всіх сил і заносити їх в окрему таблицю.

*5. Розв'язати складені рівняння рівноваги, визначити шукані величини, провести перевірку і аналіз результатів.*

Усі розрахунки під час розв'язання алгебраїчних рівнянь статички рекомендується проводити у загальному вигляді, отримуючи для шуканих величин формули, що дає можливість аналізу знайдених результатів.

Крім того, розв'язок у загальному вигляді дозволяє виявити зроблені помилки шляхом перевірки вимірності. Визначені аналітично шукані величин можуть бути перевірені на підставі геометричних умов рівноваги побудовою силового трикутника або багатокутника.

Якщо одна із знайдених реакцій отримала знак «мінус», то це означає, що фактичний її напрямок є протилежним, ніж це показано на розрахунковій схемі.

Конкретні методичні вказівки для розв'язання задач надаються в кожному окремому випадку, адже будь-яка задача зберігає свою індивідуальну особливість.

### **Приклад 1.1**

Невагомий ідеальний стрижень  $AB$  утримується в рівновазі нерозтяжним гнучким тросом  $BC$ . До шарніра  $B$  стрижня на гнучкій нерозтяжній нитці підвішене тіло вагою  $G$  (рис.1.14).

Визначити натяг нитки  $BC$  і силу реакції стрижня  $AB$ , якщо кути і вага дорівнюють, відповідно:

$$\alpha = 45^\circ; \beta = 105^\circ; G = 500 \text{ Н}.$$

### **Розв'язання**

Розглянемо рівновагу вузла  $B$ , де збігаються вектори усіх сил (рис. 1.14). До вузла прикладено:

сила натягу нитки, що рівна силі ваги  $\bar{G}$ , перенесена вздовж лінії дії від центра мас тіла до точки  $B$ , натяг троса  $\bar{T}$  і сила реакції стрижня  $\bar{S}$ . Таким чином, вузол  $B$  перебуває у рівновазі під дією трьох сил:  $\bar{G}$ ,  $\bar{T}$  і  $\bar{S}$ , розміщених в одній площині і прикладених у центрі пучка точці  $B$ .

Величину зусиль  $\bar{S}$  і  $\bar{T}$  визначимо геометричним методом, скориставшись векторною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum \bar{F}_k = \bar{T} + \bar{G} + \bar{S} = 0.$$

Для цього з довільної точки  $a$  (рис. 1.15) відкладаємо в деякому масштабі відомий вектор  $\bar{G}$ , отримавши дві точки  $a$  і  $b$ , крізь які проводимо послідовно прямі, паралельні відомим лініям дії невідомих за модулем сил  $\bar{S}$  і  $\bar{T}$ .

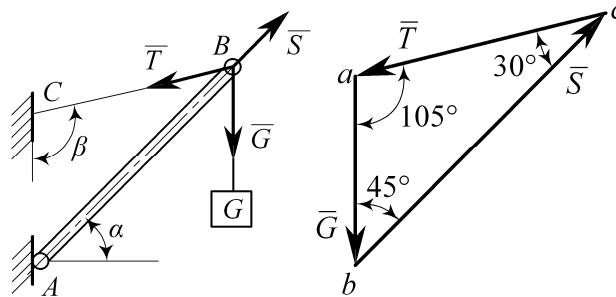


Рис. 1.14

Рис. 1.15

На перетині останніх отримаємо точку  $c$ , з допомогою якої утворюється силосий трикутник  $abc$ . Сторони цього трикутника у вибраному масштабі уявляють собою модулі задіяних сил.

Знайти невідомі величини можна, якщо заміряти відповідні сторони силового трикутника і помножити їхню довжину на вибраний масштабний коефіцієнт, або за теоремою синусів:

$$\frac{G}{\sin 30^\circ} = \frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{S}{\sin 105^\circ}.$$

$$T = G \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,707}{0,5} = 707 \text{ Н};$$

$$S = G \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = G \frac{\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,954}{0,5} = 954 \text{ Н}.$$

Відповідь:  $T = 707 \text{ Н}; S = 954 \text{ Н}$ .

### Приклад 1.2

Гнучкий трос з двома тілами на кінцях вагою  $F$  і  $Q_1$  перекинутий через блоки  $A$  і  $B$  (рис.1.16). В точці  $O$  збігання тросів прикріплено вантаж вагою  $G = 27,3 \text{ Н}$ . В умовах рівноваги системи нитка  $OA$

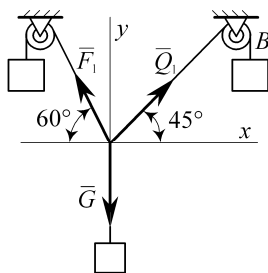


Рис. 1.16

утворила кут  $60^\circ$  з горизонталлю, а нитка  $OB$  – кут  $45^\circ$ . Визначити вагу тіл  $F$  і  $Q$ . Силами тертя в блоках знехтувати.

#### Розв'язання

Спочатку з'ясуємо, рівновагу якої точки потрібно розглянути при розв'язуванні задачі. За умовою задачі потрібно визначити вагу тіл  $F$  і  $Q$ , прикладених до центрів мас тіл і спрямованих вертикально вниз. Кожне тіло натягує нитку з силою, яка дорівнює його вазі. Блоки змінюють напрямки ниток, а, відповідно, і напрями сил натягу. Сили натягу  $F_1$  і  $Q_1$  за модулем дорівнюють вазі тіл  $F$  і  $Q$ , але спрямовані вздовж тросів  $OA$  і  $OB$ .

## Частина перша

Таким чином, на точку  $O$  (рис.1.16) діють: сила натягу  $\overline{F}_1$  вітки нитки  $OA$ ; сили натягу  $\overline{Q}_1$  вітки нитки  $OB$ ; вага тіла  $G$ . Складемо рівняння рівноваги. Для цього оберемо систему координат  $Oxy$  з початком у точці  $O$ , спроекуємо сили на осі координат і складемо рівняння рівноваги.

Для суми проекцій на вісь  $Ox$  дістанемо:

$$\sum F_{kx} = Q_1 \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Знак проекції  $\overline{Q}_1$  – додатний, оскільки вона спрямована за додатним напрямом осі  $Ox$ . Знак проекції сили  $F_1$  – від’ємний, оскільки вона спрямована за від’ємним напрямом осі  $Ox$ . Проекція сили  $\overline{G}$  на вісь  $Ox$  дорівнює нулю (вектор сили перпендикулярний до осі).

Сума проекцій усіх сил на вісь  $Oy$  дорівнює:

$$\sum F_{ky} = Q_1 \sin 45^\circ + F_1 \sin 60^\circ - G = 0.$$

Проекції сил  $\overline{F}_1$  і  $\overline{Q}_1$  мають додатні знаки, оскільки вони спрямовані за додатним напрямом осі  $Oy$ . Проекція сили  $\overline{G}$  має знак «мінус», оскільки спрямована за від’ємним напрямом осі.

З урахуванням чисельних значень тригонометричних функцій та величини заданої сили  $G$  рівняння набувають вигляду:

$$0,707Q_1 - 0,5F_1 = 0;$$

$$0,707Q_1 + 0,866F_1 - 27,3 = 0.$$

Визначивши з першого рівняння  $F_1 = 1,41 Q_1$

і підставивши в друге, дістанемо:  $Q_1 = 14,1 \text{ Н}; F_1 = 20 \text{ Н}$ .

### Приклад 1.3

Три невагомих стрижні  $AB$ ,  $AC$  і  $AD$ , розміщені в різних площинах, закріплені шарнірно в точці  $A$  і за допомогою шарнірів  $B$ ,  $C$ ,  $D$  прикріплені до горизонтальної підставки (рис. 1.17). Площини трикутників  $ABC$  і  $AOD$  вертикальні і взаємно перпендикулярні. На вузол  $A$  паралельно  $OD$  діє сила  $P=0,6 \text{ кН}$ . Знайти зусилля в стрижнях, якщо  $\angle ABO = \angle ACO = 45^\circ$ ;  $\angle ADO = 60^\circ$ .

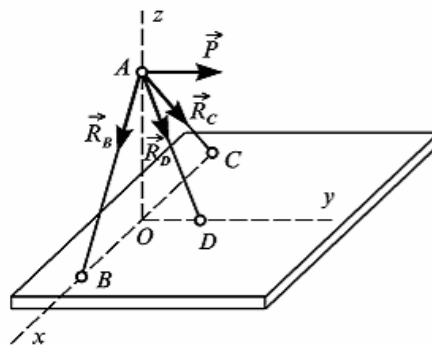


Рис. 1.17

### Розв’язання

1. Виділимо тіло або точку, умови рівноваги якої дадуть можливість розв’язати задачу. Це точка  $A$ , до якої збігаються всі стрижні, зусилля в яких потрібно визначити. Отже, розглянемо рівновагу вузла  $A$ , користуючись аксіомою про звільнення від в’язей.

2. Аналізуємо сили, які прикладені до вузла  $A$ . На вузол  $A$  діє активна сила  $\overline{P}$ , а також три реакції стрижнів, які діють уздовж них, оскільки стрижні ідеальні. Припустимо, що всі стрижні розтягнуті, тому на рис. 1.19 їхні реакції спрямовані від вузла  $A$ . Задачі має три невідомі  $\overline{R}_B$ ,  $\overline{R}_D$ ,  $\overline{R}_C$ , для відшукування яких можна скласти три рівняння рівноваги. Таким чином, задача статично визначена.

Початок системи координат виберемо в точці  $O$ , додатні напрями осей позначено на рисунку.

3. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = P + R_D \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = -R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

На підставі першого рівняння робимо висновок, що  $R_B = R_C$ , з другого рівняння знаходимо  $R_D$ :

$$R_D = -\frac{P}{\cos 60^\circ} = -2P.$$

Від'ємний знак свідчить, що цей стрижень стиснутий, оскільки спочатку припускали, що він розтягнутий. Нарешті, з третього рівняння знайдемо:

$$R_B = R_C = -\frac{R_D \cdot \cos 30^\circ}{2 \cos 45^\circ}; \quad R_B = R_C = \frac{P \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = P \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Додатний знак цих реакцій вказує на те, що стрижні  $AB$  і  $AC$  розтягнуті.

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
2. Для чого і яким чином будується силовий багатокутник?
3. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній (векторній) формі?
4. Як формулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил?
5. Як визначаються проекції сили на вісь і площину?
6. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
7. Як визначити силу за її проекціями?
8. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
9. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
10. Яка методика розв'язання задач за теоремою про три сили?

## 1.3. Теорія моментів і пар сил на площині

### 1.3.1. Алгебраїчний момент сили відносно центра (точки)

Із практики відомо, що тіло під дією сили може не тільки переміщуватися, але і повертатися. Що ж створює цей обертальний ефект? Введемо важливе поняття механіки про *момент сили відносно центра* або точки, які називають центром моменту.

Якщо тіло під дією прикладеної сили обертається відносно центра, то обертальний ефект сили характеризується її моментом відносно цього центра. Під час розгляду плоскої системи сил, прикладених до твердого тіла, використовується поняття алгебраїчного моменту сили відносно центра. Розглянемо довільне тіло (рис. 1.18), яке може повертатися відносно точки  $O$  (точніше навколо осі, що є перпендикулярною площині рисунка і перетинає точку  $O$ ).

Прикладемо в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  тіла вектори сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  і визначимо спочатку, чи зможуть вони повертати тіло навколо точки  $O$ . Як можна побачити з рисунка, сила  $\vec{F}_1$ , прикладена у точці  $A$ , може повернути тіло



## Частина перша

навколо точки  $O$  проти ходу стрілки годинника. Сила  $\vec{F}_2$  – за ходом стрілки годинника. Власне, тут інтуїтивно виявляється здатність сили повертати тіло і створювати обертальний ефект. Проте сила  $\vec{F}_3$ , якою б великою вона не була, не має можливості повернути тіло навколо точки  $O$ , оскільки лінія дії сили  $\vec{F}_3$  перетинає цю точку.

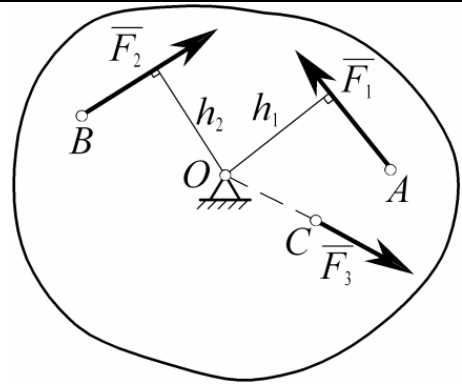


Рис. 1.18

Таким чином, сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  створюють обертальний ефект (момент) відносно точки  $O$ , а сила  $\vec{F}_3$  – ні. Із цього прикладу випливає висновок, що для рівноваги тіла поряд з силами необхідно розглядати і добутки цих сил на відстані ліній їхньої дії від опор.

**Алгебраїчним моментом сили відносно центра (точки) називається взятий з відповідним знаком добуток модуля сили на плече.**

**Плече сили відносно центра – це найкоротша відстань між цим центром і лінією дії сили (перпендикуляр із центра на лінію дії сили).**

У курсі теоретичної механіки алгебраїчний момент вважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно цієї точки проти ходу стрілки годинника і від'ємним – за ходом стрілки.

Алгебраїчний момент сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$  позначається  $m_o(\vec{F})$ .

Покажемо на рис. 1.18 плечі  $h_1$  і  $h_2$  сил, які створюють моменти відносно точки  $O$ , і визначимо алгебраїчні величини моментів цих сил:

$$m_o(\vec{F}_1) = F_1 \cdot h_1, \quad m_o(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2, \quad m_o(\vec{F}_3) = F_3 \cdot 0 = 0.$$

Алгебраїчний момент сили – це добуток сили на лінійну величину – довжину плеча.

Звідси одиницею виміру моменту у системі  $SI$  є добуток ньютон на метр ( $Nm$ ).

Із аналізу визначення алгебраїчного моменту сили відносно центра випливають його властивості.

1. Момент не залежить від перенесення в межах цього тіла точки прикладання вектора сили вздовж лінії дії сили, оскільки плече сили залишається при цьому незмінним.

2. Якщо лінія дії вектора сили перетинає центр моменту, то момент цієї сили відносно цього центра дорівнює нулю.

3. Сума алгебраїчних моментів відносно центра двох рівних за модулем, але протилежних за напрямом сил, що діють вздовж однієї прямої, дорівнює нулю.

### 1.3.2. Момент сили відносно центра як вектор

Під час розгляду просторової системи сил, прикладеної до твердого тіла, плідно використовується поняття векторного моменту сили відносно центра.

Розглянемо силу  $\vec{F}$ , вектор якої довільно розташований у просторі і прикладений в точці  $A$  (рис. 1.19).

Алгебраїчний момент сили  $\vec{F}$  відносно центра  $O$  дорівнюватиме

$$m_o(\vec{F}) = Fh. \quad (1.21)$$

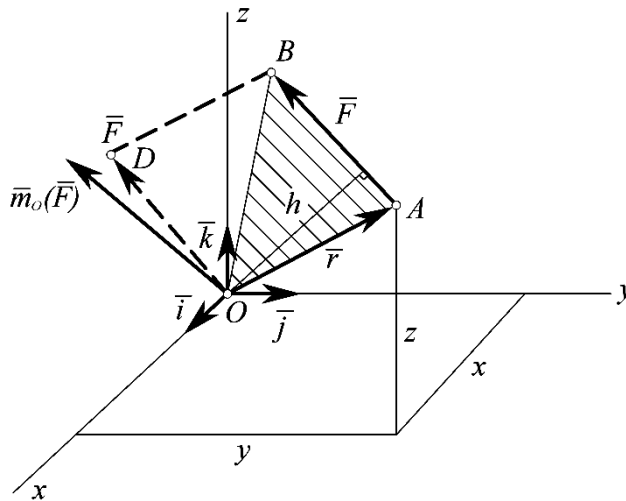


Рис. 1.19

Із трикутника  $AOB$  визначимо плече  $h = r \cdot \sin(\vec{r} \wedge \vec{F})$ . Тоді для виразу алгебраїчного моменту (1.21) отримаємо:

$$m_o(\vec{F}) = Fh = F \cdot r \cdot \sin(\vec{r} \wedge \vec{F}). \quad (1.22)$$

Позначимо літерами  $A$  і  $B$  кінці вектора сили  $\vec{F}$  і з'єднаємо їх з точкою  $O$ . Основою трикутника  $AOB$  є вектор сили  $\vec{F}$ , а одна із вершин розміщена в точці  $O$ .

Плече  $h$  є висотою трикутника  $AOB$ . Тоді алгебраїчний момент сили  $\vec{F}$  відносно центра  $O$  є подвійною площею трикутника  $AOB$ , якщо розглядати його геометричну інтерпретацію:

$$m_o(\vec{F}) = 2S_{\Delta AOB}. \quad (1.23)$$

Далі проведемо крізь точку  $O$  прямокутну систему декартових координат  $Oxyz$  з ортами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Вважаємо, що відстань  $OA$  є радіусом-вектором  $\vec{r}$  точки  $A$  відносно центра  $O$  прикладання вектора сили  $\vec{F}$ .

Оскільки алгебраїчний момент сили  $\vec{F}$  відносно центра  $O$ , як визначено виразом (1.23), є площею двох трикутників  $AOB$ , то побудуємо рівновеликий їм паралелограм  $OABD$ . Легко побачити, що тепер в точці  $O$  прикладені два вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ , на яких і побудовано паралелограм, площа якого (вираз 1.22) дорівнює модулю векторного добутку двох векторів

## Частина перша

$\vec{r} \times \vec{F}$ . Таким чином, векторний момент сили відносно центра  $\vec{m}_o(\vec{F})$ , що проведений перпендикулярно до площини паралелограма, є третім підсумковим вектором добутку двох векторів  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ :

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.24)$$

Остаточно сформулюємо визначення вектора-моменту сили.

**Векторний момент сили  $\vec{m}_o(\vec{F})$  відносно центра  $O$  є підсумковим вектором векторного добутку  $\vec{r} \times \vec{F}$ , прикладеним в цьому центрі і спрямованим перпендикулярно до площини трикутника  $OAB$ , утвореного вектором сили і центром моменту. Векторний момент напрямлений перпендикулярно площині у той бік, з якого можна побачити, що поворот тіла під дією заданої сили  $\vec{F}$  відносно центра  $O$  відбувається проти годинникової стрілки.**

За модулем векторний момент дорівнює подвійній площі трикутника  $AOB$ , який утворюють кінці вектора сили  $\vec{F}$  і центр  $O$ . У підсумку можна зазначити, що векторний момент характеризується модулем, площиною дії і напрямком повороту.

Векторний момент сили відносно центра становить повну характеристику статичної дії цього моменту на тверде тіло, тому дії над моментами можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами.

**Векторний момент сили  $\vec{m}_o(\vec{F})$  відносно центра є зв'язаним вектором**, тобто, закріпленим у центрі моменту, і за всіма трьома параметрами визначає обертальний ефект сили, прикладеної до твердого тіла: лінія дії векторного моменту визначає **площину дії моменту** (за перпендикуляром); спрямованість вектора (перпендикуляра) визначає **напрямок повороту** «за» чи «проти» годинникової стрілки; довжина вектора у певному масштабі визначає **модуль моменту**.

Визначимо аналітично проєкції на осі координат і модуль векторного моменту сили відносно центра. У прийнятій системі координат вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$  можна виразити через відповідні проєкції на осі координат:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.25)$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \quad (1.26)$$

де  $x, y, z$  – проєкції радіуса-вектора  $\vec{r}$  на осі координат;  $F_x, F_y, F_z$  – проєкції вектора сили  $\vec{F}$  на відповідні осі.

Як відомо із векторної алгебри, векторний добуток можна записати у вигляді визначника третього порядку, підставляючи проєкції радіуса-вектора и сили із виразів (1.25) і (1.26):

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ x, & y, & z \\ F_x, & F_y, & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

Розкривши визначник (1.27) за елементами першого рядка, отримаємо:

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}. \quad (1.28)$$

Коефіцієнти перед одиничними векторами у виразі (1.28) є проєкціями вектора-моменту сили відносно точки на осі координат  $x, y, z$ , тобто, алгебраїчними величинами і аналітичними виразами проєкцій:

$$m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x. \quad (1.29)$$

Якщо проєкції векторного моменту відомі, то його модуль неважко обчислити аналітично із виразу (1.29), визначивши корінь квадратний із суми квадратів проєкцій, а якщо потрібно, то і напрямні косинуси.

$$m_o(\bar{F}) = \sqrt{m_x^2(\bar{F}) + m_y^2(\bar{F}) + m_z^2(\bar{F})}; \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{i}) &= \frac{m_x(\bar{F})}{m_o(\bar{F})}; \quad \cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{j}) = \frac{m_y(\bar{F})}{m_o(\bar{F})}; \\ \cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{k}) &= \frac{m_z(\bar{F})}{m_o(\bar{F})}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Вирази (1.30) і (1.31) аналітично визначають модуль і напрямок векторного моменту сили, прикладеної до твердого тіла, відносно заданого центра.

### 1.3.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної збіжних сил

*Момент рівнодійної системи збіжних сил відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того самого центра.*

Доведення. Припустимо, що до тіла в точці  $A$  прикладена система збіжних сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ , зведена до рівнодійної сили  $\bar{R}$  (рис. 1.20). Оберемо довільний центр  $O$  і визначимо відносно нього моменти всіх сил. Починаємо з першої сили  $\bar{P}_1$ . Знайдемо її момент відносно центра  $O$ . Спочатку з'єднаємо прямими лініями початок і кінець вектора сили  $\bar{P}_1$  з точкою  $O$ .

Проведемо крізь точку  $O$  перпендикуляр до прямої  $OA$ , і вважаємо цю пряму віссю  $x$  (тобто задамо її напрямком).

Момент сили  $\bar{P}_1$  відносно точки  $O$  є подвійною площею трикутника  $OAB$ :

$$m_o(\bar{P}_1) = 2S\Delta OAB.$$

Визначимо площу цього трикутника. Як відомо, це є половина добутку основи (у нашому випадку це сторона  $OA$ ) на висоту трикутника  $h$ . А висота у такому випадку дорівнює проекції вектора сили  $\bar{P}_1$  на вісь  $x$  –  $P_{1x}$ . Таким чином, момент сили  $\bar{P}_1$  відносно точки  $O$  дорівнює добутку основи трикутника  $OA$  на проекцію сили на вісь  $x$ :

$$m_o(\bar{P}_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot P_{1x} = OA \cdot P_{1x}.$$

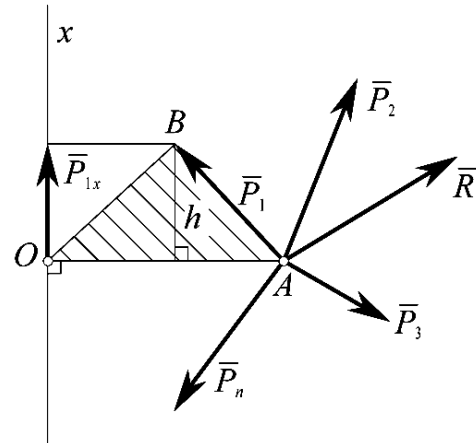


Рис. 1.20

Аналогічно обчислимо моменти інших сил системи:

$$m_o(\bar{P}_2) = OA \cdot P_{2x}, m_o(\bar{P}_3) = OA \cdot P_{3x}, \dots, m_o(\bar{P}_n) = OA \cdot P_{nx}.$$

Далі переходимо до рівнодійної  $\bar{R}$  системи сил і таким же чином визначимо її момент відносно точки  $O$ :

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x,$$

де  $R_x$  – проекція рівнодійної сили  $\bar{R}$  на вісь  $x$ .

Згідно з теоремою про проекцію рівнодійної сили на вісь (вираз 1.14), яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю вісь, можна записати:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x = OA (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx}).$$

Розкриваючи дужки, отримаємо:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot P_{1x} + OA \cdot P_{2x} + OA \cdot P_{3x} + \dots + OA \cdot P_{nx}.$$

Права частина даного виразу містить моменти складових сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$  відносно точки  $O$ . Остаточно:

$$m_o(\bar{R}) = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.32)$$

Вираз (1.32) свідчить, що **момент рівнодійної** сили відносно будь-якого центра дійсно **дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових** системи збіжних сил відносно того самого центра.

Теорема Варіньйона може бути застосована і для інших систем сил, що зводяться до рівнодійної.

### 1.3.4. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил

Якщо лінії дії системи сил паралельні, то такі сили носять назву системи паралельних сил. Додавання їх здійснюється на підставі відомих з курсу елементарної фізики положень. Система двох паралельних сил, спрямованих в один бік, має рівнодійну (рис. 1.21).

*Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік, за числовим значенням є арифметичною сумою модулів цих сил, паралельна лінії дії сил і спрямована в той самий бік.*

$$R = P_1 + P_2$$

Точка прикладання рівнодійної сили ділить внутрішньо відрізок, що з'єднує точки прикладання сил, на частини, які є обернено пропорційними модулям цих сил.

Оскільки система двох сил зводиться до рівнодійної, застосуємо теорему Варінійона, вираз (1.32), вибравши точку  $C$  за центр моментів:

$$m_C(R) = m_C(P_1) + m_C(P_2); \quad 0 = P_1 \cdot AC - P_2 \cdot BC; \Rightarrow \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC = BC \frac{P_2}{P_1}, \quad (1.34)$$

де  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$  – вектори паралельних сил, що додаються;  $A, B, C$  – точки прикладання паралельних сил і рівнодійної, відповідно.

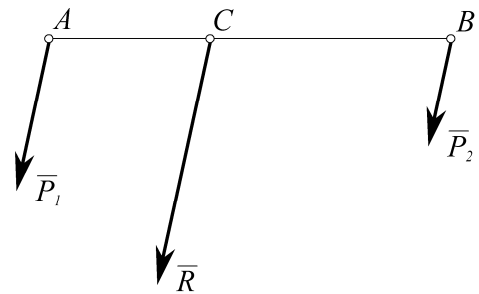


Рис. 1.21

$AC$  – відстань від точки  $A$  до точки  $C$ , де прикладена рівнодійна двох паралельних сил, яку називають центром паралельних сил, спрямованих в один бік.

У виразі (1.33) момент рівнодійної відносно точки прикладання  $C$  дорівнює нулю, функції синусів рівновеликих кутів, за якими визначались плечі, скоротилися. Тому, під яким би кутом до лінії  $AB$  не були нахилені вектори сил, положення центра паралельних сил, де прикладається вектор рівнодійної, завжди залишається незмінним.

Для додавання двох антипаралельних сил (рис. 1.22), лінії дії яких паралельні, але їхні вектори спрямовані у протилежні боки, існує наступне правило.

*Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих у протилежні боки, дорівнює за числовим значенням різниці модулів цих сил, паралельна лінії дії сил і спрямована у бік більшої сили.*

$$R = P_1 - P_2,$$

де  $\bar{P}_1$  – найбільша із двох антипаралельних сил ( $\bar{P}_1 > \bar{P}_2$ ).

Точка прикладання рівнодійної сили ділить зовнішньо відстань між точками прикладання заданих сил на відрізки, які є обернено пропорційними величинам цих сил, що впливає із аналогічного виразу (1.33).

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}; \quad AC = BC \frac{P_2}{P_1}; \quad (1.35)$$

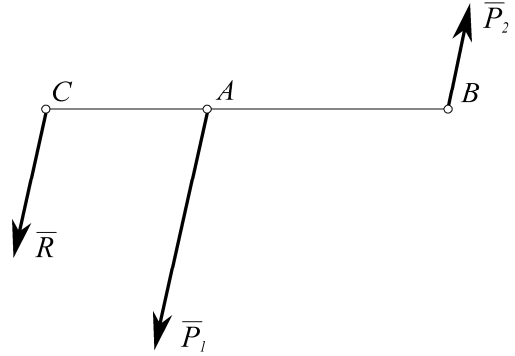


Рис. 1.22

де  $C$  – точка прикладання рівнодійної  $\bar{R}$  або центр антипаралельних сил, що розміщується поза межами відрізка  $AB$  (рис. 1.22), у кінцевих точках якого прикладені задані антипаралельні сили.

### 1.3.5. Пара сил. Момент пари сил

Поряд з поняттям сили в механіці існує другий основний силовий фактор – пара сил, яку прикладають до твердого тіла, щоб примусити його до обертання.

Звернувшись до рис. 1.22, складемо суму моментів усіх сил відносно точки  $A$  за теоремою Варіньйона. Тоді отримаємо довжину плеча (важеля)  $AC$ , у точці  $C$  якого має бути прикладена рівнодійна  $\bar{R}$ :

$$AC \cdot R \cdot \sin \alpha = AB \cdot P_2 \cdot \sin \alpha \Rightarrow R = P_1 - P_2 \Rightarrow AC = AB \frac{P_2}{P_1 - P_2} \quad (1.36)$$

де  $\alpha$  – кут між лінією  $AB$  і векторами паралельних сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{R}$ .

Чи мають рівнодійну ці антипаралельні сили, якщо  $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$ ? Аналізуючи вираз (1.36), легко побачити, що за поступового зменшення рівнодійної або різниці між модулями антипаралельних сил, знаменник виразу наближається до нуля, а тому довжина плеча  $AC$  наближатиметься до нескінченності. Таким чином, рівнодійної двох рівних антипаралельних сил не існує, тому тут виникає новий силовий фактор – пара сил.

**Пара сил, прикладена до твердого тіла, – це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил, що мають різні лінії дії.**

З першої аксіоми про дві сили впливає, що тіло під дією системи сил, які створюють пару, не може перебувати у стані рівноваги. Крім того, пара не має рівнодійної, оскільки підсумковий вектор системи двох таких сил дорівнює нулю.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.23), до якого в точках  $A$  і  $B$  прикладені сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$ , такі, що:  $F_1 = F_2$  і  $\bar{F}_1 // \bar{F}_2$ . Це означає, що до тіла прикладена пара сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ .

Площина, в якій розміщені сили пари, має назву площини дії пари.

Пара сил характеризується моментом, що викликає поворот тіла парою у площині її дії, тобто, пара створює обертальний ефект.

Алгебраїчним **моментом пари** називається взятий з відповідним знаком **добуток однієї із сил пари на плече пари**. **Плече пари**  $h$  (рис. 1.23) – це **найкоротша відстань** (за перпендикуляром) між лініями дії сил, що становлять пару.

Момент пари вважається додатним, якщо пара намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки і, навпаки, – від’ємним, якщо пара намагається повертати тіло за годинниковою стрілкою. Момент пари за модулем або алгебраїчний момент позначається так:  $m(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ .

Визначимо алгебраїчний момент пари сил, зображеної на рис. 1.23:

$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 \cdot h = F_1 \cdot AB \cdot \sin(\vec{F}_1, \wedge AB) = F_2 \cdot h \quad (1.37)$$

Згідно з виразом (1.37), модуль моменту пари у геометричній інтерпретації дорівнює площі паралелограма  $ACBD$  або подвійній площі трикутника  $ABC$ .

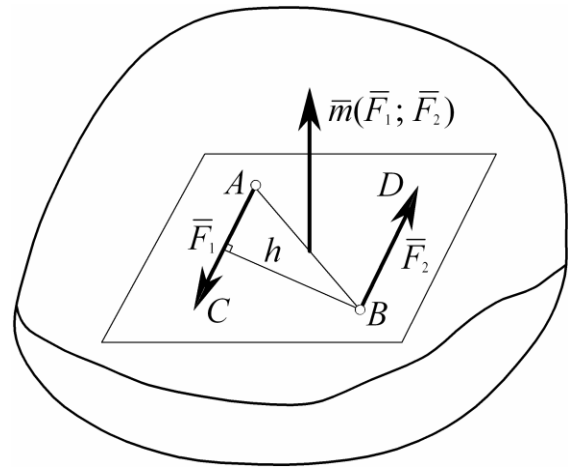


Рис. 1.23

Одиницею виміру моменту пари сил, як і моменту сили відносно центра, є у системі СІ добуток ньютонна на метр ( $Нм$ ).

**Момент пари сил можна уявити вектором.** Цей вектор-момент, за аналогією з векторним моментом сили відносно центра, спрямовується перпендикулярно до площини дії пари у той бік, з якого здається, що поворот тіла або площини під дією пари відбувається проти ходу годинникової стрілки (правило свердлика). Векторний момент пари  $m(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  показаний на рис. 1.23. На відміну від векторного моменту сили відносно центра, **векторний момент пари сил є вільним вектором**: він не має ні фіксованої точки прикладання, ні фіксованої лінії дії сил, що становлять пару (див. нижче).

### Властивості пари сил

Оскільки система двох рівних антипаралельних сил не може бути зведена до рівнодійної, то, як наслідок, **пару сил неможливо зрівноважити однією силою**. Це ще раз нагадує про новий силовий фактор, який становить пара. Це перша властивість пари сил.

Друга властивість пари сил: **сума проєкцій сил, що становлять пару, на будь-яку вісь дорівнює нулю** – це очевидно. Тому пара сил не може входити до рівнянь суми проєкцій сил на вісь, а входить тільки до рівнянь



**Частина перша**

суми моментів сил відносно центра. Слід зазначити, що точки прикладання сил пари можна переміщувати вздовж ліній дії сил у межах цього тіла.

Векторним моментом пари називається момент будь-якої із сил, що створюють пару, відносно точки прикладання другої сили за виразом (1.24):

$$\bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \bar{m}_A(\bar{F}_2) = \bar{m}_B(\bar{F}_1) = \bar{A}\bar{B} \times \bar{F}_2 = \bar{B}\bar{A} \times \bar{F}_1, \quad (1.38)$$

де  $\bar{A}\bar{B}$  – радіус-вектор точки прикладання сили  $\bar{F}_2$  відносно точки  $A$ ;

$\bar{B}\bar{A}$  – радіус-вектор точки прикладання сили  $\bar{F}_1$  відносно точки  $B$ .

Векторний момент пари становить повну характеристику статичної дії пари сили на тверде тіло, тому дії над парами можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами.

Модуль векторного моменту для виразу (1.38) з урахуванням виразу (1.37) дорівнює (рис. 1.23):

$$|\bar{A}\bar{B} \times \bar{F}_2| = AB \cdot F_2 \sin(\angle \bar{A}\bar{B}, \bar{F}_2) = F_2 \cdot h = F_1 \cdot h$$

Із виразу (1.38) можна побачити, що для визначення моменту пари вибирались точки  $A$  і  $B$ , але немає принципової різниці, якщо за центр моментів вибрати будь-яку іншу точку на площині або у просторі. Із цього положення випливає і третя властивість пари сил, яку можна вважати теоремою про суму моментів сил пари:

**сума векторних моментів сил, що становлять пару, відносно довільної точки дорівнює векторному моменту цієї пари і від вибору положення точки не залежить.**

Математично це твердження можна записати наступним чином для подібної пари сил  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ :

$$\bar{m}_O(\bar{P}_1) + \bar{m}_O(\bar{P}_2) = \bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2). \quad (1.39)$$

Доведемо, що це твердження має місце у дійсності, для чого звернемося до рис. 1.24 і визначимо ліву частину виразу (1.39):

$$\bar{m}_O(\bar{P}_1) + \bar{m}_O(\bar{P}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{P}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{P}_2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{P}_2 = \bar{A}\bar{B} \times \bar{P}_2 = \bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2), \quad (1.40)$$

оскільки  $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{A}\bar{B}$  і ця відстань не залежить від вибору точки  $O$  у просторі.

Ця теорема має практичне значення під час розв'язування задач: для будь-якої точки достатньо взяти момент пари сил, не обчислюючи суму моментів кожної сили.

Якщо точка  $O$  як центр моменту обирається у площині дії пари, то справедлива не векторна, а алгебраїчна сума моментів сил:

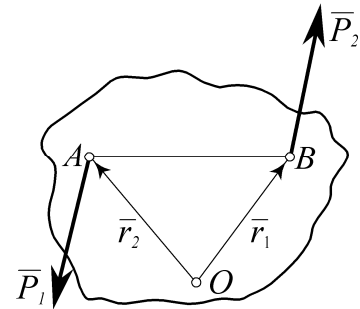


Рис. 1.24

$$m_O(\bar{P}_1) + m_O(\bar{P}_2) = m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = m_B(\bar{P}_1) + m_A(\bar{P}_2). \quad (1.41)$$

Отже, вираз (1.41) свідчить про те, що алгебраїчний момент пари сил дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки, що розміщується на лінії дії другої сили цієї пари.

### Теорема про еквівалентність пар сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил вважаються еквівалентними, якщо після заміни цих пар одна на одну механічний стан твердого тіла не порушиться. Пари сил, розміщені в одній площині, будуть еквівалентними, якщо вони мають однакові алгебраїчні моменти. Розглянемо теорему про еквівалентність пар сил на площині.

*Не змінюючи дії на тверде тіло, пару сил можна замінити будь-якою іншою парю, що розміщена довільно в одній площині і має однаковий алгебраїчний момент.*

Припустимо, що задана пара сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  (рис. 1.25), з плечем  $d_1$  і алгебраїчним моментом

$$m_1 = F_1 \cdot d_1,$$

площина дії якої на тверде тіло збігається з площиною рисунка.

Розкладемо вектори заданої пари  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  на два напрямки: вздовж лінії, що з'єднує точки  $A$  і  $B$ , і вздовж ліній дії векторів другої пари  $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ .

Розкладання відбувається за аксіомою про паралелограм сил:

$$\vec{F}_1 = \vec{P}_1 + \vec{Q}_1; \quad \vec{F}_2 = \vec{P}_2 + \vec{Q}_2. \quad (1.42)$$

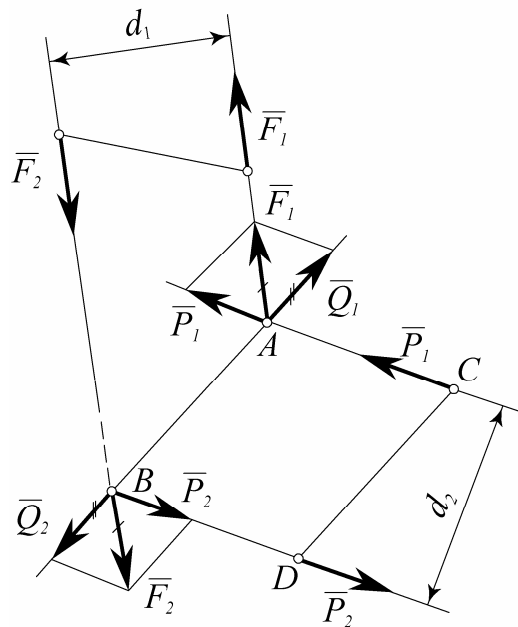


Рис. 1.25

Як легко побачити з рис. 1.25, сили  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$  на підставі першої аксіоми про рівновагу двох рівних сил зрівноважуються і можуть бути виключені, а точки прикладання векторів сил  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ , що залишились, можна перенести в довільні точки  $C$  і  $D$  на площині.

Щоб остаточно довести еквівалентність проведеного перетворення, залишається підтвердити, чи дорівнюють алгебраїчні моменти цих двох пар.

Із виразу (1.42) випливає, що сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  є рівнодійними двох інших сил, тому застосуємо теорему Варіньйона, склавши суми моментів відносно точки  $B$ :

$$m_B(F) = m_B(P) + m_B(Q); \Rightarrow F \cdot d_1 = P \cdot d_2 + Q \cdot 0; \Rightarrow F \cdot d_1 = P \cdot d_2. \quad (1.43)$$

Вираз (1.43) переконливо доводить, що момент заданої пари дорівнює алгебраїчному моменту еквівалентно перетвореної пари:

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = F \cdot d_1 = m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = P \cdot d_2. \quad (1.44)$$

Отже, зроблено еквівалентне перетворення пари сил у площині: задану пару перенесли в інше місце на тілі, повернули на довільний кут, змінили модулі векторів сил і плечі пар сил, залишивши незмінним лише два головних параметри пар: алгебраїчний момент і площину дії.

Таким чином, пара сил, що діє на тверде тіло, становить новий самостійний елемент статки, новий силовий фактор, який поряд із силою є важливішим поняттям механіки. Основні властивості нового силового фактора і основні правила перетворення, яким підпорядкований цей фактор, встановлені доведеними теоремами про пари.

З доведених теорем випливають **умови еквівалентності пар сил**:

– не змінюючи дії на тіло, пару сил можна повертати на будь-який кут та переносити як завгодно в площині її дії в межах цього тіла;

– дія пари на тіло не зміниться, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площина дії залишалися незмінними;

– пара сил на площині вважається заданою, якщо заданий її алгебраїчний момент і площина дії;

– якщо на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати.

Якщо всі пари цієї системи пар розміщені в одній площині, то момент підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k; \quad (1.45)$$

– сума моментів сил, що становлять пару, відносно довільної точки не залежить від положення точки і дорівнює моменту пари.

– питання про те, який рух буде здійснювати тверде тіло під дією пари сил, належить до задач динаміки.

### **Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил на площині**

Допустимо, що до тіла прикладена система пар сил з алгебраїчними моментами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  і момент підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар  $M$ .

Тоді для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб момент рівнодійної пари дорівнював нулю. У такому разі і алгебраїчна сума моментів складових пар теж повинна дорівнювати нулю:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = 0. \quad (1.46)$$

#### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладання?
2. Чому дорівнює рівнодійна двох антипаралельних сил? Де знаходиться точка її прикладання?
3. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
4. Як спрямований векторний момент сили відносно точки?
5. Що таке пара сил або просто пара?
6. Які властивості має пара сил?
7. Як визначити момент пари? Як спрямований векторний момент пари?
8. Як формулюється теорема про еквівалентність пар сил?
9. Як формулюється теорема Варіньйона?
10. Як вибираються точки прикладання векторних моментів пари сил і сили відносно центра?

### 1.4. Плоска система сил. Зведення сил і умови рівноваги тіл

#### 1.4.1. Система сил, довільно розміщених на площині.

##### Теорема про паралельне перенесення лінії дії сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла, довільно розміщені в одній площині, то така система сил є плоскою системою довільних сил. Розглянемо лему про паралельне перенесення лінії дії сили, прикладеної до тіла. Візьмемо довільне тіло, до якого в точці  $A$  прикладена сила  $\vec{P}_1$  з лінією дії  $MN$  (рис. 1.26 а). Виберемо на тілі другу точку  $B$  і проведемо крізь неї пряму, паралельну прямій  $MN$ . Прикладемо на цій прямій у точці  $B$  зрівноважену систему двох сил  $\vec{P}_2 = -\vec{P}_3$ , яка еквівалентна нулю, модулі ж усіх трьох сил виберемо однаковими:  $P_1 = P_2 = P_3$ . Тоді статичний стан твердого тіла на рис. 1.26 а є еквівалентним стану тіла на рис. 1.26 б. Як легко побачити з рис. 1.26 б, сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_3$  можна об'єднати у пару сил  $(\vec{P}_1, \vec{P}_3)$ , адже  $P_1 = P_3$ ,  $\vec{P}_1 \parallel \vec{P}_3$ , і замінити моментом  $\vec{m}(\vec{P}_1, \vec{P}_3)$  пари. Слід зазначити, що модуль моменту цієї пари дорівнює моменту цієї сили  $\vec{P}_1$  відносно точки  $B$ :

$$m(\vec{P}_1, \vec{P}_3) = P_1 \cdot h = m_B(\vec{P}_1). \quad (1.47)$$

Отже, остаточно маємо силу  $\vec{P}_1$ , яка перенесена паралельно в точку  $B$  (сили дорівнюють  $\vec{P}_2 = \vec{P}_1$ ) і, так звану, «приєднану» пару  $(\vec{P}_1, \vec{P}_3)$ , момент якої дорівнює моменту сили заданої  $\vec{P}_1$ , що переноситься, відносно точки переносу  $B$  (рис. 1.26 в). Тому задана сила  $\vec{P}_1$ , прикладена в точці  $A$ , еквівалентна рівній їй силі  $\vec{P}_2$ , прикладеній у точці  $B$ , і парі сил  $(\vec{P}_1, \vec{P}_3)$  з моментом, який дорівнює моменту заданої сили відносно точки перенесення.

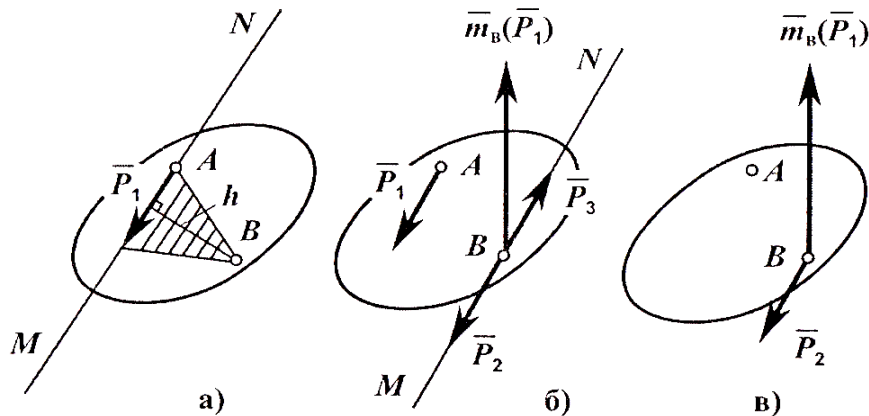


Рис. 1.26

Таким чином, теорему можна сформулювати так.

*У разі паралельного перенесення лінії дії прикладеної до твердого тіла сили у довільну точку на тілі статичний стан тіла не зміниться, якщо при цьому додати, так звану, «приєднану» або компенсаційну пару, момент якої дорівнює моменту заданої сили відносно точки перенесення.*

#### 1.4.2. Зведення плоскої системи довільних сил до заданого центра. Основна теорема статички

Уявимо довільне тверде тіло, що знаходиться під дією системи сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ , лінії дії яких розміщені у площині рисунка і розташовані довільно (рис. 1.27 а). Виберемо на тілі довільну точку  $O$  як центр зведення. Перенесемо у центр зведення всі сили, які діють на тіло, паралельно самім собі (якщо лінія дії сили перетинає точку  $O$ , то ця сила просто переноситься вздовж лінії дії у центр зведення).

Розпочнемо з сили  $\bar{P}_1$ . Лінія дії сили переноситься паралельно самій собі у точку  $O$ , за нею відкладається сила, при цьому до тіла додається момент «приєднаної» пари сил, який дорівнює моменту сили  $\bar{P}_1$  відносно точки  $O$ :

$$m_1 = P_1 h_1 = m_o(\bar{P}_1). \quad (1.48)$$

Тепер маємо, згідно з лемою, силу  $\bar{P}_1$ , яка прикладена до тіла у центрі зведення  $O$ , та «приєднану» до тіла пару сил з моментом  $m_1$ . Подібне вчинимо і з рештою сил  $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ . Всі вони переносяться паралельно самим собі у центр зведення  $O$  і при цьому до тіла додаються «приєднані» пари сил:

$$m_2 = P_2 h_2 = m_o(\bar{P}_2), \quad m_3 = P_3 h_3 = m_o(\bar{P}_3), \quad m_n = P_n h_n = m_o(\bar{P}_n). \quad (1.49)$$

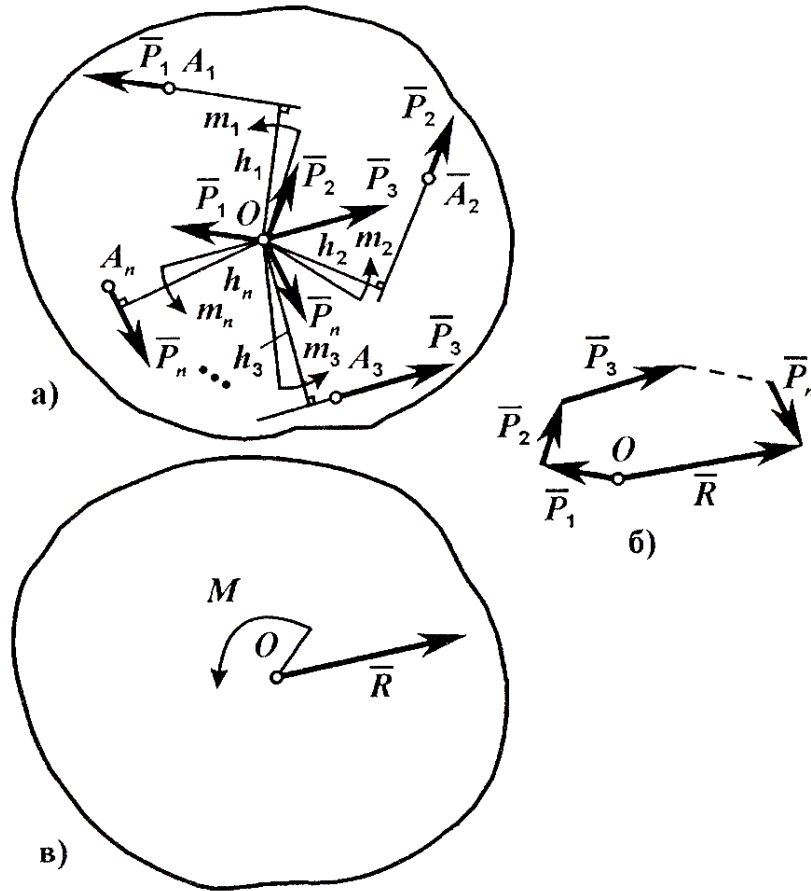


Рис. 1.27

У підсумку таких операцій до тіла в точці  $O$  прикладатиметься плоский пучок системи збіжних сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$  і система «приєднаних» пар сил з моментами  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ .

Пучок збіжних сил у точці  $O$  можна замінити однією силою  $\bar{R}$ , яку називають головним вектором плоскої системи довільних сил. Для цього необхідно додати векторно систему збіжних сил, прикладених у центрі зведення  $O$ , будуючи силовий багатокутник (рис. 1.27 б):

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.50)$$

Систему пар сил, яка тепер прикладена до тіла, також можна додати, отримавши головний момент плоскої системи довільних сил, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.51)$$

Таким чином, **плоска система довільних сил може бути зведена до двох силових факторів: однієї сили  $\bar{R}$  – головного вектора системи – і однієї пари сил з моментом  $M$  – головного моменту системи** (рис. 1.27 в).

*Головний вектор системи дорівнює геометричній сумі векторів складових сил, а головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів системи сил відносно центра зведення.*

Головний вектор  $\bar{R}$  і головний момент  $M$  плоскої системи довільних сил мають деякі особливості. Так, величина головного вектора  $\bar{R}$  не залежить від положення центра зведення, а величина головного моменту  $M$  залежить від зміни положення центра зведення.

Якщо ж головний вектор  $\bar{R}$  дорівнює нулю, то головний момент  $M$  буде незалежним від вибору центра зведення. Якщо ж головний момент  $M$  дорівнює нулю, то головний вектор  $\bar{R}$  буде рівнодієюю плоскої системи сил. Визначимо аналітично головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил.

Для обчислення головного вектора  $\bar{R}$  спочатку визначимо його проєкції на осі плоскої прямокутної системи декартових координат (відповідно до теореми про проєкцію рівнодієюї сили на вісь):

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}, \end{aligned} \right\} (1.52)$$

де  $P_{kx}$ ,  $P_{ky}$  – проєкції  $k$ -ї сили системи на відповідні осі координат.

Визначивши проєкції головного вектора на осі координат, отримаємо модуль головного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.53)$$

Головний момент  $M$  визначається алгебраїчним додаванням моментів складових сил відносно центра зведення  $O$ :

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.54)$$

Розглянемо окремі випадки, які можуть мати місце під час зведення плоскої системи довільних сил до визначеного центра.

1. Головний вектор  $\bar{R} = 0$ , а головний момент  $M \neq 0$ . У цьому випадку величина головного моменту  $M$  не залежить від вибору центра зведення;

2. Головний момент  $M = 0$ , а головний вектор  $\bar{R} \neq 0$ . У такому випадку головний вектор  $\bar{R}$  є рівнодієюю силою системи сил.

### **1.4.3. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил**

Визначимо умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил, за яких ця система сил буде зрівноваженою. Це одна із двох основних задач статки. Як доведено, плоска система довільних сил завжди може бути зведена до однієї сили, яка має назву головного вектора

системи, і однієї пари – головного моменту системи.

Тоді для рівноваги плоскої системи довільних сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор  $\bar{R}$  і головний момент  $M$  системи дорівнювали нулю.

$$\left. \bar{R} = \sum \bar{P}_k = 0, \quad M_O = \sum m_o(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.55)$$

Це означає, що кожний доданок під радикалом виразу (1.53) як сума проєкцій (1.52) має дорівнювати нулю. Звідси отримуємо аналітичні умови рівноваги:

$$\left. \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.56)$$

*Таким чином, для рівноваги твердого тіла, що перебуває під дією плоскої системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на дві осі координат і сума моментів всіх сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.*

Умови рівноваги у формі (1.56) є основною формою умов рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил, оскільки не накладають ніяких обмежень ні на розташування осей системи координат, ні на положення центра, відносно якого складаються моменти прикладених сил.

Існують дві інші додаткові форми умов рівноваги тіла для плоскої системи довільних сил:

$$\left. \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.57)$$

На цю форму умов рівноваги (1.57) накладається обмеження: пряма, що може з'єднувати точки  $A$  і  $B$ , відносно яких визначаються суми моментів сил, не повинна бути перпендикулярною до осі, на яку проєктуються ці сили.

Необхідність умов рівноваги (1.57) очевидна: якщо будь-яка одна умова із системи умов не виконується, то рівноваги не буде.

Розглянемо достатність умов рівноваги. Якщо виконуються, наприклад, дві останні умови, то головний момент системи сил дорівнює нулю і така система може бути зведена до однієї еквівалентної сили – рівнодійної, лінія дії якої буде проходити крізь точки  $A$  і  $B$ . Проте, згідно з першою умовою має бути  $R_x = 0$ . Оскільки вісь  $x$  не перпендикулярна до прямої  $AB$ , то остання умова може бути виконана тільки тоді, якщо рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, тобто коли тіло буде зрівноваженим. Третя форма умов рівноваги має такий вигляд:

$$\left. \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.58)$$



На цю форму умов рівноваги також накладається обмеження: точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , відносно яких складаються суми моментів сил, не повинні бути розміщені на одній прямій.

Необхідність форми умов (1.58) очевидна, оскільки під час рівноваги алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільного центра дорівнює нулю.

Достатність цих умов випливає з того, що, коли за одночасного виконання цих умов ця система сил не була б зрівноваженою, то вона мала б рівнодійну, лінія дії якої одночасно проходила б крізь точки  $A, B, C$ , що неможливо, тому що ці точки не розміщені на одній прямій. Отже, у разі виконання умов (1.58) тіло під дією плоскої системи довільних сил буде зрівноваженим.

#### **1.4.4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи паралельних сил**

Якщо лінії дії усіх сил паралельні, то завжди у площині можна так розташувати осі координат, що одна з них буде паралельною заданим силам, а друга – перпендикулярною. Тому, щоб тіло під дією плоскої системи паралельних сил перебувало у рівновазі, необхідно прирівняти до нуля алгебраїчну суму проєкцій усіх сил на паралельну вісь і алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно довільної точки. У такому випадку система умов рівноваги (1.56) спрощується і матиме такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

*Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на вісь, яка паралельна силам, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки площини дорівнювали нулю.*

Для системи паралельних сил на площині можна використовувати і такі умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

*Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок площини дорівнювали нулю.*

Проте, для цих умов існує обмеження: лінія  $AB$ , якою можна з'єднати центри моментів, не повинна бути паралельною векторам сил.

Такі умови (1.60) найбільш придатні під час розрахунків двоопорних балок. Використовуючи ці умови, складають алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно точок  $A$  і  $B$ , у яких встановлені опори балки.

### 1.4.5. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил

#### Приклад 1.4

Однорідна балка  $AB$  прямокутного перерізу вагою  $400\text{ Н}$  у точці  $A$  закріплена шарнірно, а у точці  $O$  опирається на точкову опору (рис. 1.28). До другого кінця балки  $B$  підвішений вантаж вагою  $200\text{ Н}$ . Довжина балки  $4\text{ м}$ , точкова опора розміщена на відстані  $\frac{3}{4}$  довжини балки від шарнірної опори. Кут нахилу балки до горизонту  $\alpha = 30^\circ$ . Визначити реакції опор балки.

#### Розв'язання

Складемо розрахунково-силову схему задачі. Прикладемо до осі балки задані активні сили: силу ваги  $\bar{G}$  самої балки і силу ваги  $\bar{Q}$  вантажу. Сила ваги балки  $\bar{G}$  прикладена посередині балки у точці  $C$  (балка однорідна) і спрямована вертикально вниз. Сила ваги вантажу  $\bar{Q}$  прикладена в точці  $B$  балки і спрямована вертикально вниз.

Далі умовно звільняємо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в'язей.

У точці  $A$  розміщена шарнірно-нерухома опора, напрям її реакції невідомий, тому розкладаємо останню на дві складові  $\bar{X}_A$  і  $\bar{Y}_A$ , які спрямуємо вздовж відповідних осей координат. У точці  $O$  – точкова опора, яка дає одну реакцію  $\bar{R}_O$ , спрямовану перпендикулярно до балки.

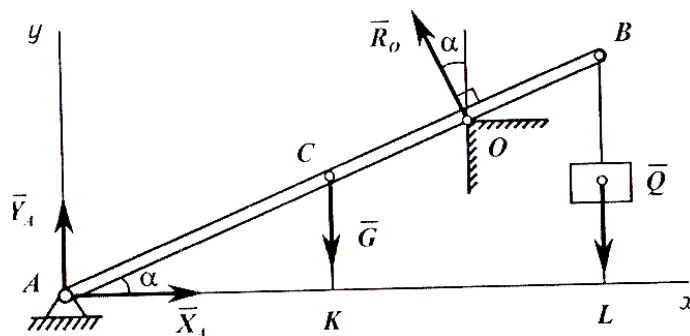


Рис. 1.28

Таким чином, балка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання цієї задачі використовуємо умови рівноваги (1.56). Оскільки осі координат  $X$  і  $Y$  задані за умовою задачі, то складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_A - R_O \sin \alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad Y_A - G - Q + R_O \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(P_k) = 0; \quad -G \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha + R_O \cdot AO - Q \cdot AB \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\}$$

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} X_A - 0,5R_O = 0, \\ Y_A - 400 - 200 + 0,866R_O = 0, \\ -400 \cdot 2 \cdot 0,866 + 3R_O - 200 \cdot 4 \cdot 0,866 = 0. \end{aligned} \right\}$$

З третього рівняння обчислимо реакцію  $R_O$ :

$$R_O = \frac{692,8 + 692,8}{3} = 461,86\text{ Н}$$

і підставимо її значення у перші два рівняння:

$$X_A = \frac{1}{2} R_O = 230,93\text{ Н}; \quad Y_A = 400 + 200 - 0,866 \cdot 461,86 = 160,04\text{ Н}.$$

## Частина перша

Оскільки визначені складові реакції, що прикладені в точці  $A$ , то векторним додаванням можна обчислити модуль повної реакції  $R_A$ :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{230,93^2 + 160,04^2} = \sqrt{78941,5} = 280,97 \text{ Н}.$$

### Приклад 1.5

Визначити реакції опори однорідної балки  $AB$  (рис. 1.29) прямокутного перерізу, один кінець якої  $A$  жорстко закріплений у стіні і яка перебуває під дією зосередженої сили  $P = 4,0 \text{ кН}$ , пари сил з моментом  $m = 2,0 \text{ кНм}$  і рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $q = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ . Довжина балки  $AB$  дорівнює  $5 \text{ м}$ , рівномірно-розподілене навантаження діє на ділянці  $3 \text{ м}$  від точки  $A$ . Кут нахилу зосередженої сили  $\bar{P}$  до горизонту становить  $\alpha = 30^\circ$ , осі  $x$  і  $y$  показані на рис. 1.29.

### Розв'язання

Складаємо розрахунково-силову схему. Покажемо всі сили, прикладені до балки  $AB$ .

Насамперед, це задані активні сили: сила  $\bar{P}$ , прикладена до кінця балки  $B$  і спрямована під кутом  $\alpha$  до горизонту; рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою:

$$Q = q \cdot AC = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ кН}.$$

Сила  $\bar{Q}$  прикладена посередині ділянки  $AC$  і спрямована у той самий бік, що і саме навантаження – вертикально вниз.

Покажемо на силовій схемі пару сил, яка задається моментом  $m$ .

Далі умовно звільняємо балку від в'язі і замінюємо її відповідними реакціями.

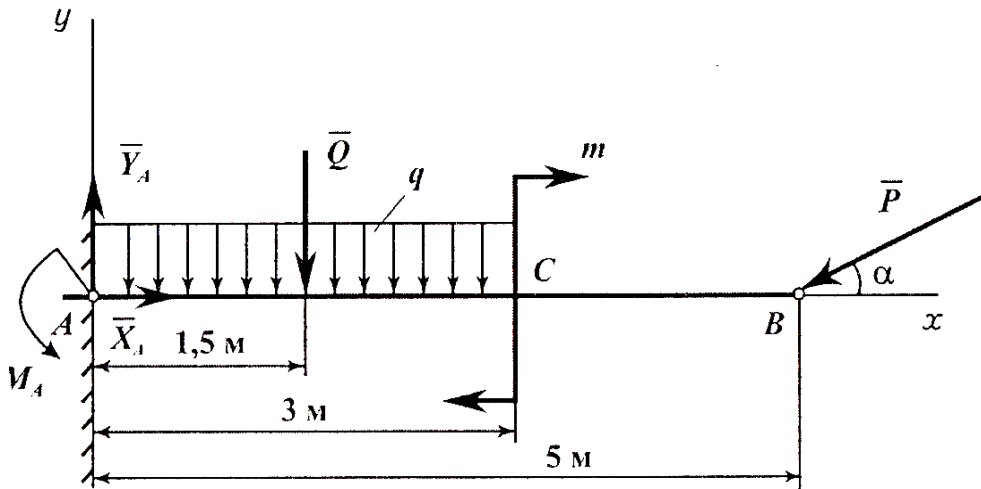


Рис. 1.29

У точці  $A$  маємо жорстке закріплення балки у стіні, а тому воно створює дві складові реакції:  $\bar{X}_A$  та  $\bar{Y}_A$ , розміщені вздовж відповідних осей координат, і реактивний момент  $M_A$ .

Напрямок цього невідомого моменту показано на силовій схемі довільно, наприклад, проти ходу стрілки годинника.

Якщо ж під час остаточного визначення моменту  $M_A$  отримаємо від'ємний знак, то це інформує про те, що дійсний напрямок моменту є протилежним.

Покажемо на силовій схемі лінійні параметри і осі прямокутної системи декартових координат.

Як легко побачити з побудованої розрахунково-силової схеми, балка перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи довільних сил.

Використовуємо умови рівноваги (1.56). На підставі цих умов складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} X_A - P \cos \alpha = 0, \quad Y_A - Q - P \sin \alpha = 0, \\ -Q \cdot \frac{AC}{2} - P \sin \alpha \cdot AB + M_A - m = 0. \end{aligned} \right\}$$

З першого рівняння  $X_A = 4,0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ kH}$ .

З другого рівняння  $Y_A = 4,5 + 4,0 \cdot \frac{1}{2} = 6,50 \text{ kH}$ .

З третього рівняння

$$M_A = 2,0 + 4,5 \frac{3}{2} + 4,0 \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,0 + 6,75 + 10,0 = 18,75 \text{ kHm}.$$

Модуль  $R_A$  повної реакції у точці  $A$  дорівнює:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(3,46)^2 + (6,5)^2} = \sqrt{54,22} = 7,36 \text{ kH}.$$

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
2. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
3. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
4. В якому випадку плоска система довільних сил зводиться до однієї пари?
5. Чи залежить головний вектор від вибору центра зведення?
6. В якому випадку головний момент не залежить від вибору центра зведення?
7. Сформулюйте теорему Варіньйона про момент рівнодійної.
8. Які умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил?
9. З'ясуйте три форми умов рівноваги плоскої системи довільних сил?
10. Які обмеження накладені на другу і третю форми умов рівноваги для плоскої системи довільних сил?

### 1.5. Розрахунок системи із декількох тіл

#### 1.5.1. Зосереджені сили і розподілені навантаження

У попередніх розділах розглядалися сили, які були представлені у вигляді зосередженого вектора, прикладеного до точки. Проте, у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Прикладами розподілених сил є сили тиску рідини або газу, сили ваги як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому, у теоретичній механіці вводиться поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі і об'ємні. Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла, об'ємні – на кожний елемент об'єму тіла. Прикладом останніх сил є сила ваги.

Під час розв'язування задач розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодійною, тобто, зосередженою силою.

Введемо декілька загальних положень. Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю  $q$ , тобто, величиною сили, яка припадає на одиницю об'єму тіла, на одиницю площі або на одиницю довжини. В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах воно зображується у вигляді епюри елементарних сил, тобто, графіка інтенсивності навантаження, яке прикладене до лінійного елемента тіла.

У загальному випадку плоске розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає заданий закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (балки) (рис. 1.30).

Розглянемо рівномірно розподілене навантаження та навантаження, яке розподілене за лінійним законом.

1. Рівномірно розподілене навантаження (розподілене за законом прямокутника) зображується на схемах у вигляді прямокутника: висота – це інтенсивність навантаження  $\bar{q}$ , довжина – це довжина  $l$  ділянки тіла. Стрілки показують напрямок дії навантаження (рис. 1.31).

Для того, щоб замінити це навантаження рівнодійною силою  $\bar{Q}$ , треба її визначити:

$$Q = ql, \quad (1.61)$$

де  $q$  – інтенсивність навантаження,  $H/m$ ;  $l$  – довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження,  $m$ .

Точка  $C$  прикладання рівнодійної сили  $\bar{Q}$  розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє рівномірно-розподілене навантаження.

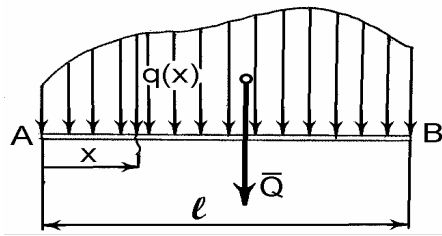


Рис. 1.30

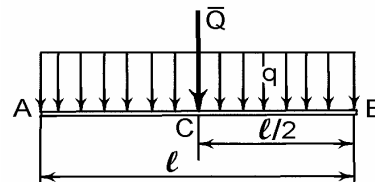


Рис. 1.31

2. Навантаження, розподілене за лінійним законом, зображується трикутником (рис. 1.32).

У цьому випадку інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці  $l$  змінюється від 0 до максимального значення  $q_{\max}$ . Рівнодійна сила  $\bar{Q}$  від цього навантаження за величиною пропорційна площі трикутника:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l. \quad (1.62)$$

Точка  $C$  прикладання рівнодійної  $\bar{Q}$  розміщена на відстані від центра площі трикутника (центра ваги):  $AC = \frac{2}{3}l$  або  $BC = \frac{1}{3}l$ , а напрямок рівнодійної збігається з напрямком навантаження.

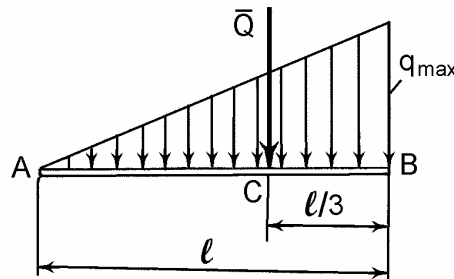


Рис. 1.32

### 1.5.2. Статично визначені і статично невизначені задачі

Задача є статично визначеною, якщо для неї можна скласти таку кількість рівнянь у відповідності до умов рівноваги статички для матеріальної системи, яка не менша, ніж число невідомих.

Теоретична механіка розглядає тільки статично визначені матеріальні системи.

Із раніше наведених прикладів можна зробити з цього приводу такі висновки. Так, для тіла, навантаженого плоскою системою збіжних сил, можна скласти тільки два рівняння рівноваги, тому і невідомих повинно бути не більше двох.

Балка на двох опорах, навантажена паралельними силами в площині, буде статично визначеною, а на трьох – ні, адже рівнянь рівноваги, що можна скласти для цієї системи, тільки два.

Для плоскої системи довільних сил можливо визначити тільки три невідомих реакції у зв'язку з кількістю умов рівноваги для цієї системи, на підставі яких складаються рівняння рівноваги.

Причина невизначеності, тобто, недостатності рівнянь статички для визначення шуканих величин полягає у тому, що в статиці твердого тіла розглядаються абсолютно тверді тіла, без врахування

деформацій.

Якщо врахувати пружні властивості тіл, тобто, їхні деформації, то невизначені задачі можуть бути розв'язані. Але подібні задачі виходять за межі курсу статyki.

Таким чином, задача є статично невизначеною, якщо кількість умов рівноваги системи менше, ніж число невідомих.

### 1.5.3. Рівновага системи із декількох твердих тіл

У попередніх задачах розглядалась рівновага одного твердого тіла під дією прикладених зовнішніх сил.

Системою тіл називається сукупність декількох тіл, які або спираються одне на одне, або з'єднані шарнірами, які не заважають можливості відносного руху тіл.

**Зовнішні сили** – це сили взаємодії тіл заданої системи з іншими тілами, які не входять до складу цієї системи.

Під час розрахунку системи декількох тіл потрібно розглядати рівновагу кожного тіла окремо, враховуючи сили їхньої взаємодії.

Сили взаємодії згідно з аксіомою про дію і протидію рівні за модулем і протилежні за напрямком.

**Внутрішні сили системи** – це сили взаємодії між окремими тілами, які входять до складу цієї системи. Внутрішні сили існують попарно, як дія і протидія. Більш детально – у наступному підрозділі.

### 1.5.4. Методика і приклад розв'язування задач на рівновагу системи тіл

Рівновагу системи тіл можна розглядати загалом під дією тільки зовнішніх сил. Але може так статись, що кількість рівнянь рівноваги буде меншою, ніж кількість невідомих. Тоді необхідно розглядати рівновагу окремих тіл системи, умовно розділяючи її по внутрішніх в'язях. До того ж, необхідно враховувати, що внутрішні сили реакцій розділених в'язей існують попарно, як сили дії та протидії.

Розглянемо приклади розв'язування задач на рівновагу системи тіл.

#### Приклад 1.6

На тришарнірну арку  $ABC$  (рис. 1.33) діє вертикальна сила  $P = 10 \text{ kH}$ . Вага кожної частини балки  $Q_1 = Q_2 = 6 \text{ kH}$ .

Визначити реакції шарнірів  $A, B, C$  арки, розміри якої дані на рисунку.

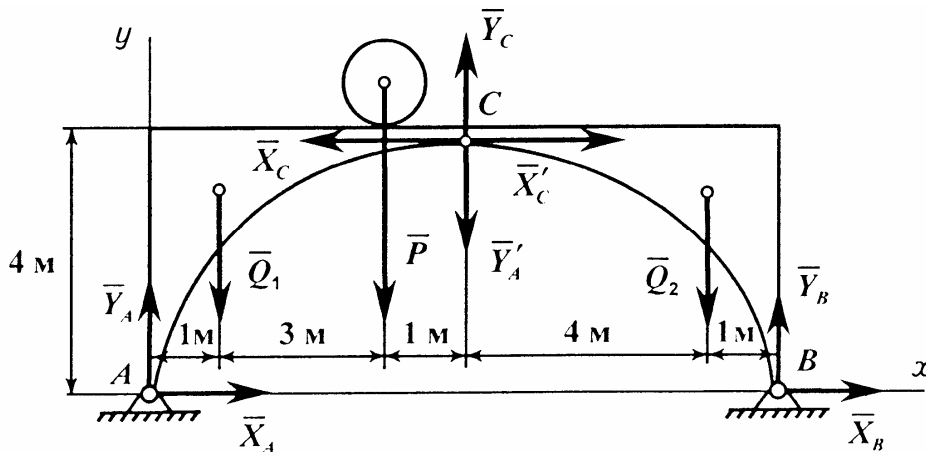


Рис. 1.33

#### Розв'язання

Як видно зі схеми, задана система тіл складається з двох піварок  $AC$  і  $BC$ , з'єднаних шарніром у точці  $C$ . Складемо розрахунково-силову схему, де покажемо задані активні сили  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}$  і реакції в'язей: у точках  $A$  і  $B$  (нерухомі шарнірні опори) –  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  і у точці  $C$  (шарнірне з'єднання) –  $\bar{X}_C, \bar{X}'_C, \bar{Y}_C, \bar{Y}'_C$ .

## Частина перша

Невідомі реакції у точці  $C$  є внутрішніми силами системи тіл, а тому  $\bar{X}_C = -\bar{X}'_C$  і  $\bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C$ . Покажемо осі прямокутної системи декартових координат  $Ax$ . Умовно розділяємо систему тіл на два окремих тіла по шарніру  $C$ . Дію відкинутої частини замінюємо двома реакціями  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$ , які дорівнюють:

Тепер розглянемо окремо рівновагу кожного тіла, для чого складемо дві системи рівнянь рівноваги. Використаємо умови рівноваги (1.56).

Для першого тіла (ліва половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_A - X_C = 0, \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_A + Y_C - Q_1 - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Для другого тіла (права половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_B + X'_C = 0, \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_B - Y'_C - Q_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0; Q_2 \cdot 1 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 5 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Як видно з отриманих шести рівнянь рівноваги, в них містяться шість невідомих:  $X_A, X_B, X_C, Y_A, Y_B, Y_C$ .

Визначимо ці невідомі величини. З третього рівняння другої системи визначимо  $Y'_C$ :

$$Y'_C = \frac{4X'_C - Q_2}{5}; X_C = \frac{6 + 6 + 40}{8} = \frac{52}{8} = 6,5 \text{ kH};$$
$$Y'_C = \frac{4X_C - Q_2}{5} = \frac{4 \cdot 6,5 - 6,0}{5} = 4,0 \text{ kH}.$$

З першого рівняння першої системи маємо:  $X_A = X_C = 6,5 \text{ kH}$ .

А з першого рівняння другої системи дістаємо:

$$Y_A = Q_1 + P - Y_C = 6,0 + 10,0 - 4,0 = 12,0 \text{ kH}.$$

З другого рівняння другої системи:

$$Y_B = Y'_C + Q_2 = 4,0 + 6,0 = 10,0 \text{ kH}.$$

---

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як замінити рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою?
2. Як замінити розподілене за лінійним законом навантаження зосередженою силою?
3. Що таке статично означені і статично неозначені задачі?
4. Які особливості має метод розв'язування задач на рівновагу системи тіл?
5. Як спрямувати внутрішні сили взаємодії між тілами системи?
6. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?
7. Що таке зосереджене та розподілене навантаження?
8. Які додаткові умови рівноваги паралельних сил Ви знаєте?
9. Як визначити реакцію у внутрішньому шарнірі системи тіл?
10. Яка основна умова рівноваги плоскої системи паралельних сил?

## 1.6. Розрахунок плоских ферм

### 1.6.1. Характеристика ферм і порядок розрахунку

*Фермою називається геометрично незмінна жорстка конструкція, яка складається із прямолінійних стрижнів, сполучених між собою шарнірами.*

Місце, де стрижні з'єднуються один з одним, носить назву **вузла ферми**. Зовнішнє навантаження прикладається до ферми тільки в її вузлах.

Допускається, що ферма складається із ідеальних стрижнів: тонких, однорідних, невагомих, на кінцях яких є шарніри, внаслідок чого ці стрижні працюють тільки на розтяг або на стиск. У підручнику розглядаються **плоскі ферми**, в яких осі всіх **стрижнів** і вектори зовнішніх **сил**, що навантажують вузли ферми, розміщуються **в одній площині**.

Слід зазначити, що конструктивно ферма складається із стрижнів, які утворюють жорсткі трикутники, а це означає, що в конструкції ферми немає зайвих стрижнів. Такі ферми будуть статично визначеними, якщо кількість стрижнів  $n$  і кількість вузлів  $m$  відповідають співвідношенню:

$$n = 2m - 3. \quad (1.63)$$

Розрахунок ферми зводиться до визначення реакцій зовнішніх опор і внутрішніх реакцій (зусиль) у стрижнях. Зусилля і реакція стрижня співвідносяться між собою як дія і протидія: вони рівні за модулем і протилежні за напрямком. Розглянемо просту плоску ферму (рис. 1.34).

Як можна побачити зі схеми – це плоска конструкція, що складається із 7 стрижнів, що з'єднуються у 5 вузлах. У вузлах I та V ферма має зовнішні опори (у I вузлі – шарнірно-нерухома опора; у V – шарнірно-рухома опора), до II і до IV вузлів ферми прикладені зовнішні навантаження як зосереджені сили  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$  ( $P_1 = 30 \text{ kH}$ ;  $P_2 = 10 \text{ kH}$ ).

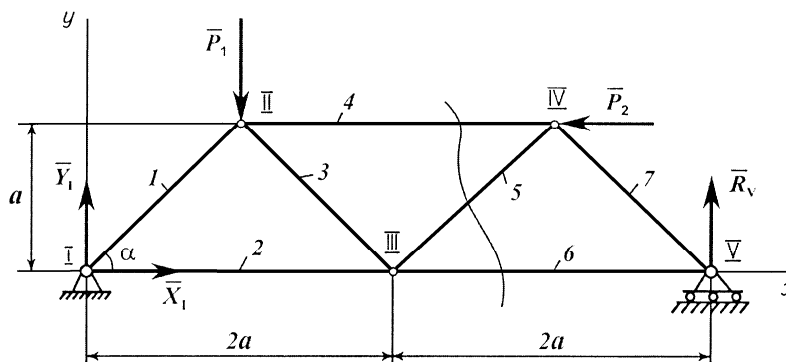


Рис. 1.34

Лінійні розміри ферми і система координат  $Ixy$  показані на схемі



## Частина перша

ферми ( $\alpha = 45^\circ$ ).

Перший етап розрахунку ферми – це визначення її опорних реакцій. Для знаходження опорних реакцій ферму розглядають загалом як тверде тіло з прикладеними зовнішніми силами.

Тоді, умовно звільнюючи ферму від в'язей (опор) і замінюючи їх відповідними реакціями (у вузлі I це реакції  $\bar{X}_I, \bar{Y}_I$ ; у вузлі V –  $\bar{R}_V$ ), отримаємо плоску систему довільних сил, для якої можна використати умови рівноваги (1.56) і скласти систему рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_I - P_2 = 0, \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_I - P_1 + R_V = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_I(\bar{P}_k) = 0; R_V \cdot 4a + P_2 \cdot a - P_1 \cdot a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

З першого рівняння системи обчислюємо невідому реакцію  $X_I = P_2 = 10 \text{ kH}$ . З останнього рівняння обчислюємо реакцію шарнірно-рухомої опори:

$$R_V = \frac{P_1 - P_2}{4} = \frac{30 - 10}{4} = 5 \text{ kH}.$$

Далі, з другого рівняння є можливість обчислити останню невідому величину:

$$Y_I = P_1 - R_V = 30 - 5 = 25 \text{ kH}.$$

Таким чином, обчислено шукані реакції опор ферми. Тепер необхідно визначити невідомі зусилля у стрижнях ферми.

Існує декілька способів визначення цих зусиль: графічні і аналітичні. Ми розглянемо два аналітичних методи: **метод вирізування вузлів** і **метод перетинів** (метод Риттера). Розглянемо послідовно ці методи.

### 1.6.2. Метод вирізування вузлів

Цей метод полягає в послідовному вирізуванні (уявно) вузлів ферми, починаючи з вузла, де збігаються **два стрижні** з невідомими внутрішніми зусиллями (реакціями). Таким чином, **кожний вузол – це плоска система збіжних сил**, для якої можна скласти два рівняння рівноваги і визначити дві реакції.

За правилом реакції стрижнів спрямовуються від вузлів. Якщо ж реакція стрижня отримає від'ємний знак, то це свідчить про те, що дійсний напрямок його реакції протилежний.

Визначимо цим методом зусилля у стрижнях ферми, поданої на рис. 1.34. **Спочатку вирізаємо вузол I, де збігаються тільки два стрижні** (рис. 1.35): кількість рівнянь рівноваги повинна відповідати кількості невідомих. Крім визначених реакцій опор  $\bar{X}_I$  і  $\bar{Y}_I$  до нього прикладаються невідомі реакції перетнутих стрижнів 1 і 2, які позначаються  $\bar{S}_1$  та  $\bar{S}_2$  і

спрямовуються, за прийнятим правилом, від вузла.

Покажемо на схемі осі плоскої прямокутної системи декартових координат  $x/y$  та кут  $\alpha$ . Як видно зі схеми, вузол  $I$  перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил з двома невідомими зусиллями  $\bar{S}_1$  і  $\bar{S}_2$ . Складемо для вузла  $I$  рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги для плоскої системи збіжних сил у вигляді (1.20):

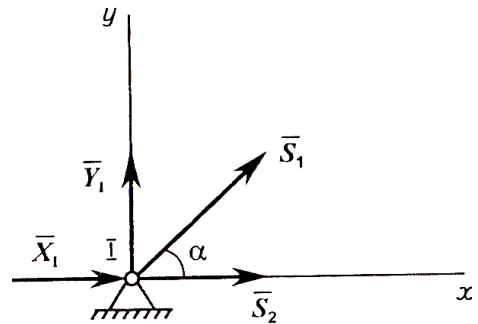


Рис. 1.35

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_I + S_2 + S_1 \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad Y_I + S_1 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

З другого рівняння визначаємо:

$$S_1 = -\frac{Y_I}{\sin \alpha} = -\frac{25}{0,707} = -35,3 \text{ kH}.$$

Як легко побачити, стрижень 1 є стиснутим із зусиллям  $35,3 \text{ kH}$ , про що інформує знак «мінус». З першого рівняння визначимо величину другої невідомої реакції:

$$S_2 = -X_I - S_1 \sin \alpha = -10 - (-35,3 \cdot 0,707) = -10 + 25,00 = 15,00 \text{ kH}.$$

Отже, стрижень 2 перебуває у стані розтягу, що здійснюється із зусиллям  $15,0 \text{ kH}$ .

Далі можна вирізати тільки вузол II (рис. 1.36). У цьому вузлі зосереджені зовнішня сила  $\bar{P}_1$  і реакції трьох стрижнів  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_3$  і  $\bar{S}_4$ . До того ж, невідомими є реакції тільки у двох стрижнях: 3 ( $\bar{S}_3$ ) і 4 ( $\bar{S}_4$ ).

Попередньо вважаємо, що стрижні 3 і 4 розтягнуті і їхні реакції  $\bar{S}_3$  і  $\bar{S}_4$  спрямуємо від вузла II. Зусилля ж у стрижні 1 вже визначено раніше під час вирізання першого вузла і не тільки встановлено його значення, але й те, що він є стиснутим, а тому його реакція  $\bar{S}_1$  буде спрямована до вузла II.

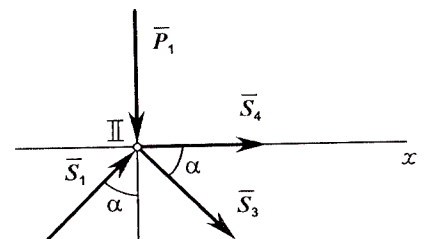


Рис. 1.36

Проведемо крізь вузол II осі координат і покажемо кути  $\alpha$ . Слід ще раз підкреслити, що в кожному вузлі повинно бути не більше двох невідомих, тому що для плоскої системи збіжних сил можна скласти тільки

### Частина перша

два рівняння рівноваги. Складемо для вузла II рівняння суми проекцій на осі координат, використовуючи умови, аналогічні (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_4 + S_3 \cos \alpha + S_1 \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad -S_3 \sin \alpha + S_1 \cos \alpha - P_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

З другого рівняння визначаємо зусилля:

$$S_3 = \frac{S_1 \cos \alpha - P_1}{\sin \alpha} = \frac{35,3 \cdot 0,707 - 30}{0,707} = -\frac{5,00}{0,707} = -7,00 \text{ kH}.$$

Як легко побачити, стрижень 3 є стиснутим із зусиллям  $7 \text{ kH}$ . Напрямок реакції  $S_3$  – до вузла II. З першого рівняння знаходимо:

$$\begin{aligned} S_4 &= -S_1 \sin \alpha - S_3 \cos \alpha = -35,30 \cdot 0,707 - (-7,00)0,707 = \\ &= -25,00 + 5,0 = -20,00 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Таким чином, стрижень 4 теж стиснутий із зусиллям  $20,00 \text{ kH}$ .

Далі вирізаємо вузол IV (рис. 1.37).

Він перебуває в рівновазі під дією зовнішньої сили  $\bar{P}_2$  і зусиль у стрижнях 4, 5 і 7. Зусилля у стрижні 4 визначено раніше і його напрямок – до вузла, а тому шуканими невідомими є тільки зусилля  $\bar{S}_5$  і  $\bar{S}_7$ .

Проведемо крізь вузол IV осі координат  $x$  та  $y$  покажемо кути  $\alpha$ .

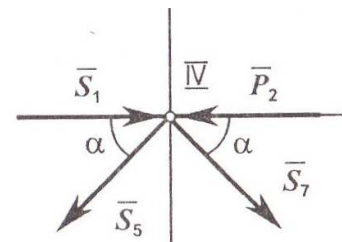


Рис. 1.37

Напрямки зусиль у стрижнях 5 і 7 – від вузла IV.

Складемо для вузла IV рівняння рівноваги, також використовуючи умови рівноваги (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_4 - P_2 - S_5 \cos \alpha + S_7 \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad -S_5 \sin \alpha - S_7 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (1.67), для чого з другого рівняння виразимо зусилля  $S_5$  через зусилля  $S_7$ :

$$S_5 = -\frac{S_7 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -S_7.$$

Тепер підставимо значення  $S_5$  у перше рівняння системи:

$$S_7 \cos \alpha - (-S_7) \cos \alpha - P_2 + S_4 = 0. \text{ Звідки}$$

$$S_7 = \frac{P_2 - S_4}{2 \cos \alpha} = \frac{10 - 20}{2 \cdot 0,707} = -7,00 \text{ kH}.$$

Стрижень 7 є стиснутим із зусиллям  $7,00 \text{ kH}$ . Тепер маємо можливість знайти зусилля  $S_5 = -S_7 = 7,00 \text{ kH}$ . Стрижень 5 розтягнутий. Для остаточного визначення зусиль у стрижнях ферми, що розглядається, необхідно вирізати вузол V (рис. 1.38).

До вузла V прикладена реакція зовнішньої опори  $\bar{R}_V$ , відоме зусилля  $\bar{S}_7$ , спрямоване до вузла, та невідоме зусилля  $\bar{S}_6$ , яке слід направити від вузла. Складемо для вузла V рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.20):

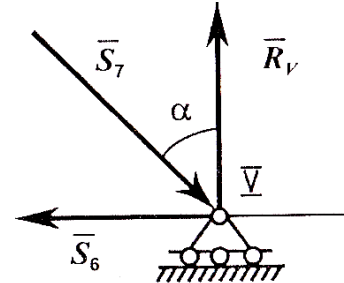


Рис. 1.38

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; & S_7 \sin \alpha - S_6 &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; & R_V - S_7 \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Як легко побачити, для визначення останнього невідомого зусилля  $S_6$  достатньо розв'язати перше рівняння системи (1.68):

$$S_6 = S_7 \cos \alpha = 7,00 \cdot 0,707 = 5,00 \text{ kH}.$$

Стрижень 6 розтягнутий із зусиллям  $5,0 \text{ kH}$ .

Дані розрахунків заносимо у табл. 1.1. Знак обчисленого зусилля у стрижні визначає характер його навантаження. Якщо знак додатній («плюс»), то стрижень розтягнутий, а якщо від'ємний – то стиснутий.

Таблиця 1.1

№ стрижнів	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля в kH	-35,30	+15,00	-7,00	-20,00	+7,00	+5,00	-5,00

### 1.6.3. Метод Ріттера (метод перетину)

Розглянемо інший аналітичний метод визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми, метод Ріттера або метод перетину.

Цей метод має декілька переваг порівняно з розглянутим раніше методом вирізування вузлів. У цьому разі ставиться інша мета. Необхідно

### Частина перша

визначити реакції у стрижнях того перерізу ферми, який здається найбільш небезпечним. Тоді немає необхідності розглядати послідовно велику кількість вузлів, особливо, якщо ферма є складною. Крім того, у разі неточності розрахунку величини реакції у стрижнях, помилка в подальшому накопичуватиметься. Метод Ріттера позбавлений цих незручностей.

**Особливості** застосування цього **методу** полягають у тому, що умовно робиться **перетин усієї ферми**, при цьому в зоні перетину повинно бути **не більше, ніж три стрижні** з невідомими зусиллями. Потім розглядається рівновага однієї з частин ферми, а друга частина відкидається.

Дію стрижнів, які потрапили під перетин, замінюють їхніми реакціями. Попередньо вважається, що ці стрижні розтягнуті, тобто, їх зусилля спрямовуються від вузлів.

Опорні реакції ферми визначаються так само, як і під час застосування методу вирізування вузлів.

Визначимо зусилля у 4, 5 і 6 стрижнях ферми, зробивши перетин і розглядаючи рівновагу простої правої частини ферми (рис. 1.39).

Замість перерізаних стрижнів прикладаємо у вузлі IV зусилля  $\bar{S}_4$  і  $\bar{S}_5$ , а у вузлі V – зусилля  $\bar{S}_6$ . Напрямки вказаних зусиль – від вузлів. До цієї частини ферми прикладена зовнішня сила  $\bar{P}_2$  і реакція опори  $\bar{R}_V$ . Покажемо осі прямокутної системи декартових координат  $Vxy$  і кути  $\alpha$ .

Як можна побачити, ця частина ферми перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил, а тому можна скласти для неї рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.57).

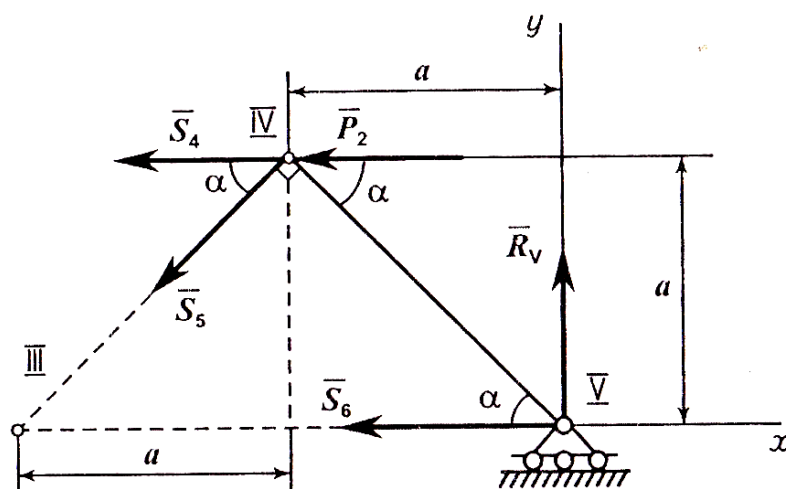


Рис. 1.39

Проте, тут доцільно застосувати *спосіб трьох моментних точок*.

Згідно з цим способом складаються рівняння рівноваги як суми моментів сил відносно тих точок, де перетинаються лінії дії двох векторів реакцій з невідомими зусиллями.

Тоді ці невідомі реакції в рівняння не входитимуть.

Перевага способу моментних точок полягає в тому, що отримані рівняння рівноваги будуть простими, з одним невідомим. У нашому випадку (рис. 1.39) такими точками будуть вузли III і IV.

Відносно цих точок складемо суми моментів сил. Проте, третьої моментної точки тут не існує, тому що вектори  $\bar{S}_4$  і  $\bar{S}_6$  не перетинаються (паралельні). Перше рівняння є сумою проєкцій сил на вертикаль.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad R_V - S_5 \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_{III}(\bar{P}_k) = 0; \quad P_2 \cdot a + S_4 \cdot a = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_{IV}(\bar{P}_k) = 0; \quad R_V \cdot a - S_6 \cdot a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Обчислимо невідомі зусилля.

$$S_5 = \frac{R_V}{\sin \alpha} = \frac{5}{0,707} = 7,00 \text{ kH} \dots S_4 = \frac{-P_2 \cdot a}{a} = -P_2 = -20,00 \text{ kH}.$$

З останнього рівняння:  $S_6 = R_V = 5,0 \text{ kH}$ .

Таким чином, стрижень 4 працює на стиск із зусиллям  $20,00 \text{ kH}$ , дійсний напрямок зусилля  $S_4$  є протилежним тому, що показано на схемі (рис. 1.39).

---

#### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку конструкцію називають фермою?
2. Яка ферма є статично визначеною?
3. Що означає розрахувати ферму? Які припущення приймаються при цьому?
4. У чому полягає суть аналітичного методу вирізування вузлів?
5. У чому полягає метод перетину (метод Ріттера) під час розрахунків ферми?
6. Скільки стрижнів із невідомими зусиллями можуть бути в зоні перетину?
7. Відносно яких точок зручніше складати суми моментів сил часті ферми?
8. Чому метод перетину називають ще методом трьох моментів?
9. Який порядок розрахунку плоскої ферми?
10. Яка різниця між реакцією і зусиллям у стрижні?

## 1.7. Тертя ковзання і тертя кочення

### 1.7.1. Рівновага тіла з урахуванням тертя. Сили тертя ковзання

Дослід доводить, що при намаганні зсунути одне тіло по поверхні іншого у площині стикання тіл виникає **сила опору відносному ковзанню**.

Дослід переконує, що **тертя обумовлено** перш за все шорсткістю поверхонь контакту, що створює опір переміщенню, або **наявністю зчеплення** у притиснутих поверхонь.

Але вивчення складних фізико-механічних і хіміко-молекулярних проблем процесу тертя виходить за рамки курсу теоретичної механіки.

У цьому курсі теорією тертя ковзання користуються лише у зв'язку з визначенням реакцій в'язей реальних поверхонь у разі врахування сил тертя, якщо вони суттєво впливають на рух тіл.

**Сила тертя ковзання** – це **сила опору**, яка виникає під час руху одного тіла на поверхні іншого тіла і яка спрямована протилежно швидкості відносного руху тіла.

Розглянемо шорстку площину (рис. 1.40).

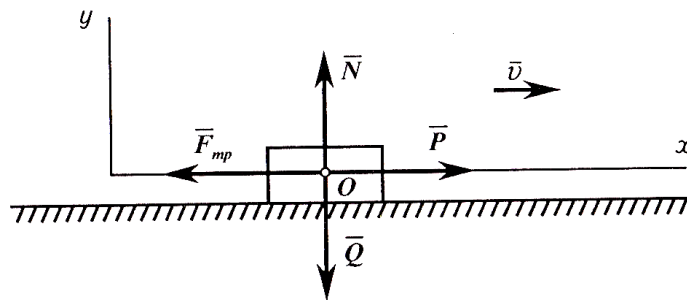


Рис. 1.40

На ній рівномірно рухається тіло вагою  $\bar{Q}$  під дією зовнішньої сили  $\bar{P}$ . Складемо розрахунково-силову схему, розглядаючи всі сили, які діють на це тіло. Як відомо, опорна площина, яку умовно вважаємо як гладеньку площину, створює нормальну реакцію поверхні або **силу нормального тиску**  $\bar{N}$ , а в бік, що є протилежним напрямку дії сили  $\bar{P}$ , буде спрямована **сила тертя**  $\bar{F}_{mp}$ , що виникає внаслідок контакту шорстких поверхонь тіл, вектор якої прикладений до точки  $O$ .

Покажемо осі координат  $x, y$ . Оскільки тіло перебуває у стані рівноваги, то є можливість скласти рівняння рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил. Запишемо умови і рівняння рівноваги тіла:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad P - F_{mp} = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - Q = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

З першого рівняння отримуємо  $P = F_{mp.}$ , а з другого рівняння –  $N = Q$ . Таким чином, сила  $\bar{P}$  врівноважується силою тертя  $\bar{F}_{mp.}$ , а нормальний тиск тіла на площину  $\bar{N}$  дорівнює вазі тіла  $\bar{Q}$ .

Наближені закони тертя ковзання або тертя першого роду встановили французькі фізики Гільом Амонтон (1663–1705) і Шарль Кулон (1736–1806), за одним із цих законів сила тертя  $F_{mp.}$  пропорційна силі нормального тиску  $N$  і змінюється від нуля до граничної (максимальної) величини в момент зрушення тіла з місця:

$$F_{mp.} = fN, \quad (1.71)$$

де  $f$  – безрозмірний коефіцієнт пропорційності.

Як було встановлено пізніше, коефіцієнт пропорційності  $f$  є статичним **коефіцієнтом тертя ковзання** за відносного спокою, а в умовах руху величина динамічного коефіцієнта тертя ковзання трошки зменшується порівняно зі статичним.

Кулон вважав, що коефіцієнт тертя ковзання  $f$  не залежить від величини площі контакту тіл, швидкості руху тіл і інших факторів.

Проте, подальші дослідження показали, що коефіцієнт тертя ковзання, навпаки, залежить від багатьох факторів: від матеріалу тіл, стану поверхонь, що контактують, температури, вологості, якостей мастил тощо.

### 1.7.2. Кут і конус тертя ковзання

Розглянемо горизонтальну шорстку поверхню, на якій розташоване тіло (рис. 1.41).

Як і в попередньому випадку, покажемо сили, прикладені у точці  $O$ :  $\bar{N}$  – реакція поверхні або сила нормального тиску,  $\bar{F}_{mp.}$  – сила тертя. Додаючи векторно ці сили, отримаємо повну реакцію поверхні  $\bar{R}$ :

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{mp.} \quad (1.72)$$

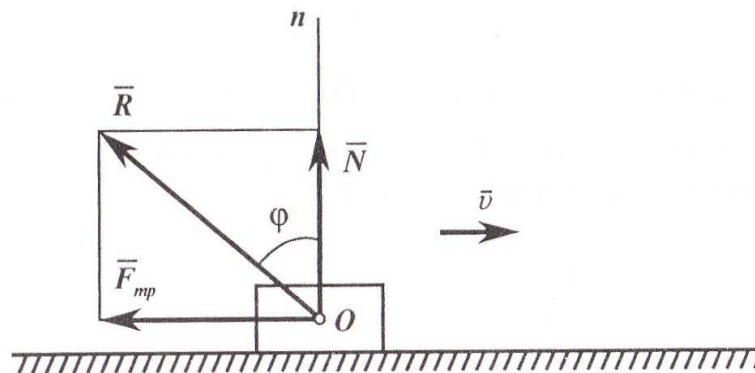


Рис. 1.41

Тепер проведемо крізь точку  $O$ , де прикладені сили, нормаль  $n$  і



### Частина перша

покажемо **кут тертя ковзання**  $\varphi$ , на який реакція  $\bar{R}$  відхилена від нормалі  $n$ .

Отже, **кут тертя ковзання**  $\varphi$  – це кут між рівнодійною  $\bar{R}$  нормального тиску  $\bar{N}$  і сили тертя  $\bar{F}_{mp.}$ , з нормаллю  $n$  до поверхні в момент зрушення тіла з місця.

Визначимо кут тертя ковзання  $\varphi$ . Як легко побачити з рис. 1.41, його можна визначити так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp.}}{N}. \quad (1.73)$$

Проте, з виразу (1.71) маємо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N}. \quad (1.74)$$

Якщо порівняти ліві частини виразів (1.73) і (1.74), то отримаємо:

$$f = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.75)$$

Таким чином, **коефіцієнт тертя ковзання**  $f$  дорівнює **тангенсу кута тертя**  $\varphi$ .

З цього випливає, що коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною. Визначити кут тертя можна також, якщо розглядати рівномірний рух тіла на похилій площині.

Нехай площина, на якій рухається тіло вагою  $\bar{G}$  (рис. 1.42), нахилена до горизонту під деяким кутом  $\varphi$ , таким, що рух тіла буде рівномірним.

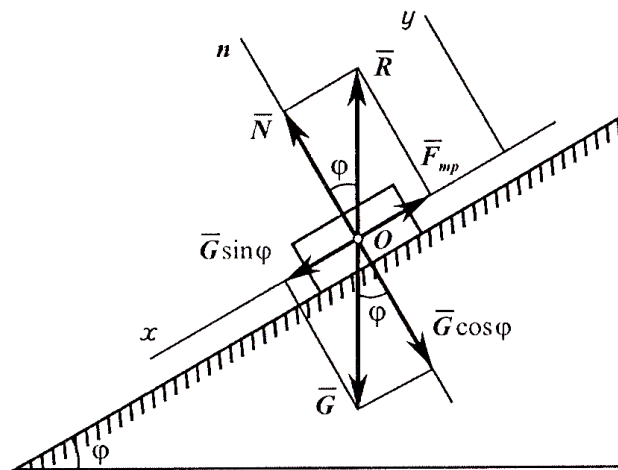


Рис. 1.42

Якщо показати осі координат  $x, y$  і вважати, що тіло перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи збіжних сил, то можна скласти систему

двох рівнянь рівноваги (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad -F_{mp.} + G \sin \varphi = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - G \cos \varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

З першого рівняння отримаємо значення сили тертя:

$$F_{mp.} = G \sin \varphi, \quad (1.77)$$

а з другого рівняння отримаємо значення нормальної реакції похилої площини:

$$N = G \cos \varphi. \quad (1.78)$$

Далі, якщо підставити вирази (1.77) і (1.78) у вираз (1.74), то матимемо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N} = \frac{G \sin \varphi}{G \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.79)$$

Звідси легко побачити, що у такому випадку кут  $\varphi$  і є той кут, на який відхилена від нормалі  $n$  повна реакція  $\bar{R}$  поверхні за векторного додавання векторів сил  $\bar{N}$  та  $\bar{F}_{mp.}$ . Цілком очевидно, якщо кут нахилу похилої площини до горизонту буде більшим, ніж  $\varphi$ , то тіло почне рухатись з деяким прискоренням.

Якщо поступово змінювати по колу напрямок горизонтальної рушійної сили  $\bar{P}$ , прикладеної до тіла, то внаслідок цього напрямки сили тертя  $\bar{F}_{mp.}$  також будуть послідовно змінюватись за колом. Тоді рівнодійна  $\bar{R}$  повної реакції поверхні буде повертатись навколо вектора  $\bar{N}$ , утворюючи як твірна кругову конічну поверхню (рис. 1.43).

У разі одного повного оберту реакції  $\bar{R}$  навколо вектора  $\bar{N}$  утворюється круговий конус, кут якого при вершині дорівнює  $2\varphi$ .

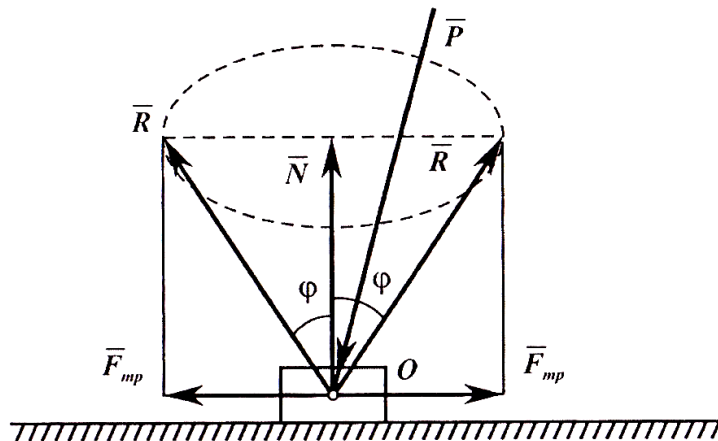


Рис. 1.43

## Частина перша

Отже, конус тертя ковзання – це круговий конус, утворений реакцією шорсткої поверхні під час одного повного повороту рушійної сили, кут якого при вершині дорівнює подвійному куту тертя.

З поняття конуса тертя ковзання випливає таке правило: якщо вектор зовнішньої сили  $\bar{P}$ , прикладеної до тіла, розміщений всередині тіла конуса тертя, то, якою б великою за модулем ця сила не була, вона не зможе зрушити тіло з місця (рис. 1.43). Це пов'язано з тим, що в разі збільшення зовнішньої сили  $\bar{P}$  нормальна реакція  $\bar{N}$ , тобто, проекція зовнішньої сили на вертикаль, а з нею і сила тертя ковзання  $\bar{F}_{mp}$ , зростатиме швидше, ніж рушійна сила, яка є проекцією сили  $\bar{P}$  на горизонталь.

Для доведення цього правила позначимо кут між вектором сили  $\bar{P}$  і вертикаллю через  $\alpha$ . Рух тіла під час дії сили  $\bar{P}$  буде неможливий, якщо

$$\begin{aligned} P \sin \alpha < F_{mp} &\Rightarrow P \sin \alpha < f P \cos \alpha = \\ &= \operatorname{tg} \varphi P \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \alpha < \varphi. \end{aligned}$$

Аналіз останнього виразу вказує на те, що поки вектор зовнішньої сили, яка тисне на тіло, перебуває у створі конуса тертя, рух неможливий. На цьому принципі працюють, наприклад, клинові або стопорні механізми у верстатах.

### 1.7.3. Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло на похилій площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює  $\alpha$  (рис. 1.44).

Вага тіла дорівнює  $\bar{Q}$ , до нього прикладена зовнішня сила  $\bar{P}_1$ , яка викликає рівномірний рух тіла вгору. Внаслідок рівномірного руху тіло перебуває у стані рівноваги, а тому можна використати рівняння статки.

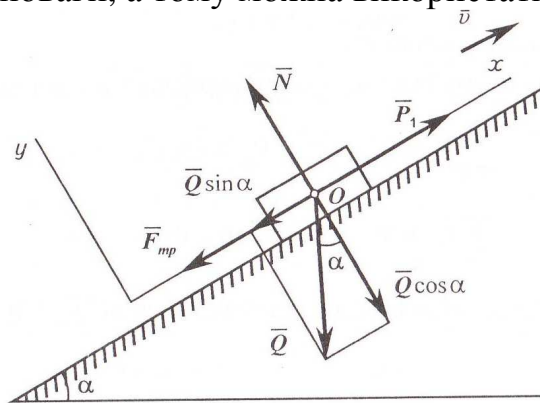


Рис. 1.44

Складемо розрахунково-силову схему. До тіла в точці  $O$  прикладена реакція поверхні  $\bar{N}$  (або сила нормального тиску), сила тертя  $\bar{F}_{mp}$ ,

напрямок якої протилежний напрямку руху тіла.

Складемо рівняння рівноваги (1.20), враховуючи, що тіло перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; P_1 - F_{mp.} - Q \sin \alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; N - Q \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} (1.80)$$

З другого рівняння знаходимо реакцію поверхні:

$$N = Q \cos \alpha, \quad (1.81)$$

а з першого рівняння:

$$P_1 = F_{mp.} + Q \sin \alpha. \quad (1.82)$$

Оскільки  $F_{mp.} = fN$ , то, враховуючи вираз (1.81), матимемо:

$$F_{mp.} = fQ \cos \alpha. \quad (1.83)$$

Підставимо вираз (1.84) у вираз (1.83):

$$P_1 = fQ \cos \alpha + Q \sin \alpha = Q (\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1.84)$$

#### 1.7.4. Тертя кочення

Тертям кочення називається опір, який утворюється під час кочення одного тіла поверхнею іншого.

Уявимо коток радіусом  $R$ , що котиться (напрямок обертання показано стрілкою) на поверхні під дією рушійної сили  $\bar{P}$ , яка може бути прикладеною або до центра котка, або до його верхньої точки (рис. 1.45).

На поверхні коток утворює колію, з боку якої діють елементарні реакції. Епюру елементарних навантажень можна звести до зосередженої сили  $\bar{N}$ , яка буде віддалена від вертикальної осі котка на величину  $k$  в момент зрушення котка з місця (відстань  $AC$ ). Ця **лінійна величина  $k$** , яка має розмірність довжини, **називається коефіцієнтом тертя кочення** або плечем пари кочення  $(\bar{Q}, \bar{N})$ .

Якщо коток рівномірно рухається,  $v = const$ , то сили, які до нього прикладені, врівноважуються. Визначимо алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки  $A$ .

Розглянемо спочатку перший випадок, якщо рушійна сила  $\bar{P}_1$  прикладена до центра котка, а рушійний момент  $M_{руш.} = P_1 R$ .

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; Nk - P_1 R = 0. \quad (1.85)$$

Оскільки момент опору кочення  $M_{on.} = Nk$ , то

$$P_1 = \frac{k}{R} N = \frac{M_{on.}}{R}. \quad (1.86)$$

**Частина перша**

Порівнюючи формулу (1.86) і вираз закону Кулона (1.71), вважаючи, що сила тертя ковзання забезпечує чисте кочення без проковзування і дорівнює  $\bar{P}_1$ , можна побачити, що  $\frac{k}{R} \ll f$ . Тому колесо і застосовується, що має таку велику перевагу у зменшенні сили під час переміщення.

Розглянемо далі другий випадок, коли сила  $\bar{P}_2$  прикладена до верхньої точки котка. У цьому випадку рівняння рівноваги матиме такий вигляд:

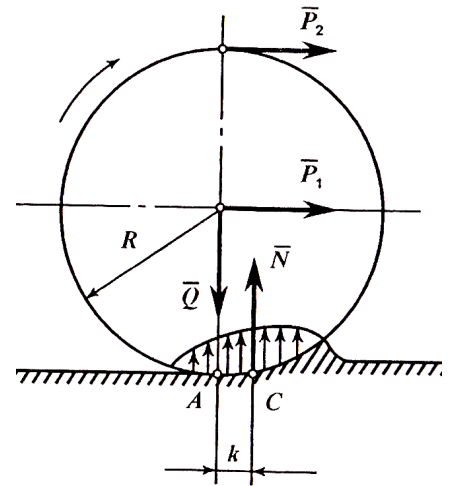


Рис. 1.45

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; Nk - P_2 \cdot 2R = 0. \tag{1.87}$$

Звідки 
$$P_2 = \frac{Nk}{2R} = \frac{M_{on.}}{2R}. \tag{1.88}$$

Якщо порівняти вирази (1.88) і (1.86), то можна побачити, що в другому випадку для зрушення котка з місця треба прикласти вдвічі менше зусилля, ніж у першому.

**1.7.5. Тертя нитки і шорсткої циліндричної поверхні**

Найбільш розповсюдженим типом передачі обертального руху є пасова передача, в якій рух від одного циліндричного шків (ведучого) передається до другого (веденого) за допомогою гнучкої в'язі. На ведучому валу, який примусово обертається і охоплюється гнучким тілом, виникають сили тертя, які і спричинюють передачу зусиль. На рис. 1.46 схематично показаний подібний ведучий шків радіуса  $R$ , який рівномірно обертається у напрямку кругової стрілки.

При цьому кут обхвату шків, що охоплюється пасом, дорівнює  $\alpha$ . Позначимо зусилля, що створюються у гілках паса (нитки), через  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$ . Умовно можна показати сили тертя  $\bar{F}_{mp}$ , які виникають на циліндричній поверхні самого шків і мають напрямок, протилежний напрямку його обертання, а на поверхні паса (нитки) – рівні за величиною, але протилежно спрямовані сили тертя паса (нитки) і шків  $\bar{F}'_{mp}$ . Розглянемо взаємодію ідеальної абсолютно гнучкої нерозтяжної нитки з циліндричною поверхнею шків і знайдемо співвідношення між силами натягу  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$  за заданого кута  $\alpha$  (радіан) обхвату шків ниткою. Складемо розрахунково-силову схему розглядаючи шків, який рівномірно обертається, а нитка перебуває у відносному спокою.

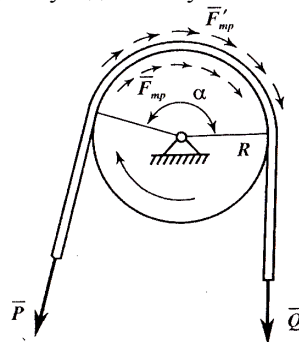


Рис. 1.46

Центр шківa позначимо літерою  $O$ , його радіус –  $R$ . Сили натягу  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$  прикладені відповідно в точках  $B$  і  $A$  нитки (там, де нитка сходиться зі шківa), а тому центральний кут  $AOB$  і є кутом обхвату  $\alpha$  (рис. 1.47)

Розглянемо рівновагу елемента  $DE$ , приклавши до нього такі сили:  $\bar{T}$  – сила натягу, прикладена у точці  $E$ ;  $(\bar{T} + d\bar{T})$  – сила натягу, прикладена у точці  $D$ , де  $d\bar{T}$  – різниця натягів, обумовлена наявністю сил тертя. Далі поділимо кут  $d\theta$  навпіл і проведемо крізь точку  $C$  (на дузі  $DE$ ) осі прямокутної натуральної системи координат  $\tau$  і  $n$  (дотичну і нормаль).

Крізь точку  $C$  проходить елементарна нормальна сила тиску нитки  $d\bar{N}$ . Оскільки елемент  $DE$  перебуває у рівновазі, то різниця натягів  $d\bar{T}$  врівноважується силою тертя шківa і нитки  $d\bar{F}_m$ , яка прикладена у точці  $C$ , розмішена на дотичній  $\tau$  і дорівнює:

$$dF_m = f \cdot dN, \quad (1.89)$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання.

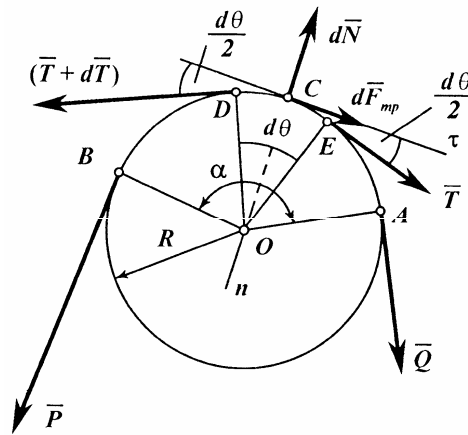


Рис. 1.47

Кути нахилу сил  $\bar{T}$  і  $\bar{T} + d\bar{T}$  до осі  $\tau$  дорівнюють  $\frac{d\theta}{2}$ . Складемо рівняння рівноваги елемента  $DE$  під дією прикладених сил, для чого споектуємо всі сили на осі  $\tau$  і  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\bar{P}_k)_\tau = 0, & \left\{ \begin{aligned} T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dF_{mp} - (T + dT) \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0, \\ T \cdot \sin \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \cdot \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

З першого рівняння системи (1.90) знайдемо  $dT$ , для чого розкриємо дужки:

$$T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dF_{mp} - T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - dT \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0. \quad (1.91)$$

Враховуючи, що  $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$ , оскільки кут  $d\theta$  дуже малий, а також на підставі виразу (1.89) з рівняння (1.91) маємо:

$$dT = f \cdot dN. \quad (1.92)$$

Перетворимо друге рівняння системи (1.90):

$$T \sin \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + dT \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0. \quad (1.93)$$

## Частина перша

У виразі (1.93) доданок  $dT \sin \frac{d\theta}{2}$  є величиною вищого порядку мализни, як добуток нескінченно малих, тому цим доданком можна знехтувати. Крім того, за малого кута  $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$  у підсумку отримаємо:

$$2T \cdot \frac{d\theta}{2} = dN, \quad (1.94)$$

$$\text{або } dN = T \cdot d\theta. \quad (1.95)$$

Підставимо отримане значення  $dN$  у вираз (1.93):

$$dT = Td\theta \cdot f. \quad (1.96)$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння (1.96), для чого відокремимо змінні величини:

$$\frac{dT}{T} = f \cdot d\theta. \quad (1.97)$$

Обчислимо визначені інтеграли від лівої і правої частин виразу (1.97). При цьому величина натягу  $\bar{T}$  змінюється від початкового значення  $Q$  до кінцевого  $P$ , а кут  $\theta$  має початкове значення 0 і змінюється до кінцевого значення  $\alpha$ . Отже, межі інтегрування визначені.

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f \int_0^\alpha d\theta.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння такий:

$$\ln T \Big|_Q^P = f\theta \Big|_0^\alpha \Rightarrow \ln P - \ln Q = f\alpha \Rightarrow \ln \frac{P}{Q} = f\alpha \Rightarrow \frac{P}{Q} = e^{f\alpha}.$$

Остаточно визначимо силу натягу  $P$ :

$$P = Q \cdot e^{f\alpha}. \quad (1.98)$$

Таким чином, з останнього виразу (1.98) можна з'ясувати, що зусилля  $P$  більше від зусилля  $Q$  у  $e^{f\alpha}$  разів, воно залежить від коефіцієнта тертя  $f$  і кута обхвату  $\alpha$ , а не залежить від радіуса шківів  $R$ . Цілком зрозуміло, що за відсутності тертя ( $f=0$ ) зусилля  $Q$  і  $P$  рівні. Вираз (1.98) носить назву формули Ейлера і дає можливість знайти найменшу силу  $Q$ , здатну зрівноважити силу  $P$ :  $Q = P e^{-f\alpha}$ .

Наведемо приклад розрахунку зусиль у вітках пасової передачі, яку показано на рис. 1.48.

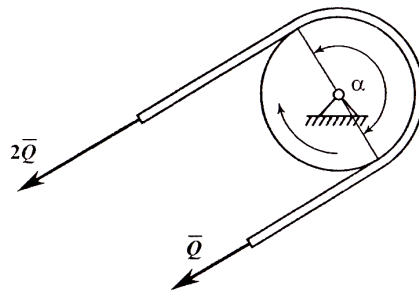


Рис. 1.48

З рисунка видно, що кут обхвату пасом ведучого шківів  $\alpha = \pi$ , коефіцієнт тертя гуми і сталі  $f = 0,23$ . Тоді:  $e^{f\alpha} = 2,7^{0,23 \cdot \pi} = 2 \Rightarrow P = 2Q$ .

Таким чином, натяг ведучої вітки пасової передачі вдвічі більший, ніж веденої.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають силою тертя, від яких факторів вона залежить, куди напрямлений її вектор?
2. Що таке коефіцієнт тертя ковзання, кут тертя, конус тертя?
3. Як експериментально визначити коефіцієнт тертя ковзання на похилій площині?
4. Чому дорівнюють максимальна і мінімальна сили тертя у випадку рівноваги тіла на похилій площині?
5. Що таке тертя кочення?
6. Чому дорівнює коефіцієнт тертя кочення?
7. Чому дорівнює момент опору під час кочення?
8. Яка залежність між силами веденої і збіжної віток паса?
9. Як гасять енергію корабля під час причалювання?

## 1.8. Просторова система сил. Момент сили відносно осі

### 1.8.1. Системи сил у просторі

Якщо лінії дії усіх сил, що прикладені до твердого тіла, розміщені будь-як у просторі, то така система сил має назву просторової. Але розташування сил у просторі може бути різним. Це може бути просторова система збіжних сил, паралельних сил і довільних сил.

Якщо розглянути тіло і вибрати прямокутну систему декартових координат  $Oxyz$ , то всі ці три випадки різних систем сил можна побачити на рис. 1.49:

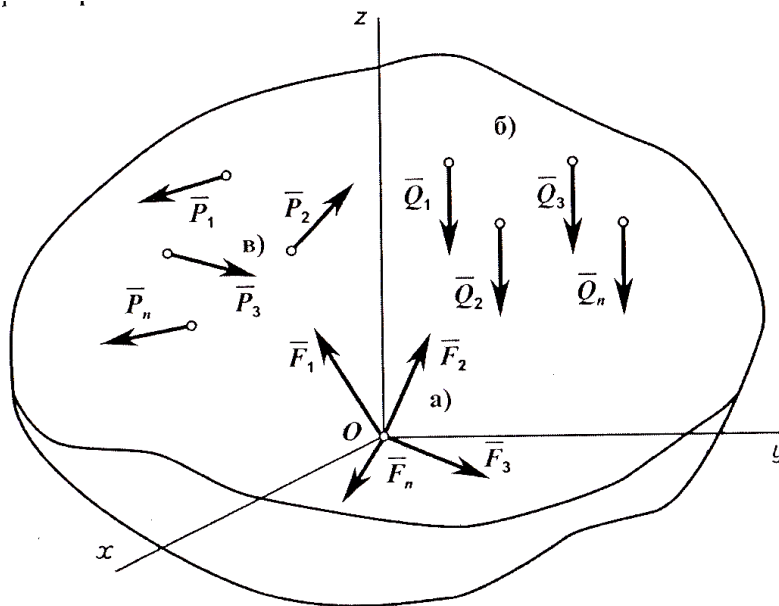


Рис. 1.49

### 1.8.2. Момент сили відносно осі

Розглянутий момент сили відносно центра (точки) характеризує обертальний ефект сили відносно точки.

**Момент сили відносно осі** характеризує обертальний ефект сили відносно осі. Якщо сила намагається повернути тіло навколо осі, то вона



## Частина перша

створює відповідний момент відносно цієї осі.

Визначимо момент відносно осі  $z$  від сили  $\vec{P}$ , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.50).

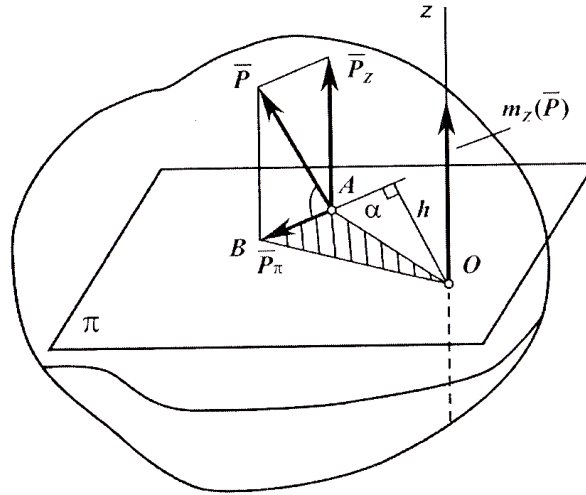


Рис. 1.50

Як можна побачити з рис. 1.50, складова  $\vec{P}_z$  не може повертати тіло відносно осі  $z$ , отже вона не створює моменту відносно цієї осі. Складова  $\vec{P}_\pi$ , навпаки, може повертати тіло навколо осі  $z$  з моментом:

$$m_z(\vec{P}) = m_z(\vec{P}_\pi). \quad (1.99)$$

Визначимо модуль моменту  $m_z(\vec{P}_\pi)$ . Проекція  $\vec{P}_\pi$  розташована у площині  $\pi$  і за величиною дорівнює:

$$P_\pi = P \cos \alpha, \quad (1.100)$$

де  $\alpha$  – кут між вектором сили  $\vec{P}$  та площиною  $\pi$ .

Момент у площині  $\pi$  створюється відносно точки  $O$ , в якій перетинаються вісь  $z$  і площина  $\pi$ . Покажемо плече  $h$ , опускаючи перпендикуляр із точки  $O$  до лінії дії складової  $\vec{P}_\pi$  або до її продовження. Остаточню момент дорівнюватиме:

$$m_z(\vec{P}) = m_z(\vec{P}_\pi) = m_o(\vec{P}_\pi) = P_\pi h = P \cos \alpha \cdot h. \quad (1.101)$$

Знак моменту сили відносно осі визначається наступним чином: якщо, дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити, що поворот площини під дією проекції сили на цю площину відбувається проти напрямку годинникової стрілки, то момент сили відносно осі вважається додатним і навпаки.

Остаточню сформулюємо визначення моменту:

**Моментом сили відносно осі називається взята з відповідним знаком скалярна величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на**

площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Далі, у площині  $\pi$  з'єднаємо точку  $O$  з точками  $A$  і  $B$ . Утворено трикутник  $\Delta OAB$ , у якого основою є сила  $\bar{P}_\pi$ , а вершина знаходиться в точці  $O$ .

Як уже відомо, момент проекції  $\bar{P}_\pi$  відносно точки  $O$  – це подвійна площа трикутника  $\Delta OAB$ , а оскільки цей момент і є моментом сили  $\bar{P}$  відносно осі  $z$ , то

$$m_z(\bar{P}) = 2S\Delta OAB. \quad (1.102)$$

Відомо, що вектор моменту сили відносно точки розміщений перпендикулярно до площині трикутника і спрямований за правилом свердлика.

Тоді і алгебраїчну величину моменту сили відносно осі як напрямлений відрізок також можна розмістити перпендикулярно до площини трикутника, який утворено проекцією  $\bar{P}_\pi$  і точкою  $O$ .

Оскільки вказаний трикутник розташований у площині  $\pi$ , то спрямований відрізок моменту  $m_z(P)$  буде знаходитись на осі  $z$  (див. рис. 1.50).

Розглянемо особливі умови, за яких момент сили відносно осі дорівнює нулю:

- якщо сила паралельна осі (у цьому випадку проекція сили на площину, перпендикулярну осі, дорівнюватиме нулю),
- якщо лінія дії сили перетинає цю вісь (тоді плече  $h = 0$ ).

Звідси випливає, що якщо сила та вісь розміщені в одній площині, то момент сили відносно цієї осі дорівнюватиме нулю.

Якщо вектор сили не знаходиться з віссю в одній площині, але він перпендикулярний до осі, то момент цієї сили дорівнює добутку модуля сили на відстань між силою та віссю (з відповідним знаком).

---

#### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка система сил є просторовою системою довільних сил?
2. Як знайти момент сили відносно осі?
3. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
4. Яка існує залежність між моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі, яка проходить крізь цю точку?
5. Що таке просторова система збіжних сил?
6. Що створює момент сили відносно осі?
7. Як спроекувати векторний момент сили відносно центра на координатні осі?
8. Сформулюйте методику визначення моменту сили відносно осі.

## 1.9. Головний вектор і головний момент системи сил

### 1.9.1. Зведення просторової системи довільних сил до центра.

#### Головний вектор і головний момент системи

Уявимо тіло, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$ , прикладених у точках  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  (рис. 1.51).

Виберемо довільну точку  $O$  як центр зведення і побудуємо прямокутну систему декартових координат  $Oxyz$ .

Послідовно перенесемо сили паралельно самим собі у центр  $O$  (метод Пуансо). При цьому до тіла необхідно кожен раз додавати моменти «приєднаних» компенсаційних пар сил, які дорівнюють моментам заданих сил відносно центра перенесення  $O$ . Момент першої пари позначимо  $\vec{m}_1 = \vec{m}_o(\vec{P}_1)$ , він прикладений у точці  $O$  перпендикулярно до площини трикутника  $OA_1P_1$  і спрямований за правилом свердлика. Теж саме зробимо і з іншими силами, прикладеними до тіла. У результаті цього перенесення у центрі зведення  $O$  отримаємо систему збіжних сил і систему моментів пар сил у вигляді векторів, тобто, систему векторних моментів.

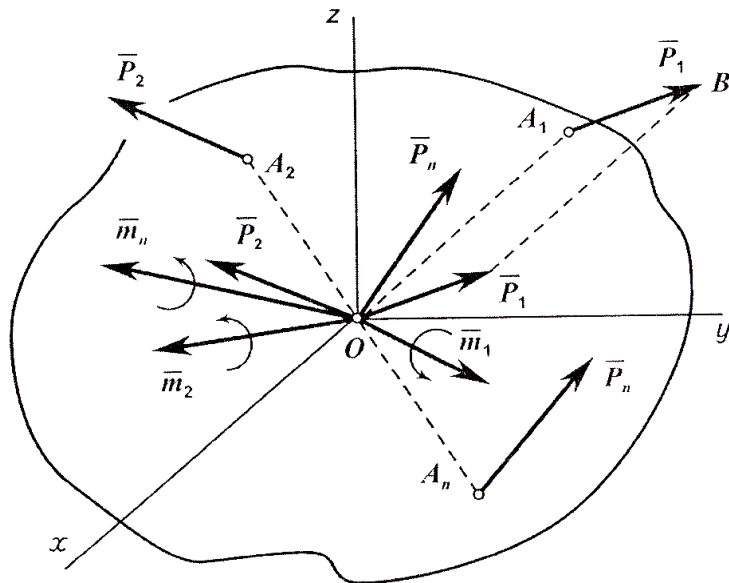


Рис. 1.51

Головний вектор  $\vec{R}$  дорівнює геометричній сумі векторів усіх сил, прикладених до тіла, а головний момент  $\vec{M}$  дорівнює векторній сумі усіх моментів сил відносно центра зведення. Систему збіжних сил  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$ , перенесених і прикладених у центрі  $O$ , можна перетворити на підставі відомого методу векторних перетворень для системи збіжних сил і замінити однією підсумковою силою  $\vec{R}$ , яка називається головним

вектором просторової системи довільних сил.

Аналогічні перетворення проведемо і для системи векторних моментів приєднаних пар.

Вектори-моменти пар  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \dots, \bar{m}_n$ , які теж прикладені у центрі  $O$ , також можна замінити однією парою з підсумковим моментом  $\bar{M}$ , який називається головним моментом просторової системи довільних сил.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k, \\ \bar{M} &= \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.103)$$

*Отже, будь-яка просторова система довільних сил, що діє на тіло, може бути зведена до однієї сили – головного вектора системи і однієї пари сил – головного моменту системи просторових сил.*

У загальному випадку головний вектор  $\bar{R}$  не залежить від положення центра зведення  $O$ , а головний момент  $\bar{M}$ , навпаки, залежить від положення центра, тому що за іншого положення центра змінюються плечі «приєднаних» пар або рівні їм плечі заданих сил відносно центра зведення.

### 1.9.2. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи довільних сил

Визначимо аналітично головний вектор просторової системи довільних сил  $\bar{R}$  через його проєкції на осі просторової системи координат  $Oxyz$ . Позначимо ці проєкції літерами з відповідними індексами  $R_x, R_y, R_z$ . Проєкція головного вектора на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій складових сил на ту саму вісь:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} + \sum_{k=1}^n P_{ky}, \\ R_z &= P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + \dots + P_{nz} + \sum_{k=1}^n P_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.104)$$

Якщо відомі проєкції головного вектора  $R$  на осі координат, то можна визначити його величину як діагональ паралелепіпеда, а якщо потрібно, то і напрямні косинуси:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (1.105)$$

$$\cos(x, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_z}{R}.$$

## Частина перша

Проекція головного моменту  $\bar{M}$  на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій моментів складових сил на ту саму вісь:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= [m_o(\bar{P}_1)]_x + [m_o(\bar{P}_2)]_x + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_x, \\ M_y &= [m_o(\bar{P}_1)]_y + [m_o(\bar{P}_2)]_y + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_y, \\ M_z &= [m_o(\bar{P}_1)]_z + [m_o(\bar{P}_2)]_z + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.106)$$

Але проекція моменту сили відносно точки на вісь, яка проходить крізь цю точку, дорівнює моменту сили відносно цієї осі:

$$\left. \begin{aligned} [m_o(\bar{P}_1)]_x &= m_x(\bar{P}_1), & [m_o(\bar{P}_2)]_x &= m_x(\bar{P}_2), & \dots, & [m_o(\bar{P}_n)]_x &= m_x(\bar{P}_n), \\ [m_o(\bar{P}_1)]_y &= m_y(\bar{P}_1), & [m_o(\bar{P}_2)]_y &= m_y(\bar{P}_2), & \dots, & [m_o(\bar{P}_n)]_y &= m_y(\bar{P}_n), \\ [m_o(\bar{P}_1)]_z &= m_z(\bar{P}_1), & [m_o(\bar{P}_2)]_z &= m_z(\bar{P}_2), & \dots, & [m_o(\bar{P}_n)]_z &= m_z(\bar{P}_n), \end{aligned} \right\}$$

З урахуванням останнього можна остаточно визначити проекції вектора головного моменту на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_x(\bar{P}_1) + m_x(\bar{P}_2) + m_x(\bar{P}_3) + \dots + m_x(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k), \\ M_y &= m_y(\bar{P}_1) + m_y(\bar{P}_2) + m_y(\bar{P}_3) + \dots + m_y(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k), \\ M_z &= m_z(\bar{P}_1) + m_z(\bar{P}_2) + m_z(\bar{P}_3) + \dots + m_z(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k). \end{aligned} \right\} \quad (1.107)$$

Якщо відомі проекції головного моменту  $\bar{M}$  на осі координат, то неважко визначити модуль головного векторного моменту:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.108)$$

---

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як читається теорема про перенесення пари сил у паралельну площину?
2. Які умови еквівалентності пар у просторі?
3. Як додати пари, що довільно розташовані у просторі?
4. Яка умова рівноваги системи пар у просторі?
5. Чому дорівнює головний вектор та головний момент просторової системи сил?
6. Як обчислити аналітично головний вектор та головний момент просторової системи довільних сил?
7. До яких силових факторів можна звести просторову систему довільних сил?
8. Про які окремі випадки зведення просторової системи довільних сил ви знаєте?
9. Чи можна звести до рівнодійної просторову систему довільних сил?
10. Що таке «динама» і як звести до неї будь-яку просторову систему довільних сил?

## 1.10. Рівновага тіла під дією просторових систем сил

### 1.10.1. Умови рівноваги тіла у просторі

Оскільки будь-яку просторову систему довільних сил можна звести до двох силових факторів: однієї сили, головного вектора  $\bar{R}$  і однієї пари сил, головного моменту  $\bar{M}$ , які прикладені до тіла, то для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб головний вектор  $\bar{R}$  і головний момент  $\bar{M}$  системи сил одночасно дорівнювали нулю:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M} = 0. \quad (1.109)$$

Умова (1.109) справджується, якщо кожен доданок під радикалом у виразах (1.105) і (1.108) теж дорівнюватиме нулю:

$$\begin{aligned} \bar{R} = 0 &\Rightarrow R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0; \\ \bar{M} = 0 &\Rightarrow M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Тоді на підставі виразів (1.110) умови рівноваги тіла під дією просторової системи довільних сил будуть мати такий вигляд:

$$\left. R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, R_z = \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \right\} \quad (1.111)$$

$$\left. M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0, M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.112)$$

На підставі цих умов складаються конкретні рівняння рівноваги тіла.

*Отже, для рівноваги тіла, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій сил на кожну із трьох координатних осей і алгебраїчні суми моментів сил відносно цих же осей дорівнювали нулю.*

### 1.10.2. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи паралельних сил

Якщо сили, що прикладені до тіла, розташовані у просторі, але лінії їх дії паралельні, то можна так вибрати систему координат, щоб одна з осей (наприклад, вісь  $z$ ) була паралельна цим силам (рис. 1.52).

Тоді дві інші осі  $(x, y)$  утворюють площину, яка буде перпендикулярною цим силам, тому проєкції заданих сил на осі  $x$  і  $y$  дорівнюватимуть нулю. Як паралельні сили, задані сили не створюють моментів відносно осі  $z$ .

Отже, щодо загальної системи умов рівноваги (1.111), (1.112), то для просторової системи паралельних сил три умови рівноваги випадають, а залишаються три інші. Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил маємо наступні умови:



Лінійні розміри вала  $a = b = 0,5 \text{ м}$ ,  $c = 1 \text{ м}$ . Система перебуває у стані рівноваги.

Визначити натяги гілок паса  $T_2$ ,  $t_2$  і реакції опорних підшипників  $A$  і  $B$ .

**Розв'язання**

Розглянемо рівновагу вала  $AB$  із шківками  $C$  і  $D$ . Звільнимо вал від в'язей, замінивши їх відповідними реакціями.

У підшипниках реакції розташовані у площині, перпендикулярній осі вала  $AB$ .

Таким чином, реакції підшипників  $A$  і  $B$  розташовані відповідно у площині  $xAz$  і у площині, що паралельна до неї і проходить крізь точку  $B$ .

Невідомий вектор кожної реакції підшипників у площині визначається двома проекціями на осі  $x$  і  $z$ , як це показано на рис. 1.53

Після зроблених операцій на схемі отримана просторова система довільних сил, що перебуває у стані рівноваги.

Запишемо на підставі умов рівноваги (1.111) і (1.112) відповідні рівняння рівноваги просторової системи довільних сил (а).

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + t_1 + T_1 + t_2 \cos 60^\circ + T_2 \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - t_2 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0; \quad -t_2 \cos 30^\circ (a+c) - T_2 \cos 30^\circ (a+c) + Z_B(a+b+c) = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0; \quad -t_1 r_C + T_1 r_C - T_2 r_D + t_2 r_D = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0; \quad -(t_1 + T_1)a - (T_2 + t_2)\cos 60^\circ (a+c) - X_B(a+b+c) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Як можна побачити із системи рівнянь (а), друге рівняння відсутнє, оскільки серед сил, прикладених до тіла, немає таких, які б могли бути спроектовані на вісь  $y$  (тобто всі сили лежать у площинах, перпендикулярних до осі  $y$ ).

Проте, така система статично визначена, оскільки кількість невідомих величин ( $t_2, X_A, Z_A, X_B, Z_B$ ) дорівнює кількості рівнянь рівноваги – 5.

Якщо підставити у цю систему рівнянь числові значення величин, що задані (враховуючи, що за умовою задачі  $T_2 = 2t_2$ ) і розв'язати ці рівняння відносно невідомих, отримаємо відповіді:

$$\begin{aligned} t_2 = 1962 \text{ Н}; T_2 = 3924 \text{ Н}; X_A = -6553,9 \text{ Н}; \\ Z_A = 1275,3 \text{ Н}; X_B = -4046,7 \text{ Н}; Z_B = 3825,9 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Значення визначених величин  $X_A$  і  $X_B$  від'ємні, а це означає, що, фактично, ці реакції мають протилежний напрямок, ніж це показано на рис. 1.53.

Для остаточного визначення реакцій підшипників в опорах  $A$  і  $B$  необхідно додати векторно їхні складові:

$$\begin{aligned} R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-6553,9)^2 + (1275,3)^2} = 6676,8 \text{ Н}; \\ R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{(-4046,7)^2 + (3825,9)^2} = 5569,8 \text{ Н}. \end{aligned}$$

**ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Які умови рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи довільних сил? Сформулюйте їх.
2. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи довільних сил?
3. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи паралельних сил?
4. Як читається теорема Варіньйона про момент рівнодійної сили відносно осі?
5. Яка сила називається зрівноважувальною і чим вона відрізняється від рівнодійної?



7. Які умови рівноваги паралельних сил у просторі?
8. Надайте методику розв'язання задач для просторової системи довільних сил.
9. Напишіть рівняння рівноваги для просторової системи збіжних сил.
10. Сформулюйте умови рівноваги тіла, навантаженого системою довільних сил у просторі.

## 1.11. Центр паралельних сил і центр ваги

### 1.11.1. Центр паралельних сил

Допустимо, що до деякого тіла у точках  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  прикладена система паралельних і однаково спрямованих векторів сил  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$  (рис. 1.54).

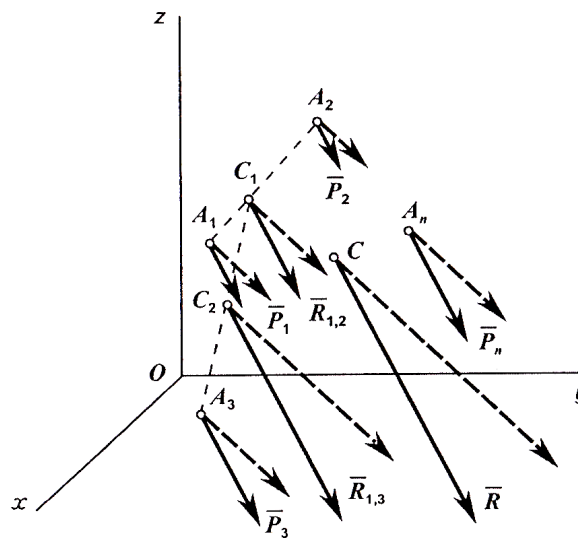


Рис. 1.54

Додамо векторно сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ , визначивши їх рівнодійну  $\vec{R}_{1,2}$ :

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2. \quad (1.114)$$

Точка  $C_1$  прикладання цієї рівнодійної  $\vec{R}_{1,2}$  визначається за відомим правилом додавання двох паралельних сил, які мають однаковий напрямок. Оскільки вектори сил  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$  прикладені у точках  $A_1$  і  $A_2$ , то, з'єднавши ці точки прямою, можна відшукати положення точки  $C_1$  на цій прямій за відомим рівнянням або пропорцією:

$$P_1 \cdot A_1C_1 = P_2 \cdot A_2C_1. \quad (1.115)$$

Далі аналогічно додамо вектори сил  $\vec{R}_{1,2}$  і  $\vec{P}_3$ , отримуючи їх рівнодійну  $\vec{R}_{1,3}$ , яка є рівнодійною трьох сил:

$$\vec{R}_{1,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{P}_3 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3. \quad (1.116)$$

Точка  $C_2$  прикладення цієї рівнодійної  $\bar{R}_{1,3}$  також визначається за вказаним вище правилом на прямій  $C_1A_3$ . Таким же чином поводимося з рештою сил, послідовно їх додаючи, і отримуємо рівнодійну  $\bar{R}$  системи паралельних сил. Вона буде прикладена в точці  $C$ , спрямована у той же бік, що і задані паралельні сили, величина її буде дорівнювати:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{k=1}^n P_k . \quad (1.117)$$

Повернемо вектори заданих сил навколо їх точок прикладання в один бік на один і той самий кут і знову знайдемо їх рівнодійну. Також починаємо з додавання сил  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$ .

Але, як бачимо з рис. 1.54, а також з рівняння (1.114), ні модуль рівнодійної  $\bar{R}_{1,2}$ , ні положення точки її прикладання  $C_1$  на прямій  $A_1A_2$ , не зміняться. Змінюється лише напрямок, який буде паралельним новому напрямку повернутих векторів. І рівнодійна  $\bar{R}$  у такому випадку не змінює ні свого модуля, ні точки прикладання  $C$ . Змінюється лише напрямок її лінії дії.

Таким чином, точка прикладання рівнодійної  $\bar{R}$  системи паралельних сил завжди збігається з точкою  $C$ , положення якої відносно положень точок  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  завжди буде незмінним. Ця точка має назву центра паралельних сил.

***Центр паралельних сил** – це точка прикладання їх рівнодійної, яка не змінює свого положення під час повороту усіх векторів сил на однаковий кут в один і той самий бік.*

### **1.11.2. Координати центра паралельних сил**

Допустимо, що до тіла у точках  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  прикладена система паралельних векторів сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ , яка зведена до вектора рівнодійної сили  $\bar{R}$ , прикладеної у точці  $C$  (рис. 1.55).

Виберемо прямокутну систему декартових координат  $Oxyz$  так, щоб б одна з осей (наприклад, вісь  $z$ ) була паралельна заданим силам. Знайдемо моменти усіх сил відносно осей координат  $x, y, z$ .

Позначимо у прийнятій системі відліку координати точок прикладання сил  $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$  і точки прикладання рівнодійної  $\bar{R} - C(x_C, y_C, z_C)$ .

Обчислимо спочатку моменти всіх сил відносно осі  $y$ .

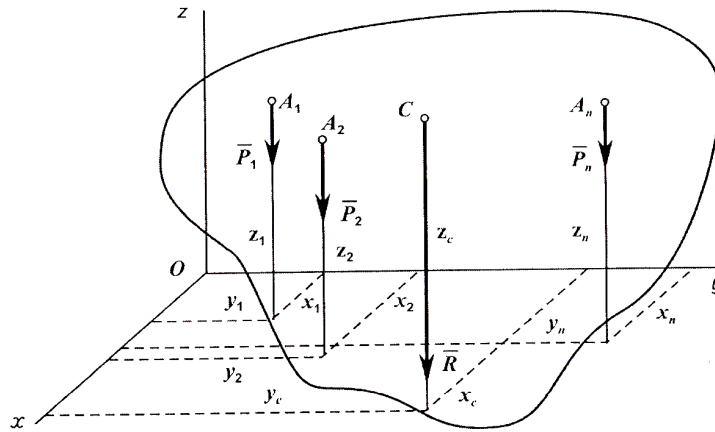


Рис. 1.55

Оскільки  $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k$ , то за теоремою Варіньйона для осі запишемо:

$$m_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k),$$

$$R \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \dots + P_n \cdot x_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k. \quad (1.118)$$

Звідки координата центра ваги:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}. \quad (1.119)$$

Аналогічно визначимо моменти усіх сил відносно осі  $x$ :

$$-R \cdot y_C = -P_1 \cdot y_1 - P_2 \cdot y_2 - P_3 \cdot y_3 - \dots - P_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^n (-P_k \cdot y_k) \quad (1.120)$$

і друга координата 
$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}. \quad (1.121)$$

Далі повернемо всі сили на один і той самий кут в один бік (наприклад, на  $90^\circ$ , перпендикулярно до площини  $yOz$ ).

Положення точки  $C$ , як відомо, під час повороту усіх сил на однаковий кут, в один і той самий бік не змінюється. Тепер обчислимо моменти усіх сил відносно осі  $y$ :

$$R \cdot z_C = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \dots + P_n \cdot z_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k, \quad (1.122)$$

третя координата

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.123)$$

Таким чином, остаточно отримаємо формули для *координат центра паралельних сил*:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.124)$$

### 1.11.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії

На довільне тіло, яке розміщене поблизу поверхні землі, діє сила, що має вертикальний донизу напрямок і називається силою ваги (рис. 1.56).

Вважаємо радіус Землі достатньо великим (приблизно 6,4 тис. км). Тоді для тіл, розміри яких є малими порівняно з цим радіусом, вектори сили ваги окремих частинок малих тіл можна вважати паралельними, вони зберігають свою власну величину, незважаючи на будь-які повороти тіла.

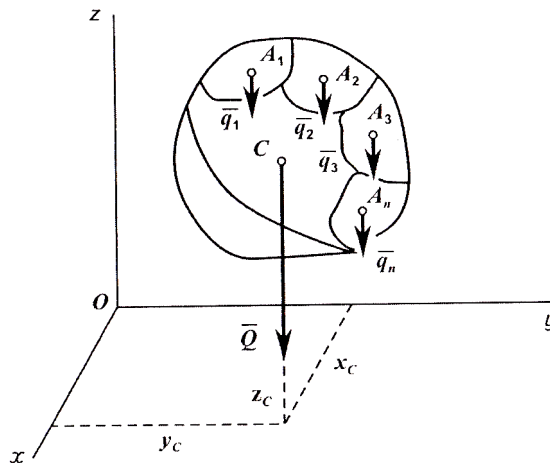


Рис. 1.56

Для визначення положення центра ваги умовно поділимо тіло на багато частинок. Кожна частинка має свою силу ваги  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$ . Як легко побачити, це є система паралельних сил, рівнодійну якої  $\bar{Q}$  можна визначити, використовуючи вираз (1.128):

$$\bar{Q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \dots + \bar{q}_n = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k. \quad (1.125)$$

За будь-якого повороту тіла сили  $\bar{q}_k$  залишаються прикладеними до тих самих точок і залишаються паралельними між собою. Змінюється лише напрямок цих сил відносно тіла. А тому рівнодійна  $\bar{Q}$  буде під час довільного повороту тіла прикладена у точці, яка є центром паралельних сил. Ця точка має назву центра ваги тіла.

Таким чином, *центр ваги тіла* – це геометрична точка, яка незмінно зв'язана з цим тілом, до якої прикладена сила ваги тіла і яка не

## Частина перша

змінює свого положення за довільного повороту тіла.

Визначимо **координати центра ваги** на підставі виразів (1.124):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k y_k}{Q}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k z_k}{Q}; \quad (1.126)$$

де  $x_k, y_k$  і  $z_k$  – координати прикладання сили ваги частинок тіла  $\bar{q}_k$ .

**Розглянемо об'єм.** Якщо тіло однорідне, то вага кожної частини пропорційна її об'єму:

$$q_k = \gamma \cdot V_k, \quad (1.127)$$

де  $\gamma$  – питома вага (вага одиниці об'єму);  $V_k$  – об'єм частинки тіла.

Вага всього тіла

$$Q = \gamma \cdot V, \quad (1.128)$$

де  $V$  – об'єм тіла;  $\gamma$  – питома вага тіла.

Тепер підставимо вирази (1.127) і (1.128) у вираз (1.126). До того ж питома вага  $\gamma$ , як загальний множник, скорочується.

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma (V_k x_k)}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{k=1}^n V_k x_k}{V} \quad (1.129)$$

Аналогічно поведимось і під час визначення двох інших координат.

Тепер **розглянемо пластину** (рис. 1.57), товщина якої  $h$  відносно мала, тоді координата центра її ваги  $z_C = \frac{h}{2}$ .

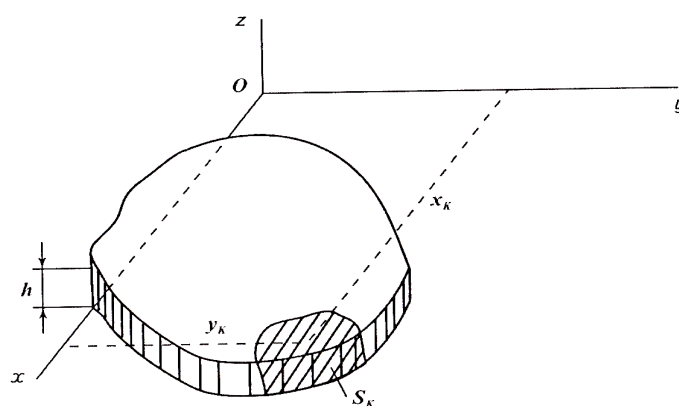


Рис. 1.57

Для визначення двох інших координат  $x_C, y_C$  використаємо вирази (1.126).

Пластину треба уявити у вигляді декількох частинок, які мають

власну вагу. Далі вважаємо, що вага кожної частинки пластини

$$q_k = \gamma \cdot V_k = \gamma \cdot h \cdot S_k, \quad (1.130)$$

де  $\gamma$  – питома вага (вага одиниці об'єму);  $h$  – товщина пластини;  $S_k$  – площа кожної частинки пластини. Вага всієї пластини

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot h \cdot S, \quad (1.131)$$

де  $S$  – площа пластини.

Тепер підставимо вирази (1.130) і (1.131) у перші два вирази (1.126). Зробимо це спочатку для координати  $x_C$ :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma h (S_k x_k)}{\gamma h \cdot S} = \frac{\sum_{k=1}^n S_k x_k}{S}. \quad (1.132)$$

Аналогічно обчислимо значення і другої координати  $y_C$ .

Остаточно матимемо **координати центра ваги тонкої пластини:**

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k y_k}{S}. \quad (1.133)$$

Точка  $C$ , координати якої визначаються формулами (1.133), має назву центра ваги площі.

Далі визначимо координати центра ваги лінії (рис. 1.58). Це може бути, наприклад, дріт малого діаметра і постійного поперечного перерізу.

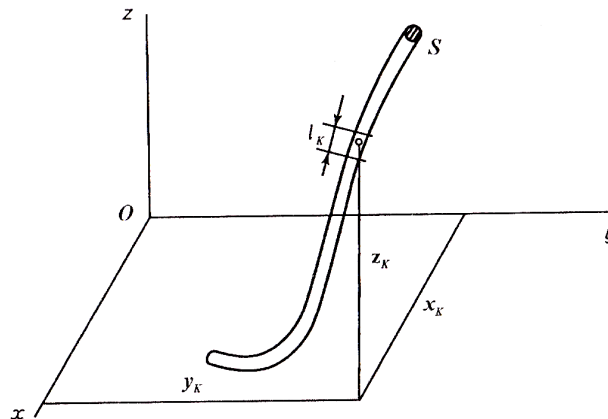


Рис. 1.58

Як і в попередніх випадках, спочатку визначимо вагу кожної частки лінії і вагу всієї лінії. Вага частки лінії

$$q_k = \gamma \cdot V_k = \gamma \cdot S \cdot l_k, \quad (1.134)$$

## Частина перша

---

де  $\gamma$  – питома вага (вага одиниці об'єму);  $S$  – площа поперечного перерізу лінії;  $l_k$  – довжина частки лінії.

Вага всієї лінії

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot S \cdot L, \quad (1.135)$$

де  $L$  – загальна довжина лінії.

Тепер підставимо значення виразів (1.134) і (1.135) у вираз (1.127) і визначимо спочатку координату  $x_C$ :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma S (l_k x_k)}{\gamma S \cdot L} = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}. \quad (1.136)$$

Таким же чином визначаємо дві інші координати центра ваги лінії.

---

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають центром паралельних сил?
2. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
3. За якими формулами визначаються положення центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії?
4. Що таке центр ваги тіла?
5. Як записати формули координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі?

#### 1.11.4. Способи визначення координат центра ваги тіла

У механіці знайшли застосування декілька способів визначення координат центра ваги тіл. Серед них розрізняють: метод симетрії, метод розбиття і доповнення, експериментальні способи. Розглянемо послідовно ці способи.

##### Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно у площині симетрії, на осі симетрії або в центрі симетрії.

Таким чином, центр ваги однорідних симетричних тіл, таких як кільця, прямокутні пластини, прямокутні паралелепіпеди, кулі та інші тіла, які мають центр симетрії, розташований у геометричних центрах (центри симетрії) цих тіл.

##### Метод розбиття

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для кожної з яких положення центра ваги легко визначається, то координати центра ваги усього тіла можна визначити безпосередньо за формулами (1.126), (1.133), (1.36) і (1.137). Причому кількість доданків у чисельнику кожного із зазначених виразів дорівнюватиме кількості часток, на яке розбивається тіло.

Наведемо приклад визначення центра ваги тіла методом розбиття його на окремі тіла, центри ваги яких відомі.

##### Приклад 1.8

Визначити координати центра ваги однорідної пластини. Розміри в міліметрах задані на рис. 1.62. Оберемо осі координат  $x$  і  $y$ . Потрібно розбити пластину на окремі прямокутні частинки.

Для кожного прямокутника проведемо діагоналі, точки перетину яких  $c_1$ ,  $c_2$  і  $c_3$  відповідають центрам ваги кожного прямокутника. У прийнятій системі координат неважко отримати значення координат цих точок (см):  $c_1(-1, 1)$ ,  $c_2(1, 5)$ ,  $c_3(5, 9)$ .

Площі кожного тіла дорівнюють, відповідно:

$$s_1 = 4 \text{ см}^2; s_2 = 20 \text{ см}^2; s_3 = 12 \text{ см}^2.$$

Площа всієї пластини  $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2$ .

Для визначення координат центра ваги заданої пластини використаємо вираз (1.144). Підставивши значення всіх відомих величин у рівняння, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = 2,1 \text{ см}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S} = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = 5,9 \text{ см}.$$

За обчисленими значеннями координат центра ваги пластини можна позначити точку  $C(2,1; 5,9)$  на рис. 1.59.

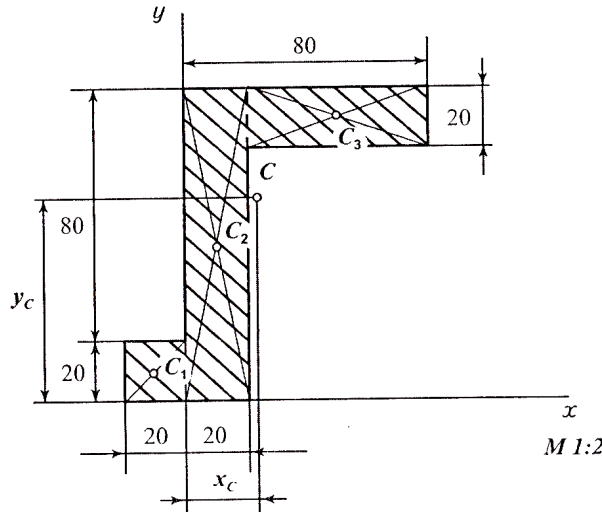


Рис. 1.59

Отже, **центр ваги** пластини, як **геометрична точка**, розміщений в конкретному випадку за межами цієї пластини.

**Метод доповнення**

Спосіб, про який йдеться далі, є частковим випадком способу розбиття площі тіла. Він може застосовуватись до тіл, які мають вирізи, порожнини, причому для всього тіла без урахування вирізу або вирізаної частини тіла положення центра ваги відомо. Розглянемо приклад застосування такого методу.

**Приклад 1.9**

Визначити положення центра ваги круглої пластини радіусом  $R$ , яка має круговий отвір радіуса  $r$  (рис. 1.60). Відстань між точками  $C_1$  і  $C_2$  дорівнює  $a$ .

**Розв'язання**

Як можна побачити з рисунка, центр ваги пластини міститься на осі симетрії пластини  $X$ , тобто на прямій, яка з'єднує точки  $C_1$  і  $C_2$ .

Таким чином, для визначення положення центра ваги цієї пластини необхідно обчислити тільки одну координату  $x_C$ , оскільки друга координата  $y_C$  дорівнює нулю. Покажемо осі координат  $x, y$ .

Прийемо, що пластини складається з двох тіл – з повного круга (без урахування вирізу) і тіла, яке утворено вирізом, площа якого віднімається.

У прийнятій системі координати  $x$  для центрів вказаних тіл дорівнюватимуть:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = C_1 C_2 = a$ .

Площі тіл  $s_1 = \pi R^2$ ;  $s_2 = -\pi r^2$ .

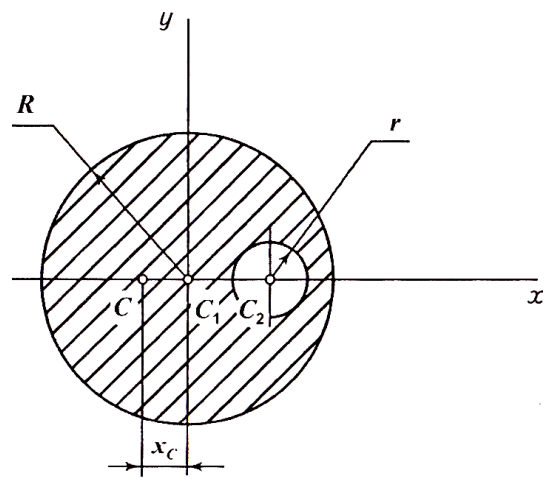


Рис. 1.60

Загальна площа всього тіла дорівнюватиме фізичній різниці між площами першого і другого тіл, а саме:

$$S = s_1 - s_2 = \pi(R^2 - r^2).$$

Для визначення невідомої координати центра ваги заданої пластини використаємо перше рівняння виразу (1.134). Підставивши значення усіх відомих величин у це рівняння, отримаємо:



$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = \frac{-a \cdot \pi r^2}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{a r^2}{(R^2 - r^2)}.$$

Оскільки значення координати  $x_C$  від'ємне, а друга координата  $y_C = 0$ , то центр ваги пластини  $C$  розміщений на осі  $x$  зліва від точки  $C_1$ .

### 1.11.5. Центри ваги деяких однорідних тіл Центр ваги дуги кола

Розглянемо дугу  $AB$  кола радіусом  $R$ , у якої центральний кут  $OAB$  дорівнює  $2\alpha$  (радіан) (рис. 1.61).

Покажемо осі координат  $x, y$ , початок яких розмістимо у точці  $O$ . Оскільки дуга має вісь симетрії  $Ox$ , то центр її ваги буде розміщений саме на цій осі ( $y_C = 0$ ). Залишається обчислити тільки координату  $x_C$ . Використаємо для обчислення цієї координати перше рівняння виразу (1.136), замінивши суму на інтеграл по довжині лінії  $L$ :

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl. \quad (1.138)$$

Визначимо складові, які необхідно підставити у це рівняння. Для цього виділимо на дузі  $AB$  елемент  $MM_1$  довжиною  $dl$ :

$$dl = R \cdot d\varphi. \quad (1.139)$$

Якщо кут  $\varphi$  визначає положення елемента  $MM_1$  на дузі  $AB$ , то координата  $x$  цього елемента  $MM_1$  дорівнюватиме:

$$x = R \cos \varphi. \quad (1.140)$$

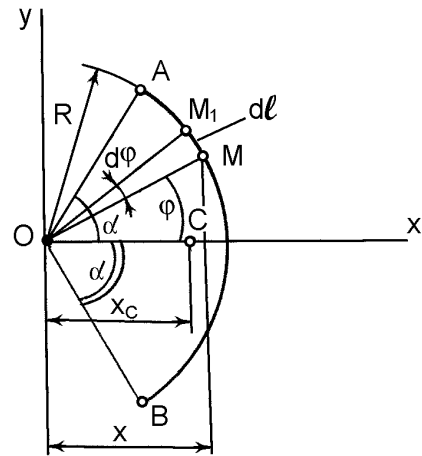


Рис. 1.61

Загальна довжина дуги  $AB$

$$L = 2\alpha \cdot R. \quad (1.141)$$

Підставимо значення (1.140) і (1.141) у рівняння виразу (1.139). вважають, що інтеграл у чисельнику цього виразу має бути визначеним по всій довжині дуги:

$$x_C = \frac{1}{L_A} \int x dl = \frac{R^2}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R}{2\alpha} \left\{ \sin \alpha - \left[ \sin (-\alpha) \right] \right\} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

Таким чином, координата центра ваги дуги:

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.142)$$

### Центр ваги трикутника

Уявимо довільний трикутник, вершини якого у прийнятій системі координат  $Ox$  у відповідають точкам із координатами  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$  і  $A_3(x_3, y_3)$  (рис. 1.62).

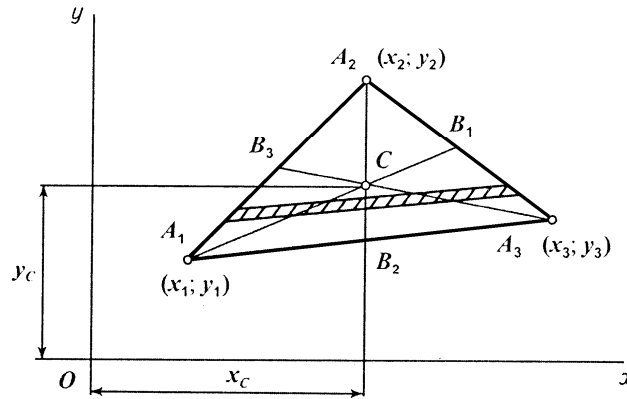


Рис. 1.62

Якщо провести достатню кількість прямих, паралельних основі  $A_1A_3$ , то вся площа трикутника складатиметься із смуг нескінченно малої ширини, тобто, ліній, центри ваги яких будуть розміщені посередині кожної смуги, а тому і центр ваги трикутника знаходитиметься на його медіані. А якщо провести лінії, паралельні іншій стороні трикутника, то і в цьому випадку центр ваги буде розміщений на відповідній медіані. Таким чином, цілком очевидно, що центр ваги трикутника  $C$  буде розташований у точці перетину його медіан

Визначимо аналітично координати цієї точки. Із курсу аналітичної геометрії відомо, що точка перетину медіан трикутника у прийнятій системі координат визначається такими залежностями:

$$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad (1.143)$$

де  $x_1, x_2, \dots, y_3$  – координати вершин трикутника.

### Центр ваги сектора

Розглянемо коловий сектор  $OAB$  радіуса  $R$ , центральний кут якого дорівнює  $2\alpha$  (радіан) (рис. 1.63).

Центр ваги сектора розміщується на осі його симетрії, тобто на бісектрисі кута  $AOB$ .

Прийmemo її за вісь  $x$  і знайдемо на цій осі положення центра  $C$ .

Розіб'ємо площу сектора на нескінченно велику кількість елементарних секторів із центральними кутами  $\Delta\varphi$ .

Розглядатимемо кожний сектор як трикутник з основою  $R \cdot \Delta\varphi$  і висотою  $R$ .

Центр ваги кожного трикутника знаходиться на відстані  $r = \frac{2}{3}R$  від центра сектора.

Таким чином, центри ваги всіх трикутників розташовані на дузі  $A'B'$ .

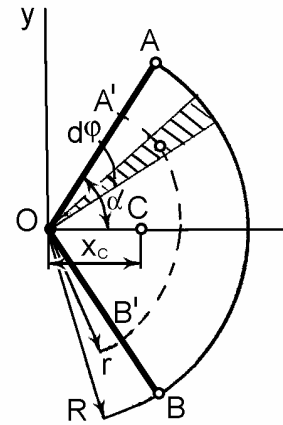


Рис. 1.63

Отже, якщо спрямувати кут до нуля  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , то центри ваги утворять дугу  $A'B'$ , на якій розміщений центр ваги сектора, і тоді залишається тільки знайти центр ваги дуги  $A'B'$ .

Використаємо формулу, за якою визначається центр ваги дуги кола радіусом  $r$ :

$$x_C = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}, r = \frac{2}{3}R, x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.144)$$

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які існують способи визначення координат центра ваги тіла?
2. Як визначити координати центра ваги дуги кола?
3. Як визначити координати центра ваги трикутника?
4. Як визначити координати центра ваги сектора?
5. Що таке метод симетрії і як ним користуються?
6. Що ви знаєте про методикy застосування способу розбиття тіла на частки?
7. Як і в яких випадках використовують метод підвішування плоских тіл?
8. Як визначають координати центра ваги складних машин?
9. На перетині яких прямих ліній розміщений центр ваги трикутника?
10. Чому дорівнює відстань від центра ваги трикутника до вершини?

## КІНЕМАТИКА

### 1.12. Вступ. Кінематика матеріальної точки

#### 1.12.1. Предмет кінематики

**Кінематика** – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають рух матеріальних об'єктів як моделей реальних тіл, як геометричних образів (матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, матеріальна система) з геометричної точки зору, без урахування причин, що викликають цей рух. Тобто, *вивчаються геометричні властивості механічного руху* незалежно від фізичних факторів, що спричиняють ці рухи. Такий підхід не потребує врахування інерційних і силових характеристик: маси і моменту інерції, сили і моменту сили.

Кінематика спирається на основні положення геометрії, які визначають просторові співвідношення, необхідні під час вивчення механічного руху. На відміну від геометрії тут береться до уваги ще і час руху, оскільки *механічний рух відбувається у просторі і часі* як об'єктивно реальних формах існування матерії. Отже, вивчаються залежності між просторово-часовими характеристиками механічного руху.

Рух є формою існування матеріального світу, а механічний рух, найпростіша форма руху матерії, – одним із наслідків взаємодії матеріальних тіл.

*Під механічним рухом розуміють зміну положення тіл у просторі протягом часу по відношенню до іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.*

Тільки на початку ХХ ст. створюється нова система просторово-часових відношень, яка базується на постулатах теорії відносності Лоренца, Пуанкаре, Ейнштейна і встановлює більш точний взаємозв'язок матеріальних об'єктів, що рухаються, з простором і часом.

Вперше чітко сформульовано ідею суто геометричного дослідження руху твердого тіла у творі Л. Ейлера «Теорія руху твердого тіла» (1775 р.). Дещо пізніше Г. Монж і Л. Карно вказують на необхідність виділити із механіки в окремий розділ вчення про геометричний рух у зв'язку з дослідженням кінематики машин. Цими ідеями скористувався А. Ампер, коли у праці «Дослід по філософії наук» (1834) запропонував термін «Кінематика», а вже в 1837 р. Ж. Понселе вперше створив курс кінематики і дванадцять років читав його у Паризькому університеті.

Згідно з основами класичної механіки, сформульованими І. Ньютоном, *простір*, в якому відбувається рух геометричних моделей у формі перелічених матеріальних об'єктів, *вважається абсолютним*, метричні особливості його незалежні від руху матерії у різних точках і напрямках (*однорідність і ізотропність простору*).

## **Частина перша**

---

За цими уявленнями простір і час, у якому відбувається рух, як би формально відокремлений від властивостей матерії. Метричні властивості цього простору повністю описуються системою аксіом Евкліда, де, наприклад, відстані між двома точками простору завжди визначено у вигляді довжини відрізка прямої.

Такий *простір* сприймається як *тривимірний*, тобто, у відповідній системі відліку *кожній точці* абсолютного простору відповідають *три координати*. Одиницею вимірювання простору у Міжнародній системі одиниць СІ є *метр (м)*.

Властивості *абсолютного часу* – *однорідність і універсальність*. Час однаково спливає у всіх точках простору, на всіх тілах. Вимір часу базується на відповідності між послідовними моментами часу і множиною дійсних чисел. Тому можна довільно вибирати початок відліку часу і вимірювати інтервали між окремими моментами часу. Одиницею вимірювання часу є *секунда (с)*.

За абсолютним простором і часом вводиться поняття *системи відліку*. Це сукупність системи координат, незмінно пов'язаної з деяким тілом відліку і пристроєм із періодичним процесом для вимірювання часу (годинник). Ця система може бути як рухомою, так і умовно нерухомою.

Хоча теорія відносності має інші уявлення про простір і час, ніж класична механіка, проте, для випадків звичайних рухів тривимірний евклідів простір і універсальний час є досить точним відображенням реального часу і простору.

У множині систем відліку, в яких можна вважати простір і час як абсолютні, вибираються так звані *інерціальні* системи відліку, в яких ізольована матеріальна точка може необмежено довго перебувати у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху під дією системи зрівноважених сил.

Якщо деяка система відліку є інерціальною із заданим ступенем точності, то можна вказати нескінченну кількість інерціальних систем відліку, які рухаються відносно вибраної системи поступально, рівномірно та прямолінійно.

Під час розв'язування задач небесної механіки, обчислення траєкторій супутників приймається *геліоцентрична система відліку* з початком у центрі мас Сонячної системи і осями координат, спрямованими на «нерухомі» зірки. У разі розв'язування багатьох технічних задач за інерціальну приймають *геоцентричну систему* відліку, яка пов'язана з центром Землі.

Рух тіла або закон руху тіла відносно вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити положення цього тіла відносно даної системи у будь-який момент часу. При цьому розрізняють момент часу і проміжок часу. *Проміжок часу* – це перебіг часу між двома

фізичними явищами. **Момент часу** – це границя між двома суміжними проміжками часу.

Положення моделі відносно даної системи відліку визначається відповідними параметрами, а її **рух** – **кінематичними рівняннями**, що виражають зміну цих параметрів як функцій часу.

**Основна задача кінематики** полягає у тому, щоб за відомими кінематичними рівняннями руху, що визначають закон руху даного геометричного образу, **знайти кінематичні характеристики цього руху**: траєкторії різних точок, їхні лінійні швидкості і прискорення; кутові швидкості і кутові прискорення тіла.

Очевидно, що рух геометричного образу щодо прийнятої системи відліку буде відомим, якщо є відомим рух кожної точки цього образу відносно цієї самої системи відліку.

Тому вивченню руху будь-якого геометричного образу передуює вивчення руху однієї його точки, зумовлюючи поділення кінематики на два розділи: кінематику точки і кінематику твердого тіла.

### **1.12.2. Основні положення кінематики точки**

Обмежимося спочатку вивченням руху точки відносно нерухомої системи координат. **Законом руху** матеріальної точки називають спосіб її переходу з одного положення у просторі і часі в інше положення. Введемо поняття переміщення і руху точки.

Під **переміщенням точки** розуміють перехід із одного положення у просторі в друге за визначений елементарний проміжок часу. Тобто, переміщення точки повністю визначається початковим і кінцевим положеннями і елементарним проміжком часу  $\Delta t$ .

Під **рухом точки** розуміють перехід із одного (початкового) положення у просторі в друге (кінцеве) деяким способом у певній залежності від часу.

Залежність між положенням точки, що рухається у просторі, і часом визначає **рівняння руху точки**. Основними кінематичними характеристиками руху точки є її **положення, швидкість і прискорення**.

**Основною задачею** кінематики точки є встановлення способу задання руху точки по відношенню до вибраної системи відліку і, виходячи з цього, знаходження методів визначення її кінематичних характеристик.

Задати рух кінематично або задати закон руху точки означає вказати такий спосіб, який дає можливість визначити положення цієї точки відносно даної системи відліку у будь-який момент часу.

### 1.12.3. Способи задання руху точки. Векторний спосіб

У відповідності до основної задачі кінематики точки розглянемо способи задання руху точки у просторі: векторний, координатний і натуральний.

Векторний спосіб знайшов широке застосування у теоретичних дослідженнях.

Розглянемо суть цього способу.

Допустимо, що довільна матеріальна точка  $M$  рухається у просторі за деякою кривою  $AB$ , яку називають траєкторією (рис. 1.64).

Візьмемо у просторі довільну нерухому точку  $O$  і проведемо до рухомої точки  $M$  радіус-вектор  $\vec{r}$ , який однозначно визначає положення точки.

Під час руху точки  $M$  її радіус-вектор  $\vec{r}$  змінюється за величиною (модулем) та напрямком, тобто, кожному моменту часу відповідає свій радіус-вектор. Моменту часу  $t_1$  відповідає радіус-вектор  $\vec{r}_1$  точки  $M_1$ .

Таким чином, якщо задається закон зміни радіуса-вектора  $\vec{r}$  рухомої точки  $M$  у функції часу, то вважається заданим закон руху матеріальної точки **векторним способом**:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.145)$$

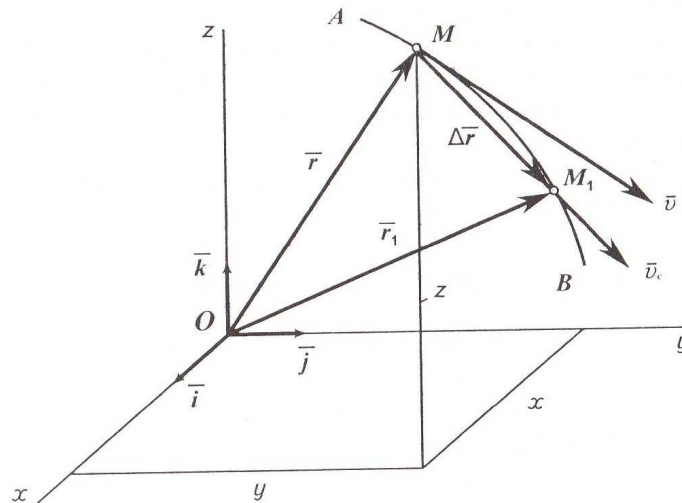


Рис. 1.64

Співвідношення (1.145) називається **кінематичним рівнянням руху** матеріальної точки у векторній формі і визначає положення точки у просторі в будь-який момент часу. Одночасно цей вираз можна розглядати як **рівняння траєкторії** точки або **рівняння просторової кривої** у векторній формі. Функція  $\vec{r}(t)$  повинна бути монотонною, неперервною і, принаймні, двічі диференційованою функцією часу.

## Траєкторія точки і годограф векторної функції

**Траєкторією точки** називається *геометричне місце положень точки під час руху в заданій системі відліку.*

Введемо поняття годографа векторної функції  $\vec{r}(t)$  (1.145) по скалярному аргументу  $t$  (час). Це крива, яка викреслюється кінцем радіуса-вектора  $\vec{r}$  у разі неперервного змінення аргументу  $t$  за умови, якщо початки цих векторів поєднані у фіксованій нерухомій точці  $O$  (рис. 1.65).

Тобто, годограф описують кінці векторів  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ , які відповідають конкретним положенням точки  $M$  у процесі руху. Це стосується не тільки радіусів-векторів, а й векторів швидкостей, прискорень тощо. У такому разі годограф збігається з траєкторією точки  $AB$ . Щоб знайти рівняння годографа в параметричному вигляді, досить знайти проєкції радіуса-вектора  $\vec{r}$  на ортогональні осі координат  $Oxyz$  (рис. 1.65), розклавши його за ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}. \quad (1.146)$$

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1.147)$$

Рівності (1.147) є *скалярними рівняннями годографа векторної функції  $\vec{r}(t)$  в параметричній формі.*

Як відомо із векторної алгебри, похідна  $\frac{d}{dt} \vec{r}(t)$  від векторної функції  $\vec{r}(t)$  є вектором, напрямленим по дотичній до годографа. За фізичним змістом *похідна* векторної функції  $\vec{r}(t)$  визначає змінення вектора  $\vec{r}$  за часом і напрямлена *по дотичній до годографа* цієї функції.

### Швидкість точки

**Швидкість точки** – це фізична векторна величина, яка характеризує міру змінення з часом радіуса-вектора точки у просторі за модулем і напрямом.

Одиницею швидкості у Міжнародній системі одиниць СІ є  $[м/с]$ .

Для визначення цієї кінематичної характеристики розглянемо рух матеріальної точки  $M$  за довільною траєкторією (рис. 1.65).

За деякий елементарний проміжок часу  $\Delta t$  точка переміщується із положення  $M$  у положення  $M_1$ , яке характеризується радіусом-вектором  $\vec{r}_1$ . Для того, щоб визначити *переміщення* точки  $M$  за проміжок часу  $\Delta t$ , з'єднаємо точки  $M$  і  $M_1$  прямою і отримаємо вектор  $\Delta \vec{r}$ , який є геометричною різницею між векторами  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}$ . Тоді середня наближена



## Частина перша

швидкість точки  $M$  за елементарний проміжок часу  $\Delta t$  (згідно з визначенням):

$$\bar{v}_c = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

За напрямом вектор середньої швидкості  $\bar{v}_c$  збігається з вектором  $\Delta \bar{r}$ , тобто він розміщений вздовж хорди  $MM_1$  і спрямований у бік руху точки  $M$ , що відповідає зростанню часу  $t$ .

Якщо перейти до границі  $\Delta t \rightarrow 0$ , то отримаємо дійсну швидкість точки  $M$  у будь-який момент часу  $t$ :

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (1.148)$$

За векторного способу задання руху **швидкість** матеріальної точки дорівнює **першій похідній** від радіуса-вектора за часом у заданій системі відліку.

Якщо наближати точку  $M_1$  до  $M$ , коли  $\Delta t \rightarrow 0$ , то отримаємо дійсний напрямок вектора швидкості  $\bar{v}$  точки – по дотичній до траєкторії (годографа) і спрямований у бік її руху.

### Прискорення точки

**Прискорення точки** в інерціальной системі відліку – це векторна величина, яка характеризує **міру зміння** модуля і напрямку **вектора швидкості** з часом у заданій системі відліку.

Одиницею прискорення точки у системі СІ є  $1 \text{ м/с}^2$ .

Визначимо прискорення матеріальної точки  $M$ . Розглянемо рух точки за довільною траєкторією  $AB$  (рис. 1.65).

З'єднаємо кінці векторів  $\bar{v}$  і  $\bar{v}_1$  прямою і отримаємо вектор  $\Delta \bar{v}$ . Відношення приросту  $\Delta \bar{v}$  до проміжку часу  $\Delta t$  є середнім прискоренням рухомої матеріальної точки:

$$\bar{a}_c = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \quad (1.149)$$

Для отримання дійсного прискорення матеріальної точки в даний момент часу необхідно розглянути нескінченно малий проміжок часу, а для виразу (1.149) здійснити перехід до границі  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (1.150)$$

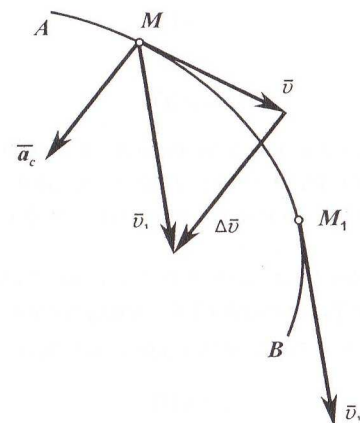


Рис. 1.65

Підставимо у вираз (1.150) значення швидкості точки (1.148)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} \quad (1.151)$$

За векторного способу задання руху матеріальної точки **прискорення** дорівнює **першій похідній від вектора швидкості** за часом або **другій похідній від радіуса-вектора рухомої точки у заданій системі відліку**.

Оскільки прискорення дорівнює похідній за часом від швидкості, то вектор прискорення  $\bar{a}$  матеріальної точки спрямований по дотичній до графіка векторної функції  $\bar{v}(t)$ .

#### 1.12.4. Координатний спосіб задання руху точки

Цей спосіб задання руху матеріальної точки широко використовують під час аналітичного розв'язування задач у технічних розрахунках.

Якщо вибрати у просторі нерухому ортогональну систему декартових координат  $Oxyz$ , то під час руху точки  $M$  всі три її координати будуть змінюватися з часом (рис. 1.64). Необхідно задати координати як функції часу, однозначні, неперервні і, принаймні, двічі диференційовані:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.152)$$

Ці параметричні рівняння, в яких роль параметра відіграє скалярний аргумент часу  $t$ , є **кінематичними рівняннями руху** точки в ортогональній системі декартових координат (або **законом руху** точки у координатній формі) і визначають суть цього способу.

Одночасно ці рівняння визначають зміну з часом просторового положення точки і є рівняннями траєкторії точки у параметричній формі.

Для одержання рівняння траєкторії в явній формі треба виключити з цих рівнянь час  $t$ .

Слід зауважити, якщо рух матеріальної точки здійснюється в одній площині  $xOy$ , то рівняння (1.152) набувають такого вигляду:

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (1.153)$$

Якщо матеріальна точка здійснює прямолінійний рух, то цей рух буде описаний одним рівнянням:

$$x = x(t). \quad (1.154)$$

Зв'язок між векторним і координатним способами має вигляд (1.146):

$$\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}.$$

Крім декартової системи в механіці використовують сферичну, циліндричну, полярну і інші системи координат.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки за такого способу задання її руху.

**Траєкторія точки**

Рівняння (1.152) і (1.153) є рівняннями траєкторії матеріальної точки у параметричній формі, де роль параметра відіграє час  $t$ .

Для знаходження **рівняння траєкторії** у координатній формі необхідно **виключити** з рівнянь руху **параметр часу  $t$** . Це можна зробити декількома способами: підстановкою або піднесенням обох частин рівнянь до квадрату і почленним додаванням (якщо рівняння містять тригонометричні функції).

Наприклад, розв'язуючи останнє рівняння системи (1.152) відносно параметра часу  $t$  і підставляючи це співвідношення у два перші рівняння, дістанемо:

$$t = \varphi(z); \Rightarrow x = x[\varphi(z)]; \quad y = y[\varphi(z)]. \quad (1.155)$$

Останні два рівняння визначають траєкторію точки як лінію перетину двох циліндричних поверхонь, що проектують траєкторію на координатні площини  $xOz$  і  $yOz$ .

**Приклад 1.10** Рух матеріальної точки здійснюється у площині  $xOy$  і заданий рівняннями:

$$x = 2t \text{ м}, \quad y = 12t^2 \text{ м}.$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки.

**Розв'язання**

Траєкторію руху матеріальної точки можна визначити одним із двох способів:

- а) задати різні моменти часу і зобразити координати точки  $x, y$  на графіку;
- б) виключити час  $t$  із заданих рівнянь руху.

Так, з першого рівняння визначаємо час  $t = \frac{x}{2}$ , і підставляємо у друге рівняння:

$$y = \frac{12x^2}{4} = 3x^2.$$

Таким чином, траєкторією руху точки є парабола з віссю симетрії  $Oy$  і з вершиною на початку координат.

**Приклад 1.11**

Рух матеріальної точки заданий рівняннями:  $x = 3 \sin t \text{ см}$ ,  $y = 3 \cos t \text{ см}$ , де  $t$  – в секундах.

Визначити рівняння траєкторії руху точки.

**Розв'язання**

Рівняння траєкторії руху можна визначити, якщо вилучити час  $t$  з рівнянь руху.

Перетворимо рівняння руху матеріальної точки:

$$\sin t = \frac{x}{3}, \quad \cos t = \frac{y}{3}.$$

Піднесемо до квадрату і додамо почленно ліві і праві частини цих виразів:

$$1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2}, \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2.$$

Отже, траєкторією руху матеріальної точки є коло радіусом  $R=3 \text{ см}$  з центром у початку координат.

### Швидкість точки

Для визначення швидкості матеріальної точки за координатного способу задання скористаємось основними положеннями векторного способу.

З цією метою підставимо вираз (1.146) у вираз (1.148):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right]}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (1.156)$$

Розкладаючи вектор швидкості  $\bar{v}$  по ортах прийнятої ортогональної системи декартових координат  $Oxyz$ :

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}, \quad (1.157)$$

і порівнюючи вирази (1.156) і (1.157), отримаємо:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (1.158)$$

**Проекції вектора швидкості матеріальної точки на осі ортогональної системи декартових координат  $Oxyz$  дорівнюють першим похідним від функцій відповідних координат за часом.**

Модуль вектора швидкості  $\bar{v}$  матеріальної точки визначається геометричною сумою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.159)$$

Напрямок вектора швидкості  $\bar{v}$  визначається напрямними косинусами кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат. Напрямні косинуси – це проекції ортів на відповідні осі координат.

$$\cos(\bar{i}, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\bar{j}, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\bar{k}, \hat{\bar{v}}) = \frac{v_z}{v}. \quad (1.160)$$

Рівності (1.158), (1.159), (1.160) визначають вектор швидкості точки за координатним способом опису її руху.

### Прискорення точки

Для визначення прискорення матеріальної точки за координатного способу поведимося аналогічно, як для швидкості руху. Значення радіуса-вектора  $\bar{r}$  (1.146) підставимо у вираз (1.151) і визначимо другу похідну за часом:

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 [x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}]}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}. \quad (1.161)$$

Вектор прискорення  $\bar{a}$  можна розкласти по ортах ортогональної системи координат  $Oxyz$ :

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (1.162)$$

Якщо порівняти вирази (1.161) і (1.162), то можна написати такі співвідношення:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \& a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \& a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \& \quad (1.163)$$

**Проекції вектора прискорення матеріальної точки на осі ортогональної системи декартових координат  $Oxyz$  дорівнюють другим похідним функцій відповідних координат рухомої точки або першим похідним проекцій швидкостей за часом.**

Модуль вектора прискорення матеріальної точки визначається геометричною сумою проекцій:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.164)$$

Напрямок вектора прискорення  $\bar{a}$  визначається напрямними косинусами:

$$\cos(\hat{i}, \hat{a}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\hat{j}, \hat{a}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\hat{k}, \hat{a}) = \frac{a_z}{a}. \quad (1.165)$$

Таким чином, за координатного способу задання руху матеріальної точки вектор прискорення  $\bar{a}$  визначається за допомогою рівностей (1.163), (1.164) і (1.165).

#### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає кінематика? Які незалежні змінні в кінематиці?
2. У чому полягають основні задачі кінематики?
3. Які існують способи задання руху точки?
4. Що таке закон руху матеріальної точки?
5. Яка залежність між радіусом-вектором точки і її координатами? Що таке годограф векторної функції?
6. Як спрямовується вектор швидкості точки?
7. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки за векторного способу задання руху?
8. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки за координатного способу задання руху?
9. Як визначити рівняння годографа?
10. Як визначити рівняння траєкторії точки за координатного способу?

#### 1.12.5. Натуральний спосіб задання руху точки

Натуральний спосіб застосовують, коли попередньо відома траєкторія точки. Тоді положення точки у просторі визначиться заданням таких

елементів (рис. 1.66):

– просторова або плоска крива  $AB$ , яка може бути задана рівнянням, графічно чи з вказівкою: точка рухається вздовж кола радіусом  $R$ ;

– початок відліку  $O$  дугової координати  $s$  на траєкторії руху з вказівкою напрямів додатних (+) і від’ємних (–) значень. Крім того, приймають початковий момент відліку часу  $t_0 = 0$ ;

– закон руху матеріальної точки вздовж траєкторії як функцію дугової координати від часу:

$$s = s(t). \quad (1.166)$$

Функція закону руху має бути однозначною, неперервною і, принаймні, двічі диференційованою.

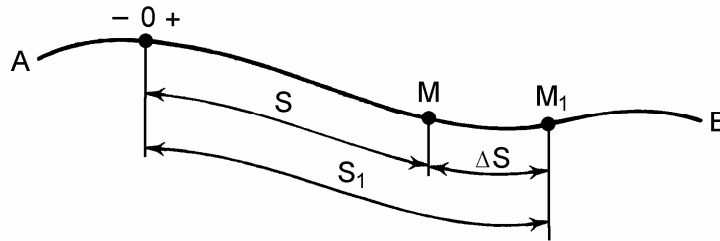


Рис. 1.66

Співвідношення (1.166) називається **кінематичним рівнянням** руху матеріальної точки **у натуральній формі** (або законом зміни дугової координати).

Дугова координата  $s$  у рівнянні (1.166) визначає положення точки на її траєкторії. Дугову координату не слід плутати з довжиною шляху, який проходить точка за певний проміжок часу: напрямок шляху може бути як у бік відліку додатних, так і у бік відліку від’ємних дугових координат. Шлях є монотонно зростаючою функцією часу.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки за натурального способу задання її руху.

### Швидкість точки

Розглянемо схему руху матеріальної точки  $M$  (рис. 1.66). Положення точки  $M$  відповідає моменту часу  $t$ , а положення  $M_1$  – моменту часу  $t_1$ . Тоді елементарному проміжку часу  $t_1 - t = \Delta t$  відповідає елементарна зміна дугової координати

$$s_1 - s = \Delta s.$$

Звідси можна визначити середню швидкість точки за елементарний проміжок часу  $\Delta t$ :

$$v_c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Дійсну швидкість точки в момент часу  $t$  можна визначити, якщо перейти до границі, коли елементарний проміжок часу  $\Delta t$  прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (1.167)$$

**Модуль швидкості** матеріальної точки за натурального способу задання її руху дорівнює **першій похідній** за часом від закону руху точки вздовж траєкторії.

Напрямок вектора швидкості – по дотичній до траєкторії матеріальної точки.

Похідна за часом визначає чисельну алгебраїчну величину швидкості: якщо модуль швидкості додатний ( $v = \dot{s} > 0$ ), то вектор швидкості спрямований у додатному напрямі відліку дугової координати, а якщо  $v = \dot{s} < 0$ , то – протилежно.

**Приклад 1.12**

Закон руху матеріальної точки заданий рівнянням  $s = 4t^2 + t$  м. Визначити переміщення і швидкість руху точки в момент часу  $t_1 = 1$  с.

**Розв’язання**

Визначимо спочатку положення точки на траєкторії руху якщо  $t_1 = 1$  с. Відлік часу почався з початком моменту руху  $s(0) = 0$ . Підставимо у рівняння руху значення заданого моменту часу:

$$s = 4 \cdot 1^2 + 1 = 5 \text{ м.}$$

Для визначення швидкості руху точки візьмемо похідну за часом від рівняння руху:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(4t^2 + t)}{dt} = 8t + 1 \Rightarrow v(1) = 8 \cdot 1 + 1 = 9 \text{ м/с.}$$

**1.12.6. Зв’язок між координатним і натуральним способами**

Для переходу від одного способу завдання руху матеріальної точки до іншого необхідно знайти залежності між основними параметрами цих рухів.

На підставі виразу (1.167) можна записати

$$ds = v \cdot dt \Rightarrow s = \int_0^t v dt. \quad (1.168)$$

Оскільки за координатного способу завдання руху матеріальної точки її швидкість визначається згідно з виразом (1.159):

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

то, підставляючи його у попередній вираз, остаточно знайдемо залежність між дуговою координатою і проекціями швидкості на декартові осі

координат:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1.169)$$

### 1.12.7. Натуральний тригранник і натуральні осі координат

Наведемо деякі відомості з диференціальної геометрії, які необхідні для подальшого визначення кінематичних характеристик руху матеріальної точки натуральним способом.

Побудуємо рухомий координатний базис  $M\tau nb$  – натуральний тригранник. Припустимо, що крива  $AB$  є траєкторією точки  $M$  (рис. 1.67).

Крізь довільну точку  $M$  і нескінченно наближену до неї точку  $M_1$  проведемо дотичні до траєкторії. Орти, які відповідні цим дотичним, позначимо через  $\bar{\tau}$  і  $\bar{\tau}_1$ . Потім перенесемо вектор  $\bar{\tau}_1$  паралельно самому собі у точку  $M$  і проведемо через вектори  $\bar{\tau}$  і  $\bar{\tau}_1$  площину.

*Граничне положення площини, проведеної крізь дотичні двох близьких точок, якщо проміжок часу прямує до нуля, а точка  $M_1$  наближається до точки  $M$ , називається стичною площиною.*

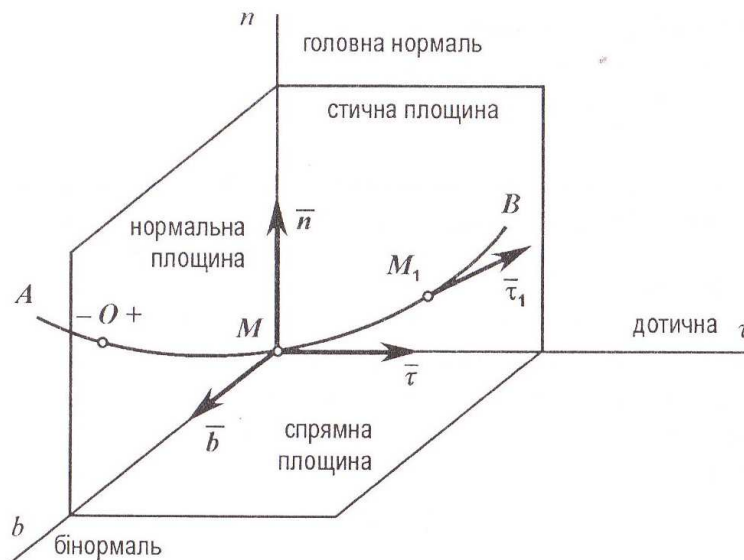


Рис. 1.67

Крізь точку  $M$  проведемо площину, перпендикулярну до дотичної  $\tau$ , яка називається **нормальною площиною**.

*Лінія перетину нормальної і стичної площин визначає головну нормаль кривої.*

Отже, **головна нормаль** – це єдина з нескінченної множини нормалей до кривої у точці  $M$ , яка розташована у стичній площині. Площина, що проходить через точку  $M$  перпендикулярно до головної нормалі, називається **спрямною**.



*Лінія перетину спрямної і нормальної площин визначає бінормаль кривої.*

Очевидно, що бінормаль перпендикулярна до головної нормалі.

Таким чином, у кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями, за якими можна провести **дотичну** у бік зростання дугової координати (орт  $\bar{\tau}$ ), **головну нормаль** – у бік угнутості кривої (орт  $\bar{\nu}$ ), **бінормаль** з відповідним ортом  $\bar{b}$ , спрямовану так, що орти  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\nu}$ ,  $\bar{b}$  утворюють праву ортогональну трійку векторів.

*Ортогональна система координатних осей з ортами  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\nu}$  і  $\bar{b}$ , з початком у рухомій точці  $M$  називається **натуральним координатним базисом** або **натуральним рухомим тригранником**  $M\tau\nu b$ .*

Зауважимо, що плоска крива розміщена у стичній площині, а головна нормаль є нормаллю до кривої у цій площині.

На відміну від інших систем відліку, натуральний трієдр рухається разом із точкою і змінює свою орієнтацію у просторі відповідно до характеру траєкторії.

### **1.12.8. Кривина кривої**

Як можна побачити далі, прискорення точки у криволінійному русі залежить від кривини траєкторії, тому розглянемо цю характеристику кривої.

На рис. 1.68 зображена траєкторія  $AB$  точки і два близькі положення точок  $M$  і  $M_1$ .

Проведемо крізь точки  $M$  і  $M_1$  дотичні  $\tau$  і  $\tau_1$ . Елементарна відстань між цими точками вдовж траєкторії дорівнює  $\Delta s$ . Кут  $\Delta\varphi$  між дотичними у двох близьких точках називається кутом суміжності.

**Кривиною кривої  $k$  у даній точці  $M$  називається границя відношення кута суміжності до дуги  $\Delta s$ , яка його стягує, якщо ця дуга прямує до нуля.**

Відношення  $\Delta\varphi$  до  $\Delta s$  є середньою кривиною:

$$k_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

а зведення  $k_c$  до границі дає дійсне значення кривини кривої:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (1.170)$$

Розглянемо коло радіусом  $R$ . Зробимо аналогічну геометричну побудову.

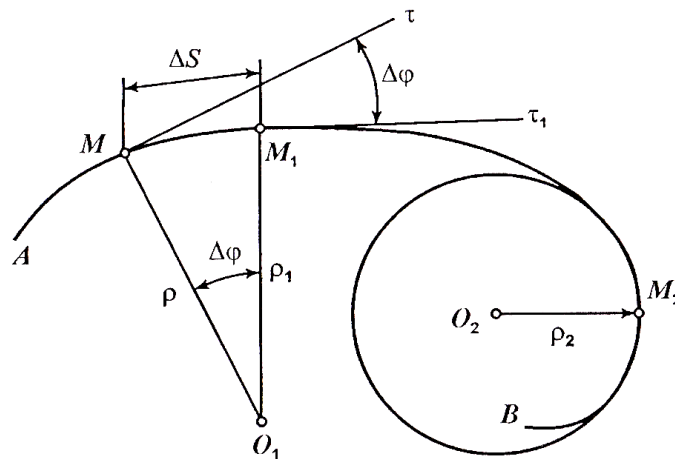


Рис. 1.68

Виразимо  $\Delta s$  за відомою формулою  $\Delta s = R \cdot \Delta \varphi$ , або  $ds = R \cdot d\varphi$  і підставимо у вираз (1.170):

$$k = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{R \cdot \Delta \varphi} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} \Rightarrow k = \frac{1}{R}. \quad (1.171)$$

**Коло є кривою сталої кривини, значення якої дорівнює оберненій величині радіуса.**

Для визначення кривини довільної кривої в даній точці досить **підібрати коло кривини**, елемент дуги якого краще за все апроксимує ділянку кривої у даній точці.

**Радіус кола кривини є радіусом кривини кривої, а центр кола – центром кривини.**

На рис. 1.68 позначені такі геометричні характеристики кривої:

$\rho_2$  – радіус кривини кривої у точці  $M_2$ ;  $O_2$  – центр кривини;

$k_2 = \frac{1}{\rho_2}$  – кривина кривої у точці  $M_2$ .

### 1.12.9. Прискорення точки в натуральних осях координат

В ортогональній системі декартових координат ми визначали прискорення точки у проєкціях на координатні осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В натуральних осях координат визначимо проєкції вектора прискорення на дотичну  $\tau$  і головну нормаль  $n$ .

Але спочатку доведемо, що проєкція вектора прискорення на бінормаль  $b$  дорівнює нулю. Для цього звернемося до рис. 1.69. Швидкості близьких точок  $M$  і  $M_1$  – вектори  $\bar{v}$  і  $\bar{v}_1$  напрямлені по дотичних  $\bar{\tau}$  і  $\bar{\tau}_1$  у цих точках.

Перенесемо паралельно вектор  $\bar{v}_1$  у точку  $M$  і з'єднаємо кінці векторів  $\bar{v}$  і  $\bar{v}_1$ .

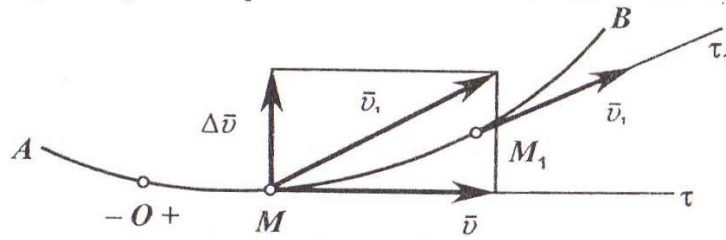


Рис. 1.69

Побудувавши паралелограм, з'ясуємо, що вектор  $\Delta \bar{v}$  як різниця векторів швидкостей, що формує вектор прискорення, розміщений у стичній площині.

Паралельно  $\Delta \bar{v}$  спрямований і вектор середнього прискорення  $\bar{a}_c$ , а вектор дійсного прискорення  $\bar{a}$  в даний момент часу дорівнює границі:

$$\bar{a} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M_1 \rightarrow M}} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t},$$

і також буде розміщений у стичній площині. Це означає, що проекція вектора прискорення на бінормаль дорівнює нулю. Знаючи, що вектор прискорення має тільки дотичну і нормальну складові, визначимо останні.

Для цього розглянемо схему, представлену рис. 1.70,

де:  $M\tau$  – дотична до траєкторії;  $Mn$  – головна нормаль;  $Mb$  – бінормаль;  $C$  – центр кривини траєкторії;  $\rho$  – радіус кривини траєкторії.

Припустимо, що в момент часу  $t$  точка  $M$  має швидкість  $\bar{v}$ , а в момент часу  $t_1 = t + \Delta t$  швидкість буде  $\bar{v}_1$ . Тоді прискорення точки:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t}.$$

Переходимо до проєкцій прискорення матеріальної точки на натуральні осі координат  $\tau$  і  $n$ :

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad (1.172)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}. \quad (1.173)$$

Враховуючи, що проєкції векторів на паралельні осі однакові, проведемо через точку  $M_1$  осі  $M_1\tau'$  і  $M_1n'$ , паралельні відповідним осям  $M\tau$  і  $Mn$ , і позначимо кут суміжності  $\Delta\varphi$ .

Знайдемо проєкції векторів  $\bar{v}$  і  $\bar{v}_1$  на осі  $M\tau$  і  $Mn$ :

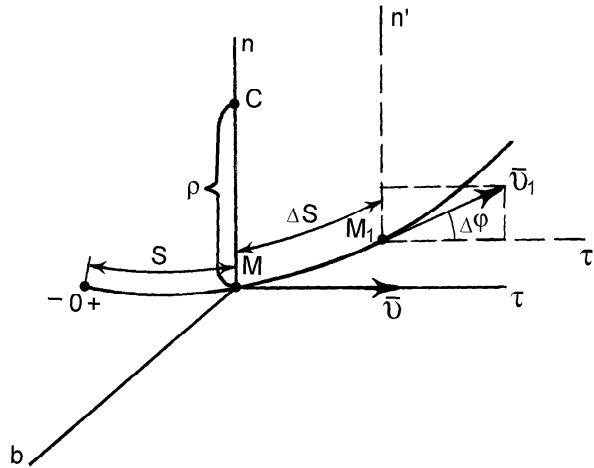


Рис. 1.70

$$v_\tau = v, \quad v_n = 0, \quad v_{1\tau} = v_1 \cos \Delta\varphi, \quad v_{1n} = v_1 \sin \Delta\varphi.$$

Підставимо значення проєкцій у вирази (1.172) і (1.173):

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad (1.174)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (1.175)$$

Якщо проміжок часу  $\Delta t$  прямує до нуля, то

$$M_1 \rightarrow M, \quad \Delta\varphi \rightarrow 0, \quad \Delta s \rightarrow 0, \quad v_1 \rightarrow v, \quad \cos \Delta\varphi \rightarrow 1.$$

Тоді за рівнянням (1.174) дотичне прискорення дорівнює:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (1.176)$$

**Дотичне прискорення** матеріальної точки характеризує змінення в одиницю часу вектора швидкості за величиною і дорівнює **першій похідній від функції швидкості** або **другій похідній за часом від дугової координати**.

Визначимо нормальне прискорення  $a_n$ . Перетворимо вираз для нормального прискорення (1.175), помноживши чисельник і знаменник на добуток  $\Delta\varphi \cdot \Delta s$ :

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( v_1 \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right). \quad (1.177)$$

Перепишемо вираз (1.177):

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Якщо  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{v_1 \rightarrow v} v_1 = v, \quad \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = 1,$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Підставимо значення цих границь у вираз для нормального прискорення:

$$a_n = v \cdot 1 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (1.178)$$

**Нормальне (доцентрове) прискорення** матеріальної точки характеризує змінення в одиницю часу вектора швидкості за напрямком і дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривини траєкторії у даній точці.

Вектор нормального прискорення  $\bar{a}_n = a_n \cdot \bar{n}$  спрямований вздовж нормалі до центра кривини кривої в даній точці. За знаком нормальне прискорення  $a_n$  додатне, тому що містить у чисельнику вираз  $v^2$ . Вектор дотичного прискорення  $\bar{a}_\tau = a_\tau \cdot \bar{\tau}$  направлений по дотичній до кривої і за знаком може бути як додатним, так і від'ємним.

Модуль повного прискорення  $\bar{a}$  може бути визначений геометричною сумою  $\bar{a}_\tau$  та  $\bar{a}_n$ . Він є діагоналлю прямокутника, побудованого на вказаних векторах, як на сторонах (рис. 1.71).

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (1.179)$$

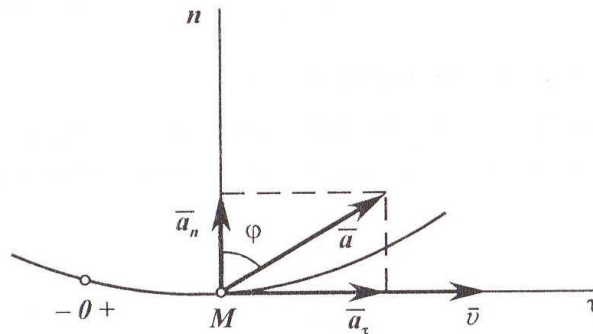


Рис. 1.71

Напрямок вектора прискорення визначається кутом  $\varphi$  між вектором  $\bar{a}$  і нормаллю  $n$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Вектор прискорення  $\bar{a}$  може бути розкладений по ортах натурального триєдра  $a_\tau$  і  $a_n$ :

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n}, \quad (1.180)$$

$$\bar{a}_\tau = \bar{\tau} \cdot a_\tau, \quad \bar{a}_n = \bar{n} \cdot a_n, \quad \bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (1.181)$$

### 1.12.10. Окремі випадки руху матеріальної точки.

#### Прямолінійний рух

Радіус кривини траєкторії, якою є пряма лінія, прямує до нескінченності:  $\rho \rightarrow \infty$ . Тому,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \Rightarrow a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Таким чином, в умовах прямолінійного руху вектор швидкості  $\bar{v}$  матеріальної точки змінюється лише чисельно, за модулем (нормальна проекція прискорення дорівнює нулю).

*Дотичне прискорення  $a_\tau$  характеризує зміну вектора швидкості за модулем.*

А якщо цей рух є ще і рівномірним,  $\bar{v} = \text{const}$ , то прискорення матеріальної точки дорівнює нулю:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0, \quad a = 0.$$

#### Рівномірний криволінійний рух

У цьому випадку модуль швидкості сталий  $v = \text{const}$ , а радіус кривини траєкторії є кінцевою величиною  $\rho \neq \infty$ . Визначимо проекції прискорення  $\bar{a}$  руху матеріальної точки на натуральні осі:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = a.$$

Таким чином, модуль повного прискорення  $\bar{a}$  матеріальної точки в цьому випадку дорівнює нормальному прискоренню  $a_n$ . Вектор нормального (в даному випадку повного) прискорення  $\bar{a}$  напрямлений вздовж нормалі  $\bar{n}$  до траєкторії. Оскільки прискорення  $\bar{a}$  з'являється тільки за рахунок зміни напрямку вектора швидкості  $\bar{v}$ , то звідси впливає наступна інформація:

**Нормальне прискорення  $a_n$  характеризує змінення вектора швидкості за напрямом.**

**Рівнозмінний криволінійний рух**

У цьому випадку рух точки криволінійний, але прискорення  $a_\tau$  є сталою величиною. Цей випадок носить назву рівнозмінного руху.

Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного руху матеріальної точки. Оскільки  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ , то звідси є можливість визначити

швидкість руху точки:

$$dv = a_\tau dt.$$

Швидкість  $\bar{v}$  перебуває тут під знаком диференціала, а тому візьмемо визначений інтеграл:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_\tau dt \Rightarrow v - v_0 = a_\tau t \Rightarrow v = v_0 + a_\tau t. \quad (1.182)$$

Використаємо далі вираз:  $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt$ .

Замість  $v$  підставимо в останній вираз отримане значення (1.182):

$$ds = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Як і у попередньому випадку знайдемо переміщення  $s$ , взявши визначений інтеграл від лівої і правої частин виразу.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt, \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \quad (1.183)$$

Таким чином під час рівнозмінного руху матеріальної точки її швидкість і переміщення визначаються за допомогою знайдених виразів (1.182), (1.183).

Слід зауважити, що знак у правих частинах цих формул (перед  $a_\tau$ ) визначає характер рівнозмінного руху. Якщо знак додатний, то рух точки рівноприскорений, а якщо від'ємний, то – рівносповільнений.

**Приклад 1.13**

Палець кривошипу дизеля рухається відповідно до заданих параметрично рівнянь:

$$x = b \sin \omega t, \quad y = b \cos \omega t,$$

де  $x$  і  $y$  – в метрах;  $t$  – в секундах;  $b$  і  $\omega$  – сталі величини.

Визначити рівняння траєкторії, швидкість і прискорення пальця.

**Розв'язання**

Для визначення рівняння траєкторії пальця кривошипа треба виключити з заданих рівнянь руху параметр часу  $t$ . Спочатку визначимо із заданих рівнянь тригонометричні функції:

$$\sin \omega t = \frac{x}{b}, \quad \cos \omega t = \frac{y}{b}.$$

Оскільки тригонометричні функції є функціями одного аргументу, то піднесемо до квадрату ліві та праві частини цих виразів і почленно додамо. Ліва частина останнього виразу дорівнює одиниці, оскільки  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ , тому:

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Таким чином, з останнього виразу легко побачити, що траєкторією пальця кривошипа є коло радіуса  $b$  з центром у початку координат.

Для визначення швидкості знайдемо спочатку проекції швидкості пальця на координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\omega \cdot \cos \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -b\omega \cdot \sin \omega t.$$

Модуль швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(b\omega \cdot \cos \omega t)^2 + (-b\omega \cdot \sin \omega t)^2} = b\omega.$$

З останнього виразу легко побачити, що палець рухається зі сталою швидкістю, яка дорівнює  $b\omega$ .

Знайдемо прискорення пальця кривошипу через проекції на осі координат. Для цього візьмемо другі похідні за часом від заданих координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -b\omega^2 \cdot \sin \omega t, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-b\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2 + (-b\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2} = b\omega^2.$$

Оскільки палець кривошипу рухається по колу, тобто, за криволінійною траєкторією руху сталого радіуса  $b$ , то його прискорення можна визначити за натуральним способом задання руху матеріальної точки. Дотичне прискорення пальця кривошипу буде дорівнювати нулю, оскільки швидкість  $b\omega = const$ :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(b\omega)}{dt} = 0.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(b\omega)^2}{b} = b\omega^2.$$

Оскільки дотичного прискорення немає, то повне прискорення дорівнює нормальному:  $a = a_n = b\omega^2$ .

Таким чином, величина прискорення пальця кривошипу, визначена різними способами, збігається.

#### **Приклад 1.14**

Точка на ободі барабана зернозбирального комбайна у період розгону рухається згідно з рівнянням  $s = 0,1 \cdot t^3$  ( $s$  – в метрах,  $t$  – в секундах). Радіус барабана дорівнює  $R = 0,5$  м. Визначити дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість дорівнює  $v = 30$  м/с.

#### **Розв'язання**

Рівняння руху точки задане натуральним способом, а тому швидкість дорівнює:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1 \cdot t^3)}{dt} = 0,3 \cdot t^2.$$

За заданим значенням швидкості точки  $v = 30$  м/с знайдемо момент часу. Підставимо значення цієї швидкості в отриманий вираз і знайдемо час  $t$ :

$$30 = 0,3 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

У функцію дотичного прискорення точки підставимо час:



$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0,3 \cdot t^2) = 0,6t, \quad a_{\tau}(10) = 0,6 \cdot 10 = 60 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,3 \cdot t^2)^2}{0,5} = \frac{30^2}{0,5} = 1800 \text{ м/с}^2.$$

Знак «плюс» перед дотичним прискоренням  $a_{\tau}$  означає, що барабан зернозбирального комбайна перебуває у стані розгону, що відповідає умові задачі.

---

### **ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. У чому полягає зміст натурального способу визначення руху точки?
2. Що називають дуговою координатою?
3. Як знайти шлях, що його проходить точка?
4. Як знайти зв'язок між натуральним і координатним способом?
5. Визначте швидкість точки натуральним способом завдання руху?
6. Як знайти прискорення точки натуральним способом задання руху?
7. У чому полягає фізичний зміст тангенціального і нормального складових прискорення?
8. Які особливості має натуральний координатний базис?
9. Напишіть формулу рівномірного і рівнозмінного руху точки?
10. Які потрібні умови для задання руху точки натуральним способом?
11. З'ясуйте різницю між дуговою координатою і шляхом, пройденим точкою.

## **1.13. Кінематика твердого тіла**

Переходимо до вивчення руху абсолютно твердого тіла. Якщо на тіло ніяких в'язей не накладено, то воно рухається вільно.

Закріпимо одну точку тіла (три в'язі), воно буде обертатись навколо цієї точки (три ступеня вільності). Закріпимо дві точки (п'ять в'язей), тіло буде обертатись навколо нерухомої осі, маючи один ступінь вільності.

Закріпимо три точки і тіло опиниться нерухомим (шість в'язей).

Відповідно до згаданого в механіці розглядаються такі рухи твердого тіла: *поступальний, обертальний навколо нерухомої осі, плоско-паралельний або плоский, обертальний навколо нерухомої точки або сферичний, вільний і складний рухи. Основна задача кінематики твердого тіла* полягає в установленні способу задання руху і вивченні кінематичних характеристик тіла загалом і окремих його точок.

Спосіб вважається встановленим, якщо визначено метод, що вказує положення довільної точки тіла в будь-який момент часу щодо вибраної системи координат. Розглянемо спочатку найпростіші види руху: поступальний і обертальний навколо нерухомої осі.

### **1.13.1. Поступальний рух твердого тіла**

*Поступальним* називається такий рух твердого тіла, за якого довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно її початковому положенню.

*Приклади* поступального руху твердого тіла: рух планки мотовила зернозбирального комбайна за прямолінійного руху останнього; рух

клавіші соломотряса (шарнірного паралелограма  $O_1ABO_2$  рис. 1.72 а), яка здійснює коловий поступальний рух; рух штовхача кулач-кового механізму (рис. 1.72 б), який здійснює зворотно-поступальний рух; рух педалі велосипеда відносно рами, поршня двигуна відносно циліндра, рух кузова автомобіля вздовж прямої дороги тощо.

З наведених прикладів легко побачити, що **траєкторією** точки тіла у разі поступального руху може бути як **пряма**, так і **крива** лінія.

Термін «поступальний рух» стосується тільки тіла, а не точки. Для дослідження поступального руху твердого тіла доведемо теорему:

**Під час поступального руху тіла всі його точки рухаються конгруентними траєкторіями і мають у кожен момент часу однакові швидкості і прискорення.**

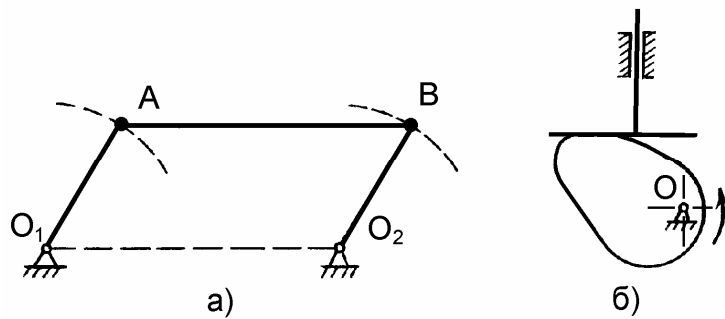


Рис. 1.72

Розглянемо в твердому тілі дві довільні точки  $A$  та  $B$  і визначимо їхні рухи векторним способом (рис. 1.73):

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t); \quad \vec{r}_B = \vec{r}_B(t). \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (1.184)$$

Функції  $\vec{r}_A(t)$  і  $\vec{r}_B(t)$  визначають векторним способом траєкторії точок  $A$  і  $B$ .

Вектор  $\vec{r}_{AB}$  не змінюється з часом ні за величиною, ні за напрямом (тверде тіло). Отже, із виразу (1.184) видно, що траєкторію точки  $B$  можна отримати з траєкторії точки  $A$  за допомогою паралельного переносу. Напрямок і величину переносу визначає сталий вектор  $\vec{r}_{AB}$ .

Оскільки вибір двох точок був довільний, то це означає, що всі **точки тіла рухаються конгруентними траєкторіями**.

Знайдемо похідну за часом  $t$  від виразу (1.184):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}.$$

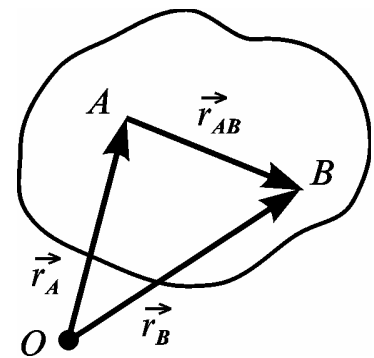


Рис. 1.73

Вектор  $\vec{r}_{AB} = \text{const}$ , тому  $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A$ .

Диференціюючи останній вираз швидкості за часом  $t$ , дістанемо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \dots$$

**Поступальний рух тіла цілком визначається рухом однієї довільної точки, оскільки всі точки тіла рухаються однаково.**

Швидкість і прискорення, які є загальними для всіх точок тіла, називаються швидкістю і прискоренням поступального руху тіла, а рівняння руху будь-якої його точки є рівнянням руху тіла.

Внаслідок повної тотожності руху всіх точок тіла більшість задач із кінематики поступального руху розв'язуються методами кінематики матеріальної точки.

### **1.13.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Закон обертального руху**

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі найбільш широко використовується в техніці.

**Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, за якого пряма, проведена крізь дві довільні точки тіла, під час руху тіла залишається нерухомою. Ця пряма, що проходить крізь ці дві нерухомі точки, називається віссю обертання тіла.**

Вісь обертання може знаходитись як всередині самого тіла, так і зовні його. Для того, щоб здійснити обертальний рух твердого тіла, необхідно закріпити, наприклад, у підшипниках, дві точки цього тіла.

#### **Визначення положення і закону обертального руху тіла**

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі  $z$ . Проведемо крізь нерухому вісь обертання  $z$  дві півплощини, одна з яких  $\pi_1$  є нерухомою, а друга півплощина  $\pi_2$  незмінно поєднана з тілом і обертається разом із ним. (рис. 1.74).

Тоді **положення тіла** у будь-який момент часу  $t$  однозначно **визначається** двограним кутом  $\varphi$  між півплощинами  $\pi_1$  і  $\pi_2$ , який називається **кутом повороту** тіла  $\varphi$ . Отже, положення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, визначається одним параметром, кутом повороту, тобто, тіло має один ступінь вільності.

Під час обертання тіла навколо нерухомої осі  $z$  кут повороту  $\varphi$  безперервно змінюється і є однозначною функцією часу:

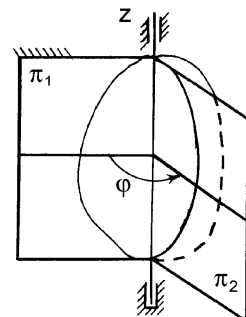


Рис. 1.74

$$\varphi = \varphi(t). \quad (1.185)$$

Вираз (1.185) називається **законом обертального руху** тіла або кінематичним рівнянням обертання навколо нерухомої осі.

Якщо маємо цю функцію, то положення тіла визначено однозначно. Тобто, кожному значенню параметра часу  $t$  відповідає лише одне значення кута повороту. Напрямок відліку кута повороту вибирається так. Суміщаємо координатну вісь  $z$  з віссю обертання. Кут  $\varphi$  вважається **додатним** ( $\varphi > 0$ ), якщо з додатного кінця осі  $z$  перехід рухомої площини  $\pi_2$  від нерухомої  $\pi_1$  відбувається **проти ходу годинникової стрілки** (для правої системи координат). І навпаки, від'ємний ( $\varphi < 0$ ), якщо, – **за ходом** годинникової стрілки.

Кут повороту тіла вимірюється в радіанах. Відомо, що один оберт відповідає  $2\pi$  рад. А тому зв'язок між кутом повороту  $\varphi$  в радіанах і числом обертів  $N$  такий:  $\varphi = 2\pi N$ .

### Кутова швидкість і кутове прискорення обертового тіла

Кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$ .

#### Кутова швидкість

Кутова швидкість  $\omega$  характеризує кінематичну міру змінення кута повороту тіла  $\varphi$  за одиницю часу. Якщо за деякий малий проміжок часу  $\Delta t = t_1 - t$  тіло здійснює поворот на кут  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ , то середня кутова швидкість  $\omega_c$  тіла за цей проміжок часу дорівнює:

$$\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Для знаходження дійсної кутової швидкості тіла  $\omega$  у будь-який момент часу  $t$  необхідно взяти границю, до якої наближається  $\omega_c$ , якщо елементарний проміжок часу  $\Delta t$  прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (1.186)$$

**Кутова швидкість тіла у будь-який момент часу дорівнює першій похідній за часом від кута його повороту і характеризує кінематичну міру змінення кута повороту в часі.**

Знак кутової швидкості  $\omega$  визначає напрямок обертання тіла і, у свою чергу, визначається знаком кута повороту  $\varphi$ . Якщо  $\omega > 0$ , то тіло в даний момент часу обертається в додатному напрямі зростання кута повороту, тобто, проти ходу годинникової стрілки і – навпаки.

Якщо кутова швидкість є сталою величиною, то обертальний рух тіла рівномірний. Одиницею кутової швидкості  $\omega$  є  $\text{рад}/\text{с}$ ;  $1/\text{с}$ ;  $\text{с}^{-1}$ .

### **Кутове прискорення**

Введемо фізичну величину, що характеризує міру змінення кутової швидкості  $\omega$  в часі. Нехай за елементарний проміжок часу  $\Delta t = t_1 - t$  кутова швидкість змінюється на величину  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$ , тоді відношення  $\Delta\omega$  до  $\Delta t$  уявляє собою середнє кутове прискорення  $\varepsilon_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ .

Для знаходження дійсного кутового прискорення тіла  $\varepsilon$  у будь-який момент часу  $t$  переходимо до границі, якщо  $\Delta t$  прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega' = \ddot{\varphi} \quad (1.187)$$

*Кутове прискорення тіла у будь-який момент часу чисельно дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла і характеризує кінематичну міру змінення кутової швидкості в часі.*

Одиницею кутового прискорення  $\varepsilon$  прийнятий радіан за секунду в квадраті:  $\text{рад}/\text{с}^2$ ;  $\text{с}^{-2}$ .

Якщо модуль кутової швидкості  $\omega > 0$ , то тіло обертається в додатному напрямі відліку кута повороту.

Якщо кутова швидкість зростає з часом, то  $\varepsilon > 0$  і обертальний рух тіла є прискореним, а якщо зменшується  $\varepsilon < 0$ , то – сповільненим.

Якщо під час обертання тіла кутове прискорення залишається весь час сталою величиною, то обертальний рух тіла є рівнозмінним (рівноприскореним або рівносповільненим).

### **Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі**

Залежно від того, які кінематичні характеристики має тіло під час обертання навколо нерухомої осі, можливі деякі окремі випадки.

#### **Рівномірне обертання**

Якщо кутова швидкість тіла залишається сталою за весь період часу руху тіла, то таке обертання називається рівномірним ( $\omega = \text{const}$ ,  $\varepsilon = 0$ ). Тоді кут повороту тіла визначається за формулою:

$$\varphi = \omega \cdot t \Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t} \quad (1.188)$$

У техніці швидкість рівномірного обертання тіл найчастіше визначають *частотою обертання*  $n$  в обертах за хвилину:  $\text{об}/\text{хв}$ .

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n \quad (1.189)$$

**Рівнозмінний обертальний рух**

У цьому випадку кутове прискорення стало  $\varepsilon = const$ , тобто, кутова швидкість тіла  $\omega$  за рівні проміжки часу змінюється на одну і ту ж величину. Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного обертального руху. Оскільки  $\varepsilon = const$ , то згідно з (1.187)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon \cdot dt.$$

Для знаходження кутової швидкості  $\omega$  використаємо визначений інтеграл в означених границях:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt.$$

Після інтегрування в означених границях отримаємо:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{1.190}$$

де  $\omega_0$  – початкова кутова швидкість тіла.

Далі використаємо вираз (1.186)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt.$$

Підставимо (1.190) в останній вираз:

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt. \tag{1.191}$$

Як і у попередньому випадку, знайдемо кут повороту тіла  $\varphi$  :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt.$$

Після інтегрування в означених границях отримаємо:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1.192}$$

де  $\varphi_0$  – початковий кут повороту тіла.

Таким чином, під час рівнозмінного обертального руху твердого тіла кутова швидкість  $\omega$  і кут повороту  $\varphi$  визначаються за формулами (1.190) і (1.192).

Слід зауважити, що знак у правих частинах цих формул (плюс чи мінус перед  $\varepsilon$ ) інформує про рівноприскорене або рівносповільнене обертання.

**Приклад 1.15**

Приводний вал силосорізки починає обертатись із стану спокою з кутовим прискоренням  $\varepsilon = 7,5 \text{ рад/с}^2$ . Визначити кутову швидкість вала у кінці 15 секунди, а також, скільки обертів зробить вал за ці 15 секунд.

**Розв'язання**

За умовою прикладу кутове прискорення вала є сталою додатною величиною, а тому його обертальний рух буде рівноприскореним. Для визначення кутової швидкості  $\omega$  і кута повороту  $\varphi$  вала

## Частина перша

можна скористатись виразами (2.46) і (2.48). Слід відразу зазначити: оскільки вал починає обертатись зі стану спокою, то його початкова кутова швидкість дорівнює нулю. Початковий кут повороту дорівнює нулю, якщо суміщені початок відліку кута повороту з початком руху:

$$\omega_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0.$$

Підставимо далі у вираз для кутової швидкості значення кутового прискорення  $\varepsilon$  і часу  $t_1 = 15$  с. Тоді кутова швидкість  $\omega$  після п'ятнадцятої секунди буде дорівнювати:

$$\omega = \varepsilon t_1 = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \text{ рад/с.}$$

Якщо підставити у вираз для кута повороту  $\varphi$  відомі величини, то отримаємо його значення за 15 секунд:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7,5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{ рад.}$$

Для знаходження загальної кількості обертів вала скористаємось таким виразом:  $\varphi = N \cdot 2\pi$ .

Звідси кількість обертів  $N$  вала за 15 с дорівнює:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} = 134 \text{ об.}$$

## Розподіл лінійних швидкостей і прискорень точок обертового тіла

Крім загальних кінематичних характеристик тіла, що обертається навколо нерухомої осі, – кутової швидкості  $\omega$  і кутового прискорення  $\varepsilon$  – визначимо *лінійні або колові швидкості і лінійні або колові прискорення точок тіла*.

З визначення обертального руху тіла випливає, що траєкторією довільної точки обертового тіла є накреслене точкою коло з радіусом, який дорівнює відстані до осі обертання тіла.

Площини кіл перпендикулярні до осі. Центри цих кіл знаходяться в точках перетину нерухомої осі обертання з указаними площинами. Радіуси даних кіл називають також радіусами обертання точок тіла.

### Лінійна (колова) швидкість

Розглянемо тіло, що обертається навколо нерухомої осі  $z$  (рис. 1.75). Напрямок обертання показаний стрілкою. Виберемо в тілі будь-яку точку  $M$ , яка розміщується на відстані радіуса обертання  $R$  від осі  $z$ .

Точка  $M$  окреслює показане на рисунку коло радіусом  $R$ , площина якого перпендикулярна осі  $z$  обертання, а центр  $C$  розміщений на самій осі  $z$ . За деякій проміжок часу  $dt$  відбувається елементарний поворот тіла на кут  $d\varphi$ , при цьому точка  $M$  здійснить уздовж своєї траєкторії переміщення в положення  $M_1$  на величину:

$$ds = R d\varphi.$$

Визначимо лінійну або колову швидкість точки  $M$  за відомим виразом (2.22):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R d\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

$$v = \omega R. \tag{1.193}$$

*Лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.*

Вектор лінійної швидкості  $\vec{v}$  напрямлений вздовж дотичної  $\vec{\tau}$  до кола (перпендикулярно радіусу обертання), яке окреслюється точкою  $M$  під час руху, і спрямований у напрямку обертання.

Оскільки для всього тіла кутова швидкість  $\omega$  у даний момент часу має одне і те ж саме значення, то лінійні швидкості точок тіла прямо-пропорційні їх відстаням до осі обертання.

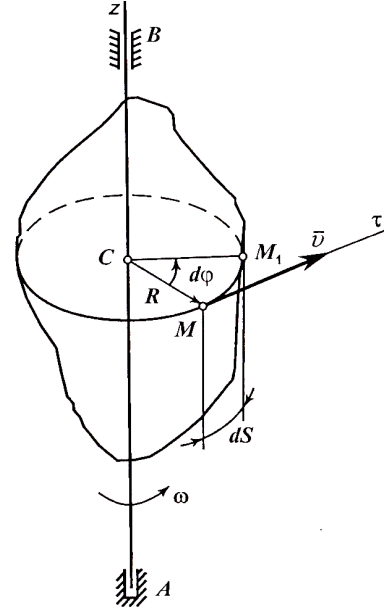


Рис. 1.75

### Лінійне прискорення

Визначимо далі прискорення точки  $M$ , (рис. 1.75) за формулами (1.176) і (1.178). У даному випадку радіус кривини кола  $\rho = R$ . Підставляючи вираз (1.193), матимемо формулу обертального або дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \tag{1.194}$$

і доцентрового або нормального прискорення:

$$a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2. \tag{1.195}$$

Дотичне прискорення  $\vec{a}_\tau$  спрямоване за дотичною до траєкторії руху точки  $M$  у бік обертання, якщо рух тіла прискорений ( $\varepsilon > 0$ ), і протилежно, якщо рух сповільнений ( $\varepsilon < 0$ ).

Нормальне прискорення  $\vec{a}_n$  завжди додатне і спрямоване за нормаллю (радіусом) до центра кола, за яким рухається точка. Визначимо модуль повного прискорення  $\vec{a}$  точки  $M$ . Воно дорівнюватиме геометричній сумі складових дотичного  $\vec{a}_\tau$  і нормального  $\vec{a}_n$  прискорень:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4} \Rightarrow a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{1.196}$$

Аналізуючи вираз (1.196), легко переконатися, що величина повного



## Частина перша

лінійного прискорення точки прямо пропорційна радіусу і не залежить від того, обертається тіло прискорено чи сповільнено. Визначимо напрямок вектора повного прискорення  $\vec{a}$  точки  $M$  тіла, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  і кутовим прискоренням  $\varepsilon$  (рис. 1.76).

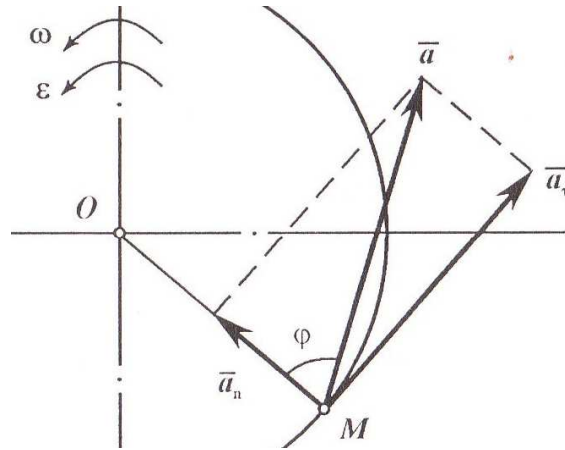


Рис. 1.76

Відхилення вектора повного прискорення  $\vec{a}$  від нормалі (радіуса) визначається кутом  $\varphi$ , який може бути обчислений за виразом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{\tau}}{a_n} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (1.197)$$

Як впливає з виразу (1.197), кут відхилення від нормалі вектора повного лінійного прискорення  $\vec{a}$  не залежить від радіуса обертання і в кожний даний момент часу однаковий для всіх точок тіла.

### Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла

Кутову швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  обертового тіла зображують векторами.

*Вектори кутових швидкості і прискорення обертового тіла розміщуються на осі обертання і спрямовані так, що, дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити поворот тіла у напрямку проти ходу годинникової стрілки.*

Вказаний напрямок вважається додатним у правій системі координат і від'ємним – у лівій.

Зазначимо, що вектор кутового прискорення спрямований у той же бік, що і вектор кутової швидкості, якщо обертання прискорене, і навпаки.

Якщо розглядати різні випадки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, то напрямки векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$  будуть такими, як це показано

на рис. 1.77.

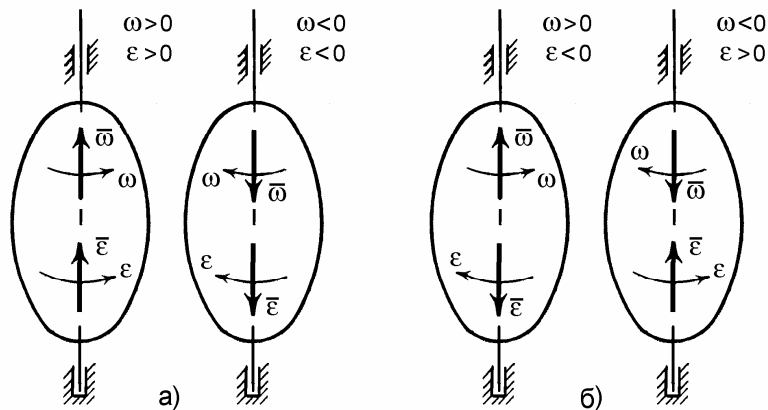


Рис. 1.77

**Вектори** кутової швидкості  $\bar{\omega}$  і кутового прискорення  $\bar{\epsilon}$  є **ковзними** векторами. Вектор  $\bar{\omega}$  напрямлений по нерухомій осі обертання, його годографом є пряма лінія. Вектор  $\bar{\epsilon}$  як похідна від  $\bar{\omega}$  повинний мати напрям по дотичній до годографа  $\bar{\omega}$ . Але годографом останнього є пряма, тому і вектор  $\bar{\epsilon}$  для обертового тіла з нерухомою віссю обертання напрямлений також вздовж осі обертання. **Вектори** кутової швидкості і кутового прискорення одночасно визначають наступні **три елементи**:

**положення осі** обертання даного тіла в нерухомій системі координат; **величини**, які характеризують значення швидкості і прискорення; **напрямок** обертання тіла.

Якщо позначити на рис. 1.77 вісь обертання  $z$  ортом  $\bar{k}$ , то вектори  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\epsilon}$  можна уявити:  $\bar{\omega} = \bar{k} \cdot \omega$ ;  $\bar{\epsilon} = \bar{k} \cdot \epsilon$ ;  $\omega_z = \pm \omega$ , а проєкції цих векторів на осі координат  $x, y$  із ортами  $\bar{i}, \bar{j}$  дорівнюватимуть нулю:  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

### Векторний вираз лінійної швидкості точки обертового тіла. Формула Ейлера

Лінійну швидкість точки обертового тіла можна уявити у вигляді векторного добутку. Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі  $z$  у напрямку, показаному стрілкою (рис. 1.78).

Уявимо, що довільна точка  $M$  рухається по колу радіусом  $R$ . Виберемо на осі обертання  $z$  довільну точку відліку  $O$  і проведемо із цієї точки вектор кутової швидкості  $\bar{\omega}$ , спрямовуючи його вгору (за визначенням), і радіус-вектор  $\bar{r}$  цієї точки  $M$ , який визначає її положення відносно точки відліку.

Покажемо, що лінійна швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку кутової швидкості  $\bar{\omega}$  тіла на радіус-вектор  $\bar{r}$  точки  $M$ .

## Частина перша

Визначимо модуль лінійної швидкості  $v$  точки  $M$ :

$$v = \omega R, \quad R = r \sin \alpha \Rightarrow v = \omega \cdot r \sin \alpha, \quad (1.198)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$ .

Вектор  $\vec{v}$  лінійної швидкості точки  $M$  спрямований по дотичній до кола, яке є траєкторією руху точки  $M$ , тобто перпендикулярний площині трикутника  $OMC$ . Далі визначимо модуль векторного добутку  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ :

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha. \quad (1.199)$$

Напрямок векторного добутку  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  також перпендикулярний площині трикутника  $OMC$ , що безпосередньо випливає з визначення векторного добутку двох векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$ .

Із цього можна дійти висновку, що не тільки збігаються модулі лінійної швидкості і векторного добутку (формули (1.198), (1.199)), але і їх напрямки. Звідси:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.200)$$

**Лінійна швидкість** будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює **векторному добутку** двох векторів: **кутової швидкості і радіуса-вектора** цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Формула (1.200) надає можливість отримати картину розподілу швидкостей точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

З'ясуємо, чому ця формула інваріантна відносно довільності вибору точки відліку  $O$  на осі обертання.

Для цього звернемо увагу на модуль векторного добутку (1.199) і легко з'ясуємо, що результат коректує синус кута  $\alpha$  між векторами: зі зміною положення точки відліку змінюється і сам кут і, відповідно, величина швидкості.

Визначимо лінійну швидкість точки  $M$  тіла, вісь обертання якого довільно розміщена у просторі відносно системи координат  $Oxyz$  (рис. 1.79).

Виразимо лінійну швидкість  $\vec{v}$  за допомогою визначника векторного добутку:

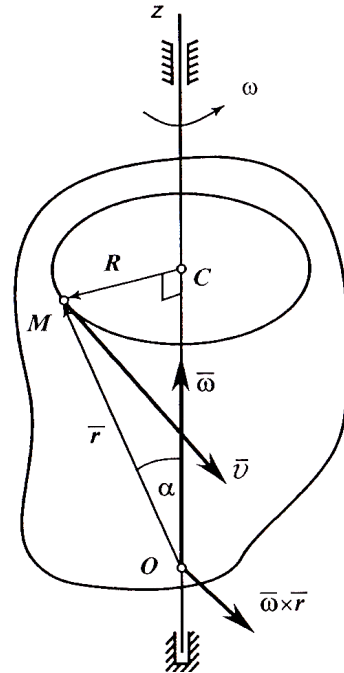


Рис. 1.78

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \bar{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \bar{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \bar{k}. \quad (1.201)$$

Як відомо, вектор швидкості можна розкласти по ортах декартової системи координат:

$$\bar{v} = \bar{i} v_x + \bar{j} v_y + \bar{k} v_z.$$

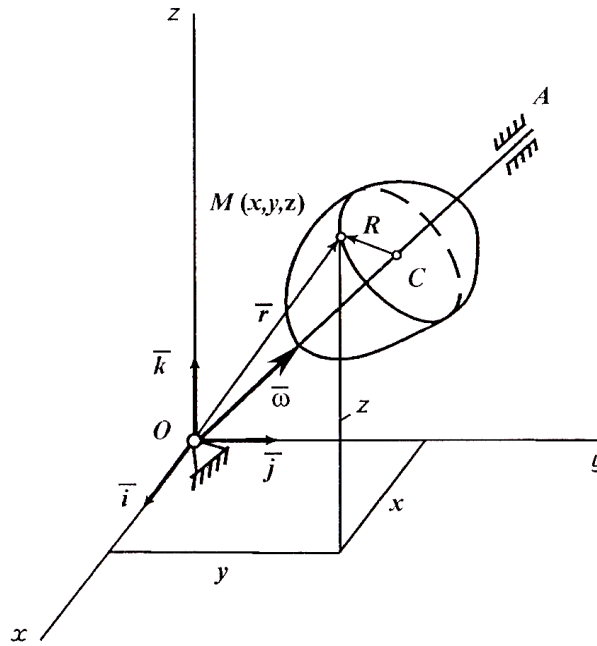


Рис. 1.79

Порівнюючи останні два вирази, легко переконатись, що проекції лінійної швидкості  $\bar{v}$  на осі координат дорівнюють:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (1.202)$$

Формули (1.201) як скалярні співвідношення одержані академіком Ейлером у 1765 році. Але і формула (1.202) теж носить назву формули Ейлера.

Для окремого випадку, якщо вісь обертання вертикальна (рис. 1.80):

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega.$$

Користуючись виразом (1.202), дістанемо результат, який свідчить про універсальність формули Ейлера:

$$v_x = -\omega y, v_y = \omega x, v_z = 0, v = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R.$$

**Приклад 1.16**

Закон обертання маховика двигуна у пусковий період визначається рівнянням  $\varphi = \frac{t^3}{3}$ , де  $t$  – в секундах,  $\varphi$  – в радіанах. Визначити модуль і напрям прискорення точки, розміщеної на відстані 50 см від осі обертання, в момент, коли її швидкість  $v_1 = 8$  м/с.

**Розв'язання**

Для визначення прискорення руху матеріальної точки можна використати вираз (2.52):  $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ . Кутові швидкість і прискорення руху маховика двигуна визначимо, використавши вирази (2.42) і (2.43):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t^2, \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t.$$

Визначимо момент часу, в який потрібно визначити прискорення точки. Для цього, на підставі виразу (2.49), визначимо кутову швидкість обертання маховика:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0,5} = 16 \text{ с}^{-1}.$$

Оскільки визначена раніше кутова швидкість  $\omega = t^2$ , то можемо визначити час:

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4 \text{ с}.$$

У формулу  $\varepsilon = 2t$  підставимо час  $t_1$  і отримаємо величину кутового прискорення у даний момент часу:

$$\varepsilon_1 = 2t_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ с}^{-2}.$$

Підставимо значення  $\omega_1$  і  $\varepsilon_1$  у вираз для повного прискорення і матимемо шуканий результат:

$$a = 0,5\sqrt{8^2 + 16^4} = 128,0 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора  $\vec{a}$  визначимо згідно з виразом (2.53):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32}, \text{ звідки } \varphi = 1^\circ 48',$$

де  $\varphi$  – кут між радіусом обертання і вектором повного прискорення  $\vec{a}$ .

**Передача обертального руху**

Передача обертального руху здійснюється за допомогою зубчастих, пасових, ланцюгових передач, коліс тертя тощо (рис. 1.80).

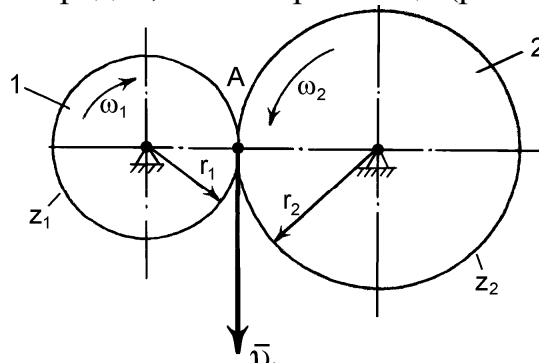


Рис. 1.80

Простою передачею називають такий механізм, до складу якого входять тіла, що здійснюють тільки найпростіші рухи: поступальний або обертальний відносно нерухомої осі. Розглянемо передачу обертального руху за допомогою зубчастої передачі, яка складається з двох коліс, що обертаються навколо нерухомих осей.

Назвемо перше колесо (з меншим діаметром) ведучим (шестернею). Напрямок його обертання показано стрілкою. Воно має такі фізичні та кінематичні параметри: радіус –  $r_1$ , кількість зубів –  $z_1$ , кутова швидкість –  $\omega_1$ , частота обертання –  $n_1$ . Друге колесо, яке є веденим, має такі параметри: радіус –  $r_2$ , кількість зубів –  $z_2$ , кутова швидкість –  $\omega_2$ , частота обертання –  $n_2$ . Напрямок обертання другого колеса також показано стрілкою. Якщо передача обертального руху здійснюється без проковзування у місці контакту коліс, то лінійна швидкість точки контакту (точка  $A$ ), яка належить одночасно двом колесам, має бути однаковою.

Лінійна швидкість точки  $A$  для першого колеса  $v_A = \omega_1 \cdot r_1$ , а лінійна швидкість точки  $A$  другого колеса  $v_A = \omega_2 \cdot r_2$ . Порівняємо обидва вирази для точки  $A$ :

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

Перетворимо останній вираз

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Якщо вважати, що передаточне відношення – це відношення кутових швидкостей  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = u$ , то можна остаточно написати:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

***Передаточне відношення прямо пропорційне відношенню кутових швидкостей і частот обертання ведучого і веденого коліс. Воно обернено пропорційне величинам радіусів і кількості зубців відповідних коліс.***

Вказані основні положення про передачу обертального руху між двома колесами повністю придатні для визначення передаточного відношення для пасової або ланцюгової передач.

## **Методика і приклад розв’язування задач**

### **Приклад 1.17**

Два шківні I і II з’єднано нескінченним пасом (рис. 1.83). Радіуси шківів, відповідно  $R_1 = 0,25$  м і  $R_2 = 0,5$  м. Внутрішній радіус шківів II  $r_2 = 0,2$  м.

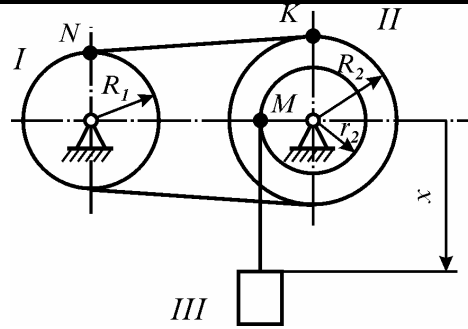


Рис. 1.81

Знайти швидкість  $v$  точок паса і кутові швидкості обох шківів, якщо рівняння руху тягара  $x = 4t^2$  ( $x$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах).

Оскільки трос, на якому підвішений тягар III, є нерозтяжним, то швидкість точки  $M$  шківа II дорівнює швидкості тягара III.

З рівняння руху тягара ця швидкість дорівнює:  $v_M = \dot{x} = 8t$  см/с.

Отже, кутова швидкість шківа II:

$$\omega_{II} = \frac{v_M}{r_2} = \frac{8t}{20} = 0,4t \text{ рад/с.}$$

Оскільки пас нерозтяжний і рухається без ковзання, то точки обводів шківів мають однакову швидкість  $v_N = v_K = v$ , тобто:  $v = \omega_I R_1 = \omega_{II} R_2 = 0,4t \cdot 50 = 20t$  см/с,

$$\frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \omega_I = \frac{\omega_{II} R_2}{R_1} = \frac{0,4t \cdot 0,5}{0,25} = 0,8t \text{ рад/с.}$$

#### ЗАПИТАННЯ ДЛІ САМОКОНТРОЛЮ

1. Надайте означення і приклади поступального руху тіла.
2. Чи можна звести кінематику поступального руху до кінематики точки?
3. Як визначити положення обертового тіла? Що таке закон обертання?
4. Означте кутові швидкості і кутові прискорення обертового тіла, назвіть їхні одиниці виміру. Визначте частоту обертання.
5. Назвіть формули рівнозмінного обертання тіла.
6. Як спрямовані вектори лінійних швидкостей та прискорень точок обертового тіла?
7. Що таке передаточне відношення пари зубчастих коліс?
8. Як спрямувати вектори кутових швидкості і прискорення?
9. Запишіть і проаналізуйте формулу Ейлера.
10. В яких одиницях вимірюється кут повороту тіла?

### 1.13.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельний рух широко розповсюджений у техніці і його вивчення має велике значення. Багато механізмів, що зустрічаються на практиці, належать до, так званих, плоских механізмів.

**Плоскопаралельним або плоским рухом твердого тіла називається такий рух, під час якого всі точки тіла рухаються паралельно деякій заданій нерухомій площині, яку називають напрямною.**

Розглянемо вказаний рух. Нехай всі точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, рухаються паралельно деякій нерухомій площині  $\pi$  (рис. 1.82).

Якщо перетнути тіло площиною  $xOy$ , яка паралельна нерухомій площині  $\pi$ , то у перерізі отримаємо плоску фігуру  $S$ . Фігура  $S$  під час руху тіла довільно переміщується, залишаючись весь час у площині  $xOy$ .

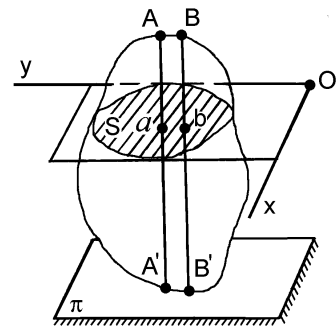


Рис. 1.82

У разі плоскопаралельного руху всі точки перпендикуляра до площини фігури  $AA'$  рухаються однаково, як і точка  $a$  перерізу, маючи однакові швидкості і прискорення, тому що цей перпендикуляр рухається поступально.

Якщо взяти на перерізі другу точку  $b$  та провести перпендикуляр  $BB'$ , то всі і його точки будуть мати однакові швидкості і прискорення. Але загалом швидкості і прискорення точок перпендикулярів є різними:

$$\vec{v}_A \neq \vec{v}_B \text{ і } \vec{a}_a \neq \vec{a}_b.$$

Якщо на перерізі тіла (фігура  $S$ ) взяти велику кількість точок, то рух фігури перерізу  $S$  може повністю репрезентувати плоскопаралельний рух всього тіла. З вищенаведеного випливає, що для визначення плоскопаралельного руху твердого тіла достатньо знати рух плоскої фігури  $S$ , одержаної перетином тіла площиною  $xOy$ , паралельною заданій напрямній нерухомій площині  $\pi$ . Проте, рух плоскої фігури у площині визначається рухом відрізка прямої, проведеної на цій фігурі.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла, фактично, зводиться до розглядання руху відрізка прямої на площині.

### Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи

Нехай плоска фігура  $S$  рухається у площині  $Oxy$  і за деякий малий проміжок часу переміщується із положення I у положення II (рис. 1.83).

Легко переконатися, що переміщення фігури  $S$  та незмінно пов'язаного з нею відрізка  $AB$  можна вважати складеним із поступального і обертального рухів.

Дійсно, переміщення відрізка  $AB$  у положення  $A'B'$  можна розглядати як поступальне переміщення у положення  $A'B''$

і наступний поворот навколо точки  $A'$ , яку приймаємо за полюс, на деякий кут  $\varphi$ . Або як поступальне переміщення в положення  $B'A''$  і наступний поворот на той же кут  $\varphi$  навколо точки  $B'$ , яку в цьому разі приймаємо за

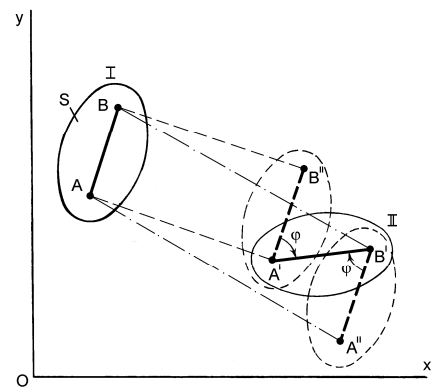


Рис. 1.83



полюс.

Як видно з рис. 1.83, кут  $\varphi$  повороту фігури  $S$  навколо полюса  $A'$  дорівнює куту повороту навколо полюса  $B'$ . Однаковим буде і напрям повороту – за ходом годинникової стрілки. Таким чином, кут повороту  $\varphi$  і напрям повороту фігури не залежать від вибору полюса. Слід зауважити, що такого ж самого кінцевого результату можна досягнути, якщо здійснити спочатку поворот тіла, а потім – поступальний рух.

**Переміщення фігури  $S$  в її площині із одного положення у друге, яке нескінченно близьке до першого, у границі можна замінити двома елементарними простими плоскими переміщеннями – поступальним і обертальним.**

### Аналітичні дослідження плоскопаралельного руху тіла

Для визначення рівнянь плоскопаралельного руху твердого тіла розглянемо у площині руху фігури  $S$  ортогональну систему декартових координат  $Oxy$ , яка є нерухомою відносно цієї площини (рис. 1.84).

Візьмемо на фігурі  $S$  будь-яку точку  $A$  за полюс і за початок рухомої системи координат  $Ax'y'$ , яка жорстко зв'язана з фігурою  $S$ . Положення рухомої системи координат  $Ax'y'$ , як і усієї плоскої фігури  $S$ , буде визначатися положенням полюса  $A$  і кутом повороту  $\varphi$  осі  $x'$  щодо нерухомої осі  $x$ .

Протягом часу координати полюса  $A$  і кут повороту тіла  $\varphi$  змінюються як однозначні функції часу, тому їх можна описати системою рівнянь:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (1.203)$$

Ці рівняння є рівняннями руху плоскої фігури або кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху тіла.

Якщо координати полюса  $A$  і кут повороту  $\varphi$  відомі у будь-який момент часу, то можна визначити і положення будь-якої довільної точки  $M$  тіла у площині її руху.

Якщо з'єднати точку  $M$  з полюсом  $A$  радіусом-вектором  $\bar{r}$ , то у рухомій системі координат  $Ax'y'$  її координати будуть  $x'_M$  і  $y'_M$ , а кут нахилу  $\alpha$  визначатиме нахил радіуса-вектора  $\bar{r}$  до осі  $x'$ . Як можна побачити з рис. 1.84, координати  $x_M$  і  $y_M$  точки  $M$  у нерухомій системі координат  $Oxy$  дорівнюють:

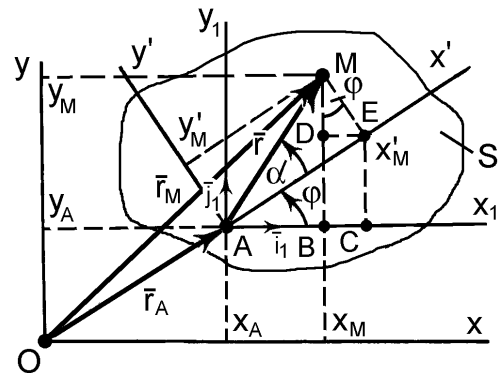


Рис. 1.84

$$\begin{aligned}x_M &= x_A + r \cos(\alpha + \varphi), \\y_M &= y_A + r \sin(\alpha + \varphi).\end{aligned}\tag{1.204}$$

Враховуючи, що  $r = \frac{x'_M}{\cos \alpha}$ ,  $r = \frac{y'_M}{\sin \alpha}$ ,

і підставляючи у вираз (1.204) ці величини, а також тригонометричні функції суми двох кутів, матимемо:

$$\begin{aligned}x_M &= x_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \sin \varphi, \\y_M &= y_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \sin \varphi + \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \cos \varphi.\end{aligned}$$

Після відповідних скорочень маємо, остаточно:

$$\begin{aligned}x_M &= x_A + x'_M \cos \varphi - y'_M \sin \varphi, \\y_M &= y_A + x'_M \sin \varphi + y'_M \cos \varphi.\end{aligned}\tag{1.205}$$

Рівняння (1.205) і є кінематичними рівняннями руху довільної точки тіла (фігури) у її площині.

### **Визначення швидкостей точок плоскої фігури**

Для визначення швидкостей довільної точки  $M$  фігури, що здійснює плоскопаралельний рух, введемо ортогональну систему координат  $Ax_1y_1$ , яка рухається поступально відносно нерухомої системи координат (рис. 1.84). Від центра  $O$  у нерухомій системі координат  $Oxy$  покажемо радіуси-вектори: полюса  $A - \bar{r}_A$  і точки  $M - \bar{r}_M$ . Радіус-вектор точки  $M$  відносно полюса  $A$  позначимо через  $\bar{r}$ . Під час плоскопаралельного руху фігури зберігається векторна рівність:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}.$$

Диференціюємо за часом цю рівність

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

У цьому виразі:

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \bar{v}_M; \quad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A.$$

Доданок  $\frac{d\bar{r}}{dt}$  є швидкістю точки  $M$  відносно рухомої системи

координат  $Ax_1y_1$ , яку позначимо:  $\bar{v}_{MA}$ .

## Частина перша

Рух фігури тіла відносно системи координат  $Ax_1y_1$  є поворотом фігури навколо осі  $Az_1$ , спрямованої перпендикулярно площині креслення (на рис. 1.84 не показана). Таким чином, швидкість  $\bar{v}_{MA}$  є відносною швидкістю точки  $M$  під час обертання тіла навколо осі  $Az_1$ , для визначення якої можна скористатись формулою Ейлера (1.200):

$$\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де  $\bar{\omega}$  – кутова швидкість фігури відносно точки  $A$ , яку прийняли за полюс і яка, як відомо, не залежить від вибору полюса.

Тоді вираз для швидкості точки у плоскому русі приймає вигляд:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (1.206)$$

**Швидкість довільної точки  $M$  плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса  $A$  і відносної швидкості точки  $M$  під час обертання фігури навколо полюса  $A$ .**

Перший доданок у виразі (1.206) визначає поступальну швидкість фігури разом із полюсом, другий доданок – відносну швидкість точки в обертальному русі фігури навколо полюса.

Оскільки,  $\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \overline{AM}$ , то модуль швидкості дорівнює  $v_{MA} = \omega \cdot AM$ , а вектор  $\bar{\omega}$  перпендикулярний площині креслення.

Вектор  $\bar{v}_{MA}$  перпендикулярний  $AM$ :  $\bar{v}_{MA} \perp \overline{AM} \perp \bar{r}$  і спрямований у бік обертання фігури  $S$ . Якщо необхідно визначити швидкість іншої точки, наприклад, точки  $B$ , то вираз (1.206) запишемо так:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Останнє векторне рівняння розв'язується графічно.

### Визначення прискорень точок плоскої фігури

Для визначення прискорення довільної точки  $M$  плоскої фігури  $S$  візьмемо похідну за часом від векторного виразу (1.206):

$$\frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left( \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right).$$

Аналізуємо цей вираз, де:

$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \bar{a}_A$  – прискорення полюса  $A$ ;  $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon}$  – кутове прискорення в обертальному русі фігури  $S$  відносно полюса  $A$ ;

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{ – відносна швидкість точки } M \text{ в обертальному русі}$$

фігури навколо полюса  $A$ .

Отже, вираз для прискорення точки  $M$  перепишемо так:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (1.207)$$

де  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_{MA}^{\tau}$  – обертальне прискорення точки  $M$  відносно полюса  $A$ ;

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_{MA}^n$  – доцентрове прискорення точки  $M$  відносно полюса  $A$ .

Повне відносне прискорення (рис. 1.85):  $\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n$ .

За модулем складові останнього виразу дорівнюють:

$$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AM, \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM.$$

Модуль повного відносного прискорення точки  $M$  навколо полюса  $A$ :

$$a_{MA} = AM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.208)$$

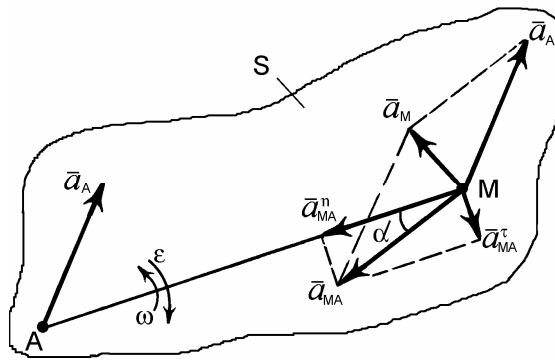


Рис. 1.85

Остаточно, прискорення довільної точки  $M$  плоскої фігури  $S$ , що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n. \quad (1.209)$$

**Прискорення будь-якої точки** плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса і відносного прискорення цієї точки у обертальному русі точки разом із фігурою навколо полюса. Останнє складається із двох доданків.

Напрямки векторів зазначених складових прискорення:

– обертальне прискорення  $\vec{a}_{MA}^{\tau}$  розміщене перпендикулярно до прямої  $AM$  і спрямоване у бік кутового прискорення  $\varepsilon$ , тобто, у бік напрямку відносної швидкості розглядуваної точки,

– доцентрове прискорення  $\vec{a}_{MA}^n$  розміщене на прямій  $AM$  і спрямоване у бік полюса  $A$ ,

## Частина перша

– вектор повного прискорення  $\bar{a}_{MA}$  складає з прямою  $AM$  кут  $\alpha$  (рис. 1.85), тангенс якого визначається так :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Оскільки величини  $\omega$  і  $\varepsilon$  належать до всієї фігури  $S$ , то кут  $\alpha$  для всіх точок фігури той самий. Відкладається кут завжди за напрямком кутової швидкості  $\omega$ .

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означте плоскопаралельний рух тіла, наведіть приклади з техніки.
2. На які два прості рухи розкладається плоскопаралельний рух?
3. Чи залежить обертальна частина плоскопаралельного руху від вибору полюса?
4. Які кінематичні рівняння плоскопаралельного руху тіла знаєте?
5. Як визначити швидкості і прискорення точок тіла, яке рухається плоскопаралельно?

### Миттєвий центр швидкостей

У разі плоскопаралельного руху тіла може існувати одна точка плоскої фігури, що розташована на самій фігурі або на її уявному продовженні, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Доведемо це. Розглянемо фігуру  $S$ , яка здійснює плоско-паралельний рух (рис. 1.86).

Покажемо на тілі дві точки  $A$  і  $B$  та з'єднаємо їх прямою. За деякий елементарний проміжок часу  $\Delta t$  фігура переміститься у нове положення, а пряма  $AB$  займе положення  $A_1B_1$ . Траєкторії руху точок  $A$  і  $B$  покажемо пунктирними лініями.

Оскільки положення відрізка прямої  $AB$  є нескінченно близьким до положення  $A_1B_1$ , то хорди  $AA_1$  і  $BB_1$  прямують до дотичних, уздовж яких і розташовані вектори швидкостей точок  $A$  і  $B$  цієї фігури  $\bar{v}_A$  і  $\bar{v}_B$ .

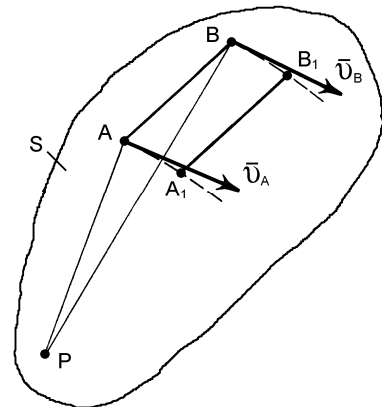


Рис. 1.86

Поставивши перпендикуляри до векторів швидкостей  $\bar{v}_A$  і  $\bar{v}_B$ , отримаємо точку їх перетину  $P$ . Ця точка і буде миттєвим центром швидкостей (МЦШ). Швидкість точки  $P$  за такого руху тіла дорівнює нулю і тверде тіло в даний момент часу обертається навколо цієї точки.

Вибравши точку  $A$  за полюс, дістанемо для швидкості точки  $P$  :

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = 0 \Rightarrow \bar{v}_A = -\bar{v}_{PA};$$

$$v_A = \omega \cdot PA \Rightarrow PA = \frac{v_A}{\omega}.$$

Таким чином, із останнього виразу випливає, що МЦШ розміщений на перпендикулярі, проведеному з початку вектора швидкості точки  $A$  на відстані  $AP$ .

Для знаходження миттєвого центра швидкостей необхідно знати напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури. Для отримання картини швидкостей плоскої фігури в заданий момент часу потрібно знати швидкість однієї точки і напрямок вектора швидкості іншої точки фігури.

*Миттєвим центром швидкостей називається точка рухомої плоскої фігури, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю.*

Отже, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей і швидкість однієї з точок фігури, то можна визначати величину і напрямок швидкості будь-якої іншої точки плоскої фігури.

**Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей**

Розглянемо окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей (рис. 1.87).

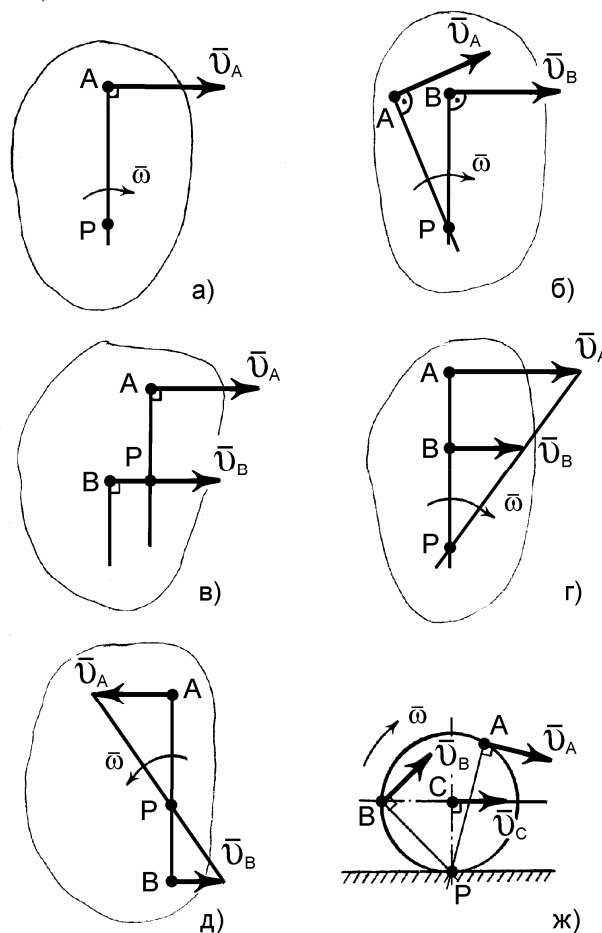


Рис. 1.87

## Частина перша

Зазначимо, миттєво-поступальний і «дійсно» поступальний рухи мають відмінності. Під час поступального руху має місце рівність швидкостей і прискорень усіх точок тіла на кінцевому проміжку часу. У разі миттєво-поступального руху рівними є лише швидкості точок тіла і тільки в заданий час, тобто лише в цю мить.

4. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані у один і той самий бік (рис. 1.87 г) і відкладені у певному масштабі, точки розміщені на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей, а модулі швидкостей не однакові, то миттєвий центр швидкостей розміщується у точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

Тоді, як бачимо з рис. 1.87 г, можна записати:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{v_A}{v_B}.$$

5. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані в різні боки (рис. 1.87 д) і відкладені в певному масштабі, точки розміщені на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей (модулі швидкостей можуть бути однакові, або різні), то миттєвий центр швидкостей також (як в п. 4) розміщений в точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

6. У разі кочення фігури (наприклад, колеса) без проковзування по деякій нерухомій лінії миттєвим центром швидкостей є точка контакту фігури з цією лінією (рис. 1.87 ж), а швидкості всіх точок будуть обертальними навколо точки дотику  $P$ :  $v_A \perp PA$ ;  $v_B \perp PB$ ;  $v_C \perp PC$ .

Кутова швидкість фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню модуля швидкості будь-якої точки фігури до відстаней до миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP}.$$

### Визначення швидкостей точок фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей

Розглянемо деякі практичні випадки визначення швидкостей точок фігури, що здійснює плоскопаралельний рух. Вибираючи миттєвий центр швидкостей за полюс і маючи на увазі, що швидкість його в даний момент часу дорівнює нулю, можна для будь-яких точок  $A$  і  $B$  цієї фігури скласти такі співвідношення:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP} = \bar{v}_{AP}, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}.$$

**Швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює обертальній, коловій швидкості цієї точки відносно миттєвого центра**

*швидкостей.*

Якщо це так, то легко знайти модуль і напрям швидкості кожної точки фігури (якщо відомі положення МЦШ і кутова швидкість фігури):

$$v_A = \omega \cdot AP, \quad v_B = \omega \cdot BP,$$

звідки можна записати таке співвідношення:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}.$$

***Модулі швидкостей різних точок фігури в кожний момент часу пропорційні їх відстаням до миттєвого центра швидкостей.***

Напрямки векторів швидкостей різних точок фігури перпендикулярні прямим, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей, і спрямовані у бік обертання фігури (рис. 1.87 ж).

Таким чином, швидкості різних точок плоскої фігури в будь-який момент часу розподіляються так, як би фігура обертається в цей момент часу навколо миттєвого центра швидкостей.

Це обертання відбувається навколо так званої осі обертання, яка проходить через миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до площини, в якій цей рух відбувається.

Зазначимо, що під час руху тіла положення миттєвого центра швидкостей змінюється в кожний момент.

***Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей, віднесене до рухомої або нерухомої системи координат, називають рухомою або нерухомою центроїдою.***

Таким чином, нерухома центроїда – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на нерухомій площині  $Oxy$  (рис. 1.84, а рухома – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на рухомій площині  $Ax'y'$ ).

Наприклад, нерухомою центроїдою для колеса (рис. 1.87 ж), яке котиться без ковзання горизонталлю, є сама нерухома горизонтальна пряма, а рухомою центроїдою – коло, зв'язане з рухомою системою координат. У кожний момент часу рухома і нерухома центроїди мають загальну точку дотику – миттєвий центр швидкостей  $P$ .

Таку геометричну інтерпретацію плоско-паралельного рух надає теорема Пуансо:

***Під час руху плоскої фігури рухома центроїда котиться нерухомою без ковзання.***

**Приклад 1.18**

Розглянемо застосування теореми про розподіл прискорень у тілі під час плоскопаралельного руху. У механізмі, зображеному на рис. 1.88 кривошип  $OA$  обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_0$  навколо нерухомої осі  $O$  і приводить до руху колеса II, що котиться без ковзання по поверхні колеса I. Радіуси коліс однакові. Знайти прискорення точки  $N$  колеса II.



## Частина перша

### Розв'язання

Згідно з теоремою, прискорення довільної точки плоскої фігури складається з прискорення полюса і прискорення обертального руху точки навколо полюса. Полюс слід вибирати в точці, прискорення якої відоме, або його легко визначити з умови задачі. Такою точкою є точка  $A$ , швидкість якої є сталою:  $v_A = \omega_0 \cdot OA$ . Тому прискорення точки  $A$  дорівнює тільки нормальному прискоренню і напрямлене від точки  $A$  до центра  $O$  кривошипа  $OA$ :  $a_A = 2\omega_0^2 r$ .

Щоб знайти прискорення  $a_{AN}^P$ , згадаємо, що:  $a_{AN}^P = a_{AN}^{ob} + a_{AN}^u$ ,

де  $a_{AN}^{ob} = \varepsilon \cdot AN$ ;  $a_{AN}^u = \omega^2 AN$ .

Тут  $\omega$  і  $\varepsilon$  – миттєва кутова швидкість і миттєве кутове прискорення колеса II, які треба визначити. З умови кочення без ковзання випливає, що швидкість точки  $M$  колеса II дорівнює нулю, тому вона є миттєвим центром швидкостей колеса II. Тоді миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \frac{v_A}{AM} = \frac{v_A}{r} = 2\omega_0 = const$$

і миттєве кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Отже,  $a_{AN}^{ob} = 0$ ;  $a_{AN}^u = \omega^2 \cdot AN = 4\omega_0^2 \cdot r$ .

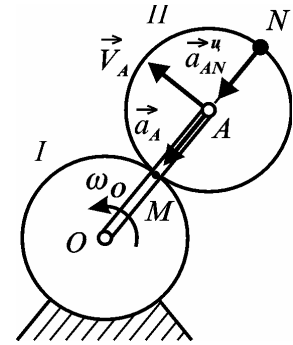


Рис. 1.88

Таким чином, прискорення точки  $N$  складається з двох векторів  $a_A$  і  $a_{AN}^u$ , напрямлених уздовж спільної прямої в один бік. Додаючи їх, маємо:

$$a_N = 6\omega_0^2 r.$$

Вектор  $a_N^P$  напрямлений уздовж прямої  $NA$  від точки  $N$  до точки  $A$ .

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який рух тіла називають плоскопаралельним?
2. У якій точці слід вибирати полюс?
3. Чи залежать від вибору полюса характеристики поступального руху, обертального руху?
4. Чому дорівнює швидкість довільної точки тіла під час плоскопаралельного руху?
5. Що називають миттєвим центром швидкостей? Доведіть його існування.
6. Яке співвідношення існує між швидкостями точок тіла, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей?
7. Чому дорівнює прискорення точки тіла під час плоскопаралельного руху?
8. Які властивості має прискорення обертального руху точки навколо полюса?
9. Які способи для визначення положення миттєвого центра швидкостей ви знаєте?
10. Наведіть приклади плоскопаралельного руху тіл із техніки.

### 1.14. Складний рух матеріальної точки

#### 1.14.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи точки

Розглядаючи рух вільної матеріальної точки, фіксували його в координатах умовно прийнятої нерухомої системи відліку. Але відомо, що не існує фізичних методів, які могли б установити, чи нерухомою є певна система координат. Тому, під час дослідження складного руху точки виникає питання встановлення зв'язку між характеристиками цього руху в двох-трьох різних системах координат під час їх взаємного відносного руху. Вивчаючи складний рух точки, одну із систем відліку приймають за основну або умовно нерухоому, абсолютну, а другу – за рухоому.

Можливість розкласти шляхом введення додаткової рухомої системи відліку складний рух точки або тіла на два більш прості, які легше досліджувати, широко застосовується в техніці під час кінематичних розрахунків і визначає практичну цінність теорії складного руху.

У разі складного руху можна розглядати точку, тіло переносу або рухомий переносний простір, з

яким жорстко пов'язана рухома система координат, і нерухому систему координат.

Рух точки в рухомій системі відліку або відносно тіла переносу називається *відносним*, а швидкість і прискорення точки в цьому русі – *відносними швидкістю і прискоренням* та позначаються  $\bar{v}_r$ ,  $\bar{a}_r$  (*relative* – відносний).

Введемо поняття *рухомого простору*. На рис 1.89 зображено рухому  $Oxyz$  і нерухому  $O_1x_1y_1z_1$  системи координат. З рухомою системою незмінно пов'язана частина простору або абсолютно тверде тіло, по якому рухається точка, тобто, існує рухоме середовище разом з системою відліку  $Oxyz$ .

Рух точки разом із рухомим простором, а точніше разом із тією точкою рухомого простору, з якою в дану мить збігається задана рухома точка, називається *переносним рухом*, а швидкість і прискорення точки в цьому русі – *переносними швидкістю і прискоренням*. Вони позначаються  $\bar{v}_e$ ,  $\bar{a}_e$  (*exporter* – захопити). Згадана рухома точка тіла як би «переносить» точку  $M$  відносно нерухомої системи координат.

Рух матеріальної точки відносно нерухомої системи координат називається *абсолютним*, а *швидкість і прискорення* – *абсолютними*. Вони позначаються  $\bar{v}$ ,  $\bar{a}$ .

Основною задачею складного руху точки є встановлення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного і відносного рухів цієї точки.

**1.14.2. Теорема про додавання швидкостей точки**

|| *Абсолютна швидкість матеріальної точки за складного її руху дорівнює векторній сумі її переносної і відносної швидкостей:*

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \tag{1.210}$$

Для доведення скористаємося векторною формою визначення руху. Покажемо матеріальну точку  $M$  (рис. 2.30), яка незалежно рухається за своїм законом відносно рухомої системи відліку  $Oxyz$ , що жорстко зв'язана з тілом  $S$  і разом з ним переміщується відносно нерухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ .

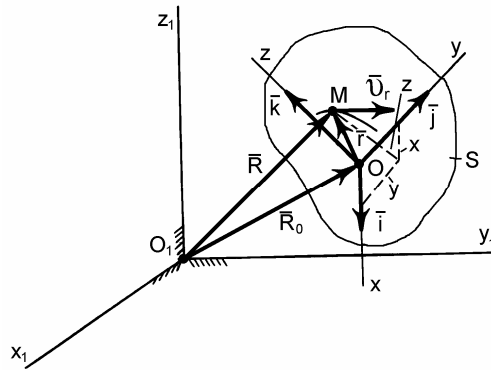


Рис. 1.89

Початок рухомої системи координат  $O$  виберемо у тілі  $S$  довільно як полюс, на рухомих осях координат покажемо одиничні вектори (орти)  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ .

Позначимо положення матеріальної точки  $M$ . Відносно рухомої системи координат  $Oxyz$  її положення визначається радіусом-вектором  $\bar{r}$ . Відносно нерухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$  – радіусом-вектором  $\bar{R}$ . Початок рухомої системи координат  $Oxyz$  (довільно вибраний полюс  $O$ ) відносно нерухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$  визначається радіусом-вектором  $\bar{R}_0$ .

Як бачимо, з утвореного на рис. 1.89 векторного трикутника  $OO_1M$ , під час руху зберігається векторне співвідношення:

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{r}. \tag{1.211}$$

Розкладемо радіус-вектор  $\bar{r}$  по ортах системи координат  $Oxyz$  і підставимо в (1.211)

## Частина перша

$$\bar{R} = \bar{R}_O + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (1.212)$$

Використовуючи вираз (1.212), визначимо абсолютну швидкість  $\bar{v}$  матеріальної точки  $M$ . У разі довільного переносного руху тіла орти  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  змінюють напрямок разом із осями координат і тому є змінними векторами. На підставі формули (1.148) шукана швидкість дорівнює:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}_O}{dt} + \left( x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \left( \frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k} \right). \quad (1.213)$$

Розглянемо вираз (1.213). В останній дужці можна зробити такі позначення:

$$\frac{dx}{dt} = v_{rx}, \quad \frac{dy}{dt} = v_{ry}, \quad \frac{dz}{dt} = v_{rz}. \quad \text{Звідси } \bar{v}_r = v_{rx} \cdot \bar{i} + v_{ry} \cdot \bar{j} + v_{rz} \cdot \bar{k} \text{ – відносна швидкість точки.}$$

Розглянемо далі вираз (1.213).

$$\frac{d\bar{R}_O}{dt} = \bar{v}_O \text{ – швидкість полюса } O \text{ системи координат } Oxyz. \text{ За формулами Пуассона:}$$

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}, \quad (1.214)$$

де  $\bar{\omega}_e$  – кутова швидкість переносного руху або швидкість обертання рухомих осей координат і незмінно зв'язаних з ними ортів  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .

Підставимо формули Пуассона (1.214) у першу дужку виразу (1.213):

$$x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt} = x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

Тоді вираз (1.213) матиме вигляд:

$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r} + \bar{v}_r. \quad (1.215)$$

Векторна сума  $\bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{v}_e$  – швидкість переносного руху. Оскільки переносний рух у загальному випадку є складним, то він може бути розкладений на поступальний рух разом із полюсом ( $\bar{v}_O$ ) і сферичний рух відносно полюса.

Остаточна

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (1.216)$$

Формула (1.216) встановлює правило паралелограма векторів швидкостей точки у складному русі.

Якщо кут між векторами прямих  $(\bar{v}_e, \bar{v}_r) = 90^\circ$ , то модуль абсолютної швидкості визначається:

$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}$ . Якщо кут між векторами  $(\bar{v}_e, \bar{v}_r) \neq 90^\circ$ , то модуль абсолютної швидкості  $v$  руху матеріальної точки визначається за теоремою косинусів:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + v_e \cdot v_r \cdot \cos(\bar{v}_e, \bar{v}_r)}. \quad (1.217)$$

### 1.14.3. Теорема Коріоліса про додавання прискорень точки

Абсолютне прискорення матеріальної точки за довільного переносного руху дорівнює векторній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і прискорення Коріоліса.

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k,$$

де  $\bar{a}$  – абсолютне прискорення матеріальної точки;  $\bar{a}_e$  – переносне прискорення;  $\bar{a}_r$  – відносне

прискорення;  $\bar{a}_k$  – прискорення Кориоліса.

Матеріальна точка  $M$  перебуває у стані складного руху (рис. 1.92). Вважаємо, що точка за власним законом рухається відносно рухомої системи координат  $Oxuz$ , а система одночасно за своїм законом переміщується відносно нерухомої системи відліку  $O_1x_1y_1z_1$ . Координати точки  $M$  у рухомій системі відліку –  $x, y, z$ . Як і у випадку для швидкостей, положення точки  $M$  у рухомій системі координат визначається радіусом-вектором  $\bar{r}$ , відносно нерухомої системи – радіусом-вектором  $\bar{R}$ . Положення полюса  $O$  у нерухомій системі координат – радіусом-вектором  $\bar{R}_o$ .

Визначасмо прискорення векторним способом. Абсолютне прискорення матеріальної точки  $M$  дорівнює похідній за часом від абсолютної швидкості (1.213):

$$\begin{aligned} \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{R}_o}{dt^2} + \left( x \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \\ + \left( \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \bar{k} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (1.218)$$

Проведемо перетворення і аналіз отриманого виразу (1.218). Перший доданок дорівнює прискоренню полюса  $\bar{a}_o$ .

Перетворимо далі вираз першої дужки, користуючись формулами Пуассона (1.214):

$$\begin{aligned} x \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} &= x \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \\ &= x \left[ \left( \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} \right) + \left( \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{i}}{dt} \right) \right] + y \left[ \left( \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} \right) + \left( \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{j}}{dt} \right) \right] + \\ &+ z \left[ \left( \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} \right) + \left( \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{k}}{dt} \right) \right] = x \left\{ (\bar{\varepsilon}_e \times \bar{i}) + \left( \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) \right) \right\} + \\ &+ y \left\{ (\bar{\varepsilon}_e \times \bar{j}) + \left( \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) \right) \right\} + z \left\{ (\bar{\varepsilon}_e \times \bar{k}) + \left( \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) \right) \right\} = \\ &= \left[ \bar{\varepsilon}_e \times (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) \right] + \left\{ \bar{\omega}_e \times \left[ \bar{\omega}_e \times (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) \right] \right\} = \\ &= \left( \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} \right) + \bar{\omega}_e \times \left( \bar{\omega}_e \times \bar{r} \right) = \bar{a}_e^o, \end{aligned}$$

де  $\bar{a}_e^o$  – прискорення точки у переносному сферичному русі тіла відносно полюса.

У другій дужці сформоване **відносне прискорення точки**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \bar{k} = a_{rx} \cdot \bar{i} + a_{ry} \cdot \bar{j} + a_{rz} \cdot \bar{k} = \bar{a}_r.$$

У рівнянні (1.218) є ще один вираз, який також потрібно перетворити:

$$\begin{aligned}
 & 2 \left( \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right) = \\
 & = 2 \left( \frac{dx}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + \frac{dy}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + \frac{dz}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) \right) = \\
 & = 2 \bar{\omega}_e \times \left( \frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k} \right) = 2 (\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = \bar{a}_k.
 \end{aligned}
 \tag{1.219}$$

де  $\bar{a}_k$  – прискорення Коріоліса або поворотне прискорення.  
Враховуючи зроблені перетворення, остаточно запишемо:

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= \bar{a}_o + \bar{a}_e^o + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \\
 \bar{a} &= \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.
 \end{aligned}
 \tag{1.220}$$

У підсумковому виразі (1.220) теореми Коріоліса **переносне прискорення** для загального руху тіла переносу  $S$  складається із двох згаданих доданків:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_o + \bar{a}_e^o.$$

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке складний рух точки? Яка основна задача цього руху?
2. З яких складових складається абсолютний рух точки?
3. Що таке паралелограм швидкостей?
4. Як визначається швидкість точки в абсолютному русі?
5. З яких складових утворюється абсолютне прискорення точки?
6. Сформулюйте теорему Коріоліса, запишіть математичний вираз теореми.

### Модуль і напрям прискорення Коріоліса

Розглянемо докладно прискорення Коріоліса і його властивості. Згідно з виразом (1.219):

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r). \tag{1.221}$$

**Прискорення Коріоліса дорівнює подвійному векторному добутку векторів переносної кутової швидкості і відносної лінійної швидкості точки.**

Як відомо, модуль векторного добутку:

$$a_k = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}). \tag{1.222}$$

Аналізуючи вираз (1.222), легко побачити, що модуль прискорення Коріоліса дорівнює нулю в таких випадках:

1.  $\bar{\omega}_e = 0$ . У цьому разі тіло переносу (переносний простір) рухається поступально. Отже, прискорення Коріоліса виникає тільки під час обертального переносного руху. З цієї причини прискорення Коріоліса називають ще й **поворотним** прискоренням.

В цей момент вектор абсолютного прискорення точки визначається векторним паралелограмом відносного і переносного прискорень:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e;$$

У разі поступального переносного руху тіла абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі відносного і переносного прискорень.

2.  $\bar{v}_r = 0$  – у цей момент складний рух точки відсутній;

3.  $\sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}) = 0$  – у цьому випадку вектори переносної кутової швидкості тіла і відносної

швидкості точки колінеарні. Якщо  $\sin(\overline{\omega}_e, \overline{v}_r) = 1$ , то модуль прискорення Коріоліса максимальний:

$$a_k = 2\omega_e \cdot v_r.$$

Напрямок прискорення Коріоліса можна відшукати за двома методами: відомим математичним способом за означенням векторного добутку і фізичним – за правилом Жуковського. Розглянемо перший метод. Припустимо, що тіло  $S$  (переносний простір) обертається навколо осі  $z$  проти ходу годинникової стрілки (рис. 1.90).

Тоді вектор переносної кутової швидкості  $\overline{\omega}_e$  напрямлений вгору вздовж осі  $z$  (за визначенням). Вектор відносної швидкості  $\overline{v}_r$  точки  $M$  має напрямок вздовж дотичної до траєкторії відносного руху (допустимо, що вліво). Перенесемо умовно вектор  $\overline{\omega}_e$  у точку  $M$ .

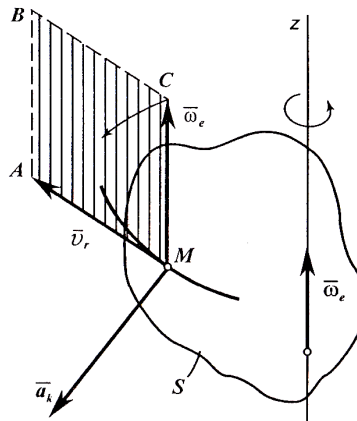


Рис. 1.93

Вектор прискорення Коріоліса  $\overline{a}_k$ , як підсумковий вектор векторного добутку (1.221), перпендикулярний площині  $MABC$ , яку утворюють вектори, що перемножуються. Залишається визначити, чи спрямований цей вектор до спостерігача.

У цьому разі (рис. 1.93) вектор  $\overline{a}_k$  спрямований до спостерігача, тому що найкоротший перехід від вектора  $\overline{\omega}_e$  до вектора  $\overline{v}_r$  відбувається проти ходу годинникової стрілки.

**Вектор прискорення Коріоліса перпендикулярний до площини, яку утворюють вектори переносної кутової швидкості тіла і відносної швидкості точки; він спрямований у той бік, звідки спостерігачу здається, що найкоротший перехід від вектора кутової швидкості до вектора відносної швидкості відбувається проти ходу годинникової стрілки.**

Для визначення напрямку вектора прискорення Коріоліса за правилом Жуковського (рис. 1.91) необхідно вектор відносної швидкості  $\overline{v}_r$  спроектувати на площину  $\pi$ , перпендикулярну до осі переносного обертання ( $\pi \perp \overline{\omega}_e$ ), потім повернути отриману проекцію  $\overline{v}_r'$  у площині  $\pi$  на кут  $90^\circ$  у напрямку переносного обертання (за дуговою стрілкою). Неважко зрозуміти, що в плоских механізмах, які є об'єктом студентського курсового проекту з теорії механізмів і машин, наступної дисципліни, вектор  $\overline{v}_r$  завжди розташований у площині руху механізму, а вектор кутової швидкості – йому перпендикулярний. Тому, для визначення напрямку прискорення Коріоліса досить повернути вектор  $\overline{v}_r$  на  $90^\circ$  у напрямку переносної кутової швидкості  $\omega_e$ . Модуль прискорення Коріоліса в цьому разі буде максимальним  $a_k = 2\omega_e \cdot v_r$ .

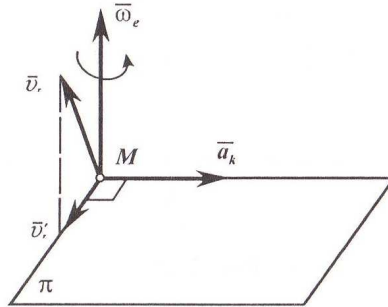


Рис. 1.91

Розглянемо далі фізичні причини виникнення поворотного прискорення або прискорення Кориоліса. Нехай по пластині що розташована у площині рисунка, рухається прямолінійно вздовж її радіуса матеріальна точка  $M$  зі сталою відносною швидкістю  $\bar{v}_r$  (рис. 1.92).

Одночасно пластина обертається навколо горизонтальної осі зі сталою переносною кутовою швидкістю  $\bar{\omega}_e$  проти ходу годинникової стрілки. За деякий час пластина повернеться на кут  $\varphi$  і точка  $M$  опиниться у положенні  $M_1$  на більшій відстані від осі обертання  $O$ . В результаті цього вектор відносної швидкості  $\bar{v}_r$  повернеться внаслідок переносного обертання, а вектор переносної швидкості  $\bar{v}_e$  збільшиться за модулем внаслідок відносного руху і повернеться на той самий кут.

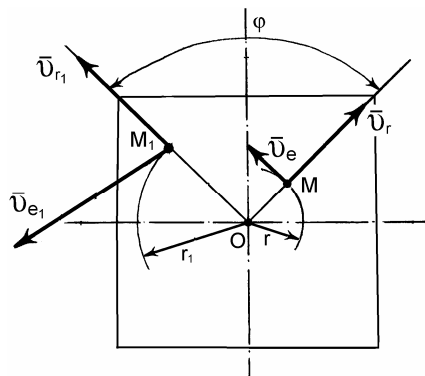


Рис. 1.92

Користуючись вище наведеним прикладом, сформулюємо дві фізичні причини виникнення прискорення Кориоліса:

- за рахунок зміни напрямку вектора відносної швидкості матеріальної точки внаслідок переносного обертання;
- за рахунок зміни модуля і напрямку вектора переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху (відстань  $OM < OM_1$ ):

$$v_M^e = \omega_e \cdot OM, v_{M_1}^e = \omega_e \cdot OM_1.$$

Отже, прискорення Кориоліса – це додатковий кінематичний ефект, що виникає внаслідок взаємовпливу векторів відносної і переносної швидкостей точки під час складного руху в разі обертального переносного руху. Підсумовуючи, можна підкреслити:

**Прискорення Кориоліса** визначає одночасно міру змінення переносної швидкості у відносному русі і міру змінення відносної швидкості у переносному русі.

У техніці прискорення Кориоліса спостерігається у, так званих, кулісних механізмах (куліса – це рухома напрямна). Відносно куліси рухається кулісний камінь, а повертає його куліса, що обертається відносно нерухомого центра на рамі механізму.

**1.14.4. Методика розв'язування задач на складний рух точки і приклад**

Пропонується наступний алгоритм розв'язання задачі.

1. З'ясувати, який рух точки є відносним, а який – переносним, проаналізувати закони руху й умову задачі.

2. Зручніше користуватися векторним рівнянням абсолютного прискорення точки у складному русі, розкладаючи відносне і переносне прискорення на дотичну і нормальну складові

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_k.$$

3. Для визначення характеристик відносного руху необхідно умовно зупинити переносний рух.

Потім відшукати положення точки в заданий момент часу на траєкторії відносного руху і розглянути кінематичні характеристики відносного руху.

4. Для визначення характеристик переносного руху необхідно умовно зупинити відносний рух і розглянути рух заданої точки і точки тіла переносу, в якій вони в цей момент часу збігаються.

5. Для визначення параметрів абсолютного руху точки необхідно вибрати систему координат із початком у самій точці, потім методом проєкцій визначити проєкції абсолютних швидкості і прискорення на координатні осі, враховуючи, що проєкція абсолютного вектора на вісь дорівнює сумі проєкцій складових, і, нарешті, обчислити відповідні модулі шуканих величин.

**Приклад 1.19**

Кільцева трубка (рис. 1.93) радіусом 16 см обертається навколо горизонтального діаметра  $OA$  за законом  $\varphi = 2 + 0,25t^3$  рад. Всередині трубки рухаються частинки рідини згідно з рівнянням  $OM = s_r = 3\pi t^2$  см. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення частинки  $M$  рідини в момент часу  $t_1 = 2$  с, якщо в початковий момент частинка була в точці  $O$ .

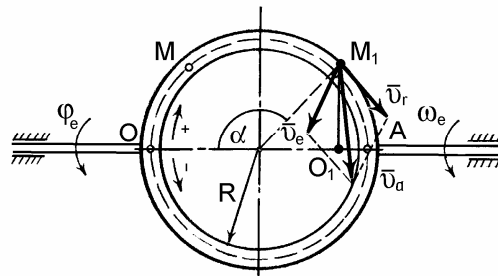


Рис. 1.93

**Розв'язання**

Визначаємо положення точки  $M$  в момент часу  $t_1$ . Положення точки  $M$  зручно визначити за кутом  $\alpha$ , тому що точка рухається вздовж кола. Визначимо його за допомогою такого виразу:

$$\alpha = \frac{s_r}{R} = \frac{3\pi \cdot 2^2}{16} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}, \quad \alpha = 135^\circ.$$

Зображуємо точку  $M_1$  у заданий момент часу на рис. 1.96 за визначеним кутом. Виберемо рухома систему координат, жорстко зв'язану з кільцевою трубкою. Розглядаємо переносний рух точки  $M_1$ . Для цього скріплюємо точку  $M_1$  з рухомаю системою координат. У цьому випадку точка  $M_1$  окреслює коло у площині, перпендикулярній до осі  $OA$ , радіусом  $O_1M_1$ , який треба визначити:

$$O_1M_1 = h = R \cos 45^\circ = 8\sqrt{2} = 11,28 \text{ см.}$$

Обчислимо переносну швидкість точки  $M_1$  в положенні  $M_1$ , як швидкість даної точки на тілі обертання навколо осі  $OA$ :  $v_e = \omega_e h$ . Визначимо кутову швидкість трубки.

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 0,75t^2 \text{ с}^{-1}.$$

Вектор кутової швидкості спрямований уздовж осі обертання. Переносна швидкість точки  $M_1$ :

$$v_e = 0,75t^2 \cdot 11,28 = 8,45t^2 \text{ см/с.}$$



## Частина перша

Для моменту часу  $t_1=2$  с:

$$v_e = 8,45 \cdot 4 = 33,80 \text{ см/с.}$$

Вектор переносної швидкості направлений перпендикулярно до площини креслення в напрямку обертання. Відносний рух точки  $M_1$  – це рух частинок рідини відносно трубки. У цьому випадку точка  $M_1$  рухатиметься по колу діаметром  $OA$ . Обчислюємо відносну швидкість точки  $M_1$ :

$$v_r = \frac{ds_r}{dt} = 6\pi t \text{ см/с.}$$

Для моменту часу  $t_1=2$  с:

$$v_r = 6\pi \cdot 2 = 12\pi = 37,68 \text{ см/с.}$$

Направляємо вектор відносної швидкості  $v_r$  по дотичній до згаданого кола в точці  $M_1$  у бік додатних значень дугової координати. Вектори переносної  $\bar{v}_e$  і відносної  $\bar{v}_r$  швидкостей зображені на рис. 1.93. Враховуючи, що вектори  $\bar{v}_r$  і  $\bar{v}_e$  взаємно перпендикулярні, знаходимо абсолютну швидкість точки  $M_1$ :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 50,62 \text{ см/с.}$$

Абсолютне прискорення точки  $M_1$  визначається за формулою:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_k.$$

Знаходимо переносне нормальне прискорення точки  $M_1$ :

$$a_e^n = \omega_e^2 h = 0,5625 t^4 \cdot 11,28 = 6,345 t^4 \text{ см/с}^2.$$

Якщо  $t_1=2$  с, то:

$$a_e^n = 6,345 \cdot 16 = 101,52 \text{ см/с}^2.$$

Вектор нормального переносного прискорення  $\bar{a}_e^n$  спрямований від точки  $M_1$  перпендикулярно до осі обертання  $OA$  (рис. 1.94).

Переносне дотичне прискорення  $a_e^\tau$  точки  $M_1$  дорівнює:  $a_e^\tau = \varepsilon_e h$ .

Визначимо кутове прискорення трубки:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 1,5 t \text{ с}^2.$$

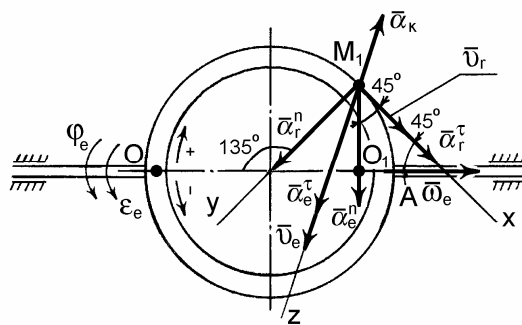


Рис. 1.94

Кутове прискорення  $\varepsilon_e$  додатне, отже, обертання трубки прискорене. Обчислимо переносне дотичне прискорення  $a_e^\tau$  точки  $M_1$ :

$$a_e^\tau = 1,5 t \cdot 11,28 = 16,92 t \text{ см/с}^2.$$

Підставивши час  $t_1 = 2$  с, визначаємо величину цього прискорення:

$$a_e^\tau = 16,92 \cdot 2 = 33,84 \text{ см/с}^2.$$

Переносне дотичне прискорення  $\bar{a}_e^\tau$  точки  $M_1$  спрямоване так само, як і переносна швидкість  $\bar{v}_e$ , тобто, перпендикулярно до площини трубки.

Знаходимо відносне дотичне прискорення  $a_r^\tau$  точки  $M_1$ :

$$a_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = 6\pi = 18,84 \text{ см/с}^2.$$

Вектор відносного дотичного прискорення  $\bar{a}_r^\tau$  збігається з напрямком вектора відносної швидкості  $\bar{v}_r$ , тому що відносний рух прискорений і дотичне прискорення  $a_r^\tau$  додатне.

Обчислимо відносне нормальне прискорення:

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{36\pi^2 t^2}{16} = 2,25\pi^2 t^2 \text{ см/с}^2.$$

Для моменту часу  $t_1=2$  с:

$$a_r^n = 2,25 \cdot \pi^2 \cdot 4 = 9\pi^2 = 88,74 \text{ см/с}^2.$$

Вектор нормального відносного прискорення  $\bar{a}_r^n$  спрямований за радіусом до центра кільця трубки.

Знаходимо прискорення Кориоліса:  $a_k = 2\omega_e v_r \sin 45^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 37,68 \cdot 0,71 = 160,52 \text{ см/с}^2$ .

Вектор прискорення Кориоліса спрямований перпендикулярно до площини, де розміщені вектори  $\bar{\omega}_e$  і  $\bar{v}_r$ , і напрямлений у той бік, звідки можна побачити, що перехід від вектора  $\bar{\omega}_e$  до вектора  $\bar{v}_r$  на найменший кут відбувається проти ходу стрілки годинника (рис. 1.94).

Отже, вектор прискорення Кориоліса  $\bar{a}_k$  спрямований вздовж однієї прямої з дотичним прискоренням  $\bar{a}_e^\tau$ , але проти-лежно останньому

Для знаходження абсолютного прискорення  $\bar{a}$  виберемо систему координат  $M_1xyz$  (рис. 1.94) і спроекуємо векторну рівність, що визначає абсолютне прискорення точки  $M_1$ , на осі даної системи координат, враховуючи, що проекція абсолютного вектора на вісь дорівнює сумі проекцій складових:

$$a_x = a_r^\tau + a_e^n \cos 45^\circ = 90,92 \text{ см/с}^2, \quad a_y = a_r^n + a_e^n \cos 45^\circ = 160,82 \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = a_e^\tau - a_k = -126,68 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 224,00 \text{ см/с}^2.$$

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначте модуль прискорення Кориоліса. В яких окремих випадках його модуль дорівнює нулю?
2. Як спрямувати вектор прискорення Кориоліса?
3. Назвіть фізичні причини виникнення прискорення Кориоліса?
4. Як визначити напрям прискорення Кориоліса за правилом Жуковського?
5. Який порядок розв'язування задач на складний рух точки?
6. Як визначити напрям прискорення Кориоліса в плоских механізмах?
7. Як застосовані формули Пуассона в теоремі Кориоліса?
8. Чому переносне прискорення в загальному вигляді складається із двох доданків?
9. Два методи для визначення поворотного прискорення.
10. Як визначити положення точки на траєкторії відносного руху, якщо останній відбувається вздовж кола?

---

---

## ДИНАМІКА

---

---

### 1.15. Динаміка матеріальної точки

#### 1.15. 1. Вступ. Задачі динаміки.

##### Динаміка вільної матеріальної точки

Пізнання законів руху тіл людством було дуже повільним і не завжди вдалим. Навіть великий Аристотель (IV ст. до н.е.) вважав, що тіло раптово припинить рух, якщо перестане діяти сила. Правильно сформульовані закони руху тіл, що відбуваються в природі, були відкриті внаслідок тривалих спостережень.

Основи динаміки розроблені у XVI-XVII ст., коли практика суспільного виробництва поставила перед людиною низку важливих проблем у військовій справі, судноплавстві, виробництві товарів тощо.

Відкриття М. Коперніком (XVI ст.) геліоцентричної системи світу, а Й. Кеплером (XVII ст.) – законів руху планет, відіграло найважливішу роль у розвитку динаміки.

Леонардо да Вінчі, Г. Галілей, Р. Декарт, Х. Гюйгенс (XVI-XVII ст.) – з цими іменами пов'язаний підготовчий період становлення динаміки. Л. да Вінчі досліджував рух тіла по похилій площині, тертя, питання теорії механізмів, ввів поняття моменту сили.

Галілей Г. експериментально довів закон падіння тіл у порожнині, досліджував рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, встановив закон пропорційності між вагою і масою тіла, сформулював принцип відносності класичної механіки.

Декарт Р. ввів поняття про кількість руху як міру механічного руху, відкрив закон збереження кількості руху, його ідеї виявилися плідними для подальшого розвитку динаміки.

Гюйгенс Х. досліджував фізичний маятник, вперше почав використовувати вирази осьового моменту інерції тіла і кінетичної енергії.

Засновником динаміки є І. Ньютон (XVII ст.). Він систематизував і узагальнив дослідження, пов'язані з динамікою, і показав шляхи її подальшого розвитку. Ньютон вперше сформулював основні закони динаміки, ввів поняття маси і узагальнив поняття сили. Він відкрив закон всесвітнього тяжіння як основу сучасної механіки і фізики. Систематичне викладення класичної механіки подано Ньютоном у творі «Математичні засади натуральної філософії» (1687 р.).

Вперше аналітично виклав динаміку Л. Ейлер (XVIII ст.), дійсний член Санкт-Петербурзької Академії наук. Він довів важливу теорему динаміки про зміну кінетичного моменту, створив теорію моментів інерції,

## **Частина перша**

---

механіку суцільних середовищ, теорію стійкості, ввів поняття потенціального силового поля.

У цей же час М.В. Ломоносов відкрив загальний закон природи – закон збереження матерії і руху. На базі цього закону всі закони збереження механіки і фізики є конкретними проявами закону Ломоносова, який є природничо-науковою основою матеріалізму.

Подальший розвиток динаміки пов'язаний з працями Ж. Лагранжа, Л. Пуансо, С.В. Ковалевської, О.М. Ляпунова, М.Є. Жуковського, С.О. Чаплигіна, О.М. Крилова та ін.

Механіка тіл змінної маси заснована І.В. Мещерським. Цей розділ механіки став основою теорії реактивного руху і міжпланетних польотів К.Е. Цюлковського, подальший розвиток і практичне втілення її – у працях творця ракетної і космічної техніки С.П. Корольова.

У другій половині ХХ ст. з'явився новий напрям науки – робототехніка, науковою базою якого стала теоретична механіка. Особливістю робототехніки є те, що вона синтезує й об'єднує такі науки, як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. В Україні бурхливий розвиток отримала механіка суцільного середовища: теорія пружності і пластичності, гідроаеродинаміка. Дослідження вітчизняних учених Г.М. Савіна, О.М. Кільчевського, О.М. Гузя, В.Т. Грінченка є провідними у світовій науці.

*Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху моделей матеріальних об'єктів: точок, твердого тіла і матеріальної системи під дією прикладених сил з урахуванням властивостей мас.*

Основою теоретичної механіки є декілька гіпотез, пов'язаних з уявленнями про простір і час, поняттями інерціальності системи відліку, поняттями сили і маси, а також систематизовані спостереження за звичайними рухами тіл макросвіту: закони Галілея – Ньютона.

Динаміка досліджує загальні властивості механічного руху як теорію достатньо повільних переміщень одних макроскопічних тіл відносно інших, поєднуючи особливості кінематичних властивостей руху з властивостями сил, які спричиняють цей рух, як внутрішній зв'язок між зовнішніми факторами (силами) і геометричними характеристиками рухів.

Теоретична або класична механіка є науковою основою, на якій побудована теорія відносності, механіка великих швидкостей, пов'язана з іншими просторово-часовими уявленнями про світ.

У динаміці розглядають дві основні задачі. Перша або пряма задача полягає у тому, щоб за заданими масою і законом руху тіла визначити силу або рівнодійну системи сил, під дією якої цей рух відбувається.

Друга або обернена задача динаміки – за заданими силами, прикладеними до тіла, масою і початковими умовами руху визначити закон руху, який цими обставинами обумовлюється.

Динаміку поділяють на динаміку матеріальної точки, динаміку твердого тіла і динаміку матеріальної системи.

### **1.15. 2. Закони динаміки матеріальної точки**

Основою динаміки є закони, сформульовані І. Ньютоном для матеріальної точки у творі «Математичні засади натуральної філософії». За уявленнями класичної механіки час і простір, де відбувається рух, вважаються об'єктивною реальністю, але абсолютними і однорідними. Абсолютність простору допускає незалежність механічного руху від властивостей простору в різних його точках і в різних напрямках, тобто, його однорідність і ізотропність. Це геометричний тривимірний Евклідов простір.

У класичній механіці допускається існування такого годинника, тривалість періоду якого не змінюється під час довільних переміщень тіл. Цей постулат еквівалентний твердженню про те, що величина цього часового проміжку відносно різних систем відліку, які рухаються довільно, однакова.

Згідно з уявленнями про час можна встановити одночасність двох подій на різних об'єктах незалежно від швидкості їхнього руху відносно Землі, що характеризує абсолютність часу. Однорідність часу передбачає довільний вибір початку відліку і вимір інтервалів між окремими моментами часу.

Незалежність властивостей абсолютних простору і часу від руху матеріальних об'єктів пов'язана з гіпотезою про миттєву передачу взаємодії між тілами через деякий порожній простір. За сучасними уявленнями миттєвих взаємодій в макросвіті не існує, вони здійснюються за допомогою силових полів, які є одним із різновидів матерії.

Можна вважати, що взаємодія передається з кінцевою швидкістю – зі швидкістю світла, а сукупність тіл і полів є єдиною матеріальною субстанцією. Під впливом взаємодії тіла можуть змінювати своє відносне розташування, тобто, переміщуватись у просторі. До того ж зміна відносного розташування характеризується тривалістю, яка виражається деякою функцією часу.

Простір і час – суть загальні форми існування матеріальних об'єктів. Створення теорії відносності підтвердило правильність такого уявлення. На думку Ейнштейна, «якщо б зникла матерія, то зникли б і простір, і час».

Таким чином, класична механіка вивчає такі переміщення тіл у просторі і часі, при яких процес передачі взаємодії тіл можна вважати

## **Частина перша**

практично миттєвим, а самі процеси, які при цьому відбуваються у фізичних полях, можна не розглядати.

Таке уявлення про простір і час дає можливість ввести відносну систему відліку як сукупність системи координат, жорстко пов'язаної з тілом відліку, і відмітника часу (годинника), встановленого на цьому тілі. При цьому система відліку має бути такою, в якій ізольована матеріальна точка може безмежно довго перебувати у стані спокою чи рівномірного і прямолінійного руху – це інерціальна галілеєва система відліку.

З достатнім ступенем точності за нерухому інерціальну систему можна вибрати геліоцентричну систему відліку Коперника з початком у центрі мас Сонячної системи і ортогональними осями координат, спрямованими до «нерухомих» зірок. Називати останніх нерухомими правомірно, тому що, приміром, річне кутове зміщення більшості зірок становить приблизно  $0,01''$ . Тому, систему відліку Сонце – зірки приймають за тверде тіло для порівняно довгих проміжків часу.

Не слід думати, що неправильне розуміння Ньютоном абсолютного простору призводить до хибності його законів. Для умов Землі і «нешвидких» рухів ці закони відображають реальну земну картину з досить великою точністю.

### **Перший закон Галілея-Ньютона, закон інерції**

*Існує система відліку, де ізольована матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.*

Закон інерції – один із фундаментальних законів природи. Він встановлює нерозривний зв'язок між матерією і рухом, характеризує намагання тіл зберегти той механічний рух, який тіло набуло раніше. Останнє називається властивістю інертності, що в перекладі з латинської означає «лінощі», «рутинність».

Отже, з цього закону випливає, що самовільно матеріальна точка не може змінити стан свого руху чи спокою. Тобто, рух матеріальної точки змінюється тільки в результаті її взаємодії з іншими тілами. Якщо рух відхиляється від рівномірного і прямолінійного, виникає прискорення відносно інерціальної системи відліку.

Відмінність від нуля абсолютного прискорення матеріальної точки свідчить про вплив інших тіл з певною інтенсивністю і спрямованістю, що характеризується в класичній механіці поняттям сили.

Кількісне співвідношення між силою і кінематичними параметрами, що характеризують взаємодію матеріальної точки з іншими матеріальними об'єктами, визначає другий закон Ньютона або основний закон динаміки.

### **Основний закон динаміки**

*Прискорення вільної матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і напрямлене вздовж вектора сили.*

Якщо силу або рівнодійну декількох сил, прикладених до точки, позначити літерою  $\vec{F}$ , прискорення – літерою  $\vec{a}$ , масу матеріальної точки –  $m$  і вважати останню згідно з уявленнями класичної механіки сталою, то закон матиме вираз:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.223)$$

де сила  $\vec{F}$  може бути рівнодійною.

Співвідношення (1.223), яке встановлює зв'язок між силою, масою і прискоренням, є найважливішим у класичній механіці і називається *основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки* у векторній формі.

Наведемо коротку характеристику сили і маси.

*Векторно-кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл називається силою.*

За сучасними уявленнями основу механічних взаємодій становлять гравітаційні і електромагнітні сили – сили ваги, сили пружності, сили тертя, сили опору середовища.

За проявом сили можуть давати статичний і динамічний ефект. Перший викликає деформацію тіла, другий – зміну швидкостей точок тіла, тобто, прискорення.

Наприклад, ефект від сили ваги тіла, яке вільно рухається у повітрі чи вакуумі – зміна величини і напрямку вектора початкової швидкості і, як наслідок, зміна траєкторії від прямої до параболи.

Другий закон динаміки надає кількісні співвідношення між чинниками під час механічної взаємодії тіл, тому він є основою цього фундаментального узагальнення класичної механіки.

З іншого боку, якщо сили в розділі «Статика» розглядались сталими за величиною і напрямком, то «Динаміка», як правило, оперує зі змінними силами, які, взагалі, є функціями часу, відстані (координат) і швидкості:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}).$$

Але природа багатьох сил допускає, що вони можуть бути функціями від окремих кінематичних параметрів. Наприклад, сила гравітаційної взаємодії на підставі закону всесвітнього тяжіння визначається так:

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

де  $m_1$  і  $m_2$  – маси тіл;  $\gamma$  – гравітаційна стала,  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  – відносна відстань ( $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$  – радіуси-вектори мас в інерціальній системі відліку).

За описанням руху тіла в середовищі (повітря, рідина) сила опору, як встановлено експериментально, є функцією від швидкості:

$$\vec{F}_{on} = -\alpha \vec{v},$$

## **Частина перша**

де  $\alpha$  – коефіцієнт в'язкого тертя, який залежить від форми тіла і властивостей середовища.

Якщо швидкість збільшується, то сила опору може стати пропорційною квадрату, а то і кубу швидкості.

**Масою матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою інертних і гравітаційних властивостей тіла, що моделює точка.**

Під інертними властивостями розуміють опір тіла у відповідь на зміну вектора швидкості, під гравітаційними – взаємне притягання тіла залежно від положення відносно земної поверхні. Тому не можна вважати масу коефіцієнтом пропорційності між силою і прискоренням (3.1), а визначати її методами, які відображають вище згадані властивості.

**Перший метод** пов'язаний з гравітаційними властивостями матерії і ґрунтується на законі всесвітнього тяжіння. Встановлено, що відношення ваги тіла до прискорення вільного падіння у порожнині у всіх точках земної кулі є сталою величиною. Це відношення визначає вагому масу

$$m_G = \frac{G}{g}, \quad (1.224)$$

де  $G$  – вага тіла;  $g$  – прискорення вільного падіння у вакуумі.

Із формули (1.224) випливає, що маси тіл і їх вага пропорційні. Тому можна одну з мас взяти за еталон одиниці маси і визначати інші маси зважуванням на терезах. Цей метод називається статичним.

**Другий, динамічний метод**, пов'язаний з інертними властивостями тіл. Якщо одна й та сама сила діє на тіла з різною масою, то вона викликає різні прискорення. Тоді з виразу (1.223) випливає

$$m_1 \cdot \bar{a}_1 = m_2 \cdot \bar{a}_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \frac{a_2}{a_1}.$$

Якщо вибрати одну із цих мас за еталон, то за останнього виразу можна визначити іншу інертну масу.

Дослідами Б. Бесселя встановлено тотожність гравітаційної і інертної маси з точністю до десятого порядку мализни. Цей закон природи називається принципом еквівалентності, він покладений в основу загальної теорії відносності. Оскільки прискорення  $g$ , що входить до формули (1.224), змінюється в різних місцях земної поверхні, то буде різною і вага деякого тіла, тоді як його маса залишається незмінною.

Таким чином, поняття маси зосереджує в собі дві найзагальніші властивості фізичних тіл, які беруть до уваги в теоретичній механіці.

**Перша – властивість інертності** (про це йдеться в другому законі механіки). **Друга – гравітаційна властивість**. Указані характеристики тіл у теоретичній механіці відображають внутрішні матеріальні властивості фізичних тіл.



Існує більш загальне формулювання другого закону Ньютона.

**Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює вектору прикладеної до точки сили.**

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}, \quad (1.225)$$

де  $m\bar{v}$  – кількість руху матеріальної точки як добуток маси на вектор швидкості.

Якщо маса не залежить від часу, то (1.225) можна спростити:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}.$$

Слід відмітити, що закон інерції можна одержати з другого закону (3.3), якщо система відліку інерціальна:  $\bar{F} = 0$ ;  $m = const$ . Тоді  $\bar{v} = const$ : і швидкість зберігається протягом всього часу руху.

Основний закон динаміки у формі (1.223) дозволяє вибрати і основні одиниці механічних величин – довжину, масу і час.

**Одиницею маси** в Міжнародній системі одиниць СІ слугує кілограм (кг), як маса еталона.

**Одиницею довжини** слугує метр (м), **одиноцею часу** – секунда (с).

**Одиниця сили** є похідною одиницею. Один ньютон (Н) є такою силою, яка тілу масою 1 кг надає прискорення  $1 \text{ м/с}^2$  у напрямку вектора сили.

Таким чином, одиниці маси, довжини, сили і часу повинні визначатись з урахуванням основного закону динаміки, тому що ці категорії пов'язані між собою функціонально. Три з них – маса, довжина і час – в офіційній системі СІ є незалежними, для них існують еталони. Одиниця сили виводиться із основних одиниць за допомогою основного закону динаміки..

### **Третій закон Ньютона, принцип рівності дії і протидії**

**Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла. Коротко – дія дорівнює протидії.**

При цьому слід враховувати: фізична взаємодія двох тіл, наслідком якої є механічний рух, хоча і викликає дві рівні за величиною і протилежні за напрямком сили, що діють по одній прямій, але вони не зрівноважуються, тому що дія і протидія прикладені до різних тіл.

Якщо, наприклад, буксирний катер тягне канатом баржу, то і баржа тягне назад катер з рівною силою. В цьому неважко переконатися, якщо з'єднати катер і баржу канатом через два динамометри, закріплені на катері і баржі. Показники на двох динамометрах будуть завжди однакові, навіть під час руху з прискоренням. Чому ж система рухається у напрямку сили тяги катера? Тому, що катер відштовхується від води за допомогою

лопатей гребного гвинта. Тут також сили, які прикладені з боку води на лопаті гвинта і з боку гвинта на воду, завжди однакові і протилежні за напрямом. Останні також не зрівноважуються, тому що прикладені до різних тіл.

Третій закон Ньютона виконується і в неінерціальній системі відліку, тому що він не містить кінематичних характеристик матеріальних об'єктів.

**Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції)**

***Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.***

Із цього визначення можна зробити висновок, що кожна із сил надає точці прискорення, яке незалежне від дії інших сил. Цей закон впливає з аксіоми про паралелограм сил і справджується, якщо діючи на точку сили не залежать від її прискорення.

На підставі виразу (1.223)

$$m\bar{a}_1 = \bar{F}_1; m\bar{a}_2 = \bar{F}_2; \dots; m\bar{a}_n = \bar{F}_n.$$

Додамо ці вирази

$$m(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \bar{F}; \Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}, \quad (1.226)$$

де  $\bar{a}$  – векторна сума прискорень від дії кожної сили окремо;

$\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  – рівнодійна прикладених сил.

Отже, рух матеріальної точки під дією системи сил буде таким самим, як і під дією однієї сили, рівнодійної, що дорівнює їх векторній сумі.

Закони Ньютона є лише першим наближенням до дійсності, але добре узгоджуються з нею при «малих» швидкостях, навіть якщо властивості матеріальних об'єктів вважаються незалежними від властивостей простору і часу. Кількісні відхилення законів сучасної механіки від законів класичної виявляються тільки під час руху поблизу великих мас типу Сонця, де викривляється простір, або при величезних швидкостях, близьких до швидкості світла.

Насправді ж, простір і час є атрибутами рухомої матерії. Проте, у межах своєї компетентності теоретична механіка має велике значення при дослідженні механічних процесів, що зустрічаються на практиці. «Земна» класична механіка є фундаментом для теоретичних і практичних висновків сучасної науки й техніки. Закони Ньютона мають і велике методологічне значення. Дійсно, перший закон Ньютона постулює в динаміці принцип незнищеності матерії і руху. Другий закон встановлює пропорційність між силою і прискоренням, дає змогу розв'язувати конкретні задачі механіки, збагачує поняття сили. Третій закон Ньютона дозволяє глибше розкрити суть поняття сили, двобічної дії і протидії як взаємодії між двома

матеріальними об'єктами, створюючи перехід до дослідження матеріальної системи.

Таким чином, сила як матеріальна категорія має джерелами фізичні тіла, між якими відбувається взаємодія, наслідком якої є перенесення механічного руху з одного тіла на інші тіла або перетворення енергії в рух.

### 1.15. 3. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

З розділу «Кінематика» відомо три способи задання руху матеріальної точки: векторний, координатний і натуральний. Відповідно до цього мають місце і форми складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. В основу цих рівнянь покладено основний закон динаміки (3.1).

#### 1. Диференціальне рівняння у векторній формі

Оскільки в цьому разі прискорення матеріальної точки  $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ , то диференціальне рівняння руху матиме такий вигляд:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}). \quad (1.227)$$

Диференціальне рівняння (1.227) є *основним рівнянням (законом) динаміки точки у векторній формі*.

#### 2. Диференціальні рівняння у координатній формі

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначається у проекціях на відповідні осі прямокутної системи декартових координат

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Проектуючи ліву і праву частини основного закону динаміки (1.227) на відповідні осі координат, отримаємо шукані рівняння

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kz}, \quad (1.228)$$

де  $\sum_{k=1}^n F_{kx}$ ,  $\sum_{k=1}^n F_{ky}$ ,  $\sum_{k=1}^n F_{kz}$  – алгебраїчні суми проекцій сил на осі  $x$ ,  $y$  і  $z$ .

Рівності (1.228) мають шостий порядок і є *основними диференціальними рівняннями точки в координатній формі*.

#### 3. Диференціальні рівняння у натуральній формі

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначаються у проекціях на дотичну  $\bar{\tau}$ , нормаль  $\bar{n}$  і дорівнюють:

$$a^\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a^n = \frac{v^2}{\rho},$$

де  $v$  – швидкість матеріальної точки;  $\rho$  – радіус кривини траєкторії, по якій рухається точка.

Проекція прискорення точки на бінормаль відсутня  $a^b = 0$ . Проектуючи ліву і праву частини (1.223) на осі натурального тригранника, дістанемо

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^n F_k^\tau \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_k^n, \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_k^b, \quad (1.229)$$

де останнє рівняння в проекції на бінормаль є рівнянням статички.

Рівності (1.229) є диференціальними рівняннями руху точки в натуральній формі. Як видно з виразу (1.223), вектор рівнодійної сили колінеарний вектору прискорення і розміщений у стичній площині траєкторії, тобто, її проекція на бінормаль дорівнює нулю. Про це інформує третє рівняння системи (1.229).

Рівнянню (1.227) надають перевагу при доведеннях теорем. Рівняння (1.228) застосовують як для розв'язування задач, так і для теоретичних досліджень.

Рівняння (1.229) застосовують, як правило, якщо задана траєкторія руху точки, тобто, під час дослідження невідомої матеріальної точки.

#### **1.15. 4. Дві задачі динаміки матеріальної точки**

Розглянемо основні задачі динаміки матеріальної точки. Оскільки основний закон динаміки точки (1.223) і диференціальні рівняння руху (1.227), (1.228), (1.229) мають у лівій частині прискорення – кінематичну характеристику руху, а у правій частині – векторну суму сил, які діють на точку, або суму проекцій – силову характеристику руху, то, залежно від того, яка характеристика руху потребує визначення, формулюються дві основні задачі динаміки матеріальної точки.

##### **Перша задача динаміки точки**

*За заданими масою матеріальної точки і кінематичним законом її руху визначити рівнодійну силу, яка спричиняє цей рух.*

У цьому випадку розв'язання задачі зводиться до диференціювання кінематичних рівнянь руху матеріальної точки. Тому ця задача називається диференціальною.

Який би спосіб не застосовували, треба знайти проекції сили на осі, які дорівнюють добутку маси на проекцію відповідного прискорення.

Схема розв'язування першої задачі динаміки матеріальної точки проста. Розглянемо алгоритм її розв'язання на прикладі.

**Приклад 1.20**

Матеріальна точка рухається згідно з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = at; & y = bt - ct^2, \end{cases}$$

де  $x, y$  – в метрах,  $t$  – в секундах,  $a, b, c$  – сталі величини.

*Визначити* рівнодійну силу, яка діє на цю матеріальну точку.

**Розв'язання**

Знайдемо проекції швидкості на координатні осі  $x, y$  як першу похідну за часом від координат

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = b - 2ct.$$

Знайдемо проекції прискорення матеріальної точки на осі координат як другу похідну за часом від координат

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2c.$$

Тоді проекції рівнодійної сили на координатні осі дорівнюють (1.228):

$$F_x = ma_x = 0, \quad F_y = ma_y = -2mc.$$

Рівнодійна сила, що діє на матеріальну точку

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2mc.$$

Ця сила діє паралельно осі  $Oy$ , тому що  $F_x = 0$ , і спрямована у бік від'ємних значень даної осі, адже  $F_y = -2mc$ .

**Друга задача динаміки точки**

*Згідно із заданими силами, які діють на матеріальну точку певної маси, і початковими умовами руху (координати і проекції швидкості в деякий початковий момент часу) визначити закон руху точки.*

Друга або обернена задача динаміки матеріальної точки розв'язується методом інтегрування диференціальних рівнянь руху: треба здійснити перехід від проекцій прискорень, які введені в диференціальних рівняннях, до координат у функції часу. Тому друга задача динаміки називається інтегральною. При цьому повинні бути задані початкові умови руху матеріальної точки: координати і проекції швидкості точки у початковий момент часу. Останні мають конкретний вплив на остаточний результат. Таким чином, під час розв'язування другої задачі динаміки *відомі сили*, які діють на точку певної маси, *координати і проекції швидкостей* у певний початковий момент часу. Необхідно *знайти кінематичні рівняння руху точки* (закон руху). Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (1.228) або (1.229). Визначивши проекції сил на осі координат  $F_x, F_y, F_z$  і підставивши їх в праву частину рівнянь, двічі інтегруємо систему.

Розв'язком цієї системи рівнянь є функції координат від часу і шість сталих інтегрування  $C_1, C_2, \dots, C_6$ :

$$x = x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad y = y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad z = z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \quad (1.230)$$

Для визначення сталих інтегрування підставимо початкові умови – координати і проекції швидкостей в деякий початковий момент часу  $t_0$

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; & z(t_0) &= z_0; \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0; & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0; & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (1.231)$$

Остаточний розв'язок

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (1.232)$$

**Вирази (1.232) називають загальним розв'язком диференціальних рівнянь руху точки.**

Розглядаючи рух точки у натуральній формі для розв'язання оберненої задачі, застосовують диференціальні рівняння (1.229). Початковими умовами руху в цьому випадку будуть значення дугової координати  $s(t_0)$  і початкова швидкість  $v(t_0) = \dot{s}$ .

### **1.15. 5. Інтегрування диференціальних рівнянь руху вільної точки**

Інтегрування диференціальних рівнянь у значній мірі залежить від виду функції сили, проекції якої підставляють у праві частини рівнянь. У загальному випадку сила є функцією одночасно трьох кінематичних параметрів: часу, переміщення і швидкості  $\bar{F} = \bar{F}(t, s, v)$ . Інтегрування в цьому випадку є складною задачею. Проте, в техніці і природі часто зустрічаються сили, які залежать тільки від одного кінематичного параметра. Так, сили, що мають місце при дослідженні роботи різного роду механізмів і машин, явно залежать від часу.

До позиційних сил, що залежать від положення точки (переміщення), належать сили пружності, які виникають у пружних тілах при їх деформації, а також сили притягання або відштовхування, що виникають при взаємодії тіл, які є наслідком гравітаційних або електромагнітних сил.

Сили, що залежать від швидкості, зустрічаються при дослідженні руху тіл у в'язкому середовищі (рідкому, газоподібному).

#### **Алгоритм розв'язання другої задачі динаміки**

##### **1. Складання розрахункової схеми і диференціального рівняння руху точки:**

а) вибрати початок відліку, поєднуючи його з початком руху, і провести координатну вісь, як правило, у бік руху, а в умовах рівноваги початок відліку зручно вибрати у положенні статичної рівноваги;

б) зобразити точку, що рухається, у довільному положенні, але так, щоб було  $v > 0$ . Останнє є суттєвим, якщо серед сил є такі, що залежать від швидкості. Показати всі діючі на точку сили;

в) підрахувати суму проєкцій всіх сил на координатну вісь і підставити цю суму в праву частину диференціального рівняння. При цьому всі змінні сили виразити через ті кінематичні параметри  $t, \bar{r}, \bar{v}$ , від яких вони залежать.

### **2. Інтегрування диференціального рівняння руху:**

Інтегрування відбувається методами вищої математики і залежить від вигляду правої частини рівняння, тобто, від формул прикладених сил. У випадку, коли сила залежить тільки від одного параметра: часу, переміщення або швидкості, то рівняння прямолінійного руху можна інтегрувати методом відокремлення змінних. Якщо при цьому необхідно визначити тільки функцію швидкості від часу, то для цього обмежуються одним інтегруванням рівняння.

### **3. Визначення довільних сталих інтегрування**

Для визначення довільних сталих інтегрування потрібно використати початкові умови: координати і проєкції швидкостей в деякий час або на початку руху  $t_0$ . Сталі інтегрування визначаються безпосередньо після кожного інтегрування. Якщо у заданого диференціального рівняння змінні величини можна відокремити, то іноді використовуються визначені інтегралі у відповідних границях.

### **4. Знаходження шуканих величин і аналіз одержаних результатів.**

Для створення можливостей аналізу отриманого розв'язку методом підрахунку розмірності необхідно проводити розв'язування задачі у загальному вигляді, а числові дані підставляти тільки в остаточний результат.

Надамо приклади розв'язування другої задачі динаміки у випадках, якщо сили змінюються в залежності від часу, переміщення і швидкості.

#### **Прямолінійний рух точки**

Припустимо, що матеріальна точка рухається прямолінійно, тоді вісь  $x$  треба направити у бік руху точки, крім того

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow F_y = 0; F_z = 0.$$

Рушійна сила повинна бути спрямована вздовж осі  $F_x = F$ . Проте, ця умова прямолінійності руху точки є необхідною, але недостатньою. Потрібно, щоб і початкова швидкість була спрямована вздовж осі  $v_0 = v(t_0) = v_{0x}$ .

### **1. Рух точки під дією сили, яка змінюється з часом**

## Частина перша

### Приклад 1.21

Трактор вагою  $G$  під час розгону із стану спокою рухається прямолінійно по горизонталі і його сила тяги збільшується пропорційно часу  $F = kt$ , де  $t$  – час у секундах;  $k$  – сталий коефіцієнт пропорційності. *Визначити* закон руху трактора під час розгону  $x = x(t)$ .

#### Розв'язання

Трактор рухається поступально, тому приймаємо модель точки. Направимо вісь  $X$  у напрямку руху, а початок відліку помістимо в нерухому точку, де трактор перебував на початку руху, коли  $t_0 = 0$ , тоді початкова координата  $x(t_0) = x_0 = 0$  і початкова швидкість  $v(t_0) = v_0 = 0$ .

Запишемо диференціальне рівняння (1.228) в проекції на вісь  $X$

$$m \frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{dv_x}{dt} = F_x = kt. \quad (a)$$

Відокремимо змінні у виразі (а), для чого помножимо на  $dt$  ліву і праву частини рівняння і інтегруємо

$$\int dv_x = \frac{k}{m} \int t dt + C_1 \Rightarrow v_x = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1. \quad (б)$$

Підставимо у вираз (б)  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , знову відокремимо змінні і інтегруємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 \Rightarrow \int dx = \frac{k}{m} \int \frac{t^2}{2} dt + C_1 \int dt + C_2.$$

Після другого інтегрування

$$x = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \quad (в)$$

Для визначення сталих інтегрування в рівняння (б) і (в) підставимо початкові умови: якщо  $t = t_0 = 0$ , то  $v(t_0) = v_{0x} = 0$ .

Розв'язуючи алгебраїчні рівняння, дістанемо  $C_1 = 0; C_2 = 0$ .

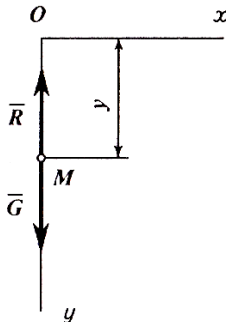
Остаточно закон руху :

$$x = \frac{kg}{6G} t^3 \text{ (М)}.$$

## 2. Рух точки під дією сили, пропорційної швидкості

### Приклад 1.22

Тіло  $M$  вагою  $\bar{G}$  падає вниз без початкової швидкості із точки  $O$ , яку оберемо за початок координат (рис. 1.95). *Визначити* закон руху тіла як матеріальної точки.



#### Розв'язання

Припустимо, що задане тіло мале для земних умов, тому приймаємо його за точку. Складемо диференціальне рівняння руху тіла під дією сили ваги  $\bar{G}$  і сили опору повітря  $\bar{R}$  в проекції на вісь  $y$  (1.228)

$$m \frac{dv_y}{dt} = \sum F_{ky}; \quad m \frac{dv_y}{dt} = G_y - R_y = mg - \alpha v. \quad (a)$$

Знизимо порядок рівняння (а), переходячи до  $\frac{dv}{dt}$ , і позначимо

$$\frac{\alpha}{m} = k; \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow dv = (g - kv) dt. .$$

Рис. 1.95

Відокремимо змінні  $\frac{dv}{g - kv} = dt$ .



Введемо нову змінну  $u = g - kv \Rightarrow du = -kdv \Rightarrow dv = -\frac{du}{k}$  і отримаємо рівняння  $\frac{du}{u} = -kdt$ .

Інтегруємо

$$\ln u = -kt + C_1 \Rightarrow \ln(g - kv) = -kt + C_1. \quad (б)$$

Із рівняння (б) визначимо значення  $C_1$ , підставивши початкові умови: якщо  $t = t_0 = 0$ , то

$$v(t_0) = v_0 = 0 \Rightarrow \ln(g - k \cdot 0) = -k \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln g.$$

Підставимо значення  $C_1$  в рівняння

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g \Rightarrow \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt. \quad (в)$$

Потенціюємо вираз (в) і визначаємо швидкість

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (г)$$

Із аналізу виразу (г) видно, якщо  $t \rightarrow \infty$ ,  $e^{-kt} \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow \frac{g}{k}$ , то швидкість стає максимальною

і сталою  $V_{\max} = \frac{g}{k}$ , а рух – рівномірним.

Представимо рівняння (г) у вигляді

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \Rightarrow dy = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt. \quad (д)$$

Інтегруємо рівняння (д)

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2. \quad (е)$$

Для визначення  $C_2$  підставимо у вираз (е) початкові умови

$$t = t_0 = 0; y = y_0 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{g}{k^2} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Підставимо знайдене значення  $C_2$  у вираз (е) і отримаємо закон руху

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

### 3. Рух точки під дією сили, яка залежить від переміщення

#### Приклад 1.23

Матеріальна точка  $M$  масою  $m$  рухається вздовж осі  $x$  під дією сили, пропорційної відстані  $F = kmx$ , де  $k = 4$ . На початку руху, якщо  $t = t_0 = 0$ , то координата і швидкість  $x_0 = 5$  м;  $v_0 = 2$  м/с. Визначити закон руху точки  $x = x(t)$ .

#### Розв'язання

Складаємо диференціальне рівняння руху в проекції на вісь  $x$  (1.228)

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{x} = F_x = kmx.$$

Після скорочень маємо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} - 4x = 0. \quad (а)$$

Рівняння (а) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x = Ae^{ut}. \quad (б)$$

Взявши першу  $\dot{x}$  і другу  $\ddot{x}$  похідні за часом від виразу (б), підставимо їх у рівність (а) і отримаємо характеристичне рівняння

$$u^2 - 4 = 0,$$

## Частина перша

корені якого  $u_1 = 2$ ;  $u_2 = -2$ .

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (а)

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \quad (г)$$

Для визначення двох сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  треба друге рівняння, яке отримаємо, взявши похідну за часом від виразу (г)

$$v = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \quad (д)$$

Підставивши у вирази (г) і (д) початкові умови, дістанемо алгебраїчні рівняння, з яких і визначимо сталі інтегрування

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2; \\ 2 = 2C_1 - 2C_2. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3; C_2 = 2.$$

Шуканий закон або рівняння руху точки

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t} \quad (м).$$

## 4. Криволінійний рух точки

### Приклад 1.24

Розглянемо рух важкої матеріальної точки, наприклад, каменя, який кинули під кутом  $\alpha$  до горизонту в площині  $xOy$  з початковою швидкістю  $v_0$  і на який діє тільки сила ваги  $\overline{G} = m\overline{g}$  (рис. 1.96).

Визначити рівняння руху  $x(t)$ ,  $y(t)$ , рівняння траєкторії  $y = f(x)$ , час польоту  $t_1$ , дальність польоту  $L$  і висоту польоту  $h$ .

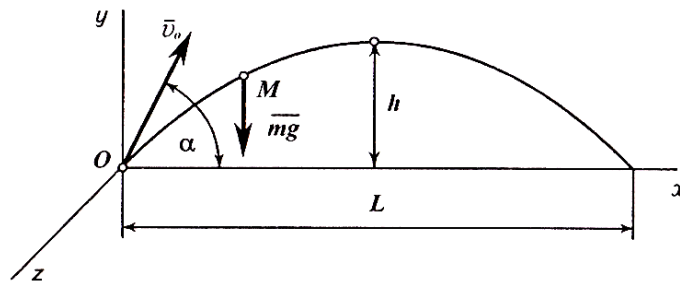


Рис. 1.96

### Розв'язання

Користуючись розрахунковою схемою (рис. 1.96), складемо два диференціальні рівняння руху точки (1.228) в проекціях на дві координатні осі

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0; \\ m\ddot{y} = -mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \quad (а)$$

Початкові умови при  $t = 0$ :

$$x_0 = 0; y_0 = 0; v_{0x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha; v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Інтегруємо диференціальні рівняння (а) і дістанемо закон зміни проекцій швидкостей

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1; \\ \dot{y} = -gt + C_2. \end{cases} \quad (б)$$

Далі інтегруємо рівняння (б) і отримаємо рівняння руху

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_3; \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \end{cases} \quad (в)$$

Підставляючи початкові умови, визначаємо із рівнянь (б) і (в) сталі інтегрування  $C_1, C_2, C_3, C_4$

$$C_3 = 0; C_4 = 0; C_1 = v_0 \cos \alpha; C_2 = v_0 \sin \alpha.$$

Підставимо сталі інтегрування у вирази (б), (в) і остаточно визначимо закон зміни швидкостей і закон руху точки

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha ; \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha ; \end{cases} \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) \cdot t ; \\ y = (v_0 \sin \alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (г)$$

Для визначення рівняння траєкторії руху точки  $y = f(x)$  виключимо параметр  $t$  з останніх рівнянь руху (г)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{(v_0 \sin \alpha) x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}; \\ y = tg \alpha \cdot x - \frac{g(1 + tg^2 \alpha)}{2v_0^2} x^2 \end{cases} \quad (д)$$

Отримане рівняння (д) траєкторії руху  $y = f(x)$  відповідає параболі.

Визначаємо із виразу (г) час польоту  $t_1$  в момент падіння точки на землю, коли  $y = 0$

$$y = 0; \Rightarrow (v_0 \sin \alpha) t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0; \Rightarrow v_0 \sin \alpha = \frac{gt_1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Дальність польоту  $L = x(t_1)$  визначимо із виразу (г)

$$L = x(t_1) = (v_0 \cos \alpha) t_1 = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальна висота польоту  $h = y(t_2)$  визначиться в момент половини шляху і часу польоту

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}; \quad h = y_{\max} = (v_0 \sin \alpha) t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g(v_0^2 \sin^2 \alpha)}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

### 1.15. 6. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Рух невільної матеріальної точки у просторі обмежений певними умовами або тілами, які називаються в'язями. В'язі примушують точку рухатись по деякій поверхні або по лінії, яка є наслідком перетину двох поверхонь.

Вивчаючи рух невільної точки, використовують аксіому про звільнення від в'язей. Вона дозволяє вважати точку вільною, якщо умовно відкинути фізичні в'язі і замінити їхню дію реакціями цих в'язей.

Диференціальне рівняння у векторній формі для невільної матеріальної точки має такий вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (1.233)$$

де  $\bar{F}$  – рівнодійна активних сил;

$\bar{R}$  – рівнодійна сил реакцій в'язей.

Спроектуємо ліву і праву частини виразу (1.233) на осі прямокутної системи декартових координат  $x, y, z$  і осі натуральної системи координат  $\tau, n, b$

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + R_x, & m \frac{dv}{dt} &= F_\tau + R_\tau, \\
 m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + R_y, & m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n, \\
 m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + R_z, & 0 &= F_b + R_b.
 \end{aligned}
 \tag{1.234}$$

Рівності (1.234) є диференціальними рівняннями руху невільної матеріальної точки в прямокутних декартових (ліворуч) і натуральних осях координат (праворуч). Під час розв'язання задачі невільної матеріальної точки зустрічаються певні складності. Якщо взяти рівняння (1.234) в декартових координатах, то система містить три невідомих проекції в'язі, як функції часу. Тому треба скласти три додаткові рівняння, які б враховували відповідні рівняння в'язей і їхні властивості.

### 1.15. 7. Принцип д'Аламбера для невільної матеріальної точки

Закони Ньютона стосуються руху вільної матеріальної точки. На невільну точку накладені обмеження у вигляді умов в'язі, які реалізуються за допомогою сил реакцій. Аксиома про звільнення від в'язей дає можливість звести будь-яку невільну точку до вільної, якщо включити до числа активних сил і реакції відповідних в'язей.

Тому метод, який базується на принципі д'Аламбера, що розглядається у даному параграфі, еквівалентний основному закону динаміки і аксіомі про звільнення від в'язей. Згаданий метод ефективно використовується для розв'язування першої задачі динаміки невільної матеріальної точки, коли заданий закон її руху, а треба визначити шукану силу або силу реакції в'язі, яка обмежує рух точки в певному напрямі. Припустимо, що невільна матеріальна точка  $M$  рухається за заданою траєкторією (рис. 1.97) під дією рівнодійної активних сил  $\bar{F}$  і рівнодійної реакцій в'язей  $\bar{R}$ . На підставі аксіоми про паралелограм сил векторна сума сил  $\bar{F}$  і  $\bar{R}$  дорівнює  $\bar{G}$ . Запишемо у векторній формі диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R} = \bar{G}. \tag{1.235}$$

Перепишемо рівняння (1.235)  $\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0$ .

Силу  $(-m\bar{a})$  називають *силою інерції точки* і позначають

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \tag{1.236}$$

Оскільки векторна сума сил дорівнює нулю, то, на перший погляд, точка перебуває у стані рівноваги.

Але згадана рівновага є умовною.

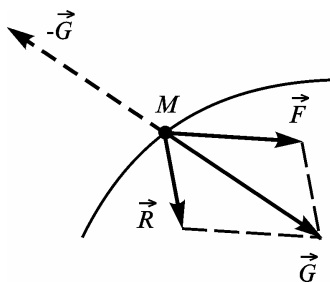


Рис. 1.97

Ця умовність полягає в тому, що сили  $\bar{F}$  і  $\bar{R}$  прикладені до точки  $M$ , а сила  $(-m\bar{a})$ , яка дорівнює  $(-\bar{G})$ , до цієї точки не прикладена.

**Силою інерції матеріальної точки називають вектор  $\bar{\Phi}$ , який дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення і спрямований протилежно вектору прискорення  $\bar{a}$ .**

Сила інерції є головним вектором сил протидії, прикладених до зовнішніх тіл, одні з яких є джерелами активних сил, інші – в'язями, тому в природі існують реально тільки її складові, прикладені до різних тіл.

Лише тоді, коли точка взаємодіє з одним тілом, головний вектор сил інерції фізично існує у вигляді однієї сили.

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (1.237)$$

Рівність (1.237) є математичним відображенням принципу д'Аламбера. Сформулюємо цей принцип для матеріальної точки.

**Активні сили і реакції в'язей, прикладені до точки, умовно врівноважуються прикладеною до точки силою інерції.**

Якщо рух точки заданий координатним способом, то сила інерції

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -(m\bar{i} + m\bar{j} + m\bar{k}), \quad (1.238)$$

де  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – проекції прискорення точки на відповідні осі координат.

Проекції сили інерції на осі і повна сила інерції визначаються:

$$\Phi_x = -m\bar{i}, \quad \Phi_y = -m\bar{j}, \quad \Phi_z = -m\bar{k}, \quad \Phi = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}.$$

Якщо рух точки заданий натуральним способом, то сила інерції

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -\left( m \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + m \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n} \right), \quad (1.239)$$

де  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$  – дотична складова прискорення;  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  – нормальна

складова прискорення;  $\rho$  – радіус кривини траєкторії точки.

Або  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_n; \quad \bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau; \quad \bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n,$

де  $\bar{\Phi}_\tau$  – тангенціальна (дотична) складова сили інерції точки;

$\bar{\Phi}_n$  – нормальна складова сили інерції точки або відцентрова сила.

Припустимо, що точка  $M$  масою  $m$  розміщена на обертовому тілі і рухається разом з тілом на відстані  $r$  від осі  $O$  (рис. 1.98).

Тоді сила інерції точки визначається так:

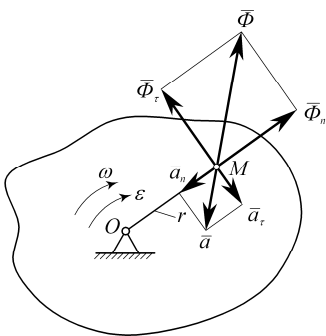


Рис. 1.98

$\Phi_\tau = ma_\tau = mr\varepsilon$  – тангенціальна складова сили інерції точки  $M$ ;

$\Phi_n = ma_n = m\omega^2 r$  – нормальна або відцентрова складова сили інерції.

Модуль повної сили інерції матеріальної точки

$$\Phi = \sqrt{\Phi_\tau^2 + \Phi_n^2} = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Рівність (1.237) не є умовою рівноваги цих сил, оскільки вони прикладені до різних тіл: активна сила і реакція в'язі прикладена до матеріальної точки або тіла, а сила інерції – до тіл, що зумовлюють прискорення точки відносно Рис. 1.98

абсолютної системи координат.

Сила інерції матеріальної точки вважається фіктивною, тому що до самої точки вона не прикладена, а може бути прикладена до тих тіл, які надають точці прискорення або до в'язі, яка обмежує її рух. К тому ж, насправді, точка не перебуває в рівновазі, а має прискорення.

Принцип д'Аламбера є формально-математичним методом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статички, проте, він дає математично точні і прості співвідношення для ефективного розв'язання першої задачі динаміки.

Векторному рівнянню (1.237) відповідають три рівняння в проекціях

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0, F_y + R_y + \Phi_y = 0, F_z + R_z + \Phi_z = 0. \quad (1.240)$$

Значення принципу д'Аламбера полягає в тому, що він дає змогу скласти рівняння руху невільної точки у формі рівнянь рівноваги.

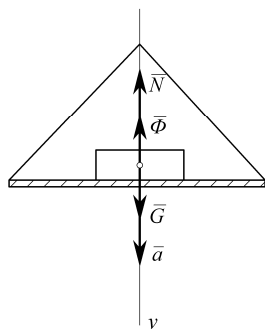
Зрозуміло, що принцип д'Аламбера не дає можливості подолати складнощі при розв'язанні другої задачі динаміки, пов'язані з інтегруванням диференціальних рівнянь руху.

**Приклад 1.25**

Платформа з вантажем масою  $m$  опускається вниз з прискоренням  $\bar{a}$  (рис. 1.99). Визначити реакцію платформи  $\bar{N}$ .

**Розв'язання**

Оскільки рух платформи є поступальним, то він ідентичний руху точки. Покажемо на схемі активну силу ваги  $\bar{G}$ , реакцію платформи  $\bar{N}$  і силу інерції  $\bar{\Phi}$ .



$|\bar{\Phi}| = ma$  – сила інерції вантажу,  $G = mg$  – вага вантажу. Прикладемо умовно до вантажу силу інерції і запишемо рівняння рівноваги як суму проекцій сил на вісь  $y$ :

$$\sum F_{ky} = 0; \Rightarrow G - \Phi - N = 0.$$

Звідси реакція платформи

$$N = G - \Phi = mg - ma = m(g - a) = G(1 - a/g).$$

Якщо прискорення вантажу дорівнює прискоренню вільного падіння ( $a = g$ ), то реакція платформи  $N = 0$  (умова невагомості).

Рис. 1.99

**ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Що вивчає динаміка, які її основні задачі?
2. Сформулюйте основні закони динаміки.
3. Напишіть диференціальні рівняння руху точки в координатній і натуральній формах.

4. Напишіть диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки.
5. Як формулюється і розв'язується перша задача динаміки?
6. Як формулюється і розв'язується друга задача динаміки?
7. Що таке початкові умови руху точки?
8. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь руху?
9. Якими способами зручніше розв'язувати задачі механіки?
10. Чому перша задача динаміки називається диференціальною, а друга – інтегральною?
11. Визначте поняття сили інерції.
12. Як виражається сила інерції точки в декартових і натуральних осях?
13. Якою є умова невагомості тіла?

### 1.15.8. Коливання матеріальної точки

Коливальний рух – це рух, при якому деякі параметри цього руху періодично змінюються і повторюються.

Якщо параметри коливального руху змінюється за законом синуса або косинуса, то такий рух називається **гармонічним коливальним рухом**.

Наука про коливання складає основу ряду областей фізики і техніки. Коливання, які розглядаються у різних галузях, відрізняються за фізичною суттю (механіка, радіотехніка, акустика тощо), але основні закони цих коливань залишаються ідентичними.

Тому вивчення і дослідження механічних коливань є важливим не тільки для вдосконалення техніки, але й для багатьох інших галузей.

### 1.15.9. Кінематика гармонічних коливань

Якщо точка  $M$  рухається вздовж кола радіусом  $R$  рівномірно (рис. 1.100), то радіус точки  $OM$  обертається рівномірно навколо осі  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega$  за законом  $\varphi = \alpha + \omega t$ . Точка  $M_0$  є початковим положенням на траєкторії, яке визначається кутом  $\alpha$ .

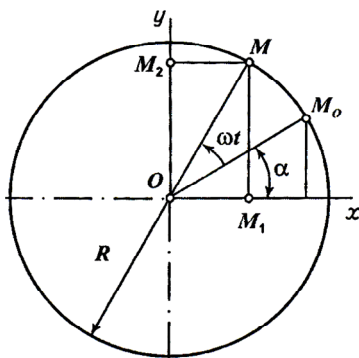


Рис. 1.100

Точка  $M_1$ , що є проекцією точки  $M$  на вісь  $x$ , рухається за законом

$$x = OM_1 = OM \cos(\omega t + \alpha) = R \cos(\omega t + \alpha). \quad (1.241)$$

Аналогічно, точка  $M_2$ , проекція точки  $M$  на вісь  $y$ , здійснює такий закон руху

$$y = OM_2 = OM \sin(\omega t + \alpha) = R \sin(\omega t + \alpha). \quad (1.242)$$

Точку  $M$  відносно точок  $M_1$  і  $M_2$  називають допоміжною.

Таким чином, якщо допоміжна точка  $M$  рухається рівномірно вздовж кола радіусом  $R$ , то її проекції на координатні осі  $x$  і  $y$  здійснюють **гармонічні коливання** згідно з функціями синуса або косинуса.

Величина  $R$ , що стоїть множником перед функціями синуса або косинуса, називається **амплітудою коливань**.

## Частина перша

**Амплітудою** називається **максимальне відхилення** точок  $M_1$  і  $M_2$  від точки  $O$ , як **середнього положення** або **положення рівноваги**.

Величина  $\omega$  для точок  $M_1$  і  $M_2$  є **коловою** або **циклічною частотою**, це кутова швидкість радіуса допоміжної точки  $M$ .

Колова частота вимірюється в  $[рад/с], [с^{-1}]$

**Фазою коливань** в радіанах називається вираз  $(\omega t + \alpha)$ , де  $\alpha$  є початковою фазою коливань, коли час  $t = 0$ .

Повне коливання точок  $M_1$  і  $M_2$  відбудеться тоді, коли кожна з точок двічі пройде через те ж саме положення, а допоміжна точка  $M$  здійснить один повний оберт.

**Найменший проміжок часу**, за який відбувається **одне повне коливання**, а точка буде мати ту ж саму координату, називається **періодом коливань**  $T$  (с).

$$\text{Очевидно, що } \omega \cdot T = 2\pi; \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}; \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.243)$$

Кількість коливань за одиницю часу (за одну секунду) називається **частотою коливань** і вимірюється в герцах [Гц].

$$f = \frac{1}{T}; \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Гц}]. \quad (1.244)$$

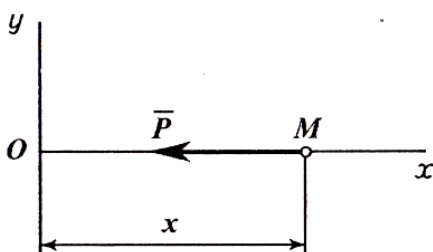
### 1.15.10. Класифікація коливань

Колівальний рух матеріальної точки відбувається за умови, якщо на точку  $M$ , що відхиляється від положення спокою або рівноваги (точка  $O$ ), діє сила  $\vec{F}$ , яка намагається повернути точку в попереднє положення рівноваги. Така сила називається **поновлювальною** (рис. 1.101).

$$P = c \cdot OM,$$

Практично важливими є випадки, коли поновлювальна сила, пропорційна величині відхилення, є лінійною функцією переміщення

(деформації):  $P = c \cdot OM$ ,



де  $c$  – коефіцієнт пропорційності,  $OM$  – переміщення точки або деформація пружного елемента. Прикладом такої сили є сила пружності пружини, шини, деформованого тіла.

Коефіцієнт пропорційності у цьому разі називають **лінійним коефіцієнтом**

Рис. 1.101

**жорсткості**, який чисельно дорівнює силі, що припадає на одиницю переміщення (деформації пружини). Одиницею вимірювання коефіцієнта жорсткості у системі одиниць  $SI$  є  $H/м$ .



Коливання можуть відбуватись і під дією сил, підпорядкованих іншим законам.

На основі енергетичного балансу прямолінійні коливання матеріальної точки поділяються на чотири основні типи.

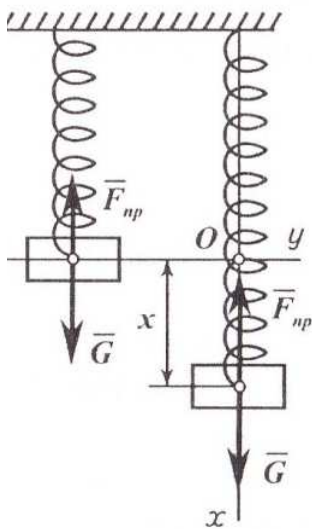
1. **Вільні коливання** під дією поновлювальної сили;
2. **Вільні згасаючі коливання** під дією поновлювальної сили і сили опору, пропорційної першому степеню швидкості;
3. **Змушені коливання без опору** під дією поновлювальної сили і збурювальної сили;
4. **Змушені коливання з опором** під дією поновлювальної сили, сили опору і збурювальної сили.

**1.15.11. Динаміка коливань. Вільні коливання матеріальної точки**

Вільні коливання точки відбуваються під дією поновлювальної сили, яка є лінійною функцією переміщення точки від положення рівноваги і завжди спрямована в напрямку до положення рівноваги, де б точка в даний момент часу не знаходилась.

Розглянемо динаміку прямолінійних вільних коливань на прикладі коливання вантажу на пружині вздовж осі  $x$ , яку спрямуємо вниз у бік руху тіла (рис. 1.102). Довжина пружини у недеформованому стані  $l_0$ .

Поволі відпустимо вантаж, він опиниться в положенні статичної рівноваги. Відношення ваги вантажу до статичної деформації  $\lambda_{cm}$ , якщо система пружина – вантаж перебуває у стані рівноваги є **коефіцієнтом жорсткості пружини**  $c$  [Н / м].



$$c = G / \lambda_{cm}; \Rightarrow G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

У стані рівноваги сила пружності дорівнює силі ваги

$$F_{np} = G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

Коливання вантажу масою  $m$  відбувається навколо положення статичної рівноваги  $O$ , який називається **центром коливань**. Якщо вантаж відхилився від цього положення, то на нього крім сили ваги діють і дві складові сили пружності пружини, статична і динамічна

$$F_{np} = c(\lambda_{cm} + x) = c\lambda_{cm} + cx.$$

Складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь  $x$

Рис. 1.102

$$m\ddot{x} = G - F_{np}; \Rightarrow m\ddot{x} = c \cdot \lambda_{cm} - c(\lambda_{cm} + x); \Rightarrow m\ddot{x} = -c \cdot x,$$

## Частина перша

де  $(c \cdot x)$  – поновлювальна сила, яка є рівнодієюю сили ваги і сили пружності в статичному положенні. **Стала сила  $G$** , як неважко побачити, не змінює характеру коливань, а лише **зміщує центр** цих **коливань** у бік дії сили на величину статичної деформації  $\lambda_{cm}$ .

$$\text{Тоді: } \frac{c}{m}x = 0. \text{ Позначимо } \frac{c}{m} = k^2; \Rightarrow k = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ і, остаточно,} \\ \frac{c}{m}x = 0. \quad (1.245)$$

**Рівність (1.245) є диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки.** Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (1.245) шукаємо у вигляді  $x = e^{nt}$  і для визначення  $n$  складаємо характеристичне рівняння, підставляючи розв'язок і його другу похідну в рівняння

$$n^2 + k^2 = 0; \Rightarrow n_{1,2} = \pm ik, \text{ де } i = \sqrt{-1} \text{ – уявна одиниця.}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1.245)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (1.246)$$

Довільні сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  розв'язку (1.246) знаходимо за допомогою початкових умов

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0. \end{cases}$$

Оскільки невідомих сталих інтегрування дві, то знайдемо друге рівняння, взявши похідну  $v = \dot{x}(t)$  від виразу (1.246)

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (1.247)$$

У рівняння (1.246) і (1.247) підставимо початкові умови  $x_0$  і  $v_0$ , якщо  $t_0 = 0$

$$\begin{cases} x_0 = C_1 & C_1 = x_0 \\ C_2 k = v_0 & C_2 = \frac{v_0}{k} \end{cases}. \quad (1.248)$$

Значення довільних сталих (1.248) підставимо у рівність (1.246)

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (1.249)$$

**Вираз (1.249) є загальним розв'язком диференціального рівняння (1.245), законом вільних коливань.** Його можна подати у вигляді однієї гармоніки шляхом підстановки

$$x_0 = A \sin \alpha; \quad \frac{v_0}{k} = A \cos \alpha. \quad (1.250)$$

Враховуючи підстановку (1.250), розв'язок (1.249) запишеться

$$\begin{aligned} x &= A \sin \alpha \cdot \cos kt + A \cos \alpha \cdot \sin kt. \\ x &= A \sin(kt + \alpha). \end{aligned} \quad (1.251)$$

Сталі коефіцієнти  $A$  і  $\alpha$  знаходимо з рівнянь (1.250), якщо ліві і праві частини спочатку піднести до квадрату

$$x_0^2 = A^2 \sin^2 \alpha; \quad \frac{v_0^2}{k} = A^2 \cos^2 \alpha, \quad (1.252)$$

а потім почленно додати

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}. \quad (1.253)$$

Якщо у виразах (1.250) перше рівняння поділити на друге, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0}; \quad \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0}. \quad (1.254)$$

Закон руху (1.251) інформує, що точка здійснює гармонічні коливання, амплітуда яких (1.253) і початкова фаза (1.254) залежать лише від початкових умов і важливої характеристики системи – колової або циклічної частоти вільних коливань  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  [ $c^{-1}$ ].

Період вільних коливань

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (1.255)$$

Період вільних коливань можна знайти за наближеною формулою через таке еквівалентне перетворення

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\sqrt{\frac{\pi^2 G \cdot \lambda_{cm}}{g \cdot G}} = 2\sqrt{\lambda_{cm}}. \quad (1.256)$$

Необхідно зазначити, що вільні гармонічні коливання в дійсності не існують, тому що завжди є реальний опір, завдяки чому згасання коливань неминуче. Отже, вільні коливання – це теоретична модель. Проте, при згасанні зменшується лише амплітуда коливань, а частота коливань залишається незмінною. Тому частота вільних коливань є «динамічною індивідуальністю» системи і залежить тільки від характеристик самої системи в цілому. Для простих коливальних систем частота залежить тільки від співвідношення маси і жорсткості пружних елементів. Це загальна закономірність. Якщо підвищуємо масу, то знижується власна частота, підвищуємо жорсткість – збільшується. А для періоду коливань – навпаки (1.255).

Вільні коливання мають фундаментальне значення. Знаючи характеристики вільних коливань, можна передбачити поведінку механічної системи під дією різних збурювальних факторів.

## Частина перша

Для розв'язання задач на вільні коливання матеріальної точки можна запропонувати такий *алгоритм*.

1. Зобразити матеріальну точку у довільному положенні та показати сили, що діють на дану точку.
2. Вибрати початок відліку у центрі коливань і спрямувати вісь у бік руху точки.
3. Записати початкові умови руху точки.
4. Скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на вибрану вісь.
5. Інтегрувати диференціальне рівняння руху двічі.
6. Визначити довільні сталі інтегрування за допомогою початкових умов.
7. Записати остаточний закон коливального руху матеріальної точки.

### Приклад 1.26

Вантаж масою  $m = 2$  кг падає з висоти  $h = 40$  см на середину твердої квадратної плити, закріпленої на чотирьох симетрично розміщених пружинах (рис. 1.103). Коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1 = 2$  Н/см. Визначити закон коливального руху вантажу.

### Розв'язання

Спрямуємо вісь  $x$  вертикально вниз, початок осі помістимо в точку статичної рівноваги, де деформація пружини дорівнює статичній деформації  $\lambda_{cm}$ .

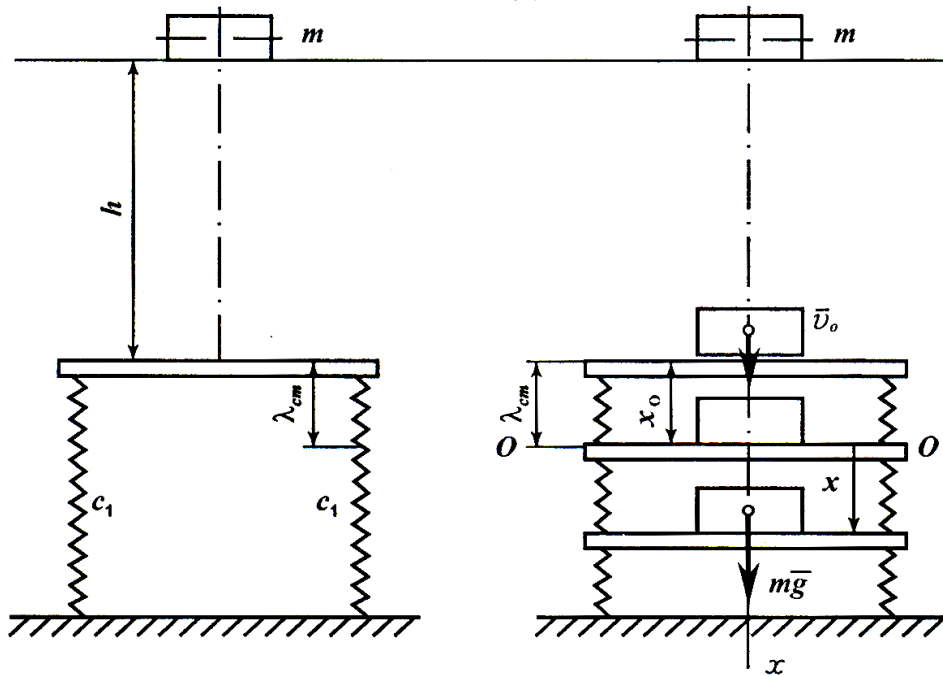


Рис. 1.103

Зведений коефіцієнт жорсткості пружин, з'єднаних паралельно  $c = 4c_1 = 800$  Н/м.

Початкова швидкість вантажу в момент торкання пластини визначається

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.4} = 2.8 \text{ м/с}.$$

Отже, початкові умови руху вантажу на пружинах

$$x_0 = -\lambda_{cm} = -\frac{mg}{c} = -\frac{2 \cdot 9.8}{800} = -0.0245 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = v_0 = 2.8 \text{ м/с}.$$

Вантаж здійснює вільні коливання з коловою частотою

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{800}{2}} = 20 \frac{1}{c}$$

Закон руху вільних коливань (3.30)

$$x = A \sin(kt + \alpha),$$

де  $A$  – амплітуда коливань, яку визначимо з виразу (3.32)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = \sqrt{(0,0245)^2 + \frac{2,8^2}{20^2}} = 0,142 \text{ м};$$

де  $\alpha$  – початкова фаза коливань (3.33)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \cdot k}{v_0} = \frac{(-0,0245) \cdot 20}{2,8} = -0,175 \Rightarrow \alpha = -0,1754 \text{ рад.}$$

Остаточний закон коливального руху вантажу

$$x = 0,142 \sin(20t - 0,1754) \text{ м.}$$

### 1.15.12. Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянуті вище вільні коливання матеріальної точки в реальних умовах поступово згасають, оскільки на коливання впливає опір середовища. Розглянемо випадок коливання точки, коли сила опору пропорційна першому степеню швидкості (рис. 1.104).

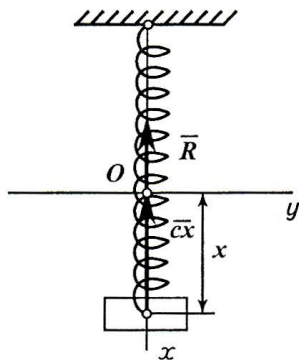


Рис 1.104

$$\bar{R} = -\mu \bar{v},$$

де  $\mu$  – коефіцієнт пропорційності.

Знак «мінус» інформує, що вектори сили і швидкості спрямовані протилежно. На точку масою  $m$  під час її руху діють поновлювальна сила  $-cx$  (рівнодійна сили ваги і сили пружності пружини), де  $x$  – відхилення точки від положення статичної рівноваги  $O$ , початку системи координат, і сила опору  $\bar{R}$ .

$$\bar{R} = -\mu \bar{v}; \quad R_x = -\mu \dot{x} \quad (1.257)$$

Диференціальне рівняння руху точки

$$m \ddot{x} = -cx - \mu \dot{x} \Rightarrow m \ddot{x} + \mu \dot{x} + cx = 0. \quad (1.258)$$

Рівняння (1.258) поділимо на масу  $m$  і введемо позначення

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0; \quad \frac{\mu}{m} = 2n; \quad n = \frac{\mu}{2m}; \quad \frac{c}{m} = k^2; \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

де  $n$  – коефіцієнт згасання;

$k$  – циклічна частота вільних коливань.

Зазначимо, що коефіцієнт згасання  $n$  і циклічна частота  $k$  мають однакову розмірність, тому їх можна порівнювати. Остаточо отримаємо диференціальне рівняння згасаючих коливань

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = 0. \quad (1.259)$$

## Частина перша

Рівняння (1.259) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0. \quad (1.260)$$

Корені характеристичного рівняння (1.260)

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (1.261)$$

Розв'язок рівняння має різний вигляд у залежності від співвідношення коефіцієнтів  $n$  і  $k$ .

Якщо корені рівняння (1.260) є дійсними і різними чи дійсними і рівними  $n^2 - k^2 \geq 0; \Rightarrow n \geq k$ , тобто, якщо опір більший порівняно з відновлювальною силою, то відбувається аперіодичний рух за законом

якщо  $n > k \Rightarrow x = C_1 e^{\left(-n + \sqrt{n^2 - k^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-n - \sqrt{n^2 - k^2}\right)t}; \quad (1.262)$

якщо  $n = k \Rightarrow x = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}. \quad (1.263)$

Оскільки вираз  $e^{-nt}$  є експоненціальною функцією, яка монотонно зменшується до нуля, то матеріальна точка під час коливань поступово наблизатиметься до стану рівноваги, де  $x = 0$ .

Наближений графік аперіодичного руху наведений на рис. 1.105.

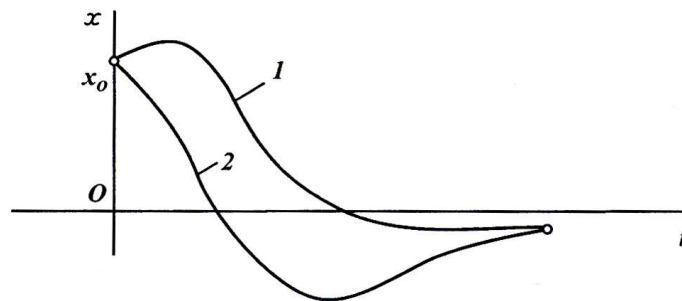


Рис 1.105

Крива 1 відповідає початковій швидкості  $v_{x0} > 0$ , крива 2 —  $v_{x0} < 0$ .

Якщо опір малий порівняно з поновлювальною силою  $k > n$ , то корені характеристичного рівняння (1.260) комплексні

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (1.264)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1.259) має вигляд

$$x = e^{-nt} \left( C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (1.265)$$

Довільні сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначимо із початкових умов.

Оскільки сталі інтегрування дві, то потрібне друге рівняння, яке знайдемо як похідну за часом від виразу (1.265)

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -ne^{-nt} \left( C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \\ & + e^{-nt} \left( -C_1 \sqrt{k^2 - n^2} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right) \end{aligned} \quad (1.266)$$

Підставимо початкові умови:  $x(t_0) = x_0$  і  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0$ , якщо  $t_0 = 0$ , в рівняння (1.265) і (1.266) і визначимо сталі інтегрування

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_0 + nC_1}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (1.267)$$

Підставивши значення  $C_1$  і  $C_2$  у рівняння (1.265), остаточно отримаємо **закон згасаючих коливань**

$$x = e^{-nt} \left( x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (1.268)$$

Переміщенню  $x$  у виразі (1.268) можна надати іншого вигляду, якщо ввести підстановки і зробити перетворення

$$x_0 = B \sin \beta; \quad \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = B \cos \beta. \quad (1.269)$$

Тоді  $x = e^{-nt} \left( B \sin \beta \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + B \cos \beta \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right)$ ;

або  $x = B e^{-nt} \sin \left( \sqrt{k^2 - n^2} t + \beta \right).$  (1.270)

Величини  $B$  і  $\beta$  визначаються з рівнянь (1.269). Обидва рівняння треба піднести до квадрату і додати

$$x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2} = B^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta); \Rightarrow B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}. \quad (1.271)$$

Якщо поділити перше рівняння на друге в системі (1.269), то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}. \quad (1.272)$$

Рух точки, що відповідає рівнянню (1.270), має коливальний характер, тому що координата  $x$  періодично змінює свій знак завдяки синусу. Коливання, що відбуваються за цим законом, називаються **згасаючими коливаннями**. Амплітуда  $B e^{-nt}$  завдяки множнику  $e^{-nt}$  з плином часу зменшується, наближаючись до нуля.

Оскільки  $-1 \leq \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta) \leq 1$ , то координати  $x$  згасаючих коливань розміщуються між двома симетричними відносно осі абсцис кривими, що відповідають рівнянню  $x = \pm B e^{-nt}$ , і називаються **амплітудними кривими**. Між ними розміщується графік згасаючих коливань, показаний на рис. 1.106.

Проміжок часу  $T$ , який дорівнює періоду функції  $\sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta)$ , називають **періодом згасаючих коливань**

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad (1.273)$$

де  $\sqrt{k^2 - n^2}$  – **колова частота** згасаючих коливань;  
 $\beta$  – **початкова фаза** коливань.

Для характеристики процесу згасання вводять поняття **декременту згасаючих коливань** як відношення однієї з амплітуд до попередньої. Декремент коливань є знаменником геометричної прогресії, константою коливального процесу.

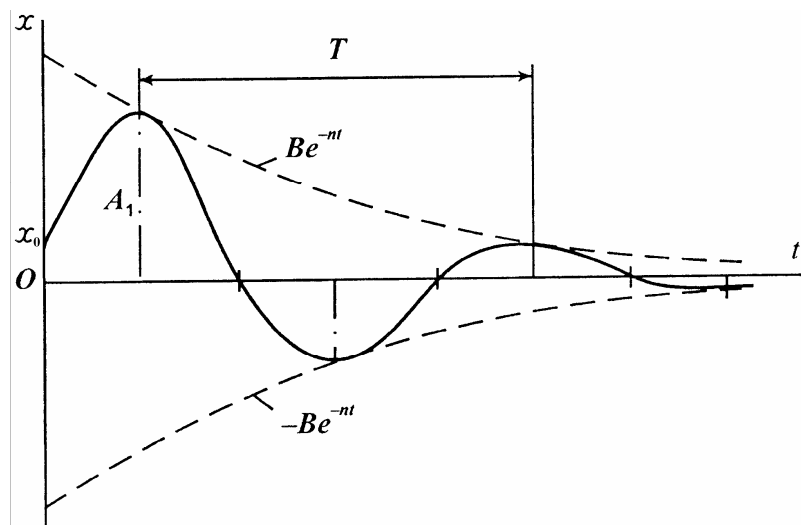


Рис. 1.106

$$q = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{Be^{-n\left(\tau + \frac{T}{2}\right)}}{Be^{-n\tau}} = e^{-\frac{nT}{2}}; \Rightarrow q^{-1} = e^{\frac{nT}{2}}. \quad (1.274)$$

Логарифмічний декремент згасаючих коливань є модулем натурального логарифма

$$\ln|q^{-1}| = \frac{nT}{2}. \quad (1.275)$$

#### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке фаза коливань, колова частота, період коливань?
2. Як визначається колова частота вільних коливань, від яких параметрів вона залежить?
3. Напишіть закон вільних коливань.
4. Що таке аперіодичні коливання?
5. Чому дорівнює частота згасаючих коливань?
6. За якою функцією зменшуються амплітуди згасаючих коливань?
7. Що таке декремент згасаючих коливань, логарифмічний декремент?
8. Який вигляд мають диференціальні рівняння вільних і згасаючих коливань?
9. Від яких факторів залежить циклічна частота і період вільних коливань?
10. Від яких факторів залежить амплітуда і початкова фаза вільних коливань?



**1.15.13. Змушені коливання матеріальної точки без урахування опору**

На матеріальну точку (рис. 1.107) крім поновлювальної сили  $F = -cx$  (рівнодійна сили ваги і статичної складової сили пружності), може діяти сила, яка періодично змінюється і називається **збурювальною силою**.

Проекція сили співпадає з напрямком руху і змушує матеріальну точку до коливань

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta),$$

де  $Q_0$  – амплітудне значення збурювальної сили, Н;

$p$  – колова частота збурювальної сили, рад/с;

$pt + \delta$  – фаза збурювальної сили, рад;  $\delta$  – початкова фаза.

Сила  $Q$  є збурювальною гармонічною силою. **Коливання, які виникають під дією збурювальної сили, називаються змушеними.**

Запишемо диференціальне рівняння зазначеного руху точки згідно розрахункової схеми (рис. 1.107)

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt + \delta), \tag{1.276}$$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x + \frac{Q_0}{m} \sin(pt + \delta).$$

Позначимо:  $\left. \begin{aligned} \frac{c}{m} = k^2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \frac{Q_0}{m} = h_0. \end{aligned} \right\} \tag{1.277}$

Тоді **диференціальне рівняння змушених коливань точки без опору** набуває вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 \sin(pt + \delta). \tag{1.278}$$

Вираз (1.278) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв’язок складається з двох частин:

$$x = x_1 + x_2, \tag{1.279}$$

де  $x_1$  – загальний розв’язок однорідного рівняння.

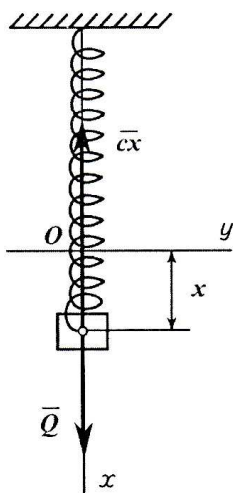


Рис. 1.107

$$\ddot{x} + k^2 x = 0;$$

$x_2$  – частинний розв’язок неоднорідного рівняння (1.278).

Загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд (3.30):

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha),$$

де  $A$  – амплітуда вільних коливань,  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$  (1.253), яка

залежить від початкових умов;

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0} - \text{початкова фаза (1.254).}$$

Частинний розв'язок рівняння (1.278) шукаємо у вигляді

$$x_2 = C \sin(pt + \delta). \quad (1.280)$$

Для підстановки розв'язку в рівняння (1.278) визначимо похідні від виразу (1.280) за часом

$$\dot{x}_2 = Cp \cos(pt + \delta),$$

$$\ddot{x}_2 = -Cp^2 \sin(pt + \delta). \quad (1.281)$$

Підставимо значення виразів (1.280), (1.281) в рівняння (1.278)

$$-Cp^2 \sin(pt + \delta) + k^2 C \sin(pt + \delta) = h_0 \sin(pt + \delta),$$

$$C(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) = h_0 \sin(pt + \delta). \quad (1.282)$$

Порівнюємо коефіцієнти при синусах зліва і справа у виразі (3.61), (вони повинні бути однакові) і визначимо динамічну амплітуду  $C$

$$C(k^2 - p^2) = h_0 \Rightarrow C = \frac{h_0}{k^2 - p^2}. \quad (1.283)$$

Частинний розв'язок отримаємо, підставивши визначену амплітуду  $C$  у рівняння (1.280):

$$x_2 = \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (1.284)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.278) має вигляд

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (1.285)$$

Другий доданок розв'язку або друга гармоніка в рівнянні (1.285) характеризує змушені коливання, колова частота яких дорівнює коловій частоті збурювальної сили.

Амплітуда змушених коливань може бути представлена

$$C = \frac{h_0}{k^2 - p^2} = \frac{\frac{h_0}{k^2}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0 m}{mc}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0}{c}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm}}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \quad (1.286)$$

де  $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$  – деформація пружного елемента під дією амплітудного значення сили  $Q_0$ , яка прикладається статично.

Визначимо відношення динамічної амплітуди до статичної.

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \text{ якщо } p < k \text{ (низькочастотні коливання)}, \quad (1.287)$$

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{\frac{p^2}{k^2} - 1}, \text{ якщо } p > k \text{ (високочастотні коливання)}, \quad (1.288)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт динамічності.

Коефіцієнт динамічності  $\eta$  констатує, у скільки разів амплітуда змушених коливань  $C$  більша, ніж статична деформація пружного елемента  $\lambda_{cm}$  під дією амплітудного значення  $Q_0$  збурювальної сили.

Графік залежності коефіцієнта динамічності від співвідношення частот збурювальної сили і вільних коливань показаний на рис. 1.108.

Якщо  $p = k \Rightarrow \frac{p}{k} = 1$ , як можна побачити з рис. 1.108, коефіцієнт динамічності необмежено зростає (крива 1), що видно і із виразу (1.287). Тут має місце, так званий, механічний резонанс, при якому амплітуди змушених коливань теоретично необмежено зростають.

У зарезонансному режимі, коли  $p > k$  згідно виразу (1.288), крива 2 коефіцієнта динамічності знижується асимптотично із нескінченності до координатної осі  $\frac{p}{k}$ .

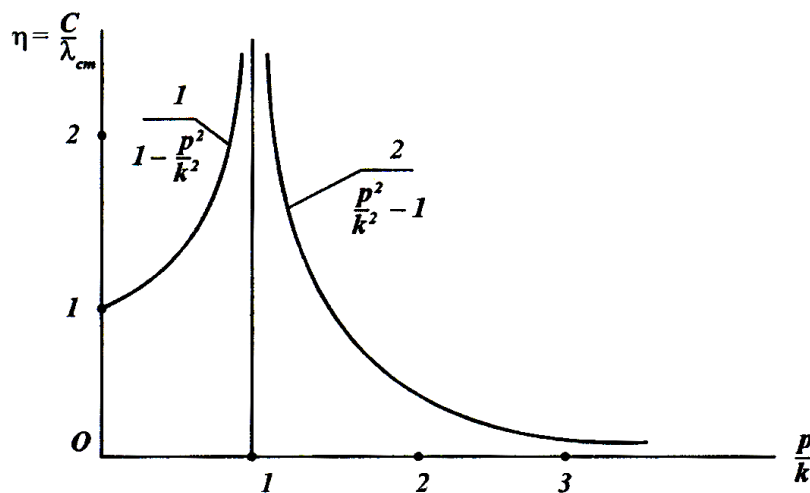


Рис. 1.108

#### 1.15.14. Явище механічного резонансу

Характер коливань різко змінюється, якщо колова частота збурювальної сили збігається з коловою частотою вільних коливань.

## Частина перша

У механіці це явище називають механічним резонансом. Амплітуди змушених коливань з плином часу необмежено зростають і можуть досягати недопустимо великих, небезпечних для механічної системи значень.

Запишемо диференціальне рівняння резонансних коливань, замінюючи в правій частині виразу (1.278)  $p$  на  $k$ , оскільки вони збігаються у цих обставинах

$$m\ddot{x} + k^2 x = h_0 \sin(kt + \delta). \quad (1.289)$$

Розв'язок однорідного рівняння (без правої частини) не відрізняється від розв'язку для вільних коливань (1.251):

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha).$$

Частинний розв'язок рівняння (1.289)  $x_2$  шукаємо у формі, яка є лінійно незалежною від  $x_1$ :

$$x_2 = Ct \cos(kt + \delta). \quad (1.290)$$

Для підстановки частинного розв'язку в диференціальне рівняння резонансних коливань знайдемо другу похідну за часом

$$\ddot{x}_2 = -Ck \sin(kt + \delta) - Ck \sin(kt + \delta) + Ck^2 t \cos(kt + \delta).$$

Підставимо  $\ddot{x}_2$  і  $x_2$  у диференціальне рівняння і після скорочень маємо:

$$-2Ck \sin(kt + \delta) = h_0 \sin(kt + \delta) \Rightarrow C = -\frac{h_0}{2k}.$$

Загальний розв'язок, що характеризує закон руху точки під час резонансу:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(kt + \alpha) - \frac{h_0}{2k} t \cos(kt + \delta). \quad (1.291)$$

Перетворимо вираз загального розв'язку, переходячи у другому доданку до синуса з відповідним зсувом фази

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h_0}{2k} t \sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}). \quad (1.292)$$

Аналіз закону свідчить, що рух точки за виразом (1.292) – це накладання вільних і змушених коливань. Перша гармоніка у формулі резонансних коливань характеризує вільні коливання, друга – змушені коливання, амплітуда яких дорівнює  $\frac{h_0}{2k} t$ . Остання зростає пропорційно часу і при  $t \rightarrow \infty$  необмежено збільшується. Графік змінення *амплітуди змушених коливань* показано на рис. 1.109, де амплітудні прями

(пунктирні лінії із початку координат) відповідають рівнянням  $x = \pm \frac{h_0}{2k} t$ .

Крім того, із загального розв'язку можна побачити, що під час резонансу фаза коливань синуса відстає на величину кута  $\frac{\pi}{2}$  порівняно з фазою коливань збудовувальної сили  $Q$ .

У реальних конструкціях через різного роду тертя і нелінійні фактори амплітуда змушених коливань зростає повільніше, ніж за теоретичною моделлю, але, незаперечно, вона може досягати небезпечних величин.

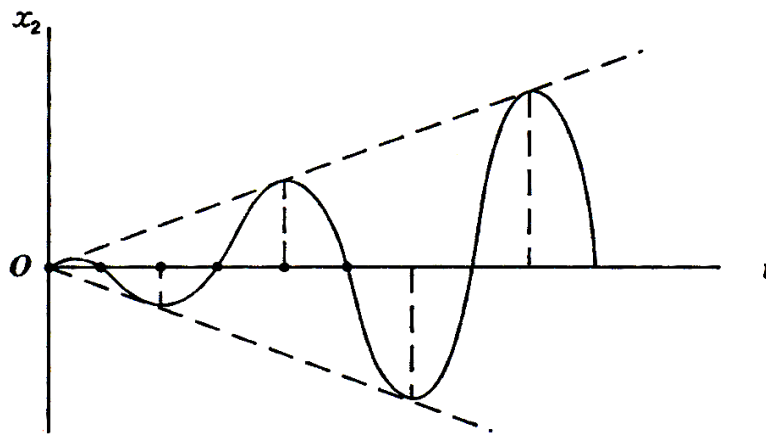


Рис. 1.109

### 1.15.15. Змушені коливання точки з урахуванням в'язкого тертя

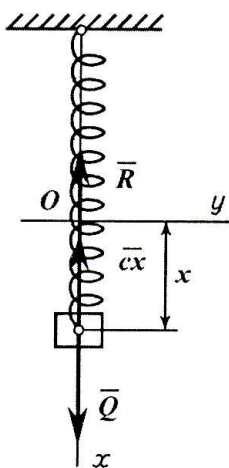


Рис. 1.110

Розглянемо коливання точки (рис. 1.110), на яку діють такі задані сили:

$$F = -cx \text{ — поновлювальна сила,}$$

$$\bar{R} = -\mu \dot{x} \text{ — сила опору, пропорційна швидкості,}$$

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta) \text{ — збудовувальна гармонічна сила.}$$

Проекція сили опору на координатну вісь  $R_x = -\mu \dot{x}$ .

За таких умов диференціальне рівняння коливального руху точки

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin(pt + \delta). \quad (1.293)$$

Поділимо рівняння (1.293) на масу точки і введемо позначення

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m} x - \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{Q_0}{m} \sin(pt + \delta); \quad (1.294)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{m} = k^2; \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}; \\ \frac{\mu}{m} = 2n; \quad n = \frac{\mu}{2m}; \quad \frac{Q_0}{m} = h_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.295)$$

З урахуванням виразу (1.295) вихідне диференціальне рівняння точки набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h_0 \sin(pt + \delta). \quad (1.296)$$

**Вираз (1.296) є диференціальним рівнянням змушених коливань точки при наявності сил опору.** Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок складається із двох доданків

$$x = x_1 + x_2, \quad (1.297)$$

де  $x_1$  – загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0.$$

Якщо  $k > n$ , розв'язок  $x_1$  набуває вигляду:

$$x_1 = Be^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta); \quad (1.298)$$

де 
$$B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}.$$

Але гармоніка  $x_1$  досить швидко згасає, нею, як правило, нехтують. Доданок  $x_2$  – це частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1.296).

Розв'язок  $x_2$  шукаємо у вигляді

$$x_2 = D \sin(pt + \delta - \gamma). \quad (1.299)$$

Для підстановки  $x_2$  у рівняння (1.296) знайдемо похідні за часом

$$\dot{x}_2 = Dp \cos(pt + \delta - \gamma), \quad (1.300)$$

$$\ddot{x}_2 = -Dp^2 \sin(pt + \delta - \gamma). \quad (1.301)$$

Значення виразів (1.299), (1.300) і (1.301) підставимо в рівняння (1.296)

$$\begin{aligned} -Dp^2 \sin(pt + \delta - \gamma) + 2nDp \cos(pt + \delta - \gamma) + \\ + k^2D \sin(pt + \delta - \gamma) = h_0 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (1.302)$$

$$\begin{aligned} h_0 \sin(pt + \delta) = h_0 \sin((pt + \delta - \gamma) + \gamma) = h_0 \sin(pt + \delta - \gamma) \cos \gamma + \\ + h_0 \cos(pt + \delta - \gamma) \sin \gamma. \end{aligned}$$

Підставимо цей вираз, тоді рівняння (1.302) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &(D(k^2 - p^2) - h_0 \cos \gamma) \sin(pt + \delta - \gamma) + \\ &+ (2nDp - h_0 \sin \gamma) \cos(pt + \delta - \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (1.303)$$

Для того, щоб вираз (1.303) був тотожністю, необхідно, щоб коефіцієнти при синусі і косинусі були однакові. Звідки

$$\left. \begin{aligned} D(k^2 - p^2) &= h_0 \cos \gamma, \\ 2Dnp &= h_0 \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1.304)$$

Якщо друге рівняння системи (1.304) поділити почленно на перше, то отримаємо величину кута  $\gamma$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (1.305)$$

Якщо обидва рівняння (1.304) піднести до квадрату і потім почленно додати, то отримаємо вираз для визначення амплітуди  $D$ :

$$D^2 \left[ (k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 \right] = h_0^2, \quad (1.306)$$

звідки

$$D = \frac{h_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{\frac{h_0}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}. \quad (1.307)$$

Якщо зробити перетворення, підставивши значення величин  $\frac{h_0}{k^2} = \frac{Q_0 \cdot m}{m \cdot c} = \frac{Q_0}{c} = \lambda_{cm}$ , остання величина є деформацією пружного елемента під дією амплітудного значення сили  $H$ , то отримаємо **амплітуду змушених коливань точки з опором:**

$$D = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{k^4}}}, \quad (1.308)$$

і тоді змушені коливання будуть відбуватися за законом:

$$x = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{k^4}}} \sin(pt + \delta - \gamma), \quad (1.309)$$

де  $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$ ;  $c$  – коефіцієнт жорсткості пружного елемента,

$p$  – колова частота збурювальної сили,  $k^2 = \frac{c}{m}$ ;  $m$  – маса вантажу,  $k$

– колова частота вільних коливань,  $n = \frac{\mu}{2m}$ ,  $\mu$  – коефіцієнт пропорційності

у виразі сили опору,  $n$  – коефіцієнт згасання,  $\frac{n}{k} = h$  – коефіцієнт демпфірування,  $\gamma = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}$  – кут зсуву за фазою.

**Проведемо аналіз** амплітуди змущених коливань (1.307).

1. Якщо частота збурювальної сили значно менша, ніж частота вільних коливань  $p \ll k$ , то амплітуда змущених коливань наближатиметься до статичного значення  $D \rightarrow \lambda_{cm}$ , тобто, коливання відбуваються з амплітудою, яка дорівнює статичній деформації пружного елемента.

2. Якщо частота збурювальної сили значно більша, ніж частота вільних коливань  $p \gg k$ , то амплітуда дорівнюватиме:

$$D \rightarrow \frac{\lambda_{cm}}{\frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm} \cdot k^2}{p^2} = \frac{Q_0 \cdot c}{p^2} \cdot \frac{c}{m} = \frac{Q_0}{p^2} = \frac{h_0}{p^2}.$$

З останнього виразу випливає, що величину амплітуди  $D$  можна отримати будь-якою малою. Це важливий випадок для практики.

3. Якщо частота збурювальної сили дорівнює частоті вільних коливань  $p = k$ , то амплітуда  $D$  може досягати максимальних значень.

Настає явище механічного резонансу. Максимум амплітуди залежить від коефіцієнта демпфірування  $h = \frac{n}{k}$ . Незначне збільшення коефіцієнта демпфірування різко змінює характер коливального процесу.

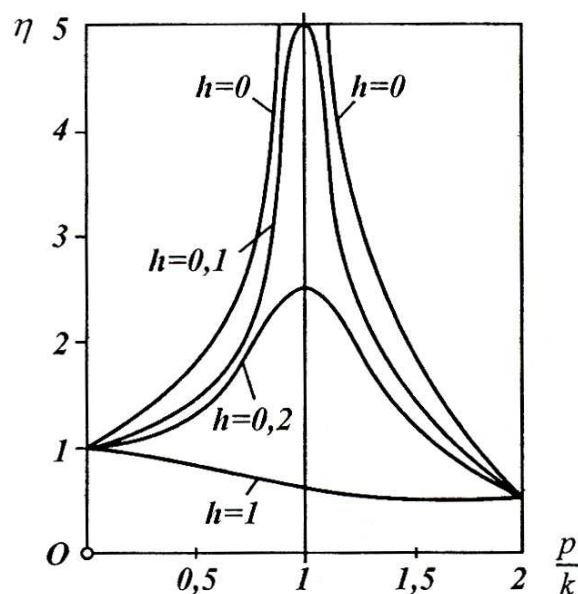


Рис. 1.111



### **1.15.16 Загальні властивості змушених коливань**

1. Амплітуда змушених коливань не залежить від початкових умов.
2. Змушені коливання і при наявності сил опору не згасають.
3. Частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили і від характеристик системи не залежить.
4. Навіть за великих значень збурювальної сили технічними засобами можна досягти такої оптимальної конструкції, що змушені коливання будуть досить малими, якщо частота збурювальної сили значно відрізнятиметься від частоти вільних (власних) коливань.
5. Навіть за малих значень збурювальної сили можна отримати інтенсивні змушені коливання, якщо опір малий, а частота збурювальної сили наближатиметься до частоти вільних коливань (механічний резонанс).

#### **ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Чим відрізняються диференціальні рівняння вільних коливань і змушених коливань без опору?
2. Скільки доданків має закон змушених коливань? Проаналізуйте їх.
3. Що таке коефіцієнт динамічності і як він визначається?
4. Які умови виникнення механічного резонансу і як змінюється амплітуда коливань під час резонансу?
5. Які доданки входять до диференціального рівняння змушених коливань з опором? Зробіть аналіз цих доданків.
6. Під дією яких сил матеріальна точка може здійснювати коливання?
7. Які тіла можуть бути джерелами поновлюючої сили?
8. Які характеристики коливань матеріальної точки не залежать від початкових умов, а які залежать?
9. Як називається точка, що визначається статичною рівновагою?
10. В якому вигляді шукають частинний розв'язок змушених коливань у випадку резонансу?
11. Із яких трьох видів коливань складається закон змушених коливань з опором?
12. Як впливає лінійний опір на амплітуду, фазу, частоту і період змушених коливань?
13. З'ясуйте явище резонансу і відповідний закон руху у цьому випадку?
14. Для дослідження яких коливань слугує коефіцієнт динамічності? Що він встановлює?
15. Перелічити загальні властивості змушених коливань матеріальної точки, які відрізняють їх від вільних коливань?

### **1.16. Матеріальна система. Геометрія мас**

Механічна *система матеріальних точок* (далі матеріальна система) – це така *сукупність* взаємодіючих матеріальних *точок, положення і рух яких взаємопов'язано* і взаємозумовлено. Класичним прикладом матеріальної системи є сонячна система. Сюди ж можна віднести будь-який механізм, машину, споруду тощо.

Визначимо таку динамічну характеристику матеріальної системи як маса і розглянемо питання про розподіл маси матеріальної системи або твердого тіла як окремого випадку системи, тобто, геометрію мас.

### **1.16.1. Маса і центр мас матеріальної системи**

Припустимо, що матеріальна система складається із  $n$  матеріальних точок, маси яких  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ . Положення кожної точки системи відносно фіксованої у просторі точки  $O$  визначається її радіусом-вектором  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$ .

*Маса матеріальної системи дорівнює арифметичній сумі мас окремих точок, які входять до складу системи.*

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (1.310)$$

Центр мас матеріальної системи визначається відповідно до положення центра ваги тіла.

*Центр мас системи (центр інерції) є геометричною точкою, радіус-вектор якої обчислюється за виразом*

$$\bar{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k, \quad (1.311)$$

де  $\bar{r}_k$  – радіус-вектор  $k$ -ї точки системи.

Якщо з центром мас пов'язати прямокутну систему декартових координат  $x, y, z$ , то, проєктуючи вираз (3.90) на осі цієї координатної системи, дістанемо координати центра мас матеріальної системи

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k; \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k y_k; \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (1.312)$$

де  $x_k, y_k, z_k; m_k$  – координати і маси точок матеріальної системи.

В однорідному гравітаційному полі Землі центр мас матеріальної системи збігається з центром ваги, але між ними є глибокі фізичні відмінності. Поняття центра мас більш широке. Воно дає змогу у ряді випадків звести задачу про рух матеріальної системи до задачі про рух однієї точки – центра мас. Крім того, положення центра мас залежать тільки від розподілу маси і не залежать від вибору системи координат і закону її руху.

Урахування деяких особливостей розподілу мас системи полегшує визначення положення центра мас. Наприклад, якщо матеріальна система має площину симетрії, то центр мас розміщений в цій площині. Якщо система має дві площини симетрії, то центр мас розміщений на лінії перетину цих площин. Якщо система має три площини симетрії, то центр мас перебуває в точці перетину цих площин.

### **1.16.2. Моменти інерції матеріальної системи (тіла)**

Положення центра мас системи або тіла недостатньо повно характеризує розподіл мас по об'єму. Наприклад, якщо маси точок системи змістити на однакову відстань від центра мас, то положення центра мас не

зміниться, але на обертальний рух тіла відносно центра мас це суттєво вплине. Тому в механіці введена ще одна характеристика розподілу мас – момент інерції. Поняття моменту інерції належить до найважливіших понять механіки. **Моментом інерції матеріальної точки** відносно осі  $z$  називається добуток маси точки на квадрат її відстані  $r_z$  до осі

$$I_z = mr_z^2.$$

**Моментом інерції системи матеріальних точок відносно осі називають суму добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней до цієї осі.**

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_{kz}^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.313)$$

Момент інерції тіла відносно осі – це фізична величина, що характеризує міру інертності тіла при обертальному русі навколо цієї осі. У разі обертання тіла навколо нерухомої точки момент інерції визначається відносно миттєвої осі, яка проходить через цю нерухому точку. Одиницею моменту інерції в Міжнародній системі  $SI$  є  $[кг \cdot м^2]$ .

Для твердого тіла момент інерції визначається інтегралом, поширеним на всю масу

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (1.314)$$

Розрізняють моменти інерції **осьові або аксіальні, полярні, відцентрові**. Покажемо, як визначити осьові і полярний моменти інерції суми точкових мас тіла відносно осей координат і початку координат (рис. 1.112).

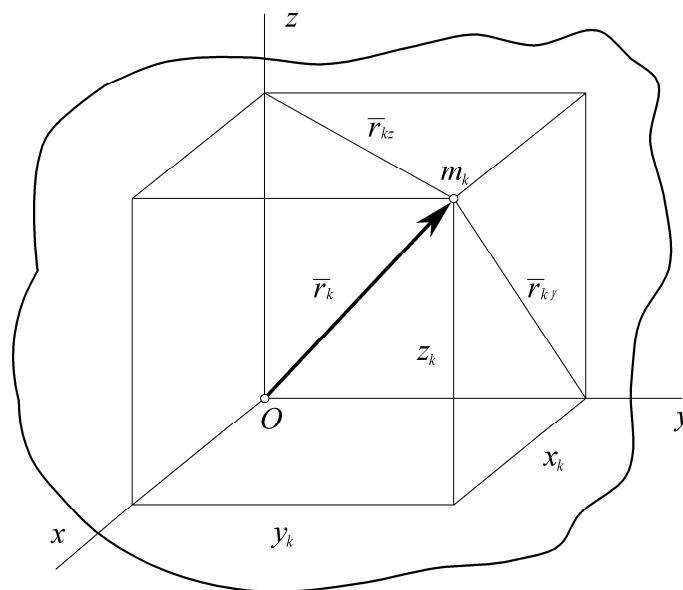


Рис. 1.112

Якщо відомі координати окремих точок тіла, то осьові моменти інерції тіла можна обчислювати за формулами:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_k r_{kz}^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2), \\ I_y &= \sum m_k r_{ky}^2 = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \\ I_x &= \sum m_k r_{kx}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2). \end{aligned} \quad (1.315)$$

де  $r_k$  – радіус-вектор  $k$ -ї точки (рис 3.18), який визначається

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2.$$

Додамо три осьові моменти інерції

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2\sum m_k r_k^2 = 2I_0.$$

Отже, сума осьових моментів інерції дорівнює подвоєному полярному моменту інерції  $I_0$ , який визначається, як сума добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней до полюса  $O$ .

$$I_0 = \sum m_k r_k^2, \quad (1.316)$$

Осьові і полярні моменти інерції тіл і систем є додатними величинами.

### **1.16.3. Радіус інерції тіла**

Для обчислення моментів інерції користуються у ряді випадків поняттям радіуса інерції.

*Радіусом інерції називають таку відстань від осі, на якій треба розмістити масу тіла, щоб добуток квадрату цієї відстані на масу визначав осьовий момент інерції тіла.*

$$I_z = m \cdot \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \quad (1.317)$$

де  $m$  – маса тіла.

Геометрично радіус інерції тіла відносно певної осі можна інтерпретувати як радіус умовного нескінченно тонкого колового циліндра з рівномірно розподіленою масою по бічній поверхні, момент інерції якого дорівнює моменту інерції тіла відносно цієї осі.

### **1.16.4. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей**

Припустимо, що відомо положення центра мас тіла  $C$ , з яким пов'язана центральна прямокутна система декартових координат  $Sx_0y_0z_0$  (рис. 1.113).

Визначимо, чому дорівнює момент інерції тіла  $I_z$  відносно осі  $z$ , яка паралельна заданій центральній осі  $z_c$  і розміщена на відстані  $a$  від неї.

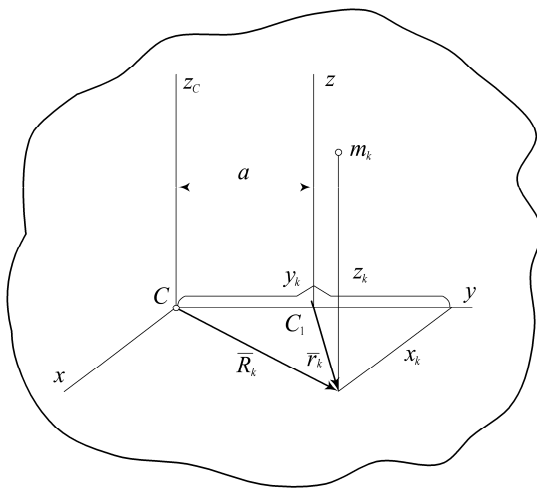


Рис. 1.113

Відстані точки до вертикальних паралельних осей  $z_c$  і  $z$  дорівнюють відповідно  $R_k$  і  $r_k$ .

Визначимо шуканий момент інерції тіла відносно паралельної осі  $z$  як суму добутків мас на квадрати їх відстаней до цієї осі

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum m_k [(y_k - a)^2 + x_k^2] = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2) + a^2 \sum m_k - 2a \sum m_k y_k.$$

Проаналізуємо доданки цієї формули.

$$\sum m_k (y_k^2 + x_k^2) = \sum m_k R_k^2 = I_{z_c} \text{ – момент інерції тіла відносно осі } z_c.$$

$$\sum m_k = m \text{ – маса тіла,}$$

$\sum m_k y_k = m \cdot y_c = 0$ , оскільки координата центра мас відносно центральної осі дорівнює нулю  $y_c = 0$ . Звідки остаточно

$$I_z = I_{z_c} + m \cdot a^2. \quad (1.318)$$

Із аналізу виразу (1.318) видно, що центральна вісь  $z_c$  є віссю найменшого моменту інерції серед усіх паралельних осей.

### 1.16.5. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми

1. Однорідний тонкий стрижень масою  $m$  обертається навколо осі  $z$ , яка проходить через кінець стрижня (рис. 1.114).

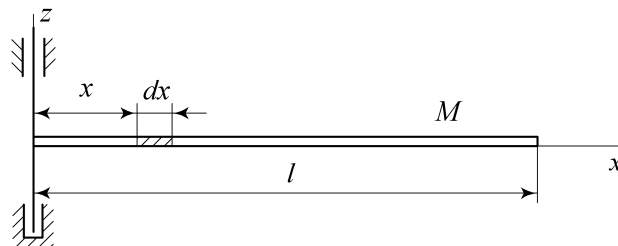


Рис. 1.114

## Частина перша

Визначимо момент інерції стрижня як суцільного тіла

$$I_z = \int dm \cdot r^2, \quad r = x;$$

$dm = \mu \cdot dx$  – елементарна маса тонкого стрижня (лінії),

де  $\mu = \frac{m}{l}$  – маса одиниці довжини стрижня. Тоді осьовий момент інерції стрижня

$$I_z = \int_0^l dm \cdot x^2 = \int_0^l \mu dx \cdot x^2 = \mu \int_0^l x^2 dx = \frac{\mu x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{m \cdot l^3}{l \cdot 3} = \frac{m \cdot l^2}{3} \quad (1.319)$$

2. Однорідне тонке кільце радіуса  $R$  або тонка циліндрична труба, маховик. Вісь  $z$  перпендикулярна площині кільця.

Усі точки кільця розміщені на однаковій відстані  $R$  від осі  $z$ , тому момент інерції кільця дорівнює  $I_z = mR^2$ .

Для двох інших взаємно-перпендикулярних осей  $x$  і  $y$  момент інерції вдвічі менше.

Кругла однорідна пластина або однорідний циліндр радіуса  $R$  (рис. 1.115).

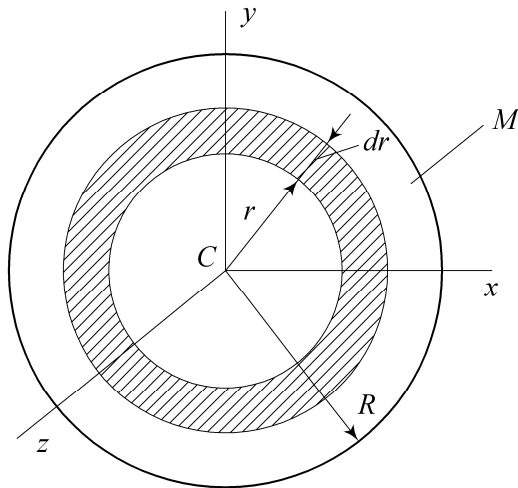


Рис. 1.115

Визначимо одиничну масу площі круга  $\mu = \frac{m}{\pi R^2}$ , тоді

елементарна маса пластини  $dm = \mu \cdot ds = \mu \cdot 2\pi r \cdot dr$ .

Визначимо момент інерції тіла відносно осі  $z$ :

$$I_z = \int_0^R dm \cdot r^2 = \int_0^R \mu \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = 2\pi\mu \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu \pi R^4}{2} = \frac{m \pi R^4}{2\pi R^2} = \frac{mR^2}{2};$$

$$I_z = \frac{1}{2} mR^2; \quad (1.320)$$

для двох інших осей:  $I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2$ .

3. Прямий коловий однорідний конус масою  $m$  і радіусом основи  $R$

$$I_z = 0.3mR^2,$$

де  $z$  – вісь, яка проходить крізь вершину і центр кола основи.

4. Однорідна куля радіуса  $R$ .  $I_z = I_x = I_y = 0.4mR^2$ .

### 1.16.6. Відцентрові моменти інерції

Осьові моменти інерції не повністю характеризують розподіл маси по об'єму тіла або системи. Для характеристики асиметричного розподілу мас в механіці введені, так звані, відцентрові моменти інерції

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad I_{xz} = \sum m_k y_k z_k; \quad I_{yz} = \sum m_k x_k z_k. \quad (1.321)$$

Для суцільного тіла знак суми замінюється інтегралом

$$I_{xy} = \int_{(m)} dm \cdot x \cdot y.$$

**Відцентровий момент інерції** дорівнює сумі добутків мас точок на їхні відстані до двох координатних осей.

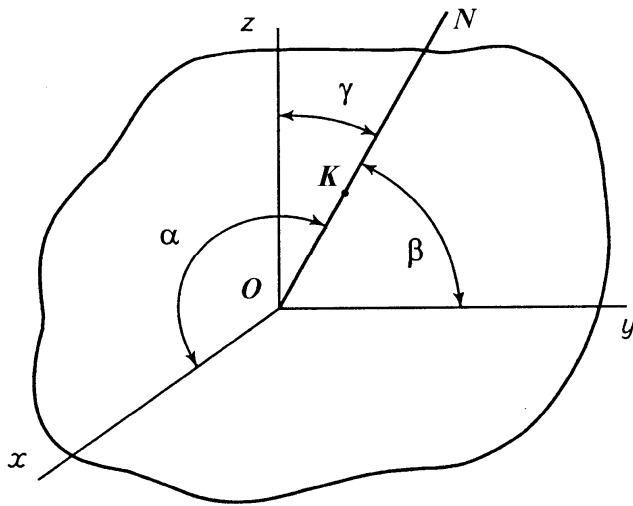
Величини відцентрових моментів інерції залежать від напрямку

координатних осей і вибору початку координат. Тому, говорячи про відцентровий момент у даній точці, розуміють, що початок координат збігається з цією точкою.

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від'ємний знак.

**1.16.7. Момент інерції тіла відносно довільної осі, що перетинає задану точку**

Знайдемо залежність між моментами інерції матеріальної системи (тіла) відносно довільної осі, що перетинає дану точку, і моментами інерції відносно координатних осей. Припустимо, що напрямок довільної осі  $N$  заданий кутами  $\alpha, \beta, \gamma$  з відповідними осями координат  $x, y, z$  (рис. 1.116).



Відомі також осеві і відцентрові моменти інерції тіла  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ .

Тоді залежність між моментом інерції тіла (матеріальної системи) відносно довільної осі  $ON$ , що проходить через початок координат, і моментами інерції відносно координатних осей  $Ox, Oy, Oz$  має такий вигляд [1]:

Рис. 1.116

$$I_N = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma. \tag{1.322}$$

Візьмемо на осі  $ON$  точку  $K$ , таку, що  $OK = d = \frac{1}{\sqrt{I_N}}$ . Помножимо

обидві частини виразу (1.322) на  $d^2$  і, взявши до уваги, що координати  $x, y, z$  точки  $K$  задовольняють рівностям

$$x = d \cos \alpha; \quad y = d \cos \beta; \quad z = d \cos \gamma;$$

дістанемо рівняння поверхні другого порядку

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{xz} xz = 1, \tag{1.323}$$

на якій рухається точка  $K$ , кінець відрізка  $OK$ , навколо нерухомого центра  $O$  початку координат, окреслюючи згадану поверхню, якщо змінюється напрям осі  $ON$ . Указана множина точок (3.103) є поверхнею еліпсоїда,

### **Частина перша**

який називається **еліпсоїдом інерції**. Осі симетрії еліпсоїда називаються **головними осями інерції** для тієї точки тіла, в якій побудовано еліпсоїд.

Якщо взяти іншу точку тіла, то напрями головних осей змінюються. А якщо осі координат збігаються з осями симетрії еліпсоїда, то рівняння поверхні (1.322) набуває канонічної форми

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

тобто, **відцентрові моменти інерції тіла відносно головних осей інерції дорівнюють нулю**.

Як наслідок, за відомому еліпсоїду інерції можна визначити момент інерції відносно будь-якої осі, що проходить крізь точку  $O$ . А якщо відомі головні осі інерції, то спрощуються рівняння руху твердого тіла, як це видно на прикладі спрощення формули (1.322) для моменту інерції відносно осі

$$I_N = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.$$

Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то вісь, перпендикулярна до цієї площини, є головною віссю інерції для точки перетину її з площиною. Якщо однорідне тіло має вісь симетрії  $Oz$ , то в тілі завжди знайдуться точки з симетричними координатами за один і другий бік від осі

$$\begin{cases} x_k; & y_k; & z_k; \\ -x_k; & -y_k; & z_k. \end{cases}$$

Асиметрія відносно осі  $Oz$  в цих обставинах відсутня і відцентрові моменти інерції тіла, що характеризують асиметрію, дорівнюють нулю

$$\begin{cases} \sum m_k x_k z_k = 0 \\ \sum m_k y_k z_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{xz} = 0 \\ I_{yz} = 0. \end{cases}$$

Вісь  $Oz$ , для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, називається **головною віссю інерції** тіла.

Таким чином, якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то вона є головною віссю інерції. Якщо всі три відцентрові моменти інерції тіла дорівнюють нулю, то кожна з координатних осей є головною віссю інерції цього тіла для точки  $O$  початку координат.

**Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції називаються головними моментами інерції.**

Через довільну точку будь-якого однорідного тіла завжди можна провести хоча б одну систему трьох взаємно-перпендикулярних осей, які будуть осями симетрії і для яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тоді кожна з цих осей буде головною віссю інерції тіла.

Довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла, називається **центральною віссю**.



Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є **головною центральною віссю інерції**.

*Момент інерції тіла відносно головної центральної осі інерції називається головним центральним моментом інерції.*

**ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Які моменти інерції тіла вам відомі?
2. В яких одиницях вимірюється момент інерції тіла і що він характеризує?
3. Що таке радіус інерції тіла?
4. Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера для паралельних осей.
5. Як обчислити моменти інерції стрижня, суцільного і порожнистого циліндра, кулі, конуса?
6. Що таке відцентрові моменти інерції тіла і як вони характеризують розподіл маси тіла?
7. Як визначити момент інерції тіла відносно довільної осі?
8. Які осі в тілі є головними центральними осями інерції?
9. Що таке еліпсоїд інерції і яка його формула?
10. Чи змінюється положення головних осей інерції тіла за переходу від однієї точки тіла до іншої?

## 1.17. Рух центра мас матеріальної системи

### 1.17.1. Класифікація сил і їхні властивості

Сили, що прикладені до точок матеріальної системи, виконують дві суттєво різні функції, а тому поділяються на дві категорії: а) *сили внутрішні* і *зовнішні*; б) *сили активні* і *сили реакцій в'язей*.

**Внутрішні сили** – це сили взаємодії між точками самої матеріальної системи. Внутрішні сили позначаються  $\bar{F}_k^{in}$ . Вони мають такі властивості:

– внутрішні сили діють на матеріальну систему попарно як дія і протидія ( $\bar{F}_1^{in} = -\bar{F}_2^{in}$ );

– векторна сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} = 0; \tag{1.324}$$

– векторна сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума моментів сил відносно довільної осі дорівнюють нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^{in}) = 0. \tag{1.325}$$

Указані властивості внутрішніх сил (1.324), (1.325) отримані на основі третього закону механіки про дію і протидію. Але ці умови рівноваги можна розглядати як достатні, якщо внутрішні сили прикладені до абсолютно твердого тіла.

**Зовнішні сили** – це сили взаємодії між матеріальними точками системи і фізичними тілами, які не належать до цієї матеріальної системи.

Зовнішні сили позначаються  $\bar{F}_k^e$ . Розглянута класифікація сил застосовується, як правило, для вільної матеріальної системи.

**Активні сили** називають ще заданими силами. **Реакції в'язей** – це сили, з якими в'язі діють на систему матеріальних точок. Сили реакцій є невідомими і залежать від закону руху системи. Ця класифікація застосовується для невольної матеріальної системи, а реакції в'язей вводяться на основі аксіоми про звільнення від в'язей. За допомогою цієї аксіоми невольна матеріальна система перетворюється у вільну. Слід наголосити, що дана класифікація сил є відносною. Розглянутим у статисті методом перерізів внутрішню силу можна перетворити у зовнішню. А внутрішня сила двигуна автомобіля стає рушійною, провокуючи появу зовнішньої сили тертя між ведучими колесами і дорогою.

### 1.17.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи

Розглянемо вільну матеріальну систему, яка складається із  $n$  матеріальних точок з масами  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ ; положення кожної точки системи відносно якого-небудь центра визначається її радіусом-вектором  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$ ; до кожної точки системи прикладено, відповідно, рівнодійна внутрішніх сил  $\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \bar{F}_3^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$  і рівнодійна зовнішніх сил  $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \bar{F}_3^e, \dots, \bar{F}_n^e$ . Для кожної точки матеріальної системи можна скласти диференціальне рівняння:

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{in} + \bar{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.326)$$

Система  $n$  рівнянь (1.326) і є **системою диференціальних рівнянь руху матеріальної системи у векторній формі**.

У проєкціях на осі прямокутної системи декартових координат  $x, y, z$  системі (3.106) відповідають  $3n$  наступних диференціальних рівнянь.

$$\begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= F_{kx}^{in} + F_{kx}^e; \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= F_{ky}^{in} + F_{ky}^e; \quad k = 1, 2, \dots, n. \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= F_{kz}^{in} + F_{kz}^e. \end{aligned} \quad (1.327)$$

Рівності (1.327) є системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, за інтегруванням якої отримаємо  $3n$  довільних сталих, які треба визначати з початкових умов руху. Математичні складності пов'язані і з рядом інших обставин. Подолати ці обставини допомагають загальні теореми динаміки, які починаємо розглядати.

### 1.17.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи

Про характер руху матеріальної системи іноді можна мати уяву, спостерігаючи за рухом центра мас матеріальної системи.

Приміром, важливо дослідити, чи є прямолінійною траєкторія руху центра мас такої сільськогосподарської машини як культиватор, щоб зробити висновок, яку ширину захисної зони можна взяти під час обробітку міжрядь просапних культур і не допустити їхнього пошкодження, а також у підсумку дослідження запропонувати заходи, які б дозволили удосконалити характеристики руху машин у цьому технологічному процесі.

Розглянемо теорему про рух центра мас системи. Для матеріальної системи із  $n$  матеріальних точок запишемо диференціальні рівняння у формі (3.106) і підсумуємо їх по всіх точках системи

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (1.328)$$

Згідно з наведеними властивостями внутрішніх сил (1.324), перший доданок у правій частині рівняння (1.328) зникає

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (1.329)$$

Із виразу (1.311) можна записати:

$$m \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k. \quad (1.330)$$

Візьмемо двічі похідну за часом від лівої і правої частин виразу (1.330)

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}. \quad (1.331)$$

З отриманого виразу (1.331) випливає, що його права частина збігається з лівою частиною виразу (1.329), тому

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow m \bar{a}_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (1.332)$$

На підставі аналізу математичного виразу (1.332) сформулюємо теорему про рух центра мас матеріальної системи.

**Добуток маси матеріальної системи, зведеної до центра мас, на прискорення її центра мас дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на дану матеріальну систему.**

Можна надати інше, як би фізичне формулювання закону.

**Центр мас матеріальної системи рухається як вільна матеріальна точка, в якій зосереджена маса всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил.**

Рівнянню (1.332) відповідають три рівняння у проекціях на декартові осі координат

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e; \quad m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e; \quad m \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum F_{kz}^e. \quad (1.333)$$

З теореми випливає, що рух центра мас системи залежить тільки від зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему, внутрішні сили не змінюють положення і швидкості центра мас.

Проте, внутрішні сили можуть здійснювати непрямий вплив на рух центра мас, але через зовнішні сили. Наприклад, в автомобілі внутрішні сили, що розвиває двигун, впливають на рух центра мас автомобіля лише через сили тертя коліс із дорогою, а якщо тертя мале (лід), то рух може і не відбутися (машина буксує). Зазначимо, що пари сил, прикладені до системи, не можуть змінити характер руху центра мас, бо головний вектор пар сил дорівнює нулю. Пари сил можуть спричинити тільки обертання системи навколо центра мас.

#### **1.17.4. Закон збереження руху центра мас**

У деяких випадках головний вектор зовнішніх сил може дорівнювати нулю, а тому із виразу (1.331)

$$\frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \frac{d\bar{v}_c}{dt} = 0.$$

Звідси швидкість центра мас є сталою величиною

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = const.$$

На цій основі сформулюємо закон збереження руху центра мас матеріальної системи.

*Якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, то центр мас системи рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває у спокої.*

Може статися, що проекція головного вектора зовнішніх сил лише на одну вісь, наприклад, вісь  $x$  дорівнює нулю.

Тоді за виразом (1.333)

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0; \Rightarrow \frac{dx_c}{dt} = v_{cx} = const.$$

*Якщо одна із проекцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас на цю вісь зберігає свою величину.*

Цей висновок впливає безпосередньо з рівнянь (1.333). Крім того, необхідно зазначити, що коли швидкість центра мас або проекція швидкості на вісь на початку руху дорівнювала нулю, то за законом

зберігається незмінним положення центра мас (радіус-вектор або координата).

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{r}_c = const; v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = 0 \Rightarrow x_c = const.$$

У цьому випадку закон збереження руху центра мас дозволяє по переміщенню однієї частини системи знайти переміщення другої її частини.

---

#### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке центр мас і як визначаються його координати?
2. Які властивості внутрішніх сил ви знаєте?
3. Запишіть диференціальне рівняння руху матеріальної системи у векторній і координатній формах.
4. Напишіть алгебраїчний вираз і сформулюйте теорему про рух центра мас матеріальної системи.
5. Чи можуть внутрішні сили змінити положення центра мас?
6. Надайте формулювання закону збереження центра мас матеріальної системи.
7. Чи зберігається положення центра мас системи, якщо одне із тіл системи переміщується під дією внутрішніх сил на деяку відстань?
8. Чому дорівнює головний вектор і головний момент внутрішніх сил матеріальної системи?
9. Порівняйте два формулювання закону руху центра мас матеріальної системи.
10. Наведіть приклад, коли внутрішні сили спонукають до руху?

### 1.18. Основні (загальні) теореми динаміки

Вирішення другої основної задачі динаміки матеріальної системи зводиться до складання і розв'язування диференціальних рівнянь руху з урахуванням початкових умов. Інтегралі рівнянь руху надають вичерпну інформацію про рух системи. Проте, загальний розв'язок для матеріальної системи, крім окремих випадків, знайти не вдається.

Задача про два тіла, що рухаються під дією гравітаційних сил, є дуже складною для загального випадку. Класична задача про три тіла в загальному вигляді не вирішена.

Для невідомої матеріальної системи треба одночасно розв'язувати дві задачі: визначення руху системи і визначення реакцій в'язей.

Проте, існує багато задач динаміки, розв'язання яких не потребує повної інформації про властивості досліджуваного руху системи, які містяться у диференціальних рівняннях.

Ці задачі, пов'язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи або з визначенням руху центра мас і основних мір механічного руху системи: головного вектора кількості руху, головного моменту кількості руху, кінетичної енергії. До ефективних методів розв'язування таких задач належать основні теореми динаміки, що встановлюють співвідношення між мірами механічного руху і мірами дії сил: імпульс сили, робота сили.

Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух.

Основні теореми динаміки дозволяють уникнути складних операцій інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і матеріальної системи, що значно спрощує розв'язання ряду задач динаміки.

Розглянемо послідовно теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і системи, моменту кількості руху, кінетичної енергії.

### **1.18.1. Міри механічного руху і міри дії сил**

До основних мір руху належать кількість руху, момент кількості руху і кінетична енергія. До мір дії сил належать імпульс сили і робота сили. Із диференціальних рівнянь руху випливають співвідношення між зміною протягом часу сумарних мір руху системи і мір дії сил – основні теореми динаміки, які називають загальними інтегралами диференціальних рівнянь руху. Міри руху є основою для встановлення загальних теорем динаміки.

Цікава дискусія точилася у XVII-XVIII століттях між прихильниками Р.Декарта і Г.Лейбніца про те, яка із мір механічного руху – кількість руху або кінетична енергія (жива сила, як її тоді називали) – визначає динамічні властивості тіл. Дискусія закінчилась безрезультатно. Тільки у XIX ст. вчені прийшли до висновку, що обидві міри руху одночасно існують в кожному тілі. Декартова міра, кількість руху як перша міра руху, характеризує здатність механічного руху тіла переходити до другого тіла у формі самого ж механічного руху.

Друга міра руху, кінетична енергія, характеризує здатність механічного руху тіла перетворюватись в еквівалентну кількість потенціальної, теплової та інших видів енергії. Тільки релятивістська механіка (XX ст.) об'єднала ці дві міри руху в одну – тензор енергії (імпульс).

### **1.18.2. Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи**

Однією з найважливіших динамічних характеристик руху матеріальної точки і матеріальної системи є *перша міра механічного руху – кількість руху*.

***Кількість руху матеріальної точки є векторною функцією і дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості.***

$$\bar{q} = m\bar{v}. \quad (1.334)$$

Напрямок вектора кількості руху  $\bar{q}$  збігається з напрямком вектора швидкості  $\bar{v}$ . Одиницею кількості руху є [кг м/с].

Головний вектор кількостей руху матеріальних точок або кількість руху матеріальної системи є вектором, який дорівнює векторній сумі кількостей руху точок системи

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k. \quad (1.335)$$

Вектор кількості руху системи визначається і через швидкість центра мас. Запишемо вираз (1.311) інакше  $m \cdot \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$  і візьмемо похідну за

часом від лівої і правої частин  $m \frac{d \bar{r}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d \bar{r}_k}{dt}$ .

Оскільки  $\frac{d \bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c$ , а  $\frac{d \bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k$ , то

$$m \bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \bar{Q}; \Rightarrow \bar{Q} = m \bar{v}_c. \quad (1.336)$$

**Головний вектор кількості руху матеріальної системи дорівнює добутку маси  $m$  системи на вектор швидкості її центра мас.**

Проекції кількості руху матеріальної системи на осі прямокутної системи декартових координат

$$Q_x = \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = m v_{cx}, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = m v_{cy}, \quad Q_z = \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = m v_{cz}. \quad (1.337)$$

Звідси головний вектор кількості руху матеріальної системи і його напрямні косинуси

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2};$$

$$\cos\left(\hat{\bar{Q}}, x\right) = \frac{Q_x}{Q}; \quad \cos\left(\hat{\bar{Q}}, y\right) = \frac{Q_y}{Q}; \quad \cos\left(\hat{\bar{Q}}, z\right) = \frac{Q_z}{Q}.$$

### 1.18.3. Імпульс сили

Ефект дії сили залежить не тільки від її величини, а й від тривалості дії. Для характеристики дії сили на тіло за певний проміжок часу вводиться поняття елементарного імпульсу сили і імпульсу сили за кінцевий проміжок часу.

**Елементарний імпульс  $d\bar{S}$  сили  $\bar{F}$  – це векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії.**

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt. \quad (1.338)$$

Напрямок елементарного імпульсу сили збігається з напрямком вектора сили.

## Частина перша

Одиницею імпульсу сили у Міжнародній системі одиниць СІ є  $[H \cdot c]$ . Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює інтегралу від елементарного імпульсу сили

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} d\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt. \quad (1.339)$$

Для обчислення імпульсу сили використовують його проекції на відповідні осі координат.

$$S_x = \int_0^{t_1} dS_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} dS_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} dS_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \quad (1.340)$$

Повний імпульс 
$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

У випадку, якщо сила є сталою величиною, то імпульс сили

$$\bar{S} = \bar{F}t. \quad (1.341)$$

### 1.18.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Запишемо основний закон динаміки матеріальної точки у формі

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.342)$$

Перетворимо вираз (1.342)

$$d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot dt. \quad (1.343)$$

Рівність (1.343) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі.

*Диференціал кількості руху матеріальної точки дорівнює векторній сумі елементарних імпульсів сил, що діють на дану точку.*

Інтегруємо почленно ліву і праву частини виразу (1.343) в заданих границях

$$\int_{v_0}^{v_1} d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt. \quad (1.344)$$

Права частина виразу (1.344) є сумою імпульсів сил за кінцевий проміжок часу

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k. \quad (1.345)$$

*Зміна кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів сил, які діють на точку за цей самий проміжок часу.*

Вираз (3.125) у проекціях на осі ортогональної системи декартових координат  $x, y, z$



$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}; \quad mv_{1y} - mv_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}; \quad mv_{1z} - mv_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz} \quad \left. \right\} \quad (1.346)$$

**Приклад 1.28**

Автомобіль масою  $m = 1000$  кг рухається вздовж прямої горизонтальної дороги зі швидкістю  $v_0 = 5$  м/с. Далі протягом 10 с сила тяги двигуна автомобіля збільшується на 150 Н за кожну секунду. Визначити швидкість автомобіля  $v_1$  після десятої секунди розгону.

**Розв'язання**

Вважаємо рух автомобіля поступальним. Тоді його можна прийняти за матеріальну точку.

На підставі виразу (1.346) запишемо

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx} = S. \quad (a)$$

Оскільки рух по прямій, то можна позбавитись індексів

$$v_{1x} = v_1; \quad v_{0x} = v_0; \quad S_x = S; \quad \Rightarrow mv_1 - mv_0 = S. \quad (б)$$

Визначимо імпульс сили тяги двигуна за виразом (3.119):

$$F = 150t; \quad S = \int_0^{t_1} F dt;$$

$$S = \int_0^{t_1} 150t dt = 150 \int_0^{10} t dt = 150 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{10} = \frac{150 \cdot 10^2}{2} = 7500 \text{ (Нс)}.$$

з виразу (б) 
$$v_1 = \frac{S + mv_0}{m} = \frac{7500 + 1000 \cdot 5}{1000} = 12,5 \text{ м/с}.$$

**1.18.5. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи**

Для матеріальної системи, яка складається з  $n$  матеріальних точок, на підставі теореми про рух її центра мас можна записати:

$$m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \frac{d(m\bar{v}_c)}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (1.347)$$

де  $m\bar{v}_c = \bar{Q}$  – кількість руху матеріальної системи.

Формула (1.347) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної системи у диференціальній формі.

**Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної системи дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему.**

Перепишемо вираз (1.347)

$$d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt. \quad (1.348)$$

Інтегруємо почленно ліву та праву частини виразу (1.348) в границях від  $Q_0$  до  $Q_1$  і від 0 до  $t_1$

$$\int_{Q_0}^{Q_1} d\bar{Q} = \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt \Rightarrow \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e. \quad (1.349)$$

*Зміна вектора кількості руху матеріальної системи за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.*

Рівність (1.349) виражає теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі.

Проектуємо вираз (1.349) на осі  $x, y, z$  нерухомої прямокутної інерціальної системи координат і отримуємо скалярні рівняння

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \quad (1.350)$$

### **1.18.6. Закон збереження кількості руху матеріальної системи**

Якщо в процесі руху матеріальної системи імпульс головного вектора зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то із виразу (1.347)

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{Q} = \text{const}; \quad \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = 0; \Rightarrow \bar{Q}_1 = \bar{Q}_0. \quad (1.351)$$

*Якщо імпульс головного вектора зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається незмінною.*

Аналогічно і відносно проєкцій головного імпульсу на якусь нерухому вісь координат. Якщо  $\sum_{k=1}^n \bar{S}_{kx}^e = 0$ , то  $Q_{1x} - Q_{0x} = 0; \Rightarrow Q_{1x} = Q_{0x}$ .

---

#### **ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка її розмірність?
2. Які міри руху існують в тілі, що рухається?
3. Як визначити імпульс змінної і сталої сил?
4. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки і системи.
5. Напишіть теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі.
6. Сформулюйте закон збереження кількості руху матеріальної системи.
7. Які задачі розв'язуються за допомогою загальних теорем динаміки?
8. Які міри дії сил мають місце під час руху тіла?
9. В якій системі координат справджуються закони збереження кількості руху точки і системи?
10. У чому суть дискусії між ученими 17-18 ст. про міри руху?

## **1.198. Момент кількості руху матеріальної точки і кінетичний момент системи**

### **1.198.1. Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі**

Поняття моменту відносно центра і осі можуть бути застосовані до будь-яких векторів, зокрема, до вектора сили в статиці або до вектора кількості руху матеріальної точки в динаміці (рис. 1.117).

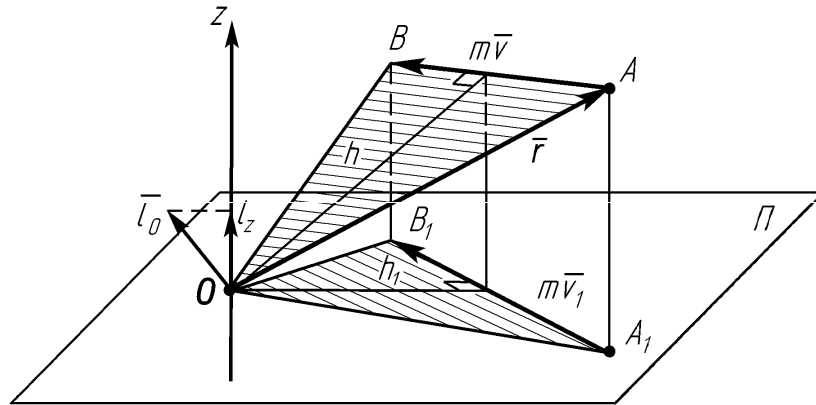


Рис. 1.117

**Моментом кількості руху** ( $m\vec{v}$ ) матеріальної точки відносно центра  $O$  є вектор  $\vec{l}_0$ , який перпендикулярний до площини  $OAB$ , яку утворює вектор  $(m\vec{v})$  і центр  $O$ , і спрямований у той бік, звідки здається, що вектор  $(m\vec{v})$  намагається повернути цю площину відносно центра  $O$  проти ходу годинникової стрілки

**Модуль моменту кількості руху** точки відносно центра  $O$  дорівнює добутку модуля кількості руху точки на плече  $h$  – найкоротшу відстань від центра моменту до прямої лінії, на який розміщений вектор  $(m\vec{v})$ :

$$l_0 = mv \cdot h = 2S\Delta OAB. \quad (1.352)$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра  $O$  може бути записаний у вигляді векторного добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$  рухомої точки  $A$  відносно центра  $O$  на вектор кількості руху точки

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (1.353)$$

**Момент кількості руху** матеріальної точки відносно осі  $z$  дорівнює моменту проєкції  $m\vec{v}_1$  кількості руху точки на площину  $\Pi$ , перпендикулярну до осі  $z$ , відносно точки  $O$  перетину осі  $z$  площиною.

$$l_z = m_z(m\vec{v}) = \pm n p_{\Pi}(m\vec{v}) \cdot h_1 = mv_1 \cdot h_1 = 2S\Delta OA_1B_1. \quad (1.354)$$

Одиницею моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі координат є  $[кг \cdot м^2 / с]$ .

**1.19.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і закон його збереження**

Припустимо, що рух точки  $M$  вздовж траєкторії відбувається зі швидкістю  $\bar{v}$  і прискоренням  $\bar{a}$  під дією сили  $\bar{P}$  (рис. 1.118).

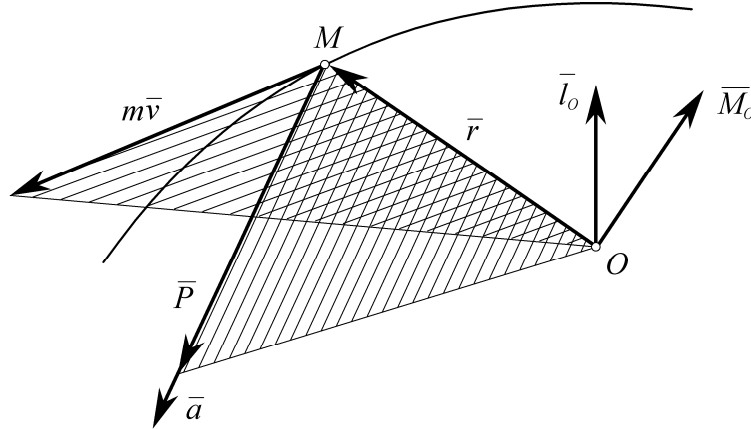


Рис. 1.118

Тоді момент кількості руху точки і момент сили  $\bar{P}$  відносно центра  $O$  дорівнюють відповідно:

$$\bar{l}_o = \bar{m}_o(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}, \quad \bar{M}_o = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P},$$

де  $\bar{r}$  і  $(m\bar{v})$  – змінні вектори;

$\bar{r}$  – радіус-вектор точки  $M$  відносно центра  $O$ ;

$\bar{P}$  – сила, що прискорює точку.

Візьмемо похідну за часом від вектора моменту кількості руху матеріальної точки

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times (m\bar{v}) + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt}.$$

Але перший доданок  $\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0$ , оскільки вектори векторного добутку паралельні. Перетворимо другий доданок

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{P},$$

де  $\bar{P}$  – рівнодійна сила, що діє на точку. У підсумку другий доданок

$$\bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{M}_o.$$

Остаточно матимемо:

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{m}_o(m\bar{v})) = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{M}_o \Rightarrow \frac{d\bar{l}_o}{dt} = \bar{m}_o(\bar{P}). \quad (1.355)$$

*Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно довільного центра  $O$  дорівнює моменту рівнодійної сили відносно того самого центра.*

Проектуємо вираз (1.355) на осі системи декартових координат

$$\frac{dl_z}{dt} = m_z(P); \quad \frac{dl_x}{dt} = m_x(P); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(P). \quad (1.356)$$

*Похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якої нерухомої координатної осі дорівнює моменту рівнодійної сили відносно цієї ж осі.*

Під час руху матеріальної точки може статися, що права частина рівняння (1.356) дорівнює нулю:

$$\bar{m}_o(\bar{P}) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{l}_o}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{l}_o = \bar{m}_o(m\bar{v}) = const.$$

*Якщо момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно даного центра залишається незмінним.*

Наприклад, під час руху планет сонячної системи під дією центральної сили притягання момент останньої відносно центра Сонця дорівнює нулю. Тому момент кількості руху планет завжди перпендикулярний площині екліптики і є незмінним за модулем.

За аналогією цей закон стосується і моменту кількості руху відносно будь-якої осі (1.356)

$$l_z = m_z(m\bar{v}) = const.$$

### 1.19.3. Кінетичний момент системи відносно центра і осі

Розглянутий матеріал про момент кількості матеріальної точки поширимо на систему матеріальних точок, вводячи поняття кінетичного моменту системи.

*Кінетичним моментом матеріальної системи відносно будь-якого центра  $O$  є вектор  $\bar{L}_o$ , який дорівнює векторній сумі моментів кількості руху точок системи  $\bar{l}_{ok}$  відносно цього самого центра*

$$\bar{L}_o = \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o(m_k \bar{v}_k) = \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k). \quad (1.357)$$

де  $\bar{l}_{ok}$  – момент кількості руху  $k$ -ї точки системи;

$m_k \bar{v}_k$  – кількість руху  $k$ -ї точки;  $\bar{r}_k$  – радіус-вектор, що з'єднує  $k$ -ю точку системи з нерухомим центром. Кінетичним або головним моментом кількості руху матеріальної системи відносно будь-якої осі  $Oz$  є алгебраїчна сума моментів  $l_{zk}$  кількості руху точок системи відносно осі

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_z(m_k \bar{v}_k).$$

### 1.19.4. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  (рис. 1.119).

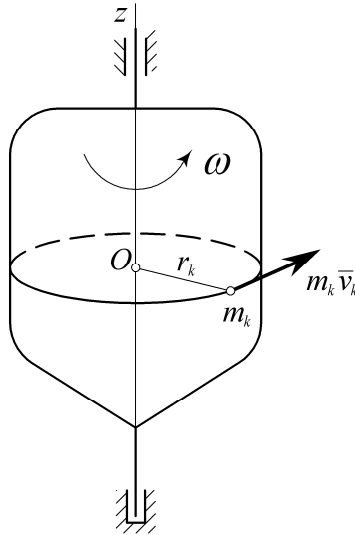


Рис. 1.119

Швидкість елементарного об'єму  $dm$ , віддаленого від осі обертання на відстань  $r$  становить  $v = r\omega$ , кількість руху  $dQ = vdm = r\omega dm$ , а елементарний кінетичний момент відносно осі  $Oz$  –  $dl_z = r dQ = r v dm = r^2 \omega dm$ . Для всього тіла кінетичний момент  $L_z = \omega \int_{(m)} r^2 dm$ , де інтегрування поширено на всю масу тіла.

Інтеграл  $\int_{(m)} r^2 dm$  залежить лише від характеру розподілу маси в тілі і є моментом інерції тіла відносно осі обертання  $I_z = \int_{(m)} r^2 dm$ .

З урахуванням цього кінетичний момент тіла відносно осі  $Oz$  запишеться

$$L_z = I_z \omega. \quad (1.358)$$

**Кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно осі на кутову швидкість тіла.**

### 1.19.5. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи і закон його збереження

Нехай матеріальна система складається із  $n$  матеріальних точок, де  $m_1, m_2, \dots, m_n$  – маси точок матеріальної системи;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$  – зовнішні сили, прикладені до точок;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$  – внутрішні сили взаємодії між точками;

$\bar{l}_{10}, \bar{l}_{20}, \dots, \bar{l}_{n0}$  – моменти кількості руху точок відносно центра  $O$ .

Для кожної точки застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху (3.135), відокремивши її від системи і прикладаючи моменти внутрішніх сил

$$\frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Підсумуємо цей вираз по всіх точках системи

$$\sum \frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}); \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}),$$

де  $\sum \bar{l}_{ok} = \bar{L}_o$  – кінетичний момент системи,

$\sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}) = 0$  – головний вектор внутрішніх сил.

Остаточно

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) = \bar{M}_o \quad (1.359)$$

*Похідна за часом від кінетичного моменту  $\bar{L}_o$  матеріальної системи відносно нерухомого центра  $O$  дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того ж центра.*

Проектуємо векторне рівняння (1.359) на осі декартових координат і отримаємо аналітичні вирази

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= \sum m_z(\bar{F}_k^e) = M_{Oz}; & \frac{dL_x}{dt} &= \sum m_x(\bar{F}_k^e) = M_{Ox}; \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum m_y(\bar{F}_k^e) = M_{Oy} \end{aligned} \quad (1.360)$$

Рівняння (1.359) виражає теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи в диференціальній формі.

Доведемо цю теорему в інтегральній формі, для чого запишемо вираз (1.359) у вигляді  $d\bar{L}_o = \bar{M}_o dt$ . Інтегруючи цю рівність у межах від  $t_0$  до  $t$ , одержимо

$$\bar{L}_o(t) - \bar{L}_o(t_0) = \int_{t_0}^t \bar{M}_o dt = \bar{L}_o^e, \quad (1.361)$$

де  $\bar{L}_o^e$  – головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно центра  $O$ .

Вираз (1.361) використовують під час вивчення елементарної теорії удару.

Під час руху матеріальної системи може статися, що сума моментів сил відносно центра дорівнює нулю

$$\sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) = 0; \Rightarrow \bar{L}_o = \sum \bar{m}_o(m_k \bar{v}_k) = const.$$

**Якщо головний момент зовнішніх сил, які діють на систему, відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то кінетичний момент матеріальної системи відносно цього центра зберігає свою величину.**

Як випадок, сума моментів сил відносно осі може дорівнювати нулю

$$\sum m_z(F_k^e) = 0 \Rightarrow L_z = \sum m_z(m_k v_k) = const.$$

З останнього виразу випливає, що для твердого тіла, яке обертається навколо осі  $z$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , кінетичний момент теж зберігає своє значення  $L_z = I_z \cdot \omega = const$ , а це означає, що коли, наприклад, зменшується осьовий момент інерції тіла  $I_z$ , то кутова швидкість обов'язково збільшуватиметься, щоб зберегти добуток незмінним

$$I_{z_1} \cdot \omega_1 = I_{z_2} \cdot \omega_2 = K = const.$$

Цей закон природи добре демонструє лава Жуковського, яку розкручують навколо вертикальної осі. І якщо в цей момент людина, яка стоїть на лаві, різко підніме руки в сторони, збільшуючи свій момент інерції навколо вертикальної осі, то кутова швидкість дуже помітно знижується.

---

#### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначте поняття моменту кількості руху точки і системи.
2. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки. Напишіть математичний вираз теореми.
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи. Напишіть математичний вираз теореми.
4. Як визначити кінетичний момент тіла відносно осі обертання?
5. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної точки.
6. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту системи.
7. Наведіть приклади із побуту, як працює закон збереження кінетичного моменту системи.
8. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи відносно осей координат.
9. Як визначити головний момент кількості руху системи?
10. Що демонструє лава Жуковського?

## 1.20. Динаміка твердого тіла

### 1.20.1. Основні задачі. Диференціальні рівняння поступального руху тіла

Як і в разі матеріальної точки для твердого тіла розглядають дві основні задачі динаміки: пряма і обернена. Для невірного руху тіла треба визначити і реакції в'язей. Аналізуючи сили, слід зазначити, що внутрішні сили у твердому тілі врівноважуються. Отже, сили, що діють на тверде тіло є зовнішніми. Крім того, за другою класифікацією сили, що діють на тверде тіло, поділяють на активні сили і реакції в'язей.

У динаміці твердого тіла вибирають нерухому систему координат і



дві допоміжних системи: поступальну, осі якої паралельні осям нерухомої системи і яка рухається разом з полюсом, і систему координат, що незмінно зв'язана з тілом. Положення вільного тіла у просторі визначається шістьма параметрами (наприклад, три координати полюса і три кути Ейлера). Тому для розв'язання згаданих задач динаміки необхідно шість рівнянь, які зв'язують кінематичні параметри із силами, що діють на тверде тіло. Подібно до того, як це було в кінематиці твердого тіла, розглянемо поступальний, обертальний рух навколо нерухомої осі, плоскопаралельний рух тіла.

При поступальному русі тіло перебуває у спокої відносно системи осей, що паралельні осям нерухомої системи координат. Тому для здійснення поступального руху тіла треба, щоб головний момент зовнішніх сил відносно центра мас і початкова кутова швидкість дорівнювали нулю. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла в проєкціях на осі нерухомої системи координат

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = \sum F_{k_x}^e; & m\ddot{y}_c = \sum F_{k_y}^e; & m\ddot{z}_c = \sum F_{k_z}^e, \end{cases} \quad (1.362)$$

де  $m$  – маса тіла;  $x_c, y_c, z_c$  – координати центра мас;

$F_{k_x}^e, F_{k_y}^e, F_{k_z}^e$  – проєкції  $k$ -ї зовнішньої сили на осі координат.

Рівняння (1.362) дають змогу розв'язати першу і другу задачі динаміки поступального руху тіла.

### 1.20.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла

Невільне тверде тіло (рис. 1.120) під дією прикладених до нього зовнішніх сил  $\vec{P}_1^e, \vec{P}_2^e, \dots, \vec{P}_n^e$  обертається навколо нерухомої осі  $z$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , маючи один ступінь вільності.

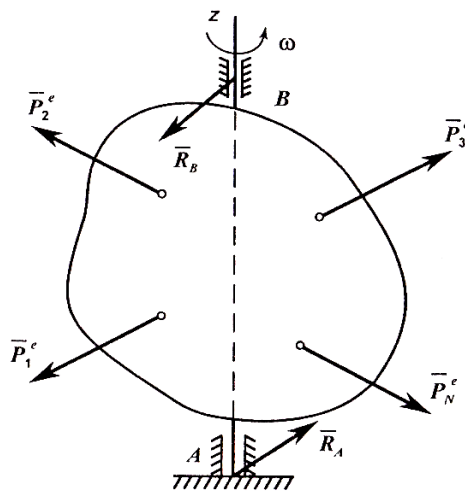


Рис. 1.120

Виведемо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту системи або твердого тіла відносно осі

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k). \quad (1.363)$$

Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання  $z$

$$L_z = I_z \cdot \omega, \quad (1.364)$$

де  $I_z$  – сталий осьовий момент інерції тіла;  $\omega$  – кутова швидкість.

Візьмемо похідну за часом від виразу (1.364) і підставимо в (1.363)

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (1.365)$$

Вираз (1.365) є шуканим **диференціальним рівнянням обертального руху тіла відносно нерухомої осі**.

Відомо, що кутове прискорення може бути виражено

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \cancel{\omega} = \cancel{\varphi}$$

У відповідності з останнім і диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі може бути записане у варіантах

$$I_z \cdot \varepsilon = \sum m_z (\bar{P}_k^e); I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k^e); I_z \cdot \cancel{\omega} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (1.366)$$

**Добуток осьового моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил відносно цієї самої осі.**

При вивченні обертального руху тіла за додатний приймають напрямок обертання. Тоді моменти рушійних сил, які створюються двигунами і спрямовані у напрямку обертання, мають додатні значення, а моменти сил опору, спрямовані протилежно напрямку обертання – від’ємні.

Таким чином, обертання відбувається за рахунок різниці моментів рушійних сил і моментів сил опору.

Якщо  $\sum m_z (\bar{P}_k^e) > 0$ , то  $\varepsilon = \cancel{\omega} > 0$  – обертальний рух прискорений,

якщо  $\sum m_z (\bar{P}_k^e) < 0$ , то  $\varepsilon = \cancel{\omega} < 0$  – обертальний рух сповільнений,

якщо  $\sum m_z (\bar{P}_k^e) = 0$ , то  $\varepsilon = \cancel{\omega} = 0$  – обертання рівномірне ( $\omega = const$ ).

**Приклад 1.29**

Колесо масою  $m$  і радіусом  $R$  обертається навколо осі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\omega_0$ . *Визначити* час гальмування  $t_1$  і кут повороту колеса  $\varphi_1$  до зупинки, якщо сила тиску, прикладена до колодки, дорівнює  $T$ , а коефіцієнт тертя ковзання –  $f$  (рис. 1.121).

**Розв’язання**

Запишемо диференціальне рівняння обертального руху колеса (1.366) і підставимо в праву частину момент прикладених сил, який направлений проти напрямку руху (гальмівний момент)

$$I_{oz} \frac{d\omega}{dt} = -F_{mp} \cdot R = -f \cdot T \cdot R \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fTR}{I_{oz}}.$$

Після відокремлення змінних і інтегрування

$$\omega = -\frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t + C_1;$$

Довільну сталу інтегрування шукаємо із початкових умов: якщо  $t_0 = 0$ , то  $\omega = \omega_0$ .

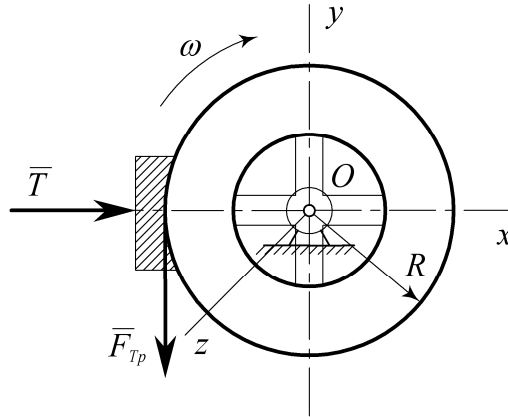


Рис. 1.121

Після підстановки в попередній вираз, отримаємо  $C_1 = \omega_0$ . Остаточо закон зміни кутової швидкості

$$\omega = \omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t. \quad (a)$$

Під час зупинки колеса  $\omega = 0$ . Із виразу (a) час гальмування

$$\omega_0 = \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0 I_{oz}}{fTR}. \quad (б)$$

Визначимо кут повороту колеса:

$$\varphi = \int \omega \cdot dt = \int \left( \omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t \right) \cdot dt = \omega_0 t - \frac{fTR}{2I_{oz}} t^2 + C_2.$$

Якщо  $t_0 = 0$ , то  $\varphi_0 = 0$ ,  $C_2 = 0$  і остаточно

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}} = \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}}. \quad (в)$$

Обчислимо за умовою момент інерції колеса  $I_{oz} = MR^2$ .

Підставимо відповідні значення в рівняння (б), (в) і отримаємо в заданих параметрах час гальмування і кут повороту до зупинки

$$t_1 = \frac{M\omega_0 R}{fT}; \quad \varphi_1 = \frac{fT t_1^2}{2MR}.$$

### 1.20.3. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла

Відомо, що плоский або плоскопаралельний рух твердого тіла можна уявити як суму двох найпростіших рухів: поступального разом з полюсом і обертального відносно полюса.

## Частина перша

Поступальний рух визначається двома координатами полюса, а обертальний – кутом повороту навколо полюса.

Якщо обрати за полюс центр мас тіла  $C$ , то поступальна частина руху буде визначатись векторним рівнянням

$$m\bar{a}_c = \sum \bar{P}_k^e, \quad (1.367)$$

де  $\bar{a}_c$  – прискорення центра мас,

$\sum \bar{P}_k^e$  – головний вектор зовнішніх сил.

Обертальний рух відносно полюса визначається рівнянням

$$I_{zc} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z(\bar{P}_k^e), \quad (1.368)$$

де  $I_{zc}$  – момент інерції відносно центральної осі, що перпендикулярна площині руху,

$\sum m_z(\bar{P}_k^e)$  – головний момент зовнішніх сил.

У координатній формі диференціальні рівняння плоского руху тіла

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_c = \sum P_{kx}^e, \\ m \cdot \ddot{y}_c = \sum P_{ky}^e, \\ I_{zc} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_z(\bar{P}_k^e). \end{cases} \quad (1.369)$$

Отже, для реалізації плоского руху необхідно, щоб сума проєкцій сил на вісь  $z$  і суми моментів зовнішніх сил або головні моменти навколо двох інших осей дорівнювали нулю:

$$\sum \bar{P}_{kz}^e = 0; \quad \sum m_x(\bar{P}_k^e) = 0; \quad \sum m_y(\bar{P}_k^e) = 0.$$

**Приклад 1.30** Суцільний однорідний коловий циліндр (рис. 1.122) радіуса  $R$  котиться вздовж похилої площини без ковзання. Визначити величину прискорення центра циліндра  $\bar{a}_c$  і силу  $\bar{F}$ , яка утримує циліндр від проковзування.

$m$  – маса циліндра;  $G = m \cdot g$  – вага циліндра;

$R$  – радіус циліндра;  $\mathcal{E}$  – кутове прискорення циліндра.

### Розв'язання

Запишемо диференціальні рівняння плоского руху (1.369)

$$\begin{cases} m \cdot a_c = G \sin \alpha - F, & (a) \\ I_{zc} \cdot \mathcal{E} = F \cdot R. & (б) \end{cases}$$

Кутове прискорення  $\mathcal{E} = \frac{a_c}{R}$  підставимо в рівняння (б)  $I_{zc} \cdot \frac{a_c}{R} = F \cdot R \Rightarrow F = \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}$ .

Тоді рівняння (а) матиме вигляд  $m \cdot a_c = mg \sin \alpha - \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}$ .

Для суцільного циліндра

$$I_{zc} = \frac{mR^2}{2}; \Rightarrow ma_c = mg \sin \alpha - \frac{ma_c}{2}.$$

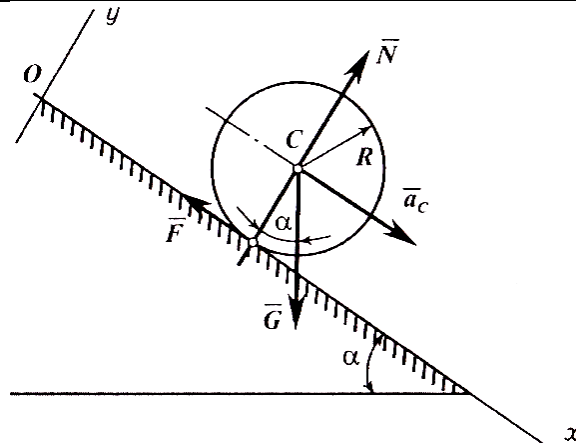


Рис. 1.122

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому динаміка поступального руху тіла може бути зведена до динаміки точки?
2. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання?
3. Напишіть формулу і сформулюйте вираз диференціального рівняння обертального руху тіла відносно осі.
4. В яких випадках дії сил обертальний рух тіла буде рівномірним, прискореним чи сповільненим?
5. Напишіть закон коливань фізичного маятника. Чому дорівнює період коливань?
6. Що таке зведена довжина фізичного маятника і як вона визначається?
7. Скільки диференціальних рівнянь визначають динаміку плоского руху твердого тіла і який вигляд ці рівняння мають?
8. Що таке фізичний маятник і чим він відрізняється від математичного?
9. Як визначити положення центра коливань фізичного маятника?
10. Які методи визначення моменту інерції тіл надає теорія коливань фізичного маятника?

## 1.21. Робота і потужність сили

### 1.21.1. Елементарна робота сили

Матеріальна точка  $M$  рухається під дією сили  $\vec{F}$  вздовж криволінійної траєкторії. Положення точки в довільний момент часу  $t$  визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$ , проведеним із фіксованої точки  $O$  початку нерухомої системи відліку (рис. 1.123).

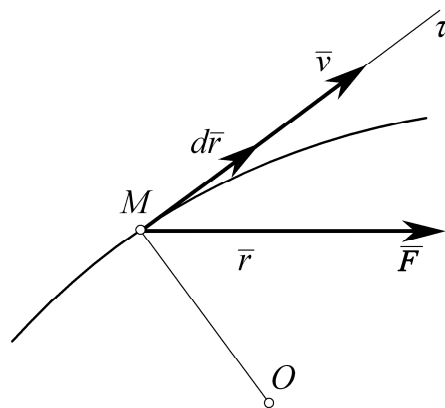


Рис. 1.123

*Елементарною роботою сили  $\vec{F}$  на елементарному переміщенні  $d\vec{r}$  називається міра дії сили, рівна скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладання.*

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.370)$$

Вираз (1.370) визначає роботу сили за векторним способом задання руху точки.

За натуральним способом задання руху точки  $d\vec{r} = \vec{\tau} ds$  ( $\vec{\tau}$  – орт дотичної до траєкторії в точці  $M$ ;  $ds$  – диференціал дуги траєкторії). Тоді елементарна робота

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = F ds \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{\tau}}). \quad (1.371)$$

*Елементарна робота сили за натуральним способом задання руху точки дорівнює добутку сили на елементарне переміщення точки прикладання сили вздовж траєкторії і на косинус кута між векторами сили і швидкості.*

Отже, роботу виконує дотична проекція сили

$$\begin{aligned} F \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) &= F_{\tau}, \\ \delta A &= F_{\tau} \cdot ds. \end{aligned} \quad (1.372)$$

Якщо кут між векторами сили і швидкості  $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) < 90^\circ$ , то елементарна робота додатна; кут  $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = 0^\circ$ ;  $\Rightarrow \delta A = F \cdot ds$ , то робота максимальна; кут  $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) > 90^\circ$ , то робота від'ємна; кут  $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = 90^\circ$ , то робота дорівнює нулю, тобто, сила, перпендикулярна вектору швидкості, роботу не виконує.

Зв'яжемо з точкою  $O$  прямокутну систему декартових координат з ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Визначимо елементарну роботу сили в координатній формі. Для цього силу  $\vec{F}$  і елементарне переміщення  $d\vec{r}$  розкладемо за ортами осей системи координат

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z, \quad d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

і підставимо у вираз роботи (1.370). Після перетворень отримаємо:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (1.373)$$

*Елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій сили на варіації відповідних координат точки прикладання сили.*

### **1.21.2. Робота сили на кінцевому переміщенні. Потужність сили**

Припустимо, що точка  $M$  перемістилась з положення  $M_1$  у положення  $M_2$  (рис. 1.124). Потрібно визначити роботу сили  $\vec{F}$  на кінцевому переміщенні.

Величина, рівна криволінійному інтегралу від елементарної роботи, взятому вздовж дуги кривої, окресленої точкою прикладання сили під час її переміщення, називається роботою сили на кінцевому переміщенні або повною роботою сили.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.374)$$

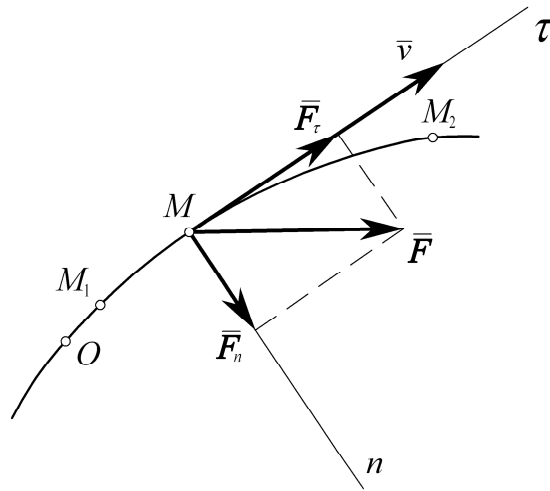


Рис. 1.124

За координатного способу задання руху повна робота сили виражається

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (1.375)$$

За натурального способу задання руху повна робота сили

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} F ds \cos(\vec{F}, \hat{v}). \quad (1.376)$$

Якщо перейти від криволінійного інтеграла (1.375) до визначеного, то треба врахувати  $dx = \dot{x} dt$ ;  $dy = \dot{y} dt$ ;  $dz = \dot{z} dt$ .

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}) dt,$$

де  $t_1, t_2$  – моменти часу, коли точка перебувала в положеннях  $M_1$  і  $M_2$  (рис. 3.32).

Робота сталої сили

$$A = F \cdot S \cdot \cos(\vec{F}, \hat{v}). \quad (1.377)$$

*Робота сталої сили на прямолінійному переміщенні точки її прикладання дорівнює добутку модуля сили на величину переміщення і на косинус кута між векторами сили і швидкості.*

Одиницею роботи сили в системі СІ є джоуль Дж.

*Потужність сили – це фізична алгебраїчна величина, яка характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки, і дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки.*

$$N = \bar{F} \cdot \bar{v} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}.$$

Знаючи потужність сили, можна визначити виконану роботу за деякий проміжок часу  $A = \int_{t_1}^{t_2} N dt$ . Якщо ж потужність стала, то  $A = Nt$ , де  $t = t_2 - t_1$  – згаданий проміжок часу.

Одиницею потужності в системі СІ є ват Вт [Дж · с<sup>-1</sup>].

### 1.21.3. Теорема про роботу рівнодійної сили

*Робота рівнодійної сили на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж самому переміщенні.*

Нехай система складається із  $n$  сил. Проекція рівнодійної сили  $\bar{R}$  на вісь  $\tau$  дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх сил на цю вісь (рис. 1.125).

$$R \cdot \cos(\widehat{\bar{R}, \bar{v}}) = F_1 \cdot \cos(\widehat{\bar{F}_1, \bar{v}}) + F_2 \cdot \cos(\widehat{\bar{F}_2, \bar{v}}) + \dots + F_n \cdot \cos(\widehat{\bar{F}_n, \bar{v}}) \quad (1.378)$$

Помножимо почленно рівняння (1.378) на  $dS$  і, інтегруючи на переміщенні від точки  $M_1$  до точки  $M_2$ , остаточно одержимо:

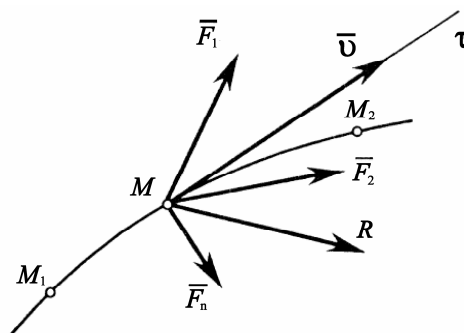


Рис. 1.125

$$\int_{M_1}^{M_2} R \cos(\widehat{\bar{R}, \bar{v}}) \cdot ds = \int_{M_1}^{M_2} F_1 \cos(\widehat{\bar{F}_1, \bar{v}}) \cdot ds + \int_{M_1}^{M_2} F_2 \cos(\widehat{\bar{F}_2, \bar{v}}) \cdot ds + \dots + \int_{M_1}^{M_2} F_n \cos(\widehat{\bar{F}_n, \bar{v}}) \cdot ds.$$

$$A_R = A_1 + A_2 + \dots + A_n. \quad (1.379)$$



1.21.4. Робота сили в окремих випадках

Робота сили ваги

Припустимо, що матеріальна точка  $M$  рухається вздовж деякої траєкторії із положення  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  у положення  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  під дією сталої сили ваги  $G = mg$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Обчислимо роботу сили  $\bar{G}$  на переміщенні точки  $M_1M_2$ . Оберемо нерухому прямокутну систему декартових координат, як на рис. 1.126.

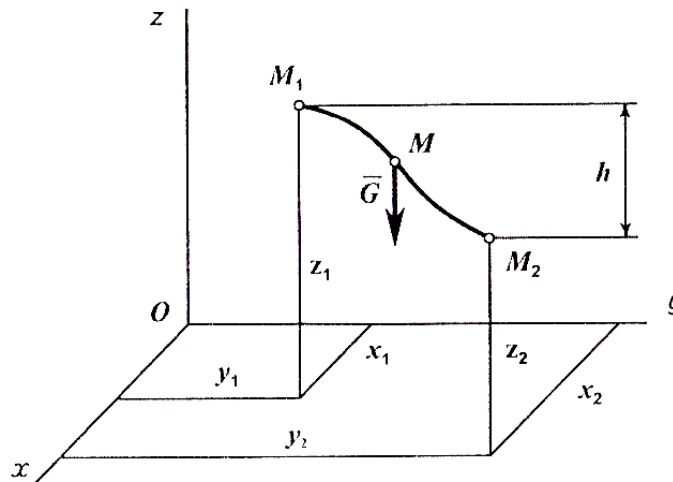


Рис. 1.126

Проекції сили  $\bar{G}$  на координатні осі

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad G_z = -G = -mg. \quad (1.380)$$

Використаємо координатний вираз елементарної роботи сили (1.373)

$$\delta A = G_x dx + G_y dy + G_z dz = -mg dz. \quad (1.381)$$

Знак мінус означає, що сила  $\bar{G}$  напрямлена протилежно відносно осі  $Oz$ .

Робота, що виконується силою  $\bar{G}$  на переміщенні точки з положення  $M_1$  в положення  $M_2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{M_2}^{M_1} \delta A = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mgz \Big|_{z_1}^{z_2} = \\ &= -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) = mgh, \end{aligned} \quad (1.382)$$

де  $h = z_1 - z_2$  – величина вертикального переміщення точки  $M$ .

Якщо  $z_1 > z_2$ , то робота сили ваги додатна, а якщо  $z_1 < z_2$ , то робота сили ваги від’ємна.

Таким чином, робота, що виконується силою ваги

$$A = \pm mgh, \quad (1.383)$$

**Частина перша**

де знак «плюс» відповідає переміщенню точки донизу, а знак «мінус» – переміщенню точки вгору.

**Робота, що виконується силою ваги матеріальної точки, дорівнює добутку модуля сили ваги на різницю висот початкового і кінцевого положення точки.**

Робота сили ваги матеріальної точки не залежить від виду траєкторії, по якій рухається точка, а залежить тільки від різниці по вертикалі між положеннями точки.

Робота, що виконується силою ваги твердого тіла на замкненому переміщенні його центра ваги дорівнює нулю.

**Робота лінійної сили пружності**

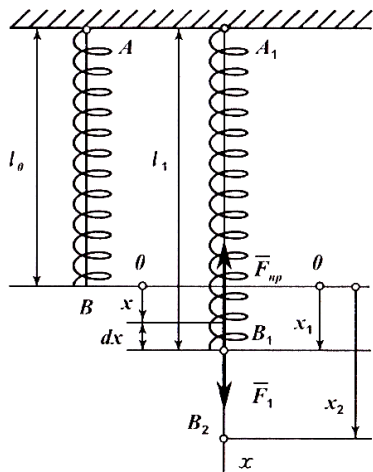
Визначимо спочатку елементарну роботу пружної сили  $F_{np}$ , яка підкоряється закону Гука, прикладеної до точки  $B$  пружини (рис. 1.127) під час її деформації на елементарну величину  $dx$ .

Основною характеристикою пружного елемента є **коефіцієнт жорсткості**  $c$  (Н/м) – відношення сили, яка діє на пружний елемент, до величини його деформації.

Якщо обрати вісь  $x$  вздовж осі пружини у напрямі її розтягу, а початок координат  $O$  – у положенні недеформованої пружини довжиною  $l_0$ , то сила пружності

$$F_{np} = -cx, \tag{1.384}$$

де  $x$  – деяка деформація пружного елемента.



Знак «мінус» свідчить, що вектор сили спрямований у бік, протилежний напрямку переміщення кінця пружини точки  $B$ .

Елементарна робота сили (1.373)

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

$$F_{np_x} = -cx; \quad F_{np_y} = F_{np_z} = 0.$$

$$\delta A = -F_{np} dx = -cxdx. \tag{1.385}$$

За переміщенням точки прикладання сили з положення  $B_1$  у положення  $B_2$ , тобто, на відстань  $x_2 - x_1$ , сила пружності виконує роботу

Рис. 1.127

$$A = \int_{B_1}^{B_2} \delta A = - \int_{x_1}^{x_2} F_{np} dx = -c \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = - \frac{cx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \frac{c(x_2^2 - x_1^2)}{2}. \tag{1.386}$$

**Робота сили пружності, якщо вона відповідає закону Гука, дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на різницю**

*квадратів координат кінця і початку переміщення точки прикладання сили, яке відраховується від положення недеформованого стану.*

Якщо позначити деформацію пружини  $x_2 - x_1 = h$ , то роботу сили пружності можна визначити

$$A = -\int_0^h F_{np} dx = -c \int_0^h x \cdot dx = -\frac{ch^2}{2}$$

Робота сили пружності від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно напрямку переміщення точки її прикладання. Якщо кінець пружини відпускати до початкового положення, то сила пружності виконує додатну роботу

### **Робота і потужність сили, прикладеної до обертового тіла**

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі  $z$  під дією довільно розміщеної у просторі зовнішньої сили  $\vec{P}$ , прикладеної в точці  $M$  на відстані  $r$  від осі (рис. 1.128). Визначимо роботу цієї сили.

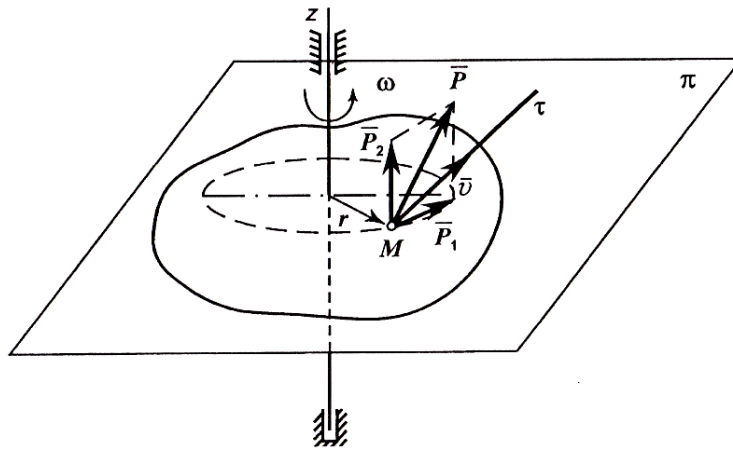


Рис. 1.128

Для цього проведемо крізь точку  $M$  площину  $\Pi$ , перпендикулярну до осі. Розкладемо вектор сили  $\vec{P}$  на дві складові:  $\vec{P}_1$  розміщену у площині  $\Pi$ , і  $\vec{P}_2$ , паралельну осі  $z$ .

Відомо, що складова  $\vec{P}_2$  роботу не виконує, оскільки її напрямок перпендикулярний вектору швидкості  $\vec{v}$  і згідно з формулою (1.377) її робота дорівнює нулю.

Елементарна робота сили

$$\delta A = P_1 \cdot ds \cdot \cos(\widehat{P_1, v}) = P_1 r \cdot \cos(\widehat{P_1, v}) \cdot d\varphi = M_z d\varphi,$$

де  $d\varphi$  – елементарний кут повороту тіла;

## Частина перша

$ds = r \cdot d\varphi$  – елементарна дуга кола, що окреслює точка  $M$  під час обертання разом з тілом;

$F_1 r \cdot \cos(\bar{F}_1, \bar{v}) = M_z^e$  – обертальний момент сили  $\bar{F}^e$  відносно осі  $z$ .

*Елементарна робота сили, прикладеної до тіла, що обертається відносно осі  $z$ , дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі  $z$  на елементарний кут повороту тіла.*

Повна робота сили дорівнює інтегралу від елементарної роботи

$$A = \int_0^{\varphi} M_z^e \cdot d\varphi. \quad (1.387)$$

Якщо обертальний момент є сталою величиною ( $M_z = const$ ), то

$$A = M_z^e \cdot \varphi. \quad (1.388)$$

Потужність сили, прикладеної до обертового тіла

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega. \quad (1.389)$$

*Потужність сили, прикладеної до тіла, що обертається відносно нерухомої осі, характеризує швидкість виконаної роботи і дорівнює добутку моменту сили відносно цієї осі на кутову швидкість тіла.*

---

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке елементарна робота сили?
2. Як впливає кут між векторами сили і швидкості на величину і знак елементарної роботи?
3. Як визначити роботу сили на кінцевому переміщенні?
4. Напишіть формулу роботи сталої сили, спрямованої під кутом до вектора швидкості.
5. Як визначити роботу рівнодійної сили?
6. Визначте роботу сили ваги і сили пружності.
7. Як визначається робота сили, прикладеної до обертового тіла?
8. Що таке коефіцієнт корисної дії і як він визначається?
9. Як визначити потужність сили, прикладеної до обертового тіла?
10. Як визначити потужність сили, прикладеної до тіла, що рухається поступально?
11. Як визначити елементарну роботу сили, прикладеної до обертового тіла?
12. Чому дорівнює повна робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла?
13. Чому робота сили пружності є від'ємною?
14. В яких випадках робота сили ваги є додатною, а в яких – від'ємною?
15. Що таке коефіцієнт жорсткості пружного елемента, як він визначається і яка його розмірність?

## 1.22. Кінетична енергія матеріальних точки і системи

### 1.22.1. Визначення кінетичної енергії. Теорема Кьоніга

Кінетична енергія характеризує здатність механічного руху перетворюватись в еквівалентну кількість іншої форми руху (потенціальна енергія, теплота тощо).

*Кінетична енергія – це друга найважливіша міра механічного*

**руху.** Ця міра руху була введена Г. Лейбніцем і названа «живою силою». У XIX ст. з появою поняття енергії Г. Гельмгольц назвав цей вид енергії кінетичною.

**Кінетичною енергією** матеріальної точки називають скалярну міру механічного руху, яка **дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості** в нерухомій системі координат

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} m v^2, \quad (1.390)$$

де  $\bar{v}$  – швидкість матеріальної точки відносно заданої системи відліку.

Вираз (1.390) приймає різний вигляд в залежності від способу задання руху точки. За векторного способу  $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$  і кінетична енергія дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2. \quad (1.391)$$

За координатного способу швидкість  $\bar{v} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$

де  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – орти осей прямокутної системи декартових координат

$$T = \frac{1}{2} m (x^2 + y^2 + z^2). \quad (1.392)$$

За натурального способу  $\bar{v} = v_\tau \bar{\tau}$ ;  $v_\tau = \frac{ds}{dt}$  – орт дотичної

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (1.393)$$

**Кінетичною енергією** матеріальної системи в нерухомій системі координат називається скалярна величина, яка **дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій точок, що належать системі**

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2, \quad (1.394)$$

де  $\bar{v}_k$  – швидкість  $k$ -ї матеріальної точки відносно нерухомої інерціальної системи координат.

Зрозуміло, що кінетична енергія є додатною величиною і не залежить від напрямків швидкостей точок системи.

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи в абсолютному русі. Система у цьому разі здійснює складний рух, швидкість кожної точки якої складається з векторної суми переносної і відносної швидкостей. Обмежимося тим випадком, коли переносний рух є поступальним зі швидкістю, яка дорівнює швидкості центра мас системи, а початок рухомої системи координат співпадає з центром інерції (центр мас). Матеріальна

### Частина перша

система рухається довільним чином відносно рухомої системи координат, а разом з рухомою системою координат виконує поступальний рух навколо нерухомої системи координат. Тоді абсолютна швидкість довільної точки матеріальної системи  $\bar{v}_k = \bar{v}_c + \bar{v}_{kr}$ , де  $\bar{v}_c$  – швидкість центра мас,  $\bar{v}_{kr}$  – швидкість точки відносно рухомої системи координат, що здійснює поступальний рух. Підставимо абсолютну швидкість точки у вираз і після перетворень маємо три доданки

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr}) \cdot (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2 + \bar{v}_c \cdot \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{kr}. \end{aligned}$$

Останній доданок у цьому виразі дорівнює нулю на підставі того, що початок відліку рухомої системи координат вибраний в центрі мас і тому

$$\bar{r}_c = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \dot{\bar{r}}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{kr} = 0.$$

Остаточо маємо:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2. \quad (1.395)$$

Формула (1.395) є математичним виразом теореми Кьоніга.

**Кінетична енергія матеріальної системи у довільному русі дорівнює сумі кінетичних енергій поступального переносного руху системи разом із центром мас і відносного руху навколо центра мас.**

#### 1.22.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Нехай матеріальна точка масою  $m$  рухається вздовж криволінійної траєкторії із положення  $M_1$  в положення  $M_2$  під дією рівнодійної сили  $\bar{P}$ .

Згідно з основним законом динаміки

$$m \cdot \bar{a} = \bar{P}, \quad (1.396)$$

де  $m$  – маса точки;  $\bar{a}$  – вектор прискорення точки;  $\bar{P}$  – рівнодійна сил, що діють на точку (рис. 1.129).

Спроекуємо рівняння (1.396) на дотичну

$$m \cdot a_\tau = P \cdot \cos(\hat{P}, \bar{v}), \quad (1.397)$$

де  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$  – тангенціальне прискорення.

Підставимо значення  $a_\tau$  у вираз (1.397):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos(\hat{P}, \bar{v}). \quad (1.398)$$

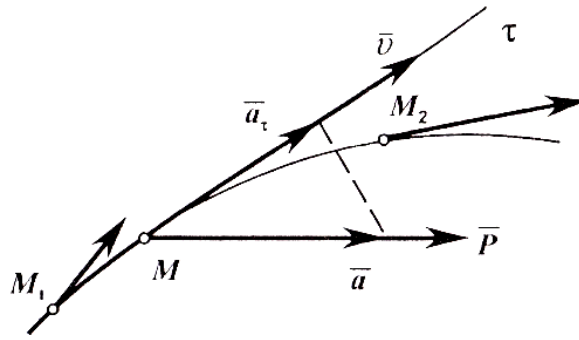


Рис. 1.129

Рівняння (1.398) помножимо на елементарне переміщення точки вздовж траєкторії  $ds$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{P, \bar{v}}), \quad (1.399)$$

де  $P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{P, \bar{v}})$  – елементарна робота сили  $\bar{P}$ ,  $\frac{ds}{dt} = v$ . Підставимо це у вираз (1.399)

$$mv \cdot dv = \delta A \Rightarrow d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \delta A \Rightarrow dT = \delta A. \quad (1.400)$$

Формула (1.400) є математичним виразом теореми у диференціальній формі:

**Диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на цю точку.**

Припустимо, що в момент часу  $t_1$  швидкість точки дорівнювала  $v_1$ , а в момент  $t_2$  –  $v_2$ , і візьмемо визначений інтеграл у відповідних границях

$$\int_{v_1}^{v_2} mv \cdot dv = \int_{M_1}^{M_2} \delta A.$$

Після інтегрування

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A. \quad (1.401)$$

Формула (1.401) є математичним виразом теореми у кінцевій формі.

**Зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили, що прикладена до точки на цьому самому переміщенні.**

Одиницею кінетичної енергії (як і роботи) у Міжнародній системі СІ є джоуль [Дж].

Розглянемо теорему про зміну кінетичної енергії точки у випадку її відносного руху, для якого основний закон динаміки має вигляд (3.20)

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k$$

Проводячи подібні перетворення як для виразу (1.401), дістанемо

$$\frac{mv_{2r}^2}{2} - \frac{mv_{1r}^2}{2} = A(\sum \bar{F}_k) + A(\bar{\Phi}_e) + A(\bar{\Phi}_k), \quad (1.402)$$

де  $A(\sum \bar{F}_k)$ ,  $A(\bar{\Phi}_e)$ ,  $A(\bar{\Phi}_k)$  – робота активних сил, переносної і коріолісової сил інерції, відповідно;

$v_{1r}^2, v_{2r}^2$  – відносна швидкість точки на початку і наприкінці руху.

### 1.22.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла

#### Тверде тіло рухається поступально

Приймаючи до уваги, що за поступальним рухом швидкості всіх точок тіла однакові і дорівнюють швидкості такої характерної точки тіла як центр мас  $\bar{v}_c$ , а відносні швидкості точок дорівнюють  $\bar{v}_r = 0$ , то запишемо на підставі теореми Кьоніга (1.395) формулу кінетичної енергії тіла, що рухається поступально

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} m v_c^2, \quad (1.403)$$

де  $\sum_{k=1}^n m_k = m$  – маса тіла.

*Кінетична енергія тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.*

#### Тверде тіло обертається відносно центральної нерухомої осі

У цьому випадку швидкість центра мас  $\bar{v}_c = 0$ , а швидкість кожної точки тіла  $v_k = \omega \cdot r_k$ , де  $r_k$  – відстань точки до осі обертання. Тоді кінетична енергія тіла на підставі (1.395) дорівнює:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} \Rightarrow T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}, \quad (1.404)$$

де  $I_z = \sum m_k r_k^2$  – осьовий момент інерції тіла, як міра інертності тіла за обертальним рухом.

*Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю  $\omega$  дорівнює половині добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості.*

#### Тверде тіло рухається плоскопаралельно

Плоскопаралельний рух тіла  $M$  можна розглядати у кожний заданий момент часу, як обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей – точки  $P$  (рис. 1.130).



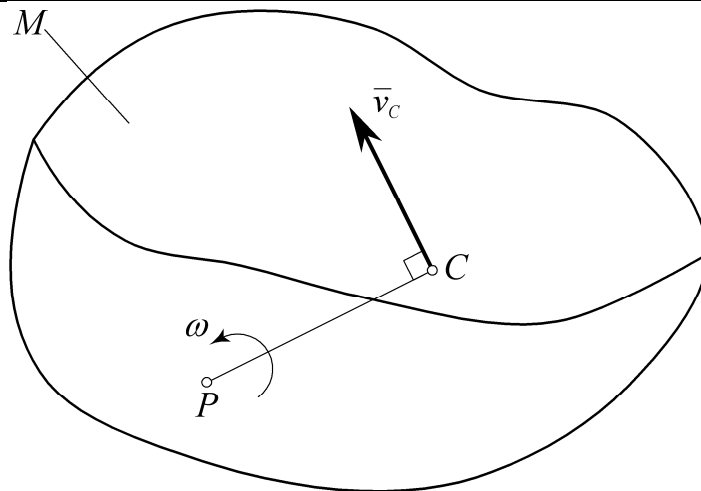


Рис. 1.130

Введемо такі позначення:

$C$  – центр мас тіла;  $v_c$  – швидкість центра мас тіла;

$I_{zc}$  – осьовий момент інерції тіла відносно осі  $z$ , яка проходить через центр мас  $C$  перпендикулярно до площини плоскопаралельного руху;

$I_{zp}$  – осьовий момент інерції тіла відносно осі  $z$ , яка проходить через миттєвий центр швидкостей  $P$ .

За теоремою Гюйгенса-Штейнера (1.318) момент інерції відносно осі, що паралельна центральній осі, дорівнює:

$$I_{zp} = I_{zc} + m \cdot (PC)^2.$$

Оскільки  $v_c = \omega \cdot PC$ , то кінетична енергія тіла дорівнює

$$T = \frac{I_{zp} \cdot \omega^2}{2} = \frac{(I_{zc} + m \cdot (PC)^2) \cdot \omega^2}{2} = \frac{I_{zc} \omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2};$$

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc} \omega^2}{2}. \quad (1.405)$$

**Кінетична енергія тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює арифметичній сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху відносно центра мас.**

Аналогічно, формулу (1.405) можна отримати, сумуючи вирази (1.403) і (1.404).

#### 1.22.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається із  $n$  матеріальних точок і має такі параметри:

$m_1, m_2, \dots, m_n$  – маси матеріальних точок;

$v_{10}, v_{20}, \dots, v_{n0}$  – початкові швидкості кожної точки;

## Частина перша

$v_1, v_2, \dots, v_n$  – кінцеві швидкості кожної точки;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$  – рівнодійні зовнішніх сил, що діють на кожну точку;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$  – рівнодійні внутрішніх сил, як сили взаємодії між точками.

Для кожної точки системи можна записати теорему про зміну кінетичної енергії в кінцевій формі

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^e + A_k^{in}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.406)$$

де  $A_k^e$  – робота рівнодійної зовнішніх сил, які діють на  $k$ -у точку;

$A_k^{in}$  – робота рівнодійної внутрішніх сил, які діють на  $k$ -у точку.

Підсумуємо рівняння (1.406) по всіх точках системи

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (1.407)$$

Запишемо вираз (1.407) більш компактно:

де  $\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = T$  – кінцева кінетична енергія матеріальної системи;

$\sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = T_0$  – початкова кінетична енергія матеріальної системи;

$\sum A_k^e$  – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему;

$\sum A_k^{in}$  – сума робіт внутрішніх сил, які діють між точками системи.

Остаточний вираз теореми має вигляд:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (1.408)$$

**Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому самому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил.**

Особливістю цієї теореми є врахування роботи внутрішніх сил. Хоча головний вектор і головний момент цих сил дорівнюють нулю, але робота, що ними виконується, може відрізнитися від нуля. Зрозуміло, що для незмінних матеріальних систем (деформації тіл яких можна не враховувати) сума робіт внутрішніх сил рівна нулю  $\sum A_k^{in} = 0$ .

Тоді вираз (1.408) спрощується

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (1.409)$$

### Приклад 1.31. Задача №38.24

(І.В. Мещерський. «Збірник задач з теоретичної механіки»).

На рис. 1.131 зображений підйомний механізм лебідки. Вантаж А вагою  $\bar{P}_1$  піднімається за допомогою троса, що перекинутий через блок С і навитий на барабан В радіусом  $r_2$  і вагою  $\bar{P}_2$ .

До барабана прикладений обертальний момент, який з часу включення пропорційний квадрату

кута повороту  $\varphi$  барабана  $M_{об} = k\varphi^2$ , де  $k$  – сталий коефіцієнт.

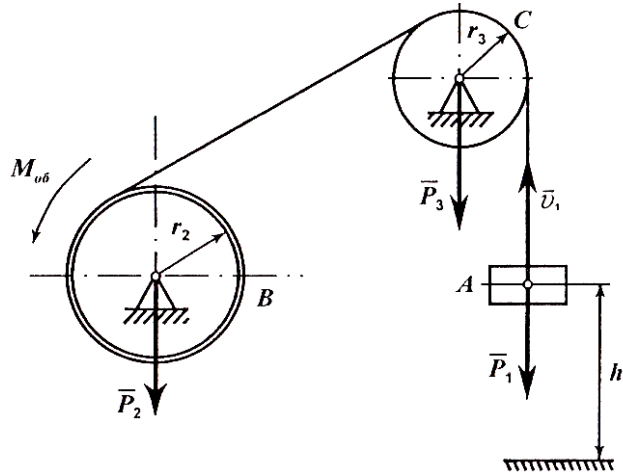


Рис. 1.131

Визначити швидкість вантажу А в момент, коли він підніметься на висоту  $h_1$ . Масу барабана В вважати рівномірно розподіленою по його ободу. Блок С є суцільним диском вагою  $\bar{P}_3$ . Масою і деформацією троса знехтувати. У початковий момент система перебувала у стані спокою.

**Розв'язання**

Задана задача розв'язується за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи, яка вважається незмінною (1.409)

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

На початку руху система перебувала у стані спокою, тому  $T_0 = 0$

$$T = \sum A_k^e. \tag{a}$$

Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі енергій тіл, що складають систему

$$T = T_A + T_B + T_C. \tag{б}$$

Визначимо кінетичну енергію кожного тіла, виразимо її через задані параметри і шукану швидкість.

$$T_A = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P_1 v_1^2}{2g} \text{ – тіло рухається поступально; } T_B = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} \text{ – тіло обертається навколо}$$

нерухомої осі;  $I_2 = m_2 r_2^2 = \frac{P_2 r_2^2}{g}$  – осьовий момент інерції тіла;  $\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}$  – кутова швидкість,

виражена через шукану швидкість  $v_1$ .  $T_B = \frac{P_2 r_2^2 v_1^2}{2g \cdot r_2^2} = \frac{P_2 v_1^2}{2g}$ . Аналогічно і для обертового тіла С:

$$T_C = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \quad I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{r_3}; \quad T_C = \frac{P_3 r_3^2 \cdot v_1^2}{2 \cdot 2g \cdot r_3^2} = \frac{P_3 \cdot v_1^2}{4g}.$$

Підставимо значення кінетичних енергій у вираз (б):

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{P_1 v_1^2}{2g} + \frac{P_2 v_1^2}{2g} + \frac{P_3 v_1^2}{4g} = \frac{v_1^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3).$$

Далі визначаємо праву частину виразу (а) – роботу діючих сил і моментів

$$\sum A_k^e = A(P_1) + A(M_{об}), \tag{c}$$

де  $A(P_1) = -P_1 h_1$  (знак «мінус» свідчить, що це робота сили опору).

$$A(M_{об}) = \int_0^{\varphi} M_{об} \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} k\varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{k\varphi^3}{3}; \quad \varphi = \frac{h_1}{r_2}.$$

Підставимо значення визначених робіт у вираз (с):

$$\sum A_k^e = \frac{k\varphi^3}{3} - P_1 h_1 = \frac{kh_1^3}{3r_2^3} - P_1 h_1 = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Підставимо сумарну кінетичну енергію і сумарну роботу у вираз (а):

$$\frac{v_1^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3) = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

$$\text{Звідки шукана швидкість } v_1 = \frac{2}{r_2} \sqrt{\frac{gh_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}.$$

---

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Запишіть вираз кінетичної енергії точки і системи.
2. Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоскопаралельно і обертаються?
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії точки і напишіть її вираз у диференціальній і кінцевій формах.
4. Яка розмірність кінетичної енергії?
5. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи.
6. Сформулюйте теорему Кьоніга і запишіть її математичний вираз.
7. Означте кінетичну енергію як другу найважливішу міру руху.
8. Чи дорівнює нулю робота внутрішніх сил?
9. Як виражається кінетична енергія точки за натуральним способом задання руху?
10. Проілюструйте основні закони динаміки і закони їх збереження.

## 1.23. Кінетостатика невідільної матеріальної системи

Принцип д'Аламбера надає можливість складати рівняння руху для невідільної матеріальної системи, використовуючи умови геометричної статичності. Такий метод складання рівнянь руху називається методом кінетостатичності. Цей принцип для невідільної системи, наприклад, механізму, можна сформулювати так.

*Для невідільної матеріальної системи або механізму в будь-який момент руху векторна сума головних векторів активних сил, сил реакцій зовнішніх в'язей і сил інерції, а також векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції, обчислених відносно довільного центра, дорівнюють нулю.*

Метод кінетостатичності особливо успішно застосовується для силового або кінетостатичного розрахунку багатоланкових плоских механізмів, де розв'язується перша задача динаміки, коли за заданим законом руху ведучої ланки необхідно визначити сили і моменти сил на інших ланках і реакції у шарнірах або, більш точно, у кінематичних парах.

### 1.23.1. Принцип д'Аламбера для матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається з  $n$  матеріальних

точок з масами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . На кожну точку системи діють активні сили, рівнодійні яких  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  і рівнодійні реакцій в'язей  $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n$ .

Під дією прикладених сил система рухається прискорено. Умовно прикладемо до кожної точки **силу інерції**

$$\bar{\Phi}_1 = -m_1 \bar{a}_1, \bar{\Phi}_2 = -m_2 \bar{a}_2, \dots, \bar{\Phi}_n = -m_n \bar{a}_n.$$

Застосуємо для  $k$ -ї матеріальної точки принцип д'Аламбера (1.237)

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (1.410)$$

Підсумуємо почленно рівняння (1.410) по всіх точках  $k$  системи

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{N}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0,$$

де  $\sum \bar{F}_k = \bar{F}^A$  – головний вектор активних сил матеріальної системи,

$\sum \bar{N}_k = \bar{N}^R$  – головний вектор реакцій в'язей матеріальної системи,

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}$  – головний вектор сил інерції матеріальної системи.

Тоді 
$$\bar{F}^A + \bar{N}^R + \bar{\Phi} = 0. \quad (1.411)$$

**У будь-який момент руху матеріальної системи головний вектор активних сил, головний вектор реакцій в'язей і головний вектор сил інерції умовно складають зрівноважену систему сил.**

Обираємо у просторі довільний полюс  $O$  за центр зведення сил, які діють на матеріальну систему.

Кожна точка системи відносно полюса  $O$  матиме свій радіус-вектор  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ .

Кожний доданок рівняння (1.411) помножимо векторно на радіус-вектор  $\bar{r}_k$ , а потім підсумуємо по всіх точках системи

$$\begin{aligned} \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \bar{r}_k \times \bar{N}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k &= 0, \\ \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{N}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k &= 0, \end{aligned}$$

де  $\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{M}_0^F$  – головний момент активних сил системи;

$\sum \bar{r}_k \times \bar{N}_k = \bar{M}_0^R$  – головний момент реакцій в'язей системи;

$\sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = \bar{M}_0^\phi$  – головний момент сил інерції матеріальної системи.

Тоді 
$$\bar{M}_0^F + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^\phi = 0 \quad (1.412)$$

**У будь-який момент руху матеріальної системи сума головного моменту активних сил, головного моменту реакцій в'язей і головного моменту сил інерції, умовно прикладеного до тіл матеріальної системи, дорівнює нулю.**

Рівнянням (1.411) і (1.412), які математично відображають принцип д'Аламбера для матеріальної системи, відповідають три рівняння в проєкціях на осі прямокутної системи декартових координат і три рівняння

моментів відносно цих самих осей

$$\begin{aligned}
 F_x^A + N_x^R + \Phi_x &= 0, \\
 F_y^A + N_y^R + \Phi_y &= 0, \\
 F_z^A + N_z^R + \Phi_z &= 0, \\
 M_x^F + M_x^R + M_x^\phi &= 0, \\
 M_y^F + M_y^R + M_y^\phi &= 0, \\
 M_z^F + M_z^R + M_z^\phi &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.413}$$

Розглянутий метод внаслідок своєї простоти і наочності широко застосовується в інженерній практиці для розв'язування задач динаміки.

Особливо цей метод зручний для визначенні реакцій в'язей матеріальної системи. Цей метод, звичайно, можна використовувати і для визначення прискорень тіл матеріальної системи.

### **1.23.2. Зведення сил інерції системи матеріальних точок до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції**

Головний вектор сил інерції окремих точок системи не залежить від вибору центра зведення і може бути обчислений заздалегідь

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k; \Rightarrow \bar{\Phi} = -\sum m_k \bar{a}_k = m \cdot \bar{a}_c; \tag{1.414}$$

*Головний вектор сил інерції матеріальної системи, що рухається довільно, дорівнює добутку маси системи на прискорення його центра мас і спрямований протилежно вектору прискорення.*

де  $m$  – маса системи (тіла);  $\bar{a}_c$  – прискорення центра мас системи, яке можна розкласти на тангенціальну і нормальну складові:

$$\bar{a}_c = \bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n; \Rightarrow \bar{\Phi} = -m(\bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n) = -m \cdot \bar{a}_c^\tau - m \cdot \bar{a}_c^n = \bar{\Phi}^\tau + \bar{\Phi}^n.$$

Головний момент сил інерції залежить від вибору центра зведення і визначається для окремих випадків руху твердого тіла.

### **Поступальний рух системи (тіла)**

За поступального руху системи (тіла) відсутнє обертання навколо центра мас, тобто, сума головного моменту активних сил і головного моменту реакцій в'язей відносно центра мас системи дорівнює нулю

$$M_c^F + M_c^R = 0.$$

Згідно з принципом д'Аламбера і з урахуванням останнього виразу

$$M_c^P + M_c^R + M_c^\phi = 0; \Rightarrow M_c^\phi = 0.$$

Оскільки головний момент сил інерції за поступального руху системи відсутній, то головний вектор сил інерції є рівнодієюю сил інерції, тобто, одиничним силовим фактором інерційних сил.

**Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі**

Нехай тіло обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  і кутовим прискоренням  $\varepsilon$  (рис. 1.132). Довільна точка масою  $m_k$  описує коло радіуса  $r_k$  і має тангенціальне прискорення  $\bar{a}_k^\tau$ .

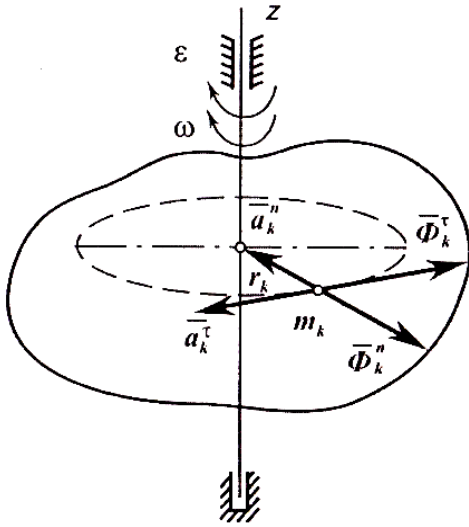


Рис. 1.132

Кожна точка матиме тангенціальну складову сили інерції  $\bar{\Phi}_k^\tau = -m_k \bar{a}_k^\tau = -m_k \varepsilon \cdot r_k$  і нормальну або відцентрову силу  $\bar{\Phi}_k^n = -m_k \bar{a}_k^n = -m_k \omega^2 r_k$ . Остання складова не створює моменту відносно осі обертання, тому що вона перетинає цю вісь. Тангенціальні складові сил інерції створюють моменти відносно осі обертання  $z$ . Плечі цих моментів є відстанями до осі обертання  $r_k$

$$\begin{aligned} M_z^\phi &= \sum \Phi_k^\tau \cdot r_k = -\sum m_k \varepsilon \cdot r_k^2 = \\ &= -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -I_z \varepsilon. \end{aligned}$$

$$M_z^\phi = -I_z \cdot \varepsilon. \tag{1.415}$$

**Момент сил інерції тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням, дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення і спрямований протилежно кутовому прискоренню.**

Зазначимо, що момент сил інерції тіла виникає тільки в період розгону або гальмування (перехідні режими). У період усталеного руху (рівномірне обертання) момент сил інерції дорівнює нулю.

Нагадаємо, що кожна матеріальна точка  $m_k$  обертового тіла, розміщена на деякій відстані  $r_k$ , створює елементарну тангенціальну складову сили інерції  $\bar{\Phi}_k = -m_k \varepsilon \bar{r}_k$  як добуток маси на тангенціальне прискорення.

Підсумуємо елементарні сили за всіма точками тіла і отримаємо зведену тангенціальну силу інерції

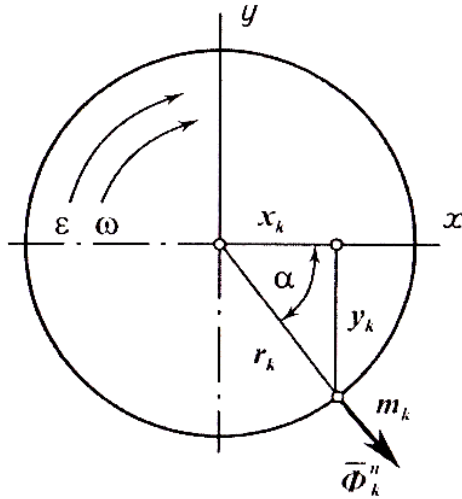
$$\bar{\Phi}^\tau = \sum \bar{\Phi}_k^\tau = -\sum m_k \varepsilon \bar{r}_k = -\varepsilon \sum m_k \bar{r}_k = -\varepsilon \cdot m \cdot \bar{r}_c = -m \bar{a}_c^\tau, \tag{1.416}$$

де  $\sum m_k \bar{r}_k = m \cdot \bar{r}_c$  на підставі виразу для положення центра мас (1.311).

**Тангенціальна сила інерції тіла прикладена в центрі мас тіла і спрямована протилежно тангенціальному прискоренню центра мас, що і підкреслює знак мінус у виразі (1.416).**

Зведемо далі відцентрові сили інерції точок тіла (рис. 1.232).

Згадаємо, що саме для кожної точки  $m_k$  маємо силу інерції  $\Phi_k^n = m_k \omega^2 r_k$ . Зведену або підсумкову силу інерції для всього тіла визначимо через проекції на осі координат, обрані на рис. 1.133



$$\Phi^n = \sqrt{(\Phi_x^n)^2 + (\Phi_y^n)^2} \quad (1.417)$$

$$\Phi_x^n = \sum \Phi_{kx}^n = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha = \omega^2 \sum m_k x_k$$

Значення із формули для координати  $x_c$  центра мас (1.312)  $\sum m_k x_k = m x_c$  підставимо в останнє рівняння

$$\Phi_x^n = \omega^2 \cdot m x_c \quad (1.418)$$

Аналогічно визначимо і проекцію на вісь  $y$

$$\Phi_y^n = \omega^2 \cdot m y_c \quad (1.419)$$

Рис. 1.133

Підставляємо вирази (1.418) і (1.419) у вираз (1.417)

$$\Phi^n = m \omega^2 \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = m \omega^2 r_c = m \cdot a_c^n \quad (1.420)$$

де  $r_c$  – радіус-вектор центра мас тіла;  $a_c^n = \omega^2 r_c$  – нормальне або доцентрове прискорення центра мас.

Аналіз виразу (1.420) відцентрової сили інерції свідчить, що ця сила має місце при всіх режимах обертання (розгін, усталений рух, гальмування) і є досить небезпечною, бо вона пропорційна квадрату кутової швидкості. Відцентрова сила дорівнює нулю, якщо  $r_c = 0$ , тобто, коли центр мас розміщений на осі обертання. Це досягається методом балансування.

$$r_c = 0; \Rightarrow a_c^n = \omega^2 r_c = 0; \Rightarrow \Phi^n = m \omega^2 r_c = 0.$$

### Плоскопаралельний рух тіла

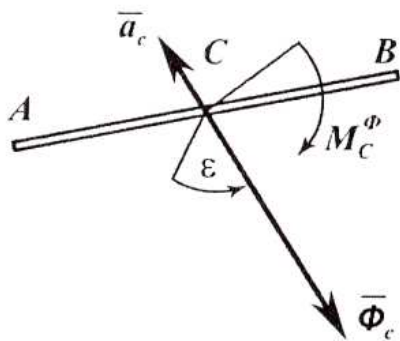


Рис. 1.134

Плоскопаралельний рух твердого тіла може бути розкладений на суму двох рухів: поступальний разом з полюсом і обертальний відносно полюса. За полюс, як правило, обирають центр мас точку  $C$  (рис. 1.134).

Тіло (стрижень  $AB$ ) масою  $m$  рухається у площині рисунка, бо рух плоскопаралельний. Центр мас  $C$  має лінійне прискорення  $\bar{a}_c$ , кутове прискорення тіла –  $\epsilon$ .



Головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції дорівнюють, відповідно:

$$\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c, M_c^\phi = -I_{zc} \cdot \epsilon, \quad (1.421)$$

де  $I_{zc}$  – осьовий момент інерції тіла відносно осі  $z$ , яка перпендикулярна до площини руху і перетинає центр мас.

Напрямок головного вектора сил інерції протилежний вектору прискорення центра мас, де він прикладений. Напрямок головного моменту протилежний напрямку кутового прискорення тіла.

Далі надамо методику застосування принципу д'Аламбера для матеріальної системи і приклад.

**Приклад 1.32**

Визначити прискорення тіл і динамічні реакції під час руху матеріальної системи. Припустимо, що маса другого вантажу більше  $m_2 > m_1$ , тоді блок обертатиметься за ходом годинникової стрілки, саме туди напрямлене і кутове прискорення  $\epsilon$ . Задані маси тіл  $A, B, C$ :  $m_1, m_2, m_3$ . Шків однорідний і суцільний, трос нерозтяжний (рис. 1.135). Визначити прискорення вантажів  $\bar{a}$ ; натяг тросу ліворуч  $N_1$ ; натяг тросу праворуч  $N_2$ ; реакцію опори шківів  $R_0$ .

**Розв'язання**

Визначимо і прикладемо до відповідних тіл силу ваги, силу інерції і момент сил інерції. Визначимо вагу тіл  $G_1 = m_1g, G_2 = m_2g, G_3 = m_3g$ . Визначимо сили інерції тіл і прикладемо протилежно напрямкам їх прискорень  $|\bar{\Phi}_1| = m_1a, |\bar{\Phi}_2| = m_2a$ .

Визначимо через шукане прискорення момент сил інерції шківів і покажемо його напрямком на схемі дуговою стрілкою, яка спрямована проти напрямку кутового прискорення  $\epsilon$

$$|M_z^\phi| = I_z \epsilon = I_z \cdot \frac{a}{r} = m_3 r^2 \frac{a}{r} = m_3 r a,$$

де  $I_z = m_3 r^2$  – осьовий момент інерції шківів відносно центральної осі  $Oz$  (на схемі вісь не показано).

Якщо умовно прикласти до вантажів вектори сил інерції  $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$ , а до шківів – момент сил інерції  $M_z^\phi$ , то система буде в рівновазі і на підставі принципу д'Аламбера можна скласти рівняння рівноваги системи у вигляді суми моментів сил відносно точки  $O$ , виключивши сили натягу тросів  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$  як внутрішні

$$\Phi_1 r + G_1 r + \Phi_2 r - G_2 r + M_3^\phi = 0;$$

$$m_1 a r + m_1 g r + m_2 a r - m_2 g r + m_3 r a = 0,$$

$$\Rightarrow m_1 a + m_2 a + m_3 a = m_2 g - m_1 g.$$

Звідси шукане прискорення вантажів

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Визначимо натяги тросів, зробивши переріз, і реакцію опори шківів. Натяг тросу ліворуч визначається із суми проекцій

$$N_1' = G_1 + \Phi_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a).$$

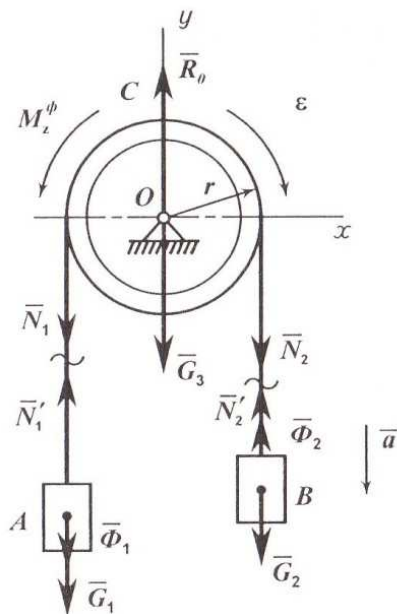


Рис. 1.135

Натяг тросу праворуч для тіла 2 аналогічно

$$N_2' = G_2 - \Phi_2 = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a).$$

Реакція опори шківів визначається із суми проекцій сил на вісь  $y$

$$\begin{aligned} R_0 &= N_1 + N_2 + G_3 = m_1(g + a) + m_2(g - a) + m_3g = \\ &= G_1 + G_2 + G_3 - a(m_2 - m_1). \end{aligned}$$

### 1.23.3. Визначення динамічних реакцій підшипників

Припустимо, що тіло обертається навколо нерухомої осі  $z$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 1.136).

Визначимо динамічні реакції від сил інерції. Якщо до кожної точки тіла прикласти відповідну силу інерції  $\bar{\Phi}_k$ , то тіло умовно перебуватиме у стані рівноваги під дією просторової системи довільних сил.

На рисунку показано:  $G = mg$  – сила ваги тіла;  $m$  – маса тіла;  $h$  – вертикальна відстань між опорами  $A$  і  $B$ ;  $\bar{\Phi}_k$  – сила інерції  $k$ -ї точки;  $x_c, y_c$  – координати центра мас  $C$ , де прикладена сила ваги.

Оскільки кутова швидкість є сталою величиною, то тангенціальна складова сил інерції дорівнює нулю. Динамічні доданки створює відцентрова сила, яка в кожній точці дорівнює  $|\bar{\Phi}_k| = m_k \omega^2 r_k$ .

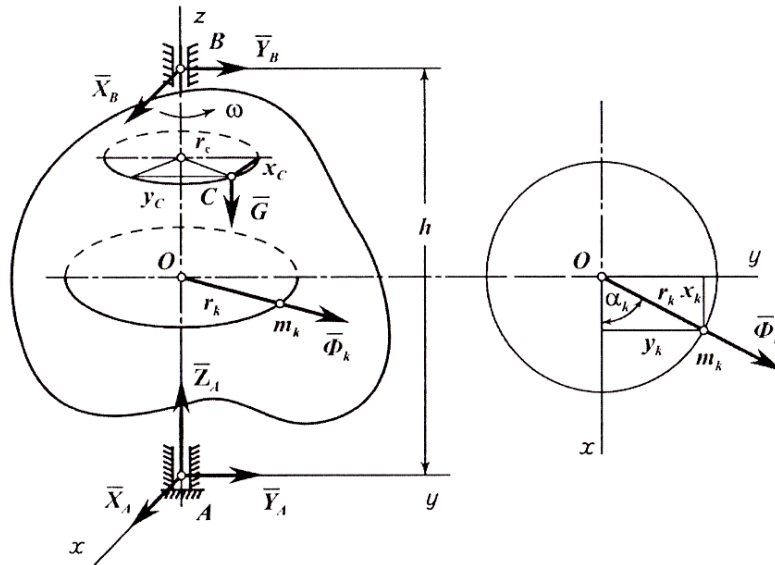


Рис. 1.136

$$\cos \alpha_k = \frac{x_k}{r_k}, \quad \sin \alpha_k = \frac{y_k}{r_k}.$$

Складемо шість рівнянь рівноваги на підставі принципу д'Аламбера:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum F_{kx} &= 0 & x_A + x_B + \sum \Phi_{kx} &= 0, \\ 2. \quad \sum F_{ky} &= 0 & y_A + y_B + \sum \Phi_{ky} &= 0, \\ 3. \quad \sum F_{kz} &= 0 & z_A - G &= 0, \\ 4. \quad \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0 & -G \cdot y_C - y_B \cdot h - \sum m_x(\bar{\Phi}_{ky}) &= 0, \end{aligned} \tag{1.422}$$

$$5. \sum m_y(\bar{F}_k) = 0 \quad G \cdot x_C + x_B \cdot h + \sum m_y(\bar{\Phi}_{kx}) = 0.$$

$$6. \sum m_z(\bar{F}_k) = 0$$

У шостому рівнянні сума моментів відносно осі тотожно дорівнює нулю, тому що всі сили паралельні або перетинають вісь обертання.

Визначимо проекцію головного вектора сил інерції на вісь  $x$

$$\sum \Phi_{kx} = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha_k = \sum m_k \omega^2 r_k \frac{x_k}{r_k} = \sum m_k \omega^2 x_k = \omega^2 \sum m_k x_k = \omega^2 m \cdot x_c .$$

Аналогічно і на вісь  $y$   $\sum \Phi_{ky} = \omega^2 m \cdot y_c .$

Визначимо моменти від сил інерції відносно осей  $x$  і  $y$

$$\sum m_x(\bar{\Phi}_{ky}) = -\sum m_k \omega^2 y_k z_k = -\omega^2 \sum m_k y_k z_k = -\omega^2 \cdot I_{yz} ,$$

$$\sum m_y(\bar{\Phi}_{kx}) = \sum \Phi_{kx} \cdot z_k = \sum m_k \omega^2 x_k z_k = \omega^2 \sum m_k x_k z_k = \omega^2 I_{xz} ,$$

де  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  – відцентрові моменти інерції тіла.

Остаточно, після підстановки визначених сил інерції і моментів інерційних сил рівняння для динамічних реакцій набувають вигляду

$$\begin{aligned} 1. & x_A + x_B + \omega^2 m x_c = 0 , \\ 2. & y_A + y_B + \omega^2 m y_c = 0 , \\ 3. & z_A - G = 0 , \\ 4. & -G \cdot y_C - y_B \cdot h - \omega^2 I_{yz} = 0 , \\ 5. & G \cdot x_C + x_B \cdot h + \omega^2 I_{xz} = 0 . \end{aligned} \tag{1.423}$$

З рівнянь (1.423) можна визначити динамічні реакції, якщо відомі координати центра мас  $x_C$ ,  $y_C$  і відцентрові моменти інерції тіла  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$ . А шукані реакції, як можна побачити з системи рівнянь, залежать від квадрату кутової швидкості тіла  $\omega^2$ . Статичними реакціями є ті, що залишаються, якщо  $\omega = 0$  (спокій).

Динамічні ж реакції можуть бути значно більші, ніж статичні, і це залежить не тільки від величини кутової швидкості  $\omega$ , але і від геометричних і масових характеристик тіла  $x_c, y_c, I_{xz}, I_{yz}$ , які визначають розподіл маси тіла по відношенню до осі обертання  $z$  і асиметрію мас відносно двох осей. З аналізу рівнянь (1.423) випливає, що динамічні реакції опор, які виражаються останніми доданками в рівняннях 1, 2, 4, 5, будуть відсутні, якщо виконуються умови:

$$x_C = 0, y_C = 0, I_{xz} = 0, I_{yz} = 0. \tag{1.424}$$

Перші дві умови (1.424) означають, що центр ваги або центр мас розміщений на осі обертання, а останні дві умови свідчать про те, що вісь  $z$  є головною віссю інерції. Таким чином, для знешкодження динамічних реакцій на опорах (підшипниках) необхідно, щоб вісь обертання була

### **Частина перша**

---

головною центральною віссю інерції тіла для початку координат. Сили інерції усіх точок при цьому врівноважуються, а вісь обертання буде вільною віссю обертання. Тіла, які обертаються навколо осі і у яких реакції опор не залежать від величини кутової швидкості і кутового прискорення, називаються динамічно зрівноваженими.

---

#### **ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Напишіть формулу зведеного моменту сил інерції тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
2. Чому сили інерції вважаються фіктивними, а принцип д'Аламбера – формальним?
3. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для матеріальної системи.
4. Як звести до рівнодійної сили інерції точок тіла, яке рухається поступально?
5. Як звести до відповідних силових факторів сили інерції точок тіла, що обертається навколо осі, рухається плоскопаралельно?
6. На підставі якого принципу відбувається кінетостатичне дослідження механізму?
7. Який порядок приймається під час дослідження механізму?
8. Як визначаються динамічні реакції підшипників?
9. Назвіть умови динамічної зрівноваженості обертового тіла.
10. Що таке статичне балансування? Чому саме динамічне балансування є достатнім для повної зрівноваженості обертового тіла?

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. / М.А. Павловський – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. / С.М. Тарг – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова Часть 1. Статика. Кинематика. – М.: Высш. шк., 1972. – 436 .
4. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. / И.В. Мещерский – М.: Наука, 1972. – 258 с.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под общ. ред. проф. А. А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. – 367с.
6. Булгаков В.М. Інженерна механіка. Частина I. Теоретична механіка. / В.М. Булгаков, О.І. Литвинов, Д.Г. Войтюк – Вінниця: Нова книга, 2006. – 502 с.
7. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики./ Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье – М.: Наука, 1982. – Ч. 1 – 368 с.; Ч. 2 – 640 с.
8. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. / А.А. Яблонский – М.: Высш. шк., 1984. – 423 с.
9. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. / Н.Н. Никитин – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.
10. Сборник коротких задач по теоретической механике. / О.Є. Кепе, Я.А. Виба, О.П. Грапис и др. – М.: Высш. шк., 1999. – 351 с.
11. Геронимус Я. Л. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1973. – 511с.
12. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 811 с.
13. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – Крылов А. Н. Собрание трудов. –М.: Наука, 1936. –Т. 7.
14. Кильчевский Н.А. Основы теоретической механики. / Н.А. Кильчевский, Н.И. Ремизова, Е.Н. Кильчевская. – К.: Вища шк., 1986. – 296 с.

## ЧАСТИНА II. ОСНОВИ ОПОРУ МЕТЕРІАЛІВ

### 2.1. Вступ. Основні положення

#### 2.1.1. Задачі опору матеріалів

Реальним твердим тілам властиві такі якості як міцність і жорсткість, здатність в певних межах сприймати дію навантажень без значних змін форми (геометричних розмірів) і без руйнування. Під час проектування споруд і машин інженеру доводиться вибирати матеріал і поперечні розміри кожної деталі, ланки, елемента, щоб останні чинили опір зовнішнім силам, що передаються від інших частин конструкції, без спотворення своєї форми і ризику руйнування, забезпечуючи нормальне функціонування згаданих об'єктів.

*Наука про міцність, жорсткість, стійкість і інші механічні властивості елементів інженерних конструкцій, споруд та деталей механізмів і машин називається опором матеріалів.*

Методами *опору матеріалів* проводяться практичні розрахунки і визначаються оптимальні розміри деталей механізмів і машин та різних будівельних споруд. Під час проектування цих об'єктів інженер вибирає матеріал і розраховує поперечні розміри для кожного елемента конструкції таким чином, щоб була забезпечена нормальна робота цього елемента, щоб він надійно, без руйнування і відчутної деформації чинив опір дії зовнішніх сил, постійних і змінних навантажень. Наукову базу для правильного вирішення цієї задачі надає наука про опір матеріалів.

*Опір матеріалів* вивчає поведінку різних матеріалів під час дії на них сил і надає вказівки, як підібрати для кожного елемента конструкції відповідний матеріал і оптимальні поперечні розміри за умови надійної роботи при найменшій витраті матеріалу.

Основні теоретичні положення *опору матеріалів* обґрунтовані законами теоретичної механіки і в першу чергу теоремами та принципами статички, без знання яких вивчення курсу опору матеріалів неможливе.

На відміну від теоретичної механіки *опір матеріалів* вирішує завдання, в яких найбільш вагомими є властивості деформованих тіл, а закони руху жорсткого тіла відступають на другий план.

*Опір матеріалів* створює науково обґрунтовані методи розрахунків найбільш поширених типових елементів будівельних конструкцій і деталей механізмів і машин, широко використовуючи наближені інженерні методи.

Методи опору матеріалів під час виконання інженерних розрахунків необхідно використовувати творчо. Слід пам'ятати, що успіх практичного розрахунку залежить не лише від безпомилкового використання складного математичного апарату, а й від уміння розуміти фізичну суть досліджуваного об'єкта, від майстерності знаходити найбільш вдалу

модель реального об'єкта.

Опір матеріалів є однією з основних загально-інженерних дисциплін і відіграє суттєву роль у становленні інженера будь-якої спеціальності.

Розвиток *опору матеріалів* йшов паралельно з прогресом будівництва і машинобудування та пов'язаний з цілою низкою робіт видатних математиків, фізиків і інженерів.

Сучасний технологічний прогрес потребує високопродуктивної енергонасиченої техніки великих швидкостей. Але існуючі матеріали і методи перевірки їх міцності вже не задовольняють потребам практики. Тому завжди йде пошук нових «прогресивних» матеріалів, легких і міцних, розробляються нові методи дослідження їх механічних і фізичних властивостей. Наука про опір матеріалів приречена встигати за загальним прогресом техніки.

Опір матеріалів, вивчаючи залежність між силами та викликаними ними деформаціями і напруженнями в елементах конструкцій, надає інженеру можливість протиставити дії зовнішніх сил стрижень або інший елемент конструкції оптимально достатніх розмірів із найбільш придатного конструкційного матеріалу.

Основними вимогами суспільства до машини або до інженерної конструкції є надійність, економія матеріалів та людської праці під час створення і експлуатації об'єктів. Ці вимоги суперечать одна одній, але спонукають науку до удосконалення її методів.

Початок опору матеріалів як науки пов'язують з ім'ям видатного вченого епохи Відродження Галілео Галілея (1564-1642). Оpubліковані ним у 1638 р. дослідження присвячені розв'язанню задач про залежність між розмірами балок і інших елементів конструкцій та тими навантаженнями, що вони здатні витримати.

### **2.1.2. Методи опору матеріалів і моделі об'єктів дослідження**

Конструювання і розрахунок механізмів, машин або інженерних споруд тісно пов'язані між собою. Перше передбачає детальне розроблення структурно-кінематичної схеми і креслень певних конструкцій, що мають бути виготовлені з обраних конструкційних матеріалів, а метою розрахунку конструкцій є перевірка їх елементів на міцність, жорсткість і стійкість.

*Опір матеріалів* – це наука про міцність окремих частин конструкцій і машин, яка ґрунтується на набутому практичному досвіді із використанням сучасних теоретичних і експериментальних методів шляхом побудови і вивчення моделей реальних об'єктів. Теоретичні моделі базуються на основі законів фізики, механіки, теплотехніки й інших

## **Частина друга**

наук із застосуванням математичного апарату. Емпіричні ж моделі будуються на основі спостережень і дослідних даних. Опір матеріалів із моменту свого виникнення завжди був тісно пов'язаний з повсякденною практикою.

Опір матеріалів не є суто теоретичною наукою. Методи науки про опір матеріалів ґрунтуються на експериментальному дослідженні справжніх властивостей застосованих конструкційних матеріалів.

Теоретичні положення опору матеріалів базуються на законах механіки твердого тіла. Разом із тим, розв'язок будь-якої задачі опору матеріалів починається з припущень, які ґрунтуються на базі експериментальних досліджень, і закінчується перевіркою одержаних теоретичних розрахунків у лабораторії. Як вказував видатний німецький філософ Гегель у праці «Наука логіки», шлях розвитку будь-якої науки наступний: «Від живого споглядання до абстрактного мислення і від нього до практики – такий діалектичний шлях пізнання істини, пізнання об'єктивної реальності».

Опір матеріалів широко застосовує методи абстракцій, узагальнення, методи математичної і формальної логіки. Критерієм істинності наших знань є досвід і практика.

Опір матеріалів як і будь-яка наука має справу не з самими реальними матеріальними об'єктами, а з їх ідеальними моделями з тим чи іншим ступенем межі абстракції конкретних властивостей реальних фізичних тіл.

До таких ідеальних моделей реальних тіл як конструктивних елементів споруд і машин належать брус (балка, стрижень), пластинка, оболонка, масив. До цих основних форм зводиться все різноманіття реальних тіл, що зустрічаються на практиці.

**Брусом називається елемент конструкції, у якого один із розмірів – довжина, є значно більший від двох інших.** Це найбільш поширений в інженерній практиці елемент. Залежно від форми геометричної осі брусся можуть бути прямолінійні і криволінійні. Більшість деталей машин і конструкцій можна вважати брусами з допустимим для практики наближенням.

Відносно тонкий і довгий брус із прямолінійною віссю, що працює на розтяг або стиск, називається **стрижнем**.

Брус із прямолінійною віссю, що працює на кручення, називається **валом**.

Брус із прямолінійною віссю, що працює на згин, називається **балкою**.

**Пластинкою** називається елемент конструкції, обмежений двома паралельними площинами, у якого два розміри (довжина і ширина) більші від третього (товщина).

**Оболонкою** називається елемент, обмежений кривими поверхнями, у



якого два розміри більші від третього.

**Масивом** називається елемент, у якого всі три розміри мають величини одного порядку.

### **2.1.3. Класифікація зовнішніх сил, діючих на конструкцію**

1. Залежно від місця прикладання зовнішні сили поділяються на **поверхневі сили**, наприклад, тиск рідини на поверхню гідроциліндра і **об'ємні сили**, прикладені до кожної точки об'єму елемента (сила ваги).

2. Залежно від розміру площі дії зовнішні сили поділяються на **зосереджені**, прикладені в точці, і **розподілені по лінії** (погонне навантаження певної інтенсивності) або **площині** (тиск води на греблю).

3. За характером дії зовнішні сили поділяються на **статичні**, що не викликають прискорень в елементах системи, **динамічні** (інерційні, ударні, періодичні та вибухові), а також на **постійні** (власна вага) і **тимчасові**.

### **2.1.4. Поняття про деформацію. Метод перерізів**

Реальні тіла внаслідок дії зовнішніх сил змінюють свою форму і як наслідок – геометричні розміри.

**Зміна форми (геометричних розмірів) тіла називається деформацією.**

Величина і характер деформації залежить від структури застосованих матеріалів.

**Деформація, яка зникає повністю після припинення дії зовнішніх сил, називається пружною, а здатність тіл відновлювати свою початкову форму називається пружністю.**

Хоча абсолютно пружних тіл в природі не існує, проте, деякі матеріали (сталь, дерево та ін.) за своїми властивостями подібні до таких тіл, якщо зовнішні сили не перевершують певної границі (границі пружності), встановленої для них дослідним шляхом.

Перевищення границі пружності веде до виникнення **залишкових деформацій**. При проектуванні елементів конструкцій їх розміри повинні бути такими, щоб не виникали залишкові деформації.

Під дією зовнішніх сил в елементах конструкції виникають додаткові внутрішні сили міжмолекулярної взаємодії, які супроводжують деформацію і чинять опір намаганням зруйнувати цей елемент, змінити його форму, відокремити одну частину від іншої, а потім і відновити попередню форму після зняття зовнішніх сил.

Для визначення статичного еквівалента внутрішніх сил використовуємо відомий із механіки **метод перерізів, який полягає в**

## Частина друга

уявному відсіканні однієї частини елемента і переведенні внутрішніх сил перерізу у зовнішні, адже внутрішні сили визначити не можна. Цей метод є окремим випадком застосування аксіоми про звільнення від в'язей.

Уявимо тіло, до якого прикладена у загальному вигляді просторова система довільних сил, яке умовно розсікають площиною на дві частини (рис. 2.1). Для стрижня ця площина має бути перпендикулярною до центральної осі.

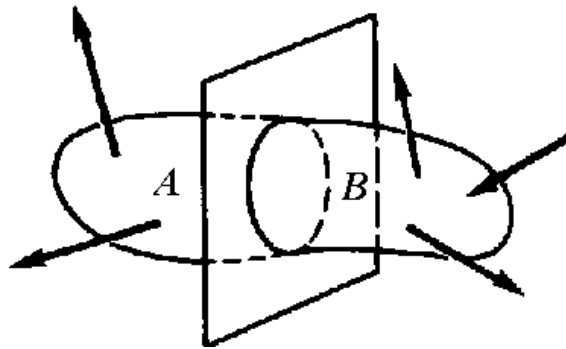


Рис. 2.1

Далі одну із частин тіла відкидають, замінюючи її дію на іншу частину силами, прикладеними в площині перерізу, і розглядають рівновагу тієї частини, що залишилася (рис. 2.2).

Згідно з теоремою Пуансо із статyki, будь яку систему сил, що розподілені по перерізу, можна звести до однієї точки, наприклад, до центра ваги перерізу  $O$  і отримати у підсумку головний вектор і головний момент системи сил. На рис. 2.2 прямими стрілками показані проєкції головного вектора, а дуговими стрілками – проєкції головного моменту на осі вибраної прямокутної системи декартових координат  $Oxyz$ .

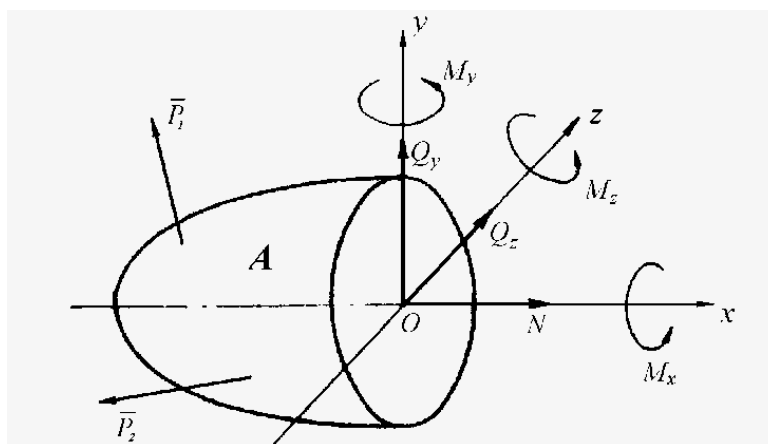


Рис. 2.2

Таким чином, зовнішні сили, прикладені до залишеної частини тіла, рівноважуються силами, діючими в площині перерізу у вигляді проєкцій

головного вектора и головного моменту. Це дозволяє скласти для частини тіла (наприклад, для частини А) в загальному випадку просторової системи сил шість рівнянь на підставі умов рівноваги (2.1).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рівняння, що складаються на підставі умов рівноваги (2.1), дають можливість визначити головний вектор і головний момент системи сил по їх проекціях, які еквівалентні внутрішнім силам пружності в перерізі, але методом перерізів переведені у зовнішні (рис. 2.2).

У загальному випадку із шести рівнянь рівноваги в поперечному перерізі тіла визначаються шість складових сил: три проекції сили  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  – складові головного вектора, напрямлені вздовж координатних осей, і три проекції моменту  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  – складові головного моменту сил.

Вказані шість складових сил називаються **силовими факторами**, що діють у перерізі тіла. Кожна з цих складових має свою назву і позначення:

$N_x$  – подовжня (нормальна) сила  $N$ ;  $Q_y$ ,  $Q_z$  – поперечні сили  $Q$ ,  $M_x$  – момент кручення  $M_\kappa$ ;  $M_y$ ,  $M_z$  – згинальні моменти  $M_{зг}$ .

### 2.1.5. Основні типи деформацій

Складові силових факторів залежать від характеру навантаження тіла і характеру його деформованого стану. При різних видах деформації в поперечному перерізі будуть виникати різні силові фактори.

Розглянемо окремі випадки простого деформованого стану тіла, якщо в його поперечному перерізі діє лише один силовий фактор.

1. **Подовжня деформація розтягу (стиску)** відбувається, якщо в поперечному перерізі виникає подовжня сила  $N$ , напрямлена вдовж центральної осі тіла. Такої деформації зазнають стрижні, троси, паси, шатуни двигунів, навантажені зовнішніми силами вздовж їх осей (рис. 2.3 а, б).

2. **Деформація зсуву** відбувається тоді, коли в поперечному перерізі виникає поперечна сила  $Q$ , що лежить в площині перерізу. Така деформація спостерігається в болтах, клепках, зварних швах, де зовнішні сили протилежно спрямовані, зміщуючи плоскі перерізи елементів

## Частина друга

з'єднання один відносно одного (рис. 2.3 в).

3. **Деформація кручення** відбувається, якщо в поперечному перерізі виникає крутний момент  $M_k$ , паралельний його площині. Таку деформацію маємо, наприклад, у валах, де діють пари сил, площини яких перпендикулярні до осі вала (рис. 2.3 г).

4. **Деформація чистого згину** відбувається тоді, коли в поперечному перерізі перпендикулярно до нього діє згинальний момент  $M_{зг}$ , що врівноважує дію зовнішніх згинальних моментів. Деформацію чистого згину можна отримати від дії на балку зовнішніх згинальних моментів (рис. 2.3 д).

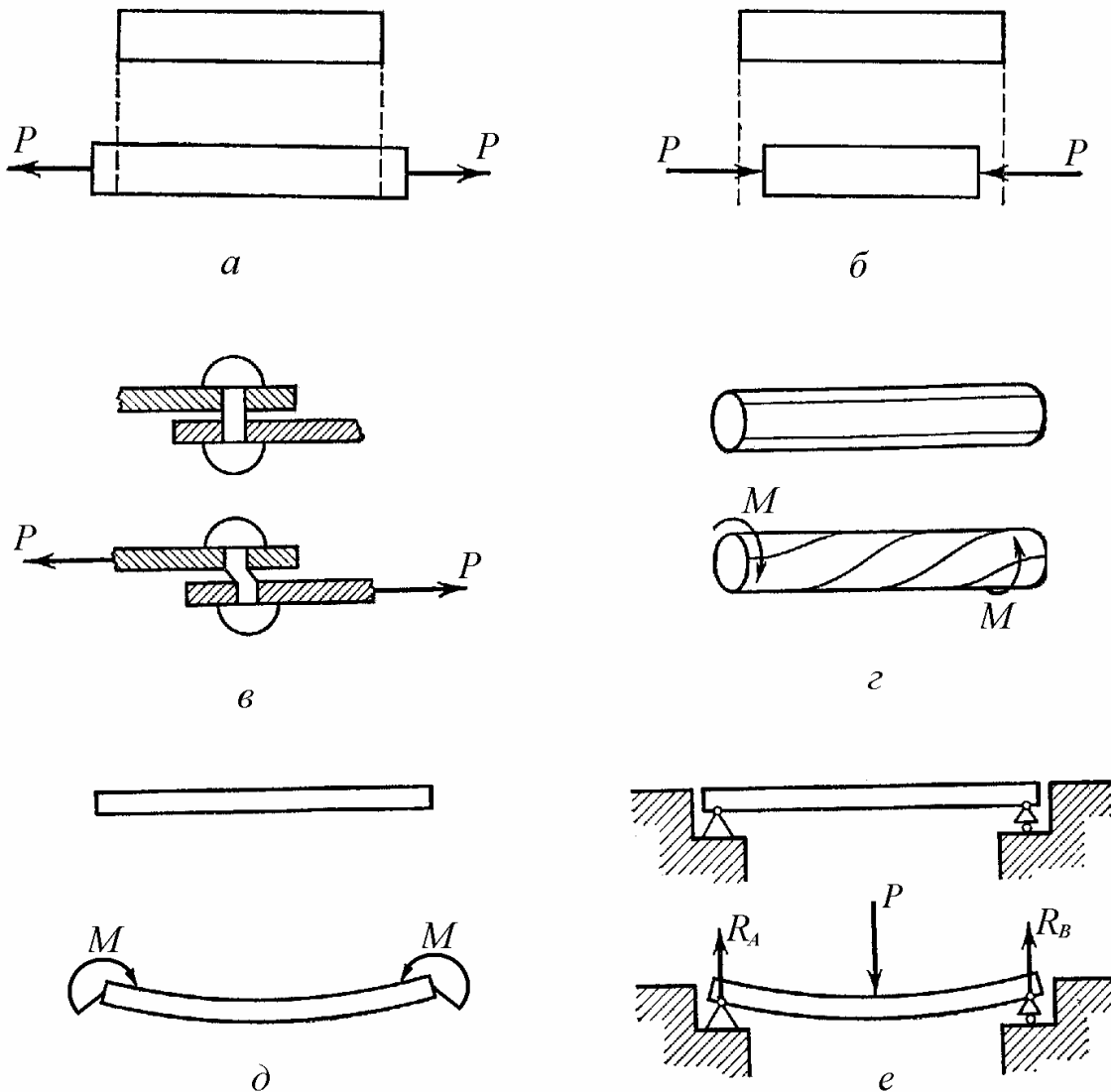


Рис. 2.3

Слід наголосити, що в таких конструкціях може відбуватися **деформація поперечного згину**, коли в поперечному перерізі діє два силові фактори – згинальний момент  $M_{зг}$  і поперечна сила  $Q$ . Деформація згину спостерігається в балках (рис. 2.3 е), осях, зубцях зубчастих коліс і інших

об'єктах, які моделюються як балки.

Випадки одночасної дії в поперечних перерізах тіла декількох силових факторів відносять до складних видів деформованого стану тіла, при якому має місце поєднання основних видів деформації (наприклад, згин з крученням, кручення і розтяг, тощо).

### **2.1.6. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів**

Під час дослідження напруженого стану реальних тіл виникають складнощі, зумовлені великим різноманіттям фізичних і механічних властивостей матеріалів щодо їхньої структури, характеру деформацій, геометрії конструкції. У зв'язку з цим для побудови теорії опору матеріалів приймають низку гіпотез і припущень.

1. **Гіпотеза плоских перерізів.** Припускається, що плоскі перерізи, уявно проведені до деформації перпендикулярно до осі стрижня, залишаються плоскими і перпендикулярними до осі і після деформації. Ця гіпотеза справедлива для багатьох важливих у практичному плані випадків.

2. **Гіпотеза про суцільність.** Вважається, що весь об'єм тіл суцільно заповнений речовиною. Дискретність тіл до уваги не приймається.

3. **Гіпотеза про мализну деформацій.** Деформації тіл, зумовлені дією зовнішніх сил, вважаються малими порівняно з їх розмірами. Це дає підставу для нехтування зміною положення точок прикладання сил на тілі внаслідок деформації, тому рівняння статички складають для недеформованого тіла.

4. **Гіпотеза про однорідність і ізотропність.** Припускається, що фізичні і механічні властивості тіла однакові в усіх точках та в кожній точці – по всіх напрямках. Однорідні тіла (матеріали), які мають однакові фізичні і механічні властивості по всіх напрямках, називаються **ізо­тропними**. Тіла, які не мають властивостей ізо­тропності, називаються **анізо­тропними**. До останніх можна віднести деревину і синтетичні матеріали.

5. **Гіпотеза про лінійну залежність між навантаженням і деформацією.** Припускається, що для більшості матеріалів справедливий закон Гука, який встановлює таку пряму пропорційність. Як наслідок гіпотез про мализну деформацій і лінійну залежність між навантаженням і деформацією застосовується **принцип суперпозиції** (принцип незалежності дії сил): **результат дії на тіло системи сил дорівнює векторній сумі результатів дії тих же самих сил, якщо вони прикладаються до тіла окремо.**

### 2.1.7. Поняття про напруження у перерізах

У кожному ненавантаженому тілі за для збереження його форми існують сили взаємодії між кристалами, молекулами, атомами, які в опорі матеріалів не враховуються.

В елементах навантажених конструкцій під дією зовнішніх сил виникають додаткові внутрішні сили взаємодії між її окремими частинами, сили пружності, які іноді називають зусиллями. Виникнення цих додаткових внутрішніх сил супроводжується деформацією матеріалу. Сили пружності протидіють зовнішнім силам і намагаються відновити попередню форму тіла.

Поряд із поняттям деформації одним із основних понять опору матеріалів є така фізична величина, як **напруження** в точці перерізу тіла.

**Напруження характеризує інтенсивність сил пружності, що діють у перерізі.**

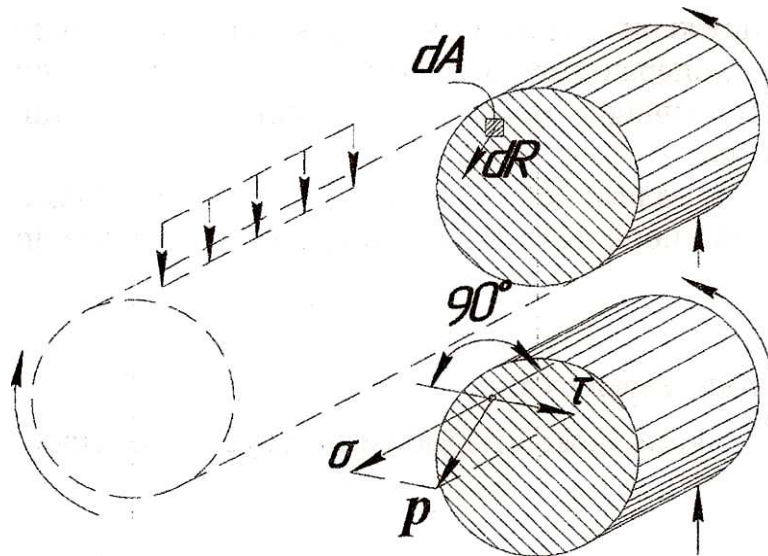


Рис. 2.4

Розглянемо довільно навантажений брус і застосуємо до нього метод перерізів (рис. 2.4).

Виділимо у перерізі нескінченно малий елемент площі  $dA$  (вважаємо матеріал бруса суцільним).

Завдяки малізні цього елемента можна вважати, що в його межах сили, прикладені до різних точок, однакові за модулем і напрямом, отже, вони є системою

сил, що паралельні одна одній. Рівнодійну цієї системи сил позначимо  $\Delta \bar{R}$ .

**Межу відношення величини рівнодійної сил елемента перерізу  $\Delta \bar{R}$  до елементарної площини цього елемента  $\Delta A$ , якщо остання**

стягується в точку, називається дійсним напруженням  $\bar{p}$  в цій точці.

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A} = \frac{d\bar{R}}{dA}. \quad (2.2)$$

У Міжнародній системі одиниць СІ напруження вимірюється у паскалях:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . Практично використовують кратні одиниці: кілопаскаль (КПа), мегапаскаль (МПа):  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$ .

Розкладаючи вектор напруження на нормаль (перпендикуляр до перерізу) і дотичну (площина перерізу) одержимо нормальні і дотичні складові напруження. Оскільки кут між нормальними і дотичними напруженнями прямий, то модуль повного напруження  $p$  визначається за формулою:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (2.3)$$

Розкладання повного напруження на нормальну і дотичну складові має цілком визначений фізичний зміст. Як побачимо далі, в поперечному перерізі бруса у випадках розтягу, стиску і чистого згину діють **тільки нормальні напруження**, а при зсуві і крученні – **тільки дотичні напруження**.

Користуючись принципом незалежності дії сил, можна переходити від вивчення найпростіших основних деформацій, коли в поперечних перерізах бруса діють тільки нормальні або дотичні напруження, до вивчення більш складніших типів деформацій.

Зазначимо, що принцип незалежності дії сил стосується тільки конструкцій, деформації яких малі порівняно з їх розмірами і пропорційні діючим навантаженням за законом Гука.

В інженерній практиці дуже поширені конструкції, які складаються з кількох брусів, наприклад, ферми, рами та ін.

У багатьох машинах і конструкціях є елементи, що мають складну форму – масиви, пластинки і оболонки, розрахунки яких не можна здійснити лише методами, викладеними у курсі опору матеріалів.

## 2.2. Центральний розтяг і стиск

### 2.2.1. Визначення напружень по площадках, перпендикулярних до осі стрижня

Деформацію розтягу (стиску) досліджують на прямолінійних брусках, які називаються стрижнями.

## Частина друга

Центральний розтяг або стиск стрижня виникає під дією сил, прикладених до його кінців і спрямованих вздовж геометричної осі. **Центральна геометрична вісь** – це лінія, що з'єднує центри ваги поперечних перерізів бруса або стрижня.

Якщо сили направлені від кінцевих перерізів назовні, то це буде деформація розтягу (рис. 2.5), а якщо навпаки – деформація стиску. Висновки щодо центрального розтягу здебільшого стосуються і центрального стиску.

Відмінності виникають при дослідженні тонких довгих стрижнів і в процесі руйнування матеріалів.



Рис. 2.5

Розглянемо стрижень постійного перерізу, до кінців якого прикладені сили, які розтягують брус вздовж його осі. Сили можна прикласти до кінців стрижня різними способами.

У місцях прикладання сил процес деформації стрижня проходить у дуже складних умовах, не схожих на простий розтяг. Перерізи, значно віддалені від місця прикладання сил, зазнають, за експериментальними дослідженнями, звичайного розтягу або стиску. Отже, згідно принципу Сен-Венана, характер прикладання сил має тільки місцеве значення і не впливає на напружений стан віддалених перерізів.

Дослідження показали, що при центральному розтягу або стиску переріз у середній частині стрижня залишається плоским і в процесі деформації, поступально переміщуючись вздовж осі стрижня. Отже, підтверджується гіпотеза плоских перерізів Якоба Бернуллі. Звідси можна зробити висновок, що всі поздовжні волокна зазнають однакового видовження або укорочення. Отже, напруження у перерізі також будуть постійними і рівномірно розподіленими по його площині.

При визначенні сил у перерізі уявно розріжемо стрижень (рис. 2.5) у середній частині по перерізу  $mn$ , перпендикулярному до його осі, і відкинемо праву частину цього стрижня (рис. 2.6).

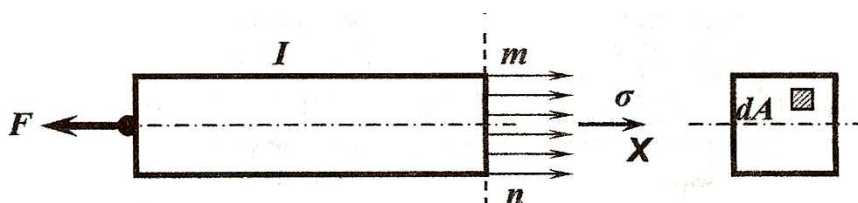


Рис. 2.6

Дію відкинутої частини замінимо силами пружності, які діють у



цьому перерізі. У перерізі  $mn$  діють тільки нормальні напруження  $\sigma$ , оскільки подовжня сила  $\bar{F}$  може бути зрівноважена зворотним зусиллям, яке перпендикулярне до проведеного перерізу і є рівнодієюю нормальних сил пружності.

У перерізі  $mn$  розглянемо елементарну площадку  $dA$ , на яку діє зусилля  $\sigma dA$ . Рівнодієюю рівномірно розподілених по площині елементарних зусиль є нормальною силою  $\bar{N}$ , прикладеною в центрі ваги перерізу. Складемо рівняння рівноваги на підставі умови рівноваги у вигляді суми проєкцій сил на вісь

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0; \Rightarrow -F + N = 0; F = N.$$

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma A.$$

Звідси дістаємо розрахункову формулу для визначення напружень у перерізах, перпендикулярних до осі стрижня:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \tag{2.4}$$

де  $A$  – площа даного поперечного перерізу.

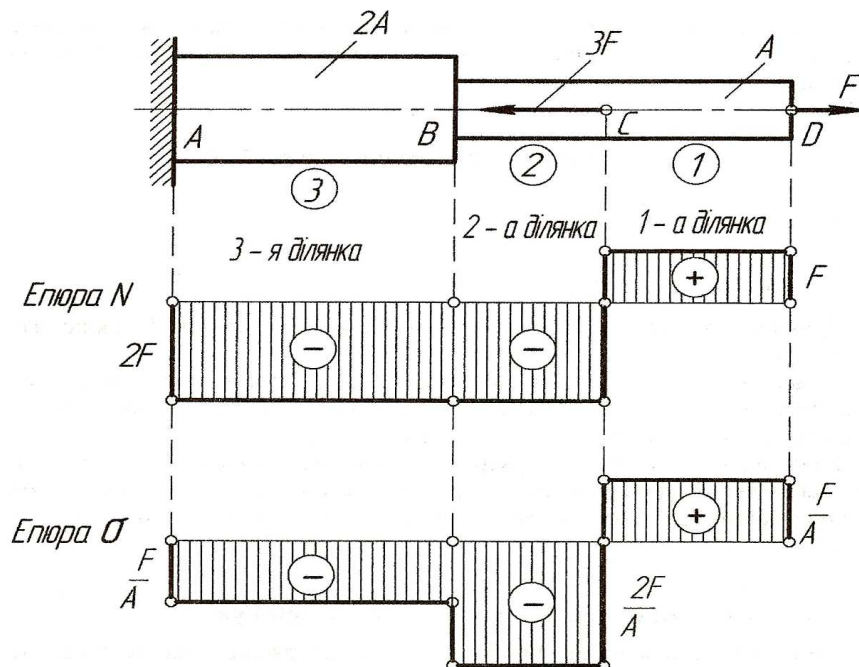


Рис. 2.7

Якщо нормальні сили в окремих поперечних перерізах різні, зручно

## Частина друга

зобразити закон їх зміни у вигляді графіка, який називається *епюрою нормальних сил*.

*Побудуємо епюри подовжніх сил і нормальних напружень* для ступінчастого стрижня, зображеного на рис. 2.7.

Для цього розділимо стрижень на окремі ділянки і пронумеруємо їх, як показано на рисунку.

*Межами ділянок* є точки прикладання зовнішніх сил і місця зміни розміру поперечного перерізу.

Для побудови епюри подовжніх сил  $N$  під рисунком стрижня проведемо базу епюри, паралельну осі стрижня, і штриховими лініями обмежимо ділянки.

Величини подовжніх сил у довільному масштабі відкладемо перпендикулярно до осі епюри, причому додатні значення  $N$  (розтяг) відкладаємо вгору, а від'ємні (стиск) – вниз від осі.

Епюру штрихуємо тонкими лініями, перпендикулярними до осі. Лінія штрихування в масштабі (ордината графіка) дає значення подовжньої сили у відповідному поперечному перерізі бруса.

У точках прикладання зосереджених сил на епюрі  $N$  відбуваються стрибкоподібні зміни, причому величина «стрибка» дорівнює модулю прикладеної в перерізі бруса зовнішньої зосередженої сили.

Перейдемо до деталізації. Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, дивлячись справа, що в усіх поперечних перерізах першої ділянки діє подовжня сила  $N_1 = F$ .

Відкладемо вгору від осі епюри величину  $F$  у довільному масштабі і проведемо в межах ділянки пряму, паралельну осі епюри.

У точці  $C$  стрижня прикладено силу  $3F$ . Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, що в усіх поперечних перерізах другої і третьої ділянок діє подовжня сила  $N_2 = N_3 = -2F$ , тоді епюра буде горизонтальною лінією, яка проходить на  $2F$  нижче від осі епюри.

Очевидно, що значення ординати епюри подовжніх сил зліва під жорстким закріпленням дорівнює величині реакції опори. Тому зручніше розглядати рівновагу частини стрижня з боку його вільного кінця, щоб заздалегідь не визначити реакцію закріплення.

Щоб побудувати епюру нормальних напружень  $\sigma$ , визначимо ці напруження на ділянках стрижня:

$$\begin{aligned} \text{нормальні напруження на першій ділянці } \sigma_1 &= \frac{F}{A}; \\ \text{на другій ділянці } - \sigma_2 &= \frac{2F}{A}; \text{ на третій } - \sigma_3 = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}. \end{aligned}$$

Правила побудови епюри нормальних напружень  $\sigma$  такі ж самі, як і для епюри  $N$ , включаючи і правило знаків.

У межах кожної ділянки напруження є сталими, тому епюра  $\sigma$  на

кожній ділянці паралельна осі.

Для наочності на епюрах  $N$  і  $\sigma$  знаками «+» і «-» помічають додатні і від'ємні значення ординат на відповідних ділянках епюр.

У розрахунках на міцність звертають особливу увагу на ті перерізи стрижня, в яких напруження за абсолютною величиною максимальні. Ці перерізи можуть бути небезпечними. У цьому прикладі такими є перерізи бруса на другій ділянці.

### 2.2.2. Деформації при розтягу і стиску стрижня. Закон Гука. Коефіцієнт Пуассона

Під дією прикладених сил розтягу стрижень видовжується, а переріз  $m$  переміщується: в положення  $m_1$  (рис. 2.8).

Якщо позначити початкову довжину стрижня через  $l$ , то **абсолютне видовження** визначиться з виразу:

$$\Delta l = l_1 - l, \quad (2.5)$$

де  $l_1$  – довжина стрижня після деформації.

Абсолютне видовження вимірюється в одиницях довжини (мм, см).

Для зручності порівняння деформацій введемо поняття **коефіцієнта відносного видовження**.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.6)$$

Якщо розглядати межу пружних деформацій стрижня, то для них дослідним шляхом встановлена лінійна залежність (пропорційність) між напруженнями і коефіцієнтом відносного видовження.

Ця залежність виражається законом Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.7)$$

де  $E$  – модуль пружності.

За законом Гука **нормальні напруження прямо пропорційні коефіцієнту відносного видовження**.

Модуль пружності  $E$  (модуль Юнга)

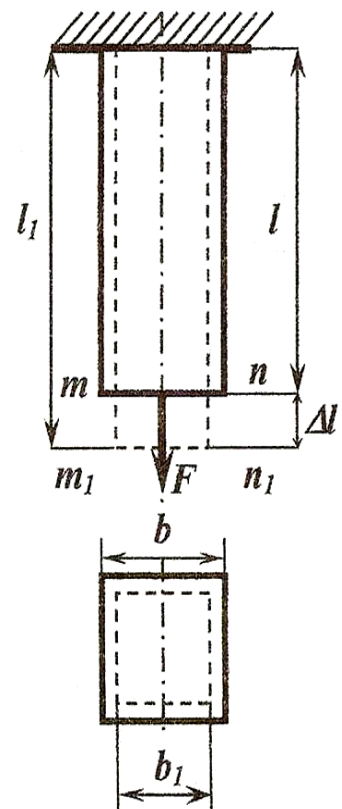


Рис. 2.8

## Частина друга

характеризує пружні властивості матеріалу, здатність чинити опір протидії зовнішнім силам. Як видно з виразу (2.7), розмірність модуля пружності збігається з розмірністю напружень. Середні значення модуля пружності  $E$  для деяких конструкційних матеріалів наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Матеріал	Модуль $E$ в Н/мм <sup>2</sup>
Сталь	$2 \cdot 10^5$
Чавун	$1,1 \cdot 10^5$
Мідь та її сплави (латунь, бронза)	$1 \cdot 10^5$
Алюміній і дюралюміній	$0,7 \cdot 10^5$
Бетон	$(0,1 \dots 0,3) \cdot 10^5$

Визначимо абсолютне видовження стрижня, для чого еквівалентно перетворимо формулу (2.7):

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l}.$$

Звідси отримаємо другу форму запису закону Гука:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}. \quad (2.8)$$

Отже, *абсолютне видовження прямо пропорційне силі та довжині стрижня і обернено пропорційне модулю пружності та площі його поперечного перерізу.*

Розтягнуті (стиснуті) стрижні, як показали досліди, зазнають не тільки подовжньої, а й поперечної деформації (рис. 2.8). Поперечний розмір бруса при розтягу зменшується на величину

$$\Delta b = b_1 - b = -(b - b_1), \quad (2.9)$$

де  $b$  – початковий розмір;

$b_1$  – розмір після деформації.

Коефіцієнт поперечного відносного зменшення дорівнює:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}. \quad (2.10)$$

При стиску, навпаки, збільшуються поперечні розміри стрижня.

*Величина абсолютного відношення коефіцієнту поперечної відносної деформації до коефіцієнту подовжньої відносної*

*деформації називається коефіцієнтом Пуассона*

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

Така важлива характеристика як коефіцієнт Пуассона залежить від властивостей матеріалу і для різних матеріалів змінюється в межах від 0 до 0,5.

Наведемо середнє значення коефіцієнтів Пуассона для деяких конструкційних матеріалів: сталь – 0,25...0,33; мідь, бронза, алюміній – 0,31...0,35; чавун – 0,23...0,27; бетон – 0,08...0,18.

### **Приклад 23.1**

Стальна штанга (стрижень) довжиною 40 м і діаметром 30 мм розтягується силою  $F = 100$  кН. Знайти абсолютне видовження штанги і зменшення її діаметра, якщо коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,25$ , а модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup>.

#### **Розв'язок**

Абсолютне видовження штанги визначають за законом Гука (2.8):

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 706,5} = 28,3 \text{ мм} = 2,83 \text{ см.}$$

Відносне видовження дорівнює (2.6):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2,83}{4000} = 0,00071.$$

Відносну поперечну деформацію штанги визначають із виразу (2.11):

$$\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon = -0,25 \cdot 0,00071 = -0,00017.$$

Абсолютне зменшення діаметра буде:

$$\Delta d = \varepsilon_1 d = -0,000171 \cdot 30 = -0,0053 \text{ мм.}$$

### **Приклад 2.2**

При розтягу силою  $F=50$  кН сталюго плоского зразка з поперечним перерізом  $30 \times 10$  мм і довжиною 220 мм його видовження дорівнювало 0,192 мм, а зменшення більшого поперечного розміру – 0,007 мм. Визначити модуль пружності і коефіцієнт Пуассона.

#### **Розв'язок**

Напруження у зразку дорівнює:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{50}{3} = 16,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,192}{220} = 0,00087.$$

Відносне поперечне видовження:

Відносне зменшення становитиме:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b} = \frac{-0,007}{30} = -0,00023.$$

Модуль пружності:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{16,7}{0,00087} = 1,92 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Тоді, коефіцієнт Пуассона:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{0,00023}{0,00087} = 0,26.$$

### **2.2.3. Експериментальне дослідження розтягу і стиску матеріалів. Діаграма напружень**

Для розрахунку конструкцій необхідно знати механічні властивості (характеристики) матеріалів: міцність, пружність, твердість, пластичність. Більшість механічних характеристик можна визначити прямо або опосередковано при випробуванні *на розтяг* пластичних або крихких матеріалів.

Пластичні матеріали характеризуються тим, що їх руйнування настає лише після значної залишкової деформації, крихкі ж руйнуються при дуже малих залишкових деформаціях. До пластичних матеріалів належать, наприклад, м'яка сталь і мідь, а до крихких – чавун, бетон тощо.

Механічні властивості матеріалів визначаються експериментальним дослідженням на спеціальних машинах. Для цього в лабораторних умовах випробовують технологічно виготовлені зразки. При випробуваннях на розтяг застосовують зразки круглого або прямокутного поперечного перерізу, розширені на кінцях.

Кінці стрижня закріплюють у затискачах машини і розтягують, поступово збільшуючи силу. Величину сили визначають динамометром, а видовження зразка – тензومتром. У більшості сучасних машин є пристрої,

які автоматично викреслюють графік залежності між силою і видовженням, записуючи діаграму розтягу.

Якщо по вертикальній осі замість сил відкладати напруження, а по горизонтальній осі замість абсолютного видовження – відносні, то така діаграма називається діаграмою напружень під час розтягу.

При цьому ординати графіка дорівнюють:

$$\sigma = F / A_0,$$

де  $A_0$  – початкова площа зразка;  $F$  – змінна сила розтягу.

Значення абсциси дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \tag{2.12}$$

де  $\Delta l$  – змінне видовження зразка;  $l_0$  – розрахункова довжина.

Діаграма напружень при розтягу маловуглецевої (м'якої) сталі наведена на рис. 2.9.

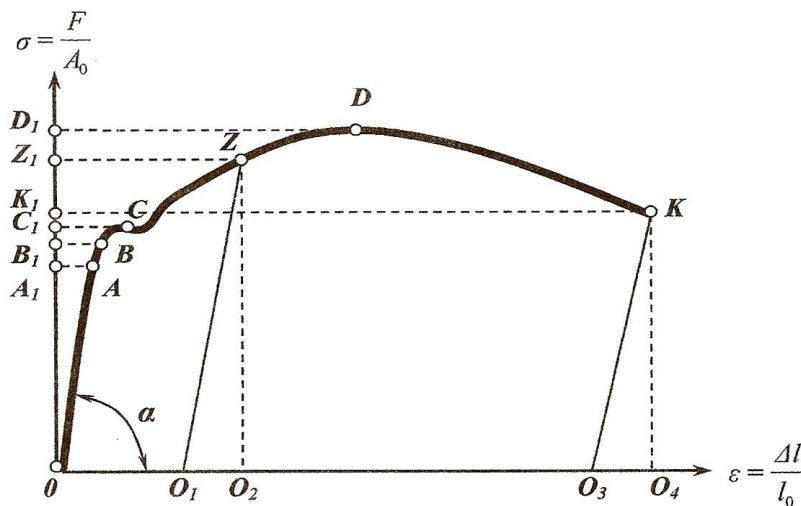


Рис. 2.9

**Межею пропорційності  $\sigma_n$**  (ордината  $OA_1$ ) називається таке напруження, при якому зберігається пряма пропорційність між нормальним напруженням  $\sigma$  і відносною деформацією  $\varepsilon$ . Для м'якої сталі ця границя  $\sigma_n = 200 \text{ Н/мм}^2$ .

**Межею пружності** (ордината  $OB_1$ ) називається напруження, при якому в матеріалі виникає залишкова деформація, що дорівнює наперед заданій малій величині (0,002... 0,005% від початкової довжини зразка).

Точка В діаграми розміщена близько від точки А. Із діаграми напружень видно, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E. \quad (2.13)$$

Отже, модуль пружності геометрично можна визначити як тангенс кута нахилу лінійної (початкової) ділянки діаграми розтягу до горизонталі.

**Межею текучості**  $\sigma_m$  (ордината  $OC_1$ ) є таке напруження, при якому відбувається збільшення деформації майже без збільшення навантаження, зразок «тече». Для м'якої сталі ця межа  $\sigma_T \cong 240 \text{ Н/мм}^2$ .

Горизонтальна ділянка діаграми називається площадкою текучості, яка характеризується появою волосних ліній (ліній зсуву) на поверхні зразка, нахилених, приблизно, під кутом  $45^\circ$  до лінії дії сили.

Згадані лінії вперше помітив під час досліджень відомий російський вчений Д.К. Чернов (лінії Чернова). Поява цих ліній свідчить про зсуви окремих кристалів сталі.

Після утворення площадки текучості зразок матеріалу знову набуває здатності чинити опір збільшенню навантаження за рахунок перебудови кристалевих решіток.

**Максимальна ордината напруження  $OD_1$  називається тимчасовим опором  $\sigma_{mo}$ .**

Для крихких матеріалів відзначається напруження в момент руйнування зразка, яке називають **межею міцності  $\sigma_{m\kappa}$ .**

Тимчасовий опір  $\sigma_{T0}$  є напруження, яке відповідає максимальній розривній силі (для м'якої сталі  $\sigma_{T0} = 400 \text{ Н/мм}^2$ ).

Подальше випробування зразка призводить до утворення шийки, місцевого звуження поперечного перерізу елемента стрижня (рис. 2.10).

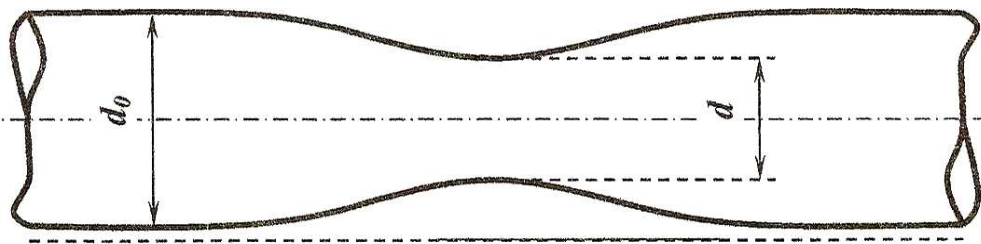


Рис. 2.10

Внаслідок зменшення площі перерізу зразка його розривання відбувається при меншому напруженні (силі) (точка  $K$ , рис. 2.9).

Якщо припинити дослід при напруженні, меншому від межі пропорційності, то після зняття навантаження зразок набере своїх початкових розмірів до деформації.

Між точками  $C$  і  $K$  розвантаження зразка зобразиться прямою  $ZO1$



або  $KOЗ$ , яка майже паралельна лінії  $OA$ . Отже, довжина зразка після розвантаження буде більша початкової довжини на величину  $\Delta l = OO1$ .

Відрізок  $OO1$  називається залишковою деформацією, відрізок  $O1O2$  – пружною деформацією, а  $OO2$  – повною деформацією. Навіть у момент розриву, зразок має пружну деформацію, яка зображується відрізком  $O3O4$ .

Величина повної деформації  $OO4$  в момент розриву зразка залежить від пластичності матеріалу.

У крихких матеріалів навіть при малих величинах напружень реально має місце нелінійна залежність між напруженнями і коефіцієнтом відносної деформації.

Але ці відхилення від закону Гука для згаданих матеріалів незначні, що дає змогу у розрахунках приймати лінійну залежність між напруженнями і деформаціями.

Під час випробування крихких матеріалів на стиск застосовують зразки у вигляді кубиків, а для пластичних матеріалів і чавунів – у вигляді циліндрів. Висота циліндра вибирається трохи більшою за діаметр.

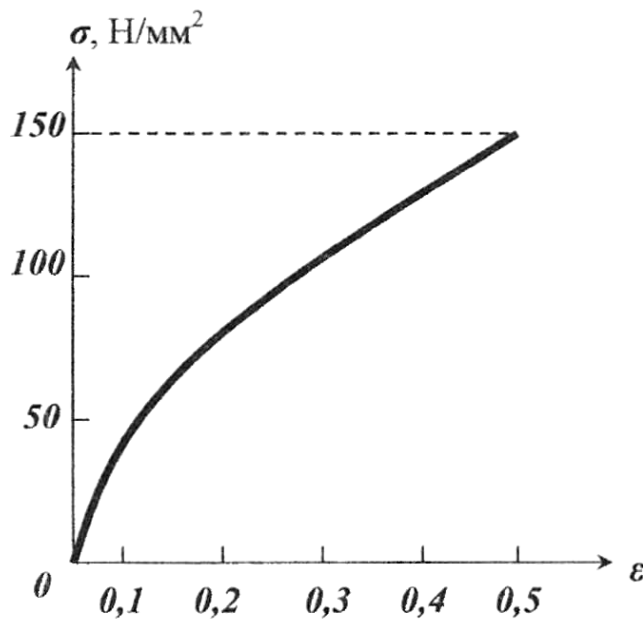


Рис. 2.11

Як наголошувалось, під час розтягу крихкі матеріали руйнуються при малих деформаціях. На рис. 2.11 наведено діаграму напружень при розтягу крихкого матеріалу.

При випробуванні на стиск крихкі матеріали руйнуються так само, як і при розтягу.

Величини границі пропорційності і модулі пружності для пластичних матеріалів при стиску і розтягу майже рівні.

## Частина друга

Наведемо значення межі міцності для деяких матеріалів (табл. 2.2).

Експериментальні дослідження показують, що пластичні матеріали однаково добре працюють на розтяг і стиск, крихкі ж – погано чинять опір розтягу.

Таблиця 2.2

Вид матеріалу	розтяг Н/мм <sup>2</sup>	Стиск Н/мм <sup>2</sup>
Сталь для конструкцій (Ст. 3)	380	420
Сталь машинобудівна	500	800
Сталь рейкова	700	800
Сталь спеціальна для машинобудування	до 1600	–
Сірий чавун	170...250	600... 1000
Сплави міді (латунь, бронза)	220... 500	–
Бетон	2...5	5...60
Дерево (сосна)	80	40
Текстоліт	85...100	230...250
Дюралюміній	360	280

У зв'язку з різким зменшенням площі поперечного перерізу зразка після утворення шийки, що практично рівнозначно руйнуванню його, для розрахунків беруть лише величину межі тимчасового опору.

### 2.2.4. Допустимі напруження

Для нормальної роботи елемента конструкції необхідно, щоб напруження які виникли в ньому (допустимі напруження), були менші від межі пружності, бо інакше в стержні виникнуть залишкові деформації. Крім цього, допустиме напруження є частиною межі міцності і пов'язане з нею таким рівнянням:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{мм}}}{k}, \quad (2.14)$$

де  $k$  – коефіцієнт запасу міцності.

При виборі допустимого напруження слід у лабораторії визначити межу міцності для даного матеріалу, а потім вибирати відповідний коефіцієнт запасу міцності.

Визначення допустимих напружень, які залежать від технічних і

економічних факторів – одна з найважливіших народногосподарських проблем. Тому цим питанням займаються державні нормуючі органи, вони видають норми і правила, які є керівними при розрахунках інженерних споруд і машин.

Коефіцієнт запасу міцності повинен бути таким, який забезпечував би нормальну роботу елементів і всієї конструкції в цілому.

Величина коефіцієнта запасу залежить від виду діючого навантаження, властивостей матеріалу та інших причин.

Крихкі матеріали потребують значно більших коефіцієнтів запасу ніж пластичні. При наявності динамічних навантажень беруть більші коефіцієнти запасу, ніж при статичних.

Щодо точності розрахунку належать реальні уявлення про навантаження, властивості матеріалів і про відповідність розрахункової схеми справжнім умовам роботи елемента.

Із розвитком науки про міцність під час розрахунків приймають менші коефіцієнти запасу міцності.

Знаючи межу міцності матеріалу і відповідний коефіцієнт запасу міцності, можна визначити значення величин допустимих напружень.

У прийнятому методі розрахунку будівельних конструкцій замість загального коефіцієнта запасу міцності застосовують три окремі коефіцієнти: перевантаження, умов роботи і однорідності матеріалу, що надає можливість більш раціонально проектувати конструкції.

Значення допустимих напружень для деяких конструктивних матеріалів наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Матеріали	Стиск В Н/мм <sup>2</sup>	Розтяг В Н/мм <sup>2</sup>
Сталь Ст.0 і Ст.2	140	140
Сталь Ст.3	160	160
Сталь вуглецева, конструкційна для машинобудування	60...250	60...250
Сталь легована, конструкційна для машинобудування	100...400	100...400
Чавун (сірий)	120...150	–

### 2.2.5. Розрахунок міцності стрижнів при розтягу і стиску

Розглянемо наступні методики розрахунку стрижнів.

#### 1. Підбір перерізу елемента

Задано діючі сили і матеріал з відомим допустимим напруженням

[ $\sigma$ ]. Треба визначити поперечні розміри стрижня.

Потрібну площу перерізу визначають за формулою:

$$A_{II} \geq \frac{F}{[\sigma]}. \quad (2.15)$$

Визначивши площу, можна вибрати найбільш раціональну форму поперечного перерізу і її розміри. Знайдена величина площі перерізу повинна бути близькою до потрібної. Відхилення від потрібної площі допустимо в межах  $\pm 5\%$ .

### **2. Перевірка міцності елемента**

Відомо розміри поперечного перерізу елемента, матеріал і діюча сила. Треба визначити значення напружень у елементі і порівняти їх із допустимими. Умову міцності запишемо так:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] \quad (2.16)$$

### **3. Визначення допустимого навантаження на елемент**

Задано розміри перерізу і допустимі напруження. Треба визначити значення найбільшої сили, яку може сприйняти цей конкретний елемент. Найбільшу силу визначають із виразу:

$$F_{\text{Макс}} \leq A [\sigma] \quad (2.17)$$

Формули (2.15), (2.16) і (2.17) придатні для розрахунків будь-яких розтягнутих стрижнів і коротких стиснених елементів. Короткими називають такі стрижні, у яких довжина порівняно з розмірами поперечного перерізу незначна.

Якщо ж відношення довжини стрижня до розміру його поперечного перерізу дуже велике, то слід враховувати можливість втрати стійкості (про це – далі).

При розрахунку стрижнів, послаблених отворами або виточками, у формулах (2.15), (2.16), (2.17) вказується площа «нетто» з урахуванням послаблення замість повної площі поперечного перерізу. Цю площу визначають із виразу:

$$A_{\text{нт}} = A_{\text{бр}} - A_{\text{посл}} \quad (2.18)$$

де  $A_{\text{бр}}$  – повна площа перерізу (без врахування послаблення);

$A_{\text{посл}}$  – площа послаблення.

### **Приклад 3.3**

Визначити поперечні розміри з'єднаних шарнірами стрижнів кронштейна АВС, до якого в точці С прикладена сила  $P=10\text{кН}$  (рис. 2.12).

Кронштейн складається з сталюї тяги АС круглого поперечного перерізу і дерев'яного підкоса СВ прямокутного перерізу.

Допустимі напруження для сталі  $[\sigma] = 140 \text{ Н/мм}^2$  і для дерева  $[\sigma] = 10 \text{ Н/мм}^2$ .

**Розв'язок**

Визначимо зусилля у стрижнях АС і ВС із умови рівноваги вузла С, застосовуючи умови рівноваги системи збіжних сил:

$$\sum X = 0; \quad -R_A + R_C \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad -F + R_C \sin 30^\circ = 0.$$

З рівнянь рівноваги знайдемо:

$$R_C = \frac{F}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ кН};$$

$$R_A = R_C \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,3 \text{ кН}.$$

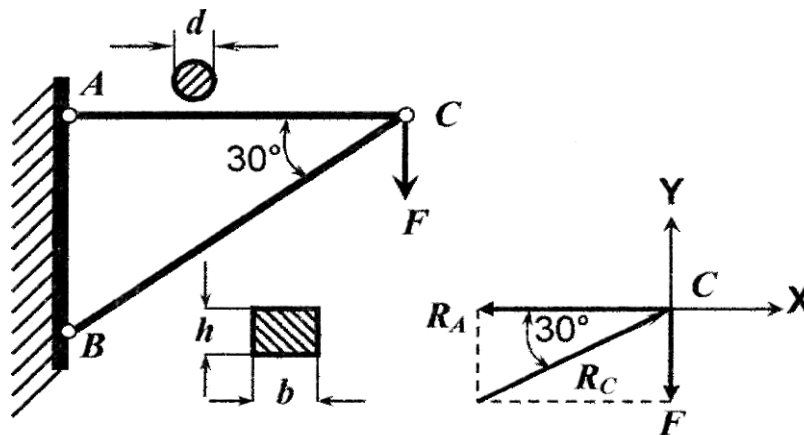


Рис. 2.12

Потрібну площу сталюї тяги визначимо з умови міцності. Для тяги, що отримає деформацію розтягу, вона дорівнює:

$$A_1 = \frac{R_A}{[\sigma_p]} = \frac{17,3 \cdot 10^3}{140} = 124 \text{ мм}^2.$$

Діаметр тяги:

$$d = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 124}{3,14}} = 12,5 \text{ мм.}$$

Площа підкоса із дерева, який перебуває під деформацією стиску:

$$A_2 \frac{R_c}{[\sigma_c]} = \frac{20 \cdot 10^3}{10} = 2000 \text{ мм}^2.$$

Відношення між поперечними розмірами перерізу підкоса:  $h = \frac{b}{2}$ .

$$\text{Тоді } b = \sqrt{2A_2} = \sqrt{2 \cdot 2000} = 63,5 \text{ мм, } h = \frac{63,5}{2} = 31,75 \text{ мм.}$$

### 2.2.6. Вплив власної ваги на деформацію стрижня

В розрахунках на міцність будівельних споруд, колон, фундаментів, шахтних канатів, тощо доводиться враховувати істотний вплив власної ваги на величину нормальних напружень.

Розглянемо довгий брус, закріплений вгорі, який розтягується силою  $F$  (сила ваги прикріпленого вантажу) (рис. 2.13).

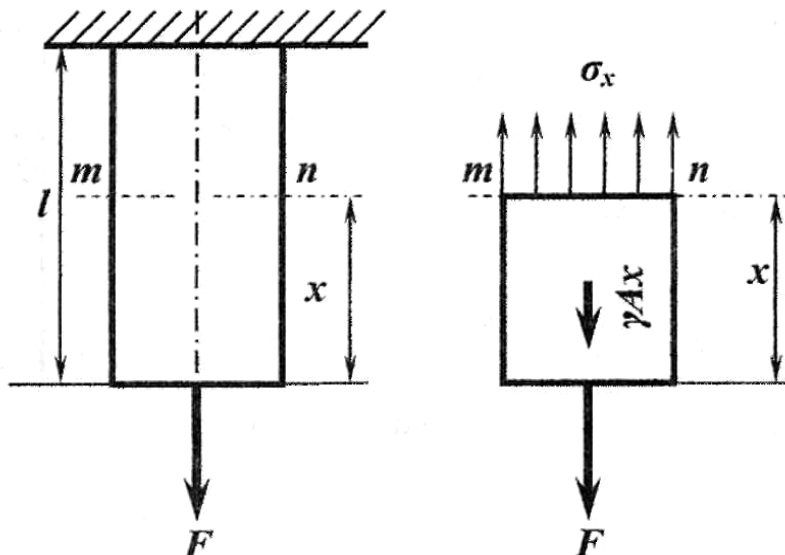


Рис. 2.13

Визначимо напруження у поперечному перерізі  $mn$  площею  $A$ , розміщеному на відстані  $x$  від вільного кінця бруса. На нижню частину

бруса довжиною  $x$  діятимуть зовнішня сила  $F$  і власна вага бруса  $\gamma Ax$  ( $\gamma$  – густина матеріалу).

Рівняння рівноваги нижньої частини бруса:

$$\sigma_x A - F - \gamma Ax = 0, \quad (2.19)$$

Звідси змінна величина напружень у будь-якому перерізі по довжині бруса дорівнюватиме:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \gamma x. \quad (2.20)$$

Максимальне напруження, переріз найнебезпечніший, буде біля закріпленого кінця бруса, для якого  $x = l$ :

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma l. \quad (2.21)$$

Умова міцності на розтяг за сумісної дії зовнішньої сили і сили ваги:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (2.22)$$

З виразу (2.22) підбирається потрібна площа перерізу:

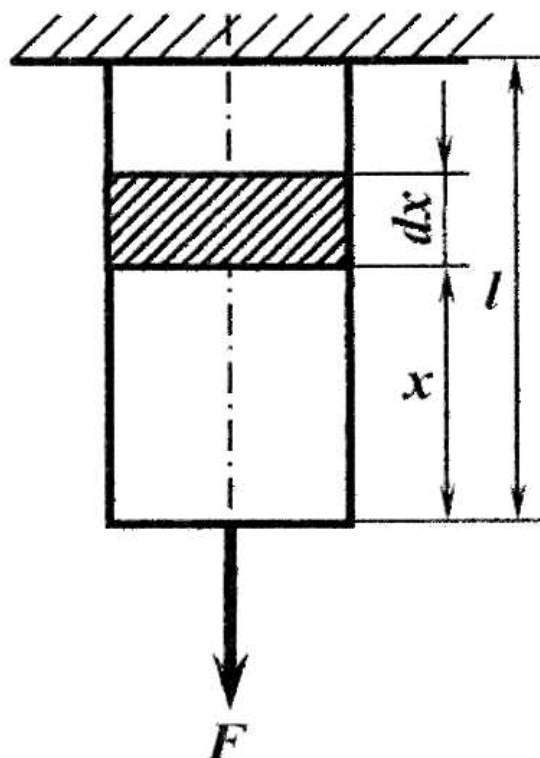
$$A_n \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (2.23)$$

Розглядаючи розтяг у межах пропорційності, визначимо абсолютну деформацію бруса від дії власної ваги, для чого виділимо на відстані  $x$  від вільного кінця двома нескінченно близькими поперечними перерізами елемент бруса довжиною  $dx$  (рис. 2.14).

Абсолютна деформація елемента  $dx$  на підставі закону Гука дорівнюватиме:

$$\Delta dx = \frac{(F + \gamma Ax) dx}{EA}. \quad (2.24)$$

Повне видовження бруса:



$$\Delta l = \int_0^l \left( \frac{F}{EA} + \frac{\gamma x}{E} \right) dx. \quad (2.25)$$

Взявши інтеграл від цього виразу в межах від 0 до  $l$ , знайдемо:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (2.26)$$

Помноживши і поділивши чисельник і знаменник другого доданку (2.26) на  $A$  і вважаючи при цьому, що власна вага бруса  $Q = \gamma A l$ , дістанемо:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{Ql}{2EA}. \quad (2.27)$$

Якщо зовнішня сила відсутня, видовження від самої власної ваги:

$$\Delta l = \frac{Ql}{2EA}. \quad (2.28)$$

Формула (2.28) інформує, що видовження тільки від власної ваги у два рази менше видовження від прикладеної до кінця бруса сили, яка дорівнює його власній вазі  $Q$ .

#### **Приклад 2.4**

Визначити діаметр рудникової штанги і повне її видовження з урахуванням власної ваги, якщо розтягувальна сила  $F = 20$  кН, довжина штанги  $l = 10$  м, інші характеристики матеріалу штанги:

$$[\sigma] = 280 \text{ Н/мм}^2, E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2, \gamma = 0,0078 \text{ Н/мм}^3.$$

#### **Розв'язок**

Потрібна площа перерізу штанги дорівнює із формули (2.23):

$$A = \frac{F}{[\sigma] - \gamma l} = \frac{20 \cdot 10^3}{280 - 0,0078 \cdot 10 \cdot 10^3} = 99 \text{ мм}^2.$$

Діаметр штанги:



$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 99}{3,14}} = 11,2 \text{ мм.}$$

Повне видовження (2.26):

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot \frac{3,14 \cdot 11,2^2}{4}} + \frac{0,0078 \cdot (10 \cdot 10^3)}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 12,1 \text{ мм.}$$

### 2.2.7. Розрахунок ідеальної (гнучкої) нитки

До ідеальної нитки відносять електричні проводи, канати, троси різного призначення, паси передач тощо, які працюють тільки на розтяг.

Нехай ідеальна нитка (провід) підвішена в точках  $A$  і  $B$ , які знаходяться на одному рівні (рис. 2.15).

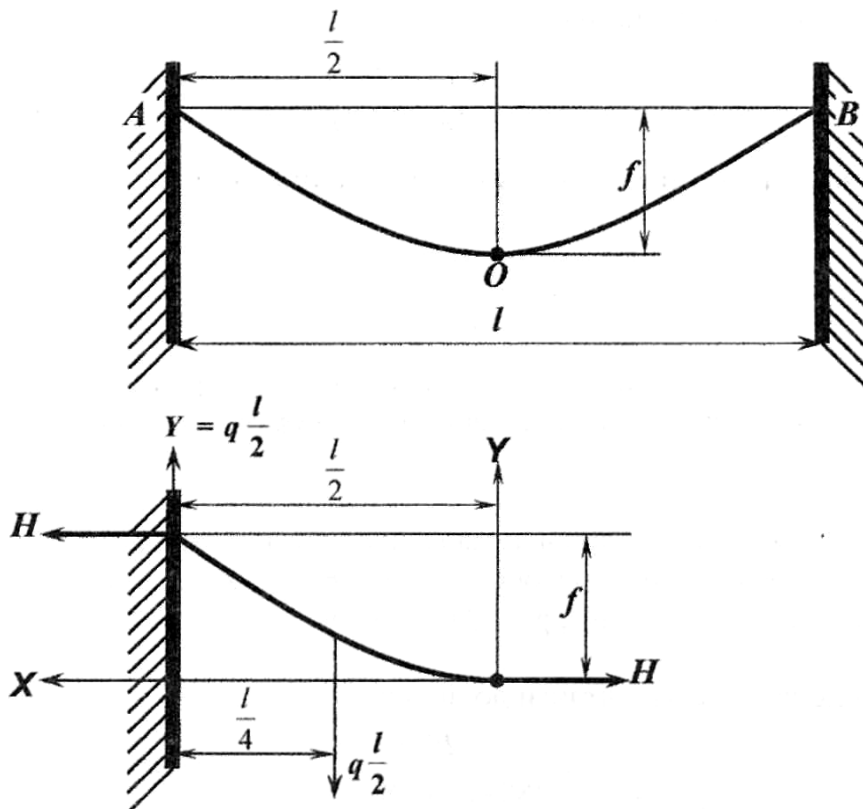


Рис. 2.15

Під дією власної ваги гнучкий провід провисає по деякій кривій  $AOB$ . Провисання проводу звичайно невелике порівняно з його прольотом

## Частина друга

$l$ . Тому з достатнім ступенем точності можна вважати, що вага ідеальної нитки рівномірно розподілена по довжині його горизонтальної проекції, тобто, по довжині прольоту  $l$ .

Нехай інтенсивність розподіленого навантаження по прольоту нитки дорівнює  $q$ . Візьмемо початок координат у найнижчій точці  $O$  провисання нитки і позначимо натяг у точці через  $H$ .

Величину сили  $H$  і стрілу провисання  $f$  визначимо, розглядаючи стан рівноваги системи. Знайдемо суму моментів всіх сил відносно точки  $A$ :

$$Hf - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0, \quad H = \frac{ql^2}{8f} \text{ або } f = \frac{ql^2}{8H}.$$

### 2.2.8. Напруження у стрижнях при зміні температури

Нехай стрижень довжиною  $l$  нерухомо затиснутий кінцями в стіні при значенні температури  $t_1$ . Визначити зусилля, які виникають у стрижні при зміні його температури до величини  $t_2$ . При підвищенні температури від  $t_1$  до  $t_2$  стрижень видовжується, розпираючи стіни, що веде до виникнення сил реакцій з боку стін, які в свою чергу стискають брус (рис. 2.16).

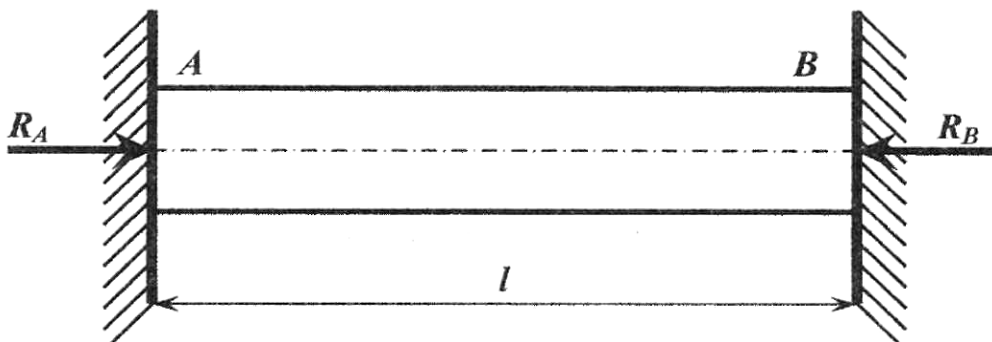


Рис. 2.16

Реакції стін не можна визначити з умови рівноваги  $\sum X = 0$ , як суми проєкцій сил на горизонталь, оскільки єдине рівняння свідчить, що  $R_A = R_B = R$ .

Для розв'язання статично невизначеної задачі треба скласти додаткове **рівняння сумісності деформацій**: видовження стрижня від нагрівання дорівнює його укороченню від стиску силами реакцій  $R_I$ :

$$\Delta l_t = \Delta l_R. \quad (2.29)$$

Видовження стрижня від нагрівання визначають за формулою

$$\Delta l_t = \alpha(t_2 - t_1)l. \quad (2.30)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу стрижня. Укорочення стрижня за законом Гука дорівнює:

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EA}. \quad (2.31)$$

Тоді рівняння (2.29) сумісності деформації можна записати у такому вигляді:

$$\alpha(t_2 - t_1)l = \frac{Rl}{EA}.$$

$$R = \alpha EA(t_2 - t_1). \quad (2.32)$$

Поділивши праву і ліву частини рівняння (2.32) на  $A$ , дістанемо:

$$\sigma_1 = \frac{R}{A} = \alpha E(t_2 - t_1). \quad (2.33)$$

Отже, напруження, що виникають у стрижні сталого перерізу з жорстко закріпленими кінцями при зміні температури не залежать від його довжини.

### 2.2.9. Деформація зминання

Коли деталі конструкцій, які передають значне стиснене навантаження, мають невелику площу контакту, то поверхні цих деталей можуть зминатися. Щоб не сталося зминання, під гайки і головки болтів підкладають шайби (рис. 2.17).

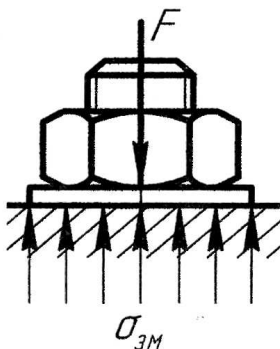


Рис. 2.17

Для спрощення розрахунків вважають, що при площинному контакті виникають нормальні напруження зминання, що рівномірно розподілені по площі контакту. Розрахункове рівняння на зминання має вигляд

$$\sigma_{zm} = \frac{F}{A_{zm}} \leq [\sigma_{zm}], \quad (2.34)$$

де  $F$  – стиска сила;

## Частина друга

$[\sigma_{зм}]$  – допустимі напруження на зминання;

$A_{зм}$  – площа контакту.

Якщо дотичні деталі виготовлені з різних матеріалів, то на зминання перевіряють *м'якший* матеріал.

Для двох деталей, які контактують циліндричними поверхнями (наприклад, заклепочне з'єднання), закон розподілу напружень зминання по поверхні контакту складний (рис. 2.18 *а*).

Тому в розрахункову формулу зминання циліндричних отворів підставляють не площу бокової поверхні півциліндра, по якій контактують деталі, а меншу площу його діаметрального перерізу отвору (умовна площа зминання):  $A_{зм} = ds$ , де  $d$  – діаметр отвору;  $s$  – товщина з'єднуваної деталі (висота циліндра).

Якщо з'єднані деталі мають різну товщину, то в формулу підставляють меншу.

Допустимі напруження на зминання для болтових і шпонкових з'єднань із сталі у межах 100...120 МПа, для заклепочних з'єднань 240...320 МПа, для деревини (сосна, дуб) – 2,4...11 МПа залежно від типу деревини і напряму стискної сили порівняно з напрямом волокна.

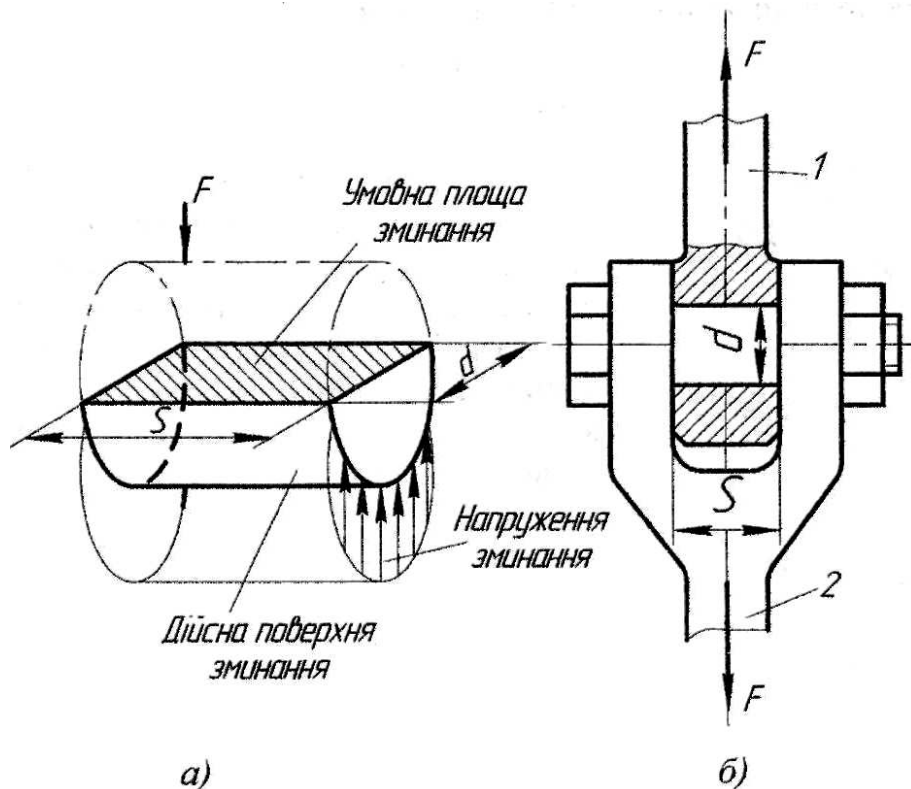


Рис. 2.18

### Приклад 3.5

Тяга 1, з'єднана з вилкою 2 за допомогою болта, поставленого без

зазору, і навантажена, як показано на рис. 2.18 б.

Визначити напруження зминання у головці тяги, якщо сила  $F = 32$  кН, діаметр болта  $d = 20$  мм, а товщина головки тяги  $s = 24$  мм.

**Розв'язок**

Обчислимо умовну площу зминання:

$$A_{зм} = d \cdot s = 20 \cdot 24 = 480 \text{ мм}^2.$$

Визначимо напруження зминання у головці тяги:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} = \frac{32 \cdot 10^3}{(480 \cdot 10^{-6})} = 67 \cdot 10^6 \text{ Па} = 67 \text{ МПа}.$$

**2.3. Деформація зсуву**

**2.3.1. Дотичні напруження**

В умовах довільного навантаження в перерізах бруса виникають нормальні напруження, що чинять опір деформації розтягу (стиску), і дотичні напруження, що чинять опір зсуву завдяки виникненню поперечної сили, яка є рівнодією елементарних сил пружності бруса.

Деформація зсуву однієї частини бруса відносно іншої відбувається, якщо до нього з протилежних сторін на дуже близькій відстані прикладено дві рівні за величиною сили, перпендикулярні до осі бруса. Це можна спостерігати, наприклад, під час різання ножицями металевих прутків (рис. 2.19 а).

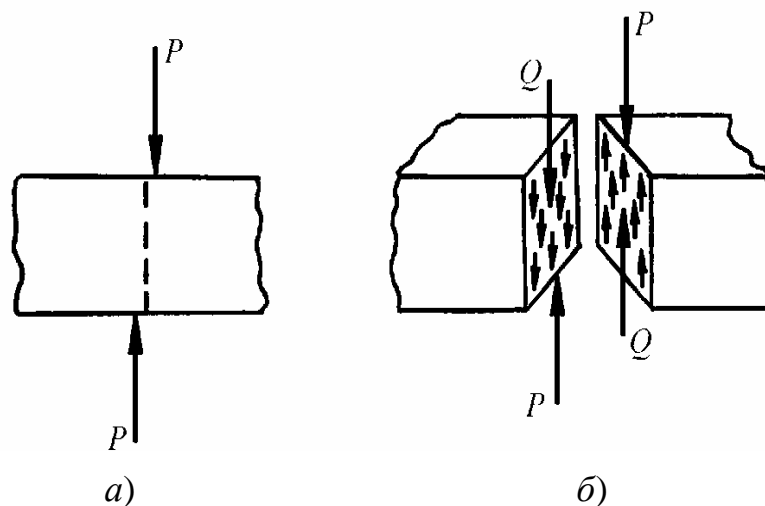


Рис. 2.19

## **Частина друга**

Поперечну силу  $Q$ , що виникає в площині перерізу під дією зовнішньої сили  $P$ , визначимо методом перерізів з умов рівноваги однієї із частин бруса (рис. 2.19 б).

$$Q=P.$$

Функціональний зв'язок між поперечною силою и дотичними напруженнями виражається формулою

$$Q = \int_A \tau dA. \quad (2.35)$$

Якщо дотичні напруження розподілені рівномірно по перерізу, що допускається, то з урахуванням (2.35) одержимо:

$$Q = P = \tau A \Rightarrow \tau = \frac{P}{A} = \frac{Q}{A}, \quad (2.36)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу бруса.

Отже, **поперечна сила є рівнодійною елементарних дотичних сил пружності тіла у перерізі бруса, що чинять опір зсуву.**

Не дивлячись на умовність припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу, в інженерній практиці широко користуються виразом (2.36) для розрахунку реальних конструкцій. Тим паче, що багато елементів конструкцій і деталей машин руйнуються шляхом зсуву.

Відмітимо, що викладений розрахунок дотичних напружень при зсуві наближений, оскільки лінії дії сил  $P$  і  $Q$  (рис. 2.19 б) напрямлені не по одній прямій і, точно кажучи, утворюють пару сил. Проте, момент цієї пари дуже невеликий і його впливом можна знехтувати.

### **2.3.2. Розрахунок на міцність при деформації зсуву**

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що найбільше напруження (робоче напруження), яке виникає в ній, не повинно бути більшим від допустимого. Звідки, розрахункова формула при зсуві має такий вигляд:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]. \quad (2.37)$$

**Дотичне напруження при зсуві, обчислене за формулою (3.37) не повинно бути більшим від допустимого.**

За цією формулою роблять проектний і перевірний розрахунки та визначають допустиме навантаження.

Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають

зрізом (стосовно металевих деталей) або сколюванням (стосовно неметалевих конструкцій).

Допустиме напруження на зріз для пластичних матеріалів вибирають залежно від границі текучості. У машинобудуванні для штифтів, болтів, шпонок тощо приймають  $[\tau_3] = (0,25 \dots 0,35) \sigma_T$ , для деревини допустимі напруження на сколювання при врубуванні коливаються в межах від 0,5 до 1,4 МПа і залежать від сорту деревини і напрямку зовнішньої сили по відношенню до напрямку волокон.

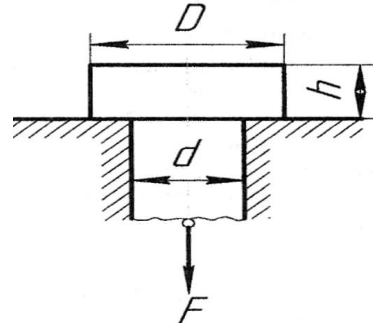


Рис. 2.20

Розрахунки з'єднань на зріз, звичайно, супроводжуються перевіркою міцності цих з'єднань на зминання.

### Приклад 2.6

На рис. 2.20 зображено сталевий циліндр з голівкою висотою  $h$ . З'ясувати, чи витримуються умови рівноміцності стрижня діаметром  $d$  на розтяг, його голівки діаметром  $D$  на зріз і опорної поверхні голівки на зминання, якщо  $[\sigma_p] = 120$  МПа,  $[\tau_3] = 70$  МПа,  $[\sigma_{зм}] = 170$  МПа,  $D = 32$  мм,  $d = 20$  мм,  $h = 12$  мм.

Визначити також допустиме значення сили  $[F]$ .

### Розв'язок

Обчислимо площі перерізів, які працюють на розтяг, зминання і зріз. У розрахунок на розтяг ввійде площа поперечного перерізу стрижня

$$A_p = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 400 \cdot 10^{-6}}{4} = 314 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

Площа опорної поверхні голівки, що працює на зминання, дорівнює

$$A_{зм} = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 490 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Площа зрізу дорівнює площі бокової поверхні циліндра діаметром  $d$  і висотою  $h$ :

$$A_3 = \pi d h = 3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 754 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Використовуючи основні розрахункові рівняння для розтягу, стиску і

зрізу, знаходимо допустиме значення  $[F]$ :

$$[F_p] = [\sigma_p] \cdot A_p = 120 \cdot 10^6 \cdot 314 \cdot 10^{-6} = 37,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 37,7 \text{ кН};$$

$$[F_{3M}] = [\sigma_{3M}] \cdot A_{3M} = 170 \cdot 10^6 \cdot 490 \cdot 10^{-6} = 83,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 83,3 \text{ кН};$$

$$[F_3] = [\sigma_3] \cdot A_3 = 70 \cdot 10^6 \cdot 754 \cdot 10^{-6} = 52,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 52,8 \text{ кН}.$$

Знайдені значення допустимих сил значно відрізняються одне від одного. Із цього випливає, що умови рівномірності не втримуються. Як допустиме значення сили  $[F]$  візьмемо найменше із знайдених значень.

$$[F] = [F_p] = 37,7 \text{ кН}$$

### **2.3.3. Закон парності дотичних напружень**

Закон парності дотичних напружень формулюють так:

*дотичні напруження у двох взаємно перпендикулярних площадках, перпендикулярних до їх спільного ребра, однакові за модулем.*

Всередині тіла біля якоїсь точки виділимо елементарний паралелепіпед із розмірами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 2.21, а).

Нехай на верхній грані цього паралелепіпеда діє дотичне напруження  $\tau$ . Сила, що діє в цій грані, дорівнюватиме

$$dQ = \tau dx dy.$$

Оскільки паралелепіпед перебуває всередині тіла в рівновазі, то сума проєкцій сил на вісь  $x$  дорівнює нулю, тоді на нижній грані паралелепіпеда повинна діяти така ж сама сила, але у протилежному напрямі.

В свою чергу пара сил  $(dQ, dQ)$  намагатиметься повернути паралелепіпед проти ходу стрілки годинника (рис. 2.21, б). Оскільки паралелепіпед перебуває у рівновазі, то сума моментів сил відносно осі  $y$  дорівнює нулю, тому пара  $(dQ, dQ)$  врівноважується іншою парою з моментом, що дорівнює моменту першої пари. Другу пару утворюють дотичні напруження  $\tau'$ , які діють на бокових (правій і лівій) гранях паралелепіпеда, причому  $dQ' = \tau' dy dz$ . Отже,

$$M(dQ, dQ) = M(dQ', dQ').$$

або



$$\tau dx dy dz = \tau' dy dz dx; \Rightarrow \tau = \tau'.$$

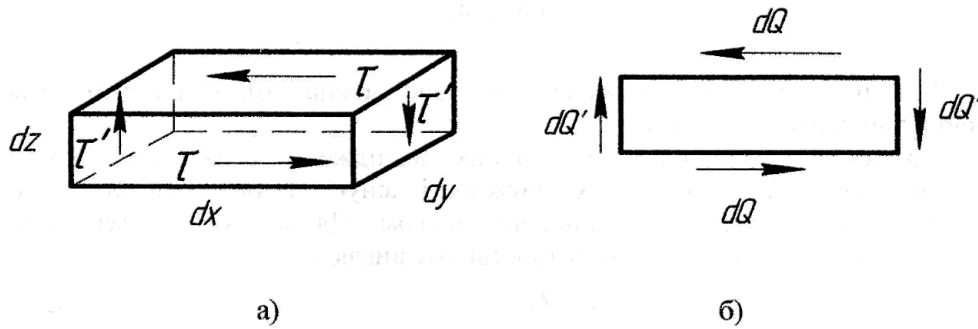


Рис. 2.21

Звернемо увагу на те, що парні дотичні напруження у двох взаємно перпендикулярних перерізах напрямлені або до лінії перерізу січних площин, або від неї.

### 2.3.4. Закон Гука при деформації зсуву

Деформація зсуву призводить до перекошування прямих кутів у виділених із бруса елементарних паралелепіпедів  $abcd$ , в яких виникають кутові деформації. Дотичні сили, як наслідок дії дотичних напружень, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої (рис. 2.22).

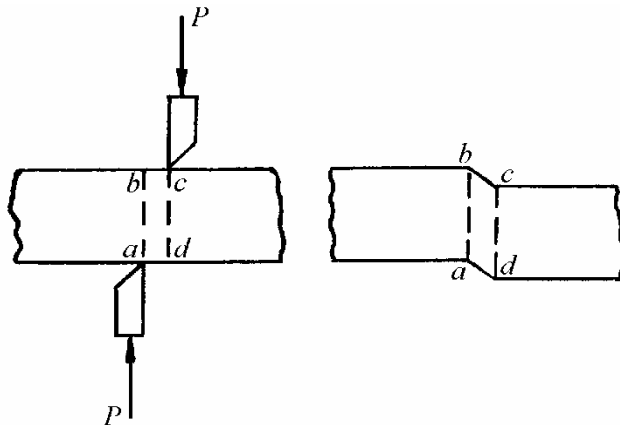


Рис. 2.22

Продемонструємо процес загального випадку деформації зсуву на виділеному в тілі елементарному елементі  $adcd$ , нижню грань якого  $dc$  вважаємо умовно закріпленою (рис. 2.23).

Такий елемент можна змістити, якщо вздовж його зовнішніх протилежних граней прикласти дві пари однакових за величиною і протилежних за напрямом елементарних зусиль від дотичних напружень  $\tau$ .

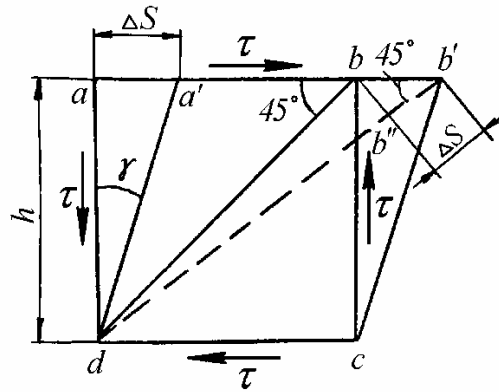


Рис. 2.23

При цьому грань  $ab$  зміститься паралельно на величину  $aa' = bb' = \Delta s$ , яка називається *абсолютним зсувом*. Елемент  $adcd$  перекосяться і його прями кути скривляться на величину  $\gamma$ .

**Кут  $\gamma$  називається кутом зсуву або відносним зсувом.**

Величина відносного зсуву досить мала, тому  $\text{tg } \gamma \approx \gamma$  і визначається через абсолютний зсув:

$$\text{tg } \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{h}. \quad (2.38)$$

В межах пружності матеріалу між напруженнями і деформацією при зсуві спостерігається залежність, яка аналогічна залежності при деформації розтягу (стиску):

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (2.39)$$

Вираз (2.39) називається законом Гука при деформації зсуву і формулюється так: **дотичне напруження прямо пропорційне відносному зсуву.**

Коефіцієнт пропорційності  $G$  характеризує пружні властивості матеріалу при деформації зсуву і називається *модулем зсуву* або *модулем пружності другого роду*. Модуль зсуву матеріалу знаходиться експериментальним шляхом із діаграми зсуву  $\gamma - \tau$  при скручуванні тонкостінної труби, коли маємо випадок, так званої, деформації чистого зсуву, який буде розглядатись далі.

Наведемо середні значення  $G$  для ряду матеріалів, МПа: сталь –  $0,8 \cdot 10^5$ , мідь технічна –  $0,4 \cdot 10^5$ , деревина вздовж волокон –  $0,0055 \cdot 10^5$ .

Між модулем пружності  $E$  і модулем зсуву  $G$  існує наступна залежність:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (2.40)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона).

Таблиця 2.4

Матеріал	Модуль $G$ Н/мм <sup>2</sup>
Сталь	$8 \cdot 10^4$
Чавун	$4,5 \cdot 10^4$
Мідь	$4,0 \cdot 10^4$
Алюміній	$2,7 \cdot 10^4$

Отже, дотичні напруження при деформації зсуву прямо пропорційні куту зсуву. Формула (3.40) виражає теоретичну залежність між модулем пружності при зсуві та модулем пружності при розтягу через коефіцієнт Пуассона. Орієнтовні значення модуля зсуву наведені у табл. 2.4.

### 2.3.5. Напруження в похилих перерізах при лінійному напруженому стані

Взаємодію між частинами елемента конструкції можна характеризувати величинами нормальних і дотичних напружень в кожній точці цього елемента. Ці величини залежать від напрямку перерізу, проведеного крізь цю точку.

Сукупність нормальних і дотичних напружень, діючих по всіх площадках, що проходять крізь розглядувану точку, називається *напруженим станом в цій точці*.

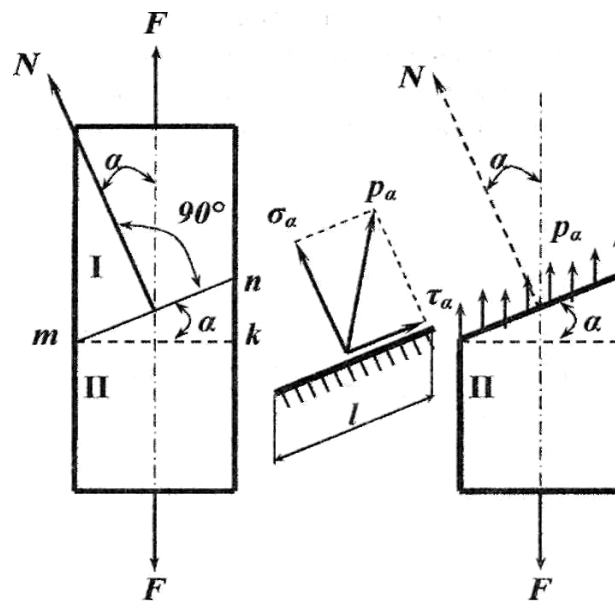


Рис. 2.24

## Частина друга

Розглянемо спочатку лінійний (одноосний) напружений стан призматичного бруса, який випробують на центральний розтяг рівними силами  $F$  (рис. 2.24).

Треба обчислити напруження, які виникають у похилому перерізі. Для цього уявно розсічено брус площиною  $mn$ , нахиленою під кутом  $\alpha$  до нормального перерізу. Зовнішня нормаль  $N$  до проведеного перерізу складатиме з віссю бруса також кут  $\alpha$ . Відкинемо верхню частину і замінимо її дію на нижню частину напруженнями  $p_\alpha$ .

Умова рівноваги нижньої частини бруса

$$-F + p_\alpha A_a = 0. \quad (2.41)$$

Звідси дістанемо, що напруження

$$p_\alpha = \frac{F}{A_a}, \quad (2.42)$$

де  $A_a$  – площа похилого перерізу.

Із рисунка видно, що площа похилого перерізу

$$A_a = \frac{A}{\cos \alpha}, \quad (2.43)$$

де  $A$  – площа нормального перерізу

Підставляючи значення  $A_a$  у формулу (2.42), дістанемо:

$$p_\alpha = \frac{F}{A} \cos \alpha. \quad (2.44)$$

Враховуючи, що  $\sigma = \frac{F}{A}$ , знаходимо:

$$p_\alpha = \sigma \cos \alpha. \quad (2.45)$$

Розкладаємо повне напруження на нормальну і дотичну складові

$$\sigma_a = p_\alpha \cos \alpha;$$

$$\tau_a = p_\alpha \sin \alpha. \quad (2.46)$$

Підставляючи значення  $p_\alpha$  у формулу(2.46), дістанемо:

$$\sigma_a = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_a = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.47)$$

Наявність нормального і дотичного напружень створюють можливості для деформацій розтягу і зсуву. Для перевірки міцності матеріалу необхідно знайти найбільші величини цих напружень в залежності від напрямку площини перерізу (кута нахилу  $\alpha$ ). При зростанні кута  $\alpha$  від  $0$  до  $90^\circ$  нормальні напруження на площадці будуть зменшуватись від значення  $\sigma_\alpha = \sigma = \sigma_{max}$  до значення  $\sigma = 0$ . Дотичні напруження із зміною кута  $\alpha$  від  $0$  до  $45^\circ$  зростають від значення  $\tau_a = 0$  до значення  $\tau_a = \frac{\sigma}{2} = \tau_{max}$ , а потім зменшуються до  $\tau_a = 0$  при куті  $\alpha = 90^\circ$ .

Отже, при розтягу або стиску найбільші нормальні напруження виникають на площадках, перпендикулярних до осі бруса, а найбільші дотичні напруження на площадках, розміщених під кутом  $45^\circ$  до осі. Найбільші дотичні напруження чисельно дорівнюють половині найбільших нормальних напружень.

Напружений стан, при якому у поперечних площадках при центральному розтягу нормальні напруження є максимальними, а у подовжніх площадках – відсутні називається лінійним напруженим станом.

Проте, на практиці можливі випадки, коли елемент конструкції піддається розтягу або стиску по двох, трьох напрямках, перебуваючи в складному напруженому стані.

### 2.3.6. Напруження в похилих перерізах при плоскому напруженому стані

Напружений стан, при якому вектори всіх повних напружень розміщені в одній площині, називається **плоским напруженим станом**. Необхідно знайти найбільші нормальні і дотичні напруження в цій площині (рис. 2.25).

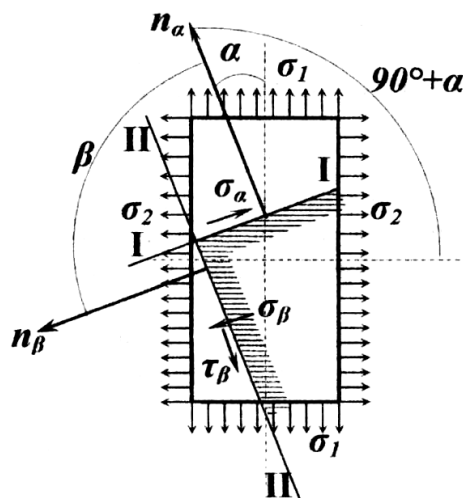


Рис. 2.25

## **Частина друга**

Уявимо собі прямокутний паралелепіпед, на бокових гранях якого виникають напруження. Обидва напруження будемо вважати розтягувальними, причому  $\sigma_1 > \sigma_2$ . Потрібно визначити нормальні і дотичні складові в похилих перерізах.

Спочатку визначимо величину цих напружень у похилому перерізі I-I. Згідно з принципом незалежності дії сил, користуючись формулами (2.47), дістанемо:

$$\sigma_a = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (2.48)$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.49)$$

На основі формул (2.48) і (2.49) можна легко знайти величини для напружень у перерізі II-II, перпендикулярному до перерізу I-I:

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta; \quad (2.50)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta. \quad (2.51)$$

Для нашого випадку кут  $\beta = 90^\circ + \alpha$ . Отже,

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha. \quad (2.52)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.53)$$

Із знайдених формул для напружень, які діють у взаємно перпендикулярних перерізах, можна вивести дві важливі властивості:

1. Складаємо вирази (2.48) і (2.52):

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}. \quad (2.54)$$

**Сума нормальних напружень у двох взаємно перпендикулярних перерізах є сталою величиною і дорівнює сумі головних напружень;**

2. Порівнюємо формули (2.49) і (2.53):

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta. \quad (2.55)$$

**Дотичні напруження у двох взаємно перпендикулярних перерізах рівні за величиною і протилежні за напрямом; це називають законом парності дотичних напружень.**

Для визначення найбільших значень нормальних напружень візьмемо похідну за кутом  $\alpha$  від виразу (2.48) і прирівняємо її до нуля.

$$\frac{d\sigma_a}{d\alpha} = -2\sigma_1 \sin\alpha \cos\alpha + 2\sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha = 0. \quad (2.56)$$

Звідси після перетворення дістанемо:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0. \quad (2.57)$$

Із цього виразу випливає: якщо  $\alpha = 0$ , то  $\sigma_{\max} = \sigma_1$ , якщо  $\alpha = 90^\circ$ , то  $\sigma_{\min} = \sigma_2$ .

Найбільші і найменші нормальні напруження, що виникають у взаємно перпендикулярних перерізах (площадках), які дорівнюють, відповідно,  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , є головними.

Такі площадки, по котрих немає дотичних напружень, називають головними. Нормальні напруження по головних площадках називаються **головними напруженнями**.

Найбільше значення дотичних напружень буде при  $\alpha = 45^\circ$ ;

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (2.58)$$

Отже, найбільші дотичні напруження рівні піврізниці головних напружень і виникають на площадках, нахилених до головних площадок під кутом  $45^\circ$ .

### **2.3.7. Про теорії міцності і руйнування**

Руйнування елементів конструкцій, які працюють при складному напруженому стані, зумовлюється різними величинами головних напружень і їх співвідношенням.

Одержання механічних характеристик матеріалу для цього стану потребує в кожному конкретному випадку проведення досліджень, що ускладнює розрахунки. Крім того, проведення таких робіт завжди пов'язане з лабораторними дослідженнями.

Внаслідок цього виникла необхідність на основі лабораторних випробувань лінійно-напруженого зразка визначити міцність конструктивних елементів у випадку складного напруженого стану.

Складання умов міцності елементів, які працюють у складному напруженому стані, потребує застосування деяких припущень про їх руйнування, які встановлюються на основі, так званих, теорій міцності.

Розглянемо деякі теорії міцності.

## **Частина друга**

1. **Теорія найбільших нормальних напружень** (перша теорія міцності) приймає за критерій безпечності для матеріалу найбільше за абсолютною величиною нормальне напруження.

Умова міцності за цією теорією запишеться так:

$$\sigma_{F_1} = \sigma_1 \leq [\sigma], \quad (2.59)$$

де  $\sigma_1$  – найбільше нормальне напруження при складному напруженому стані;

$[\sigma]$  – допустиме напруження при простому розтягу.

Ця теорія дає досить задовільні результати тільки при розрахунку конструктивних елементів з крихких матеріалів. Істотним протиріччям першої теорії міцності є те, що кубик при всебічному стиску, як показали досліди, витримує набагато більші напруження, ніж при простому стиску.

2. **Теорія найбільших відносних деформацій** (друга теорія міцності) приймає за критерій безпечності для матеріалу найбільші відносні деформації.

Умову міцності за цією теорією запишемо так:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon], \quad (2.60)$$

Для загального випадку маємо:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad (2.61)$$

а для випадку простого розтягу:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}. \quad (2.62)$$

Тоді умова міцності за другою теорією остаточно набере вигляду:

$$\varepsilon_{F_2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma]. \quad (2.63)$$

Ця теорія міцності для пластичних матеріалів не підтверджується дослідами, але для крихких матеріалів вона дає результати, які звичайно узгоджуються з експериментом.

3. **Теорія найбільших дотичних напружень** (третья теорія міцності) приймає за критерій безпечності для матеріалу найбільші дотичні напруження.

Умову міцності за цією теорією запишемо так:

$$\tau_{max} \leq [\tau] \quad (2.64)$$



Запишемо вирази для  $i$   $[\tau]$  за відомими формулами: для плоского напруженого стану

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (2.65)$$

для простого розтягу

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (2.66)$$

Тоді умова міцності за третьою теорією набуде вигляду:

$$\sigma_{F3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (2.67)$$

Теорія найбільших дотичних напружень дає результати, які досить добре збігаються з дослідами, особливо для пластичних матеріалів. Звичайно, ця теорія дає змогу призначати розміри, які забезпечують достатню міцність елементів конструкцій і машин.

4. **Енергетична теорія міцності** (четверта теорія міцності) приймає за критерій безпечності для конструкційного матеріалу накопичену потенціальну енергію в одиниці об'єму матеріалу, яка пов'язана із зміною форми елемента за умови, що відносна зміна об'єму  $\theta_v = 0$ .

Умову міцності за четвертою теорією наводимо без виведення при  $\mu = 0,5$ .

$$\sigma_{F4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq [\sigma]. \quad (2.68)$$

Для плоского напруженого стану формула (3.68) набуде вигляду:

$$\sigma_{F4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]. \quad (2.69)$$

Енергетична теорія міцності звичайно добре узгоджується з дослідами для пластичних матеріалів. Розрахунки показують, що результати цієї теорії міцності мало відрізняються від розрахунків, які дістають за третьою теорією міцності. Тому тепер при перевірці міцності конструктивних елементів із пластичних матеріалів користуються третьою і четвертою теоріями міцності.

## 2.4. Деформація кручення

### 2.4.1. Відомості про деформацію кручення

В інженерній практиці часто приходиться зустрічатися з

деформацією кручення (рис. 3.26).

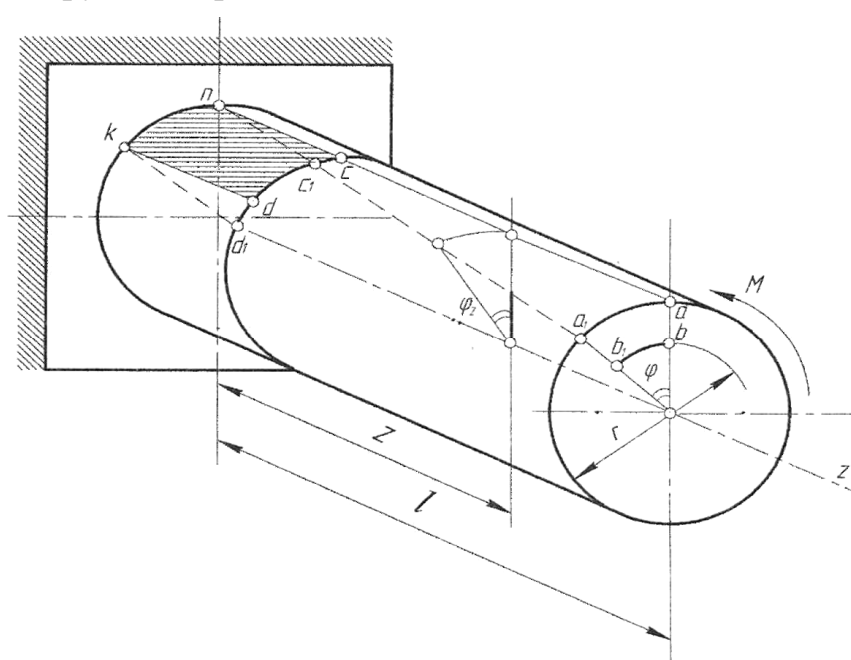


Рис. 2.26

На кручення працюють вали машин і різноманітних трансмісій, пружини, вали редукторів, механічних передач тощо. Згадані елементи конструкцій, безумовно, зазнають і інших деформацій, в першу чергу згину. Проте, в цьому розділі розглядається тільки деформація кручення, а інші види деформацій відсутні.

Крученням називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент пружності, а всі інші силові фактори дорівнюють нулю.

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Оскільки на кручення працюють вали, які, звичайно, мають круглий або кільцевий переріз, то розглянемо деформацію кручення круглого циліндра.

Виготовимо з прозорого гнучкого матеріалу прямий круговий циліндричний брус і жорстко затиснемо один його кінець.

Нанесемо на поверхню циліндра сітку ліній, що складаються з твірних, кіл і частин кіл, а потім прикладемо до вільного кінця бруса пару сил в площині, перпендикулярній до осі. Брус отримає деформацію кручення. При цьому можна спостерігати таке:

1. Вісь циліндра після деформації залишається прямою;
2. Усі поперечні перерізи циліндра залишаються плоскими і після деформації;
3. Радіуси поперечних перерізів при деформації залишаються прямими;
4. Відстані між перерізами не змінюються;
5. Усі твірні циліндра повертаються на той самий кут;

б. Кожний поперечний переріз повертається один відносно одного на деякий кут, який називається кутом закручування.

Із цього можна зробити висновок, що для кручення круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів, а також припустити, що радіуси кіл залишаються під час деформації прямими.

Оскільки в поперечних перерізах бруса немає подовжніх сил, то відстані між перерізами не змінюються. Із цього випливає висновок:

***деформація кручення круглого циліндра полягає у повороті поперечних перерізів одного відносно одного навколо осі кручення, причому кути повороту перерізів прямо пропорційні їх відстаням до місця закріпленого перерізу.***

Кут повороту перерізу дорівнює куту закручування частини циліндра, що знаходиться між даним перерізом і закріпленням. ***Кут  $\varphi$  повороту кінцевого перерізу називають повним кутом закручування циліндра.***

Відносним кутом закручування  $\theta$  називають відношення кута закручування  $\varphi_z$  до відстані  $z$  даного перерізу до місця закріплення.

Якщо брус довжиною  $l$  має сталий переріз і навантажений крутним моментом на кінці, то

$$\theta = \frac{\varphi_z}{z} = \frac{\varphi}{l} = const. \quad (2.70)$$

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні бруса, обмежений будь-якою клітинкою сітки (наприклад,  $kncd$  на рис. 2.26), можна побачити, що ця клітинка при деформації перекошується ( $knc_1d_1$ ).

Подібне спостерігалось під час вивчення деформації зсуву. На цій підставі можна зробити висновок, що при крученні також виникає деформація чистого зсуву, за рахунок повороту одного поперечного перерізу відносно іншого.

Отже, при крученні у поперечних перерізах виникають тільки дотичні сили пружності, які утворюють крутний момент. Крутний момент є сумарним моментом дотичних сил відносно осі бруса поперечного перерізу.

#### **2.4.2. Епюри крутних моментів**

Для наочного зображення розподілу крутних моментів у перерізах вздовж осі бруса будують епюри цих моментів. Моменти визначають за допомогою методу перерізів. Оскільки вал (брус), що рівномірно обертається, як і нерухомий, перебувають у рівновазі, то, очевидно, що

## Частина друга

моменти сил пружності, які виникають у поперечному перерізі, повинні зрівноважувати зовнішні моменти, які діють на розглядувану частину бруса.

**Крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів пар сил, прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.**

Крученням називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент пружності, а всі інші силові фактори дорівнюють нулю.

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Оскільки на кручення працюють вали, які, звичайно, мають круглий або кільцевий переріз, то розглянемо деформацію кручення круглого циліндра.

На рис. 2.27 показано вал, до якого прикладено пари сил з моментами  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  і  $M_4$ . Тут  $M_1$  – момент пари ведучого шківів, а  $M_2$ ,  $M_3$  і  $M_4$  – моменти пар ведених шківів. При рівномірному обертанні вала, а тертя в його опорах незначне, алгебраїчна сума всіх моментів, які прикладені до вала, дорівнює нулю:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0.$$

Крутний момент вважаємо **додатним**, якщо сумарний момент зовнішніх пар сил, прикладених до розглядуваної частини вала, буде напрямлений за стрілкою годинника, коли дивиться з боку перерізу, і навпаки.

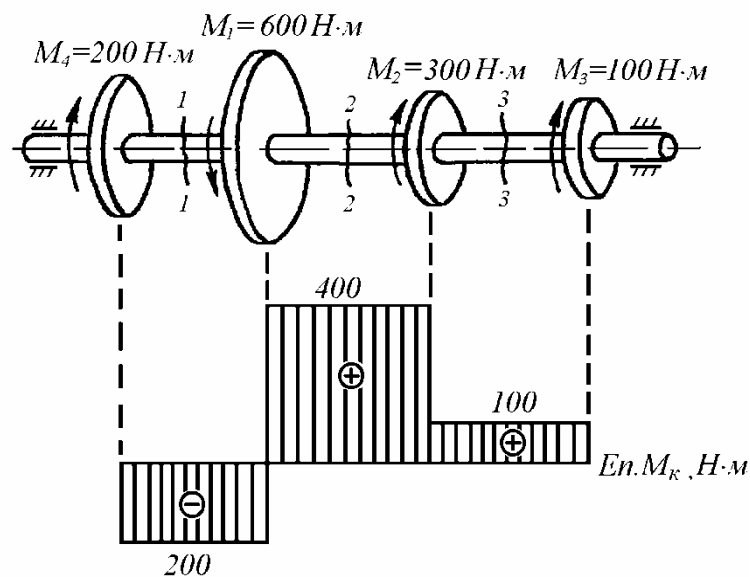


Рис. 2.27

Розбиваємо вісь вала на три ділянки 1, 2, 3 з межами в точках

прикладання зовнішніх моментів пар. Визначимо крутні моменти в поперечних перерізах вала кожної ділянки, застосовуючи метод перерізів. При цьому будемо складати рівняння рівноваги для лівої частини вала, відкинувши праву, і використовувати прийняте правило знаків для зовнішніх моментів, що діють на цю частину.

Тоді крутний момент в будь-якому перерізі першої ділянки вала дорівнює:

$$M_{к1} = -M_4 = -200 \text{ Нм.}$$

На другій ділянці:

$$M_{к2} = -M_4 + M_1 = -200 + 600 = 400 \text{ Нм.}$$

На третій ділянці:

$$M_{к3} = -M_4 + M_1 - M_2 = -200 + 600 - 300 = 100 \text{ Нм.}$$

По знайденим величинам будемо епюру крутних моментів, відкладаючи від нульової лінії у вибраному масштабі від'ємні значення вниз, а додатні – вгору.

З епюри видно, що значення ординат епюри в її крайніх точках дорівнює зовнішнім моментам пар, діючих на відповідних кінцях вала.

**Діаграма, на якій зображується крива ламана лінія крутного моменту вдовж осі вала, називається епюрою крутних моментів** (рис. 2.27).

Розрахунковим крутним моментом буде найбільший із них за абсолютної величиною.

Часто в інженерній практиці задаються не величини пар зовнішніх моментів  $M_i$  (Нм), а потужності  $N_i$  (Вт), що передаються на вал, і кутова швидкість  $\omega$  (рад/с) або частота обертання  $n$  (об/хв). Тоді обертальні моменти визначаються за відомої залежності:

$$M_i = \frac{N_i}{\omega} = \frac{30 \cdot N_i}{\pi \cdot n}. \quad (2.71)$$

### **2.4.3. Закон Гука при крученні. Напруження і деформації**

Уявимо, що прямий круговий циліндр, який зазнає деформації кручення, складається з нескінченно великої кількості волокон, паралельних осі.

Знаючи, що під час кручення відбувається деформація зсуву,

## Частина друга

природно вважати, що в точках поперечного перерізу бруса виникають тільки дотичні напруження  $\tau$ , перпендикулярні до радіуса, який сполучає ці точки з віссю кручення. Визначимо зв'язок між дотичними напруженнями і деформацією.

Існування нормальних напружень у подовжньому перерізі виключаються, бо немає подовжньої сили. З рис. 2.26 видно, що абсолютний зсув перерізу волокна  $a$  дорівнює дузі  $aa_1$ , а перерізу волокна  $b$  – дузі  $bb_1$ :

$$u_{bb_1} = \rho\varphi, \quad u_{aa_1} = r\varphi,$$

де  $\varphi$  – повний кут закручування, рад;

$r$  – радіус циліндра;

$\rho$  – відстань волокна  $b$  від осі кручення.

Оскільки радіуси перерізу під час кручення залишаються прямими, то величина абсолютного зсуву перерізу волокон прямо пропорційна їх відстані до осі кручення. Відносний зсув перерізу волокна  $b$

$$\gamma_\rho = \frac{\rho\varphi}{l} = \theta\rho. \quad (2.72)$$

Оскільки при крученні спостерігається деформація зсуву, то застосуємо формулу закону Гука для зсуву (2.39) з урахуванням виразу (2.72):

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\theta\rho. \quad (2.73)$$

Якщо  $\rho=0$ , то  $\tau=0$ , тобто, на осі кручення дотичні напруження дорівнюють нулю.

Якщо  $\rho=r$ , то  $\tau=\tau_{max}$ , тобто, дотичні напруження досягають максимальних значень у волокнах, що найбільше віддалені від осі кручення:

$$\tau_{max} = G\theta r. \quad (2.74)$$

Оскільки відносний кут закручування  $\theta$  є сталою величиною для даного циліндричного бруса, то дотичні напруження при крученні прямо пропорційні відстаням точок перерізу до осі бруса. Епюра розподілу напружень вздовж радіуса перерізу згідно формули (2.73) має вигляд трикутника (рис. 2.28).

Якщо брус складається з однієї ділянки зі сталим по довжині крутним моментом, то дотичні напруження у даному волокні по всій довжині циліндра однакові.

Перейдемо до виведення формул для визначення кута закручування і

напружень у поперечному перерізі залежно від крутного моменту.

Розріжемо брус, зображений на рис. 2.26, поперечною площиною, що знаходиться на відстані  $z$  від місця закріплення, і розглянемо його переріз (рис. 2.28).

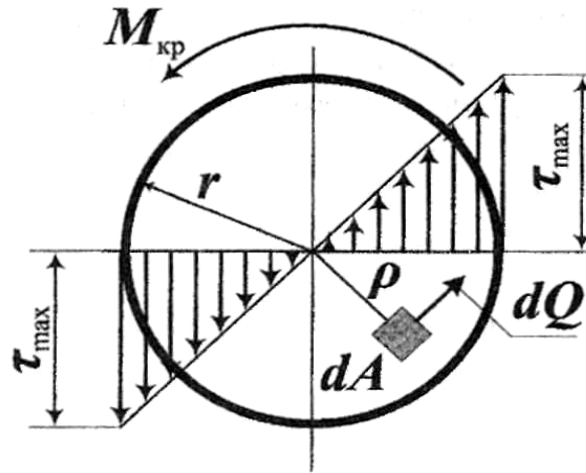


Рис. 2.28

Виділимо у перерізі нескінченно малу площадку  $dA$  на відстані  $\rho$  від осі кручення. Сила  $dQ$ , яка діє на цю площадку, буде перпендикулярна до радіуса і дорівнюватиме

$$dQ = \tau_0 dA.$$

Визначимо момент сил пружності відносно осі кручення або крутний момент:

$$M_k = \int_A dQ \rho = \int_A \tau \rho dA = \int_A G \theta \rho dA \rho = G \theta \int_A \rho^2 dA = G \theta J_p.$$

Звідки знайдемо відносний кут закручування:

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_p}. \quad (2.75)$$

Повний кут закручування циліндра довжиною  $l$

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p}, \text{ рад.} \quad (2.76)$$

де  $J_p$  – полярний момент інерції перерізу,  $m^4$ ;

## Частина друга

$G$  – модуль пружності другого роду.

Добуток, що стоїть у знаменнику, називають кутовою жорсткістю поперечного перерізу при крученні. Її розмірність  $H \cdot m^2$ .

Таким чином, повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра і обернено пропорційний кутовій жорсткості перерізу при крученні.

Залежність (2.76) між кутовим переміщенням  $\varphi$  і силовим фактором  $M_K$  є лінійною. Цей вираз уявляє закон Гука при крученні.

Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок:

$$\varphi = \sum \varphi_1.$$

Загальна формула для визначення напружень у будь-якій точці перерізу, в якій діє визначений крутний момент, має вигляд:

$$\tau_\rho = G\theta\rho = \frac{GM_K\rho}{GJ_p} = \frac{M_K}{J_p}\rho. \quad (2.77)$$

Із формули (2.77) видно, що дотичні напруження у перерізі круглого вала є лінійною функцією радіуса. При цьому максимальні величини напружень спостерігаються в точках вала, найбільш віддалених від його осі при  $\rho = r$ .

$$\tau_{max} = \frac{M_K r}{J_p} = \frac{M_K}{\frac{J_p}{r}} = \frac{M_K}{W_p}, \quad (2.78)$$

де  $W_p$  – полярний момент опору перерізу.

Момент опору дорівнює відношенню полярного моменту інерції до радіуса перерізу. Одиниця виміру моменту опору –  $m^3$ .

Отже, напруження і кут деформації кручення круглого циліндра обчислюють за формулами:

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_p}; \quad \varphi = \frac{M_K l}{GJ_p}.$$

Потрібно звернути увагу на те, що ці формули за структурою аналогічні формулам для обчислення напружень і деформацій розтягу і застосовні лише для ділянок бруса з однакового матеріалу, що мають



постійні поперечний переріз і крутний момент вздовж всієї осі вала.

За законом парності дотичних напружень, останні виникають не тільки у поперечних, а й у подовжніх перерізах, тому, наприклад, у дерев'яних брусах під час кручення виникають тріщини вздовж волокон (деревина погано працює на сколювання вздовж волокон).

З епюри розподілу дотичних напружень при крученні (рис. 2.28) видно, що внутрішні волокна бруса зазнають невеликих напружень, тому вали іноді роблять порожнистими, чим досягається зменшення матеріаломісткості при незначній втраті міцності.

Визначимо полярний момент опору крученню для круглого і кільцевого перерізів.

1. Круг діаметра  $d$ :

$$W_p = \frac{J_p}{0,5d} = \frac{\pi d^4}{30 \cdot 0,5d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

2. Кільце, що має розміри  $D \times d$  :

$$W_p = \frac{J_p}{0,5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{30 \cdot 0,5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \approx \frac{0,2(D^4 - d^4)}{D}.$$

Зазначимо, що коли полярний момент інерції кільцевого перерізу можна визначити як різницю моментів інерції великого і малого кругів, то момент опору крученню не можна визначати як різницю моментів опорів цих кругів.

#### **2.4.4. Розрахункові формули на міцність і жорсткість при крученні**

*Умова міцності бруса при крученні* полягає у тому, що найбільші дотичні напруження, які виникають у небезпечних точках перерізу, не повинні перевищувати допустимі.

Розрахункова формула на міцність при крученні має вигляд

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau_K]. \quad (2.79)$$

***Дотичні напруження у небезпечному перерізі не повинні перевищувати допустимі.***

Допустимі напруження при крученні вибирають залежно від допустимого напруження для розтягу, а саме:

## Частина друга

---

- сталь  $[\tau_K] = (0,5 \dots 0,6) [\sigma_P]$ ;
- чавун  $[\tau_K] = (1 \dots 1,2) [\sigma_P]$ ;

Із формули (2.77) можна визначити полярний момент опору площі перерізу вала

$$W_P \geq \frac{M_K}{[\tau_K]}. \quad (2.80)$$

Крім міцності до валів ставлять *вимогу жорсткості*, яка полягає у тому, що *кут закручування вала не повинен перевищувати певної величини*, щоб не сталося втрати точності або виникнення коливальних передач.

Допустимий кут закручування вала довжиною 1 м задають в градусах  $[\theta] = 0,25 \dots 1 \frac{\text{град}}{\text{м}}$ .

Розрахункова формула на кутову крутильну жорсткість

$$\theta_{\max} = \frac{M_K}{GJ_P} \leq [\theta]. \quad (2.81)$$

За допомогою формул (2.79), (2.80), (2.81) виконують три види розрахунків конструкцій на міцність і жорсткість при крученні:

- проектний розрахунок;
- перевірний розрахунок;
- визначення допустимого навантаження.

Наприклад, при проектному розрахунку вала на кручення може бути рекомендована наступна методика.

1. Маючи схему вала і схему зовнішнього навантаження, будують епюру крутних моментів пружності в перерізах по окремих ділянках вала, як показано на рис. 2.27.

2. Далі обирають матеріал вала і приймають для цього матеріалу допустиме напруження, записують умови міцності (2.77) для ділянки вала з максимальним крутним моментом згідно епюри.

3. Проводячи розрахунок вала постійного перерізу по довжині, запишемо умову міцності (2.80). Тоді розрахункова формула для визначення діаметра вала має вигляд:

$$W_P = \frac{\pi d^3}{16} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_K}{\pi [\tau]}}. \quad (2.82)$$

### Приклад 2.7

Визначити діаметр вала машини, що передає крутильний момент

$$M_K = 12 \text{ кНм.}$$

Допустиме напруження матеріалу вала  $\tau = 2,5 \cdot 10^4 \text{ кН / м}^2$ .

Для розв'язання задачі використаємо формулу (2.82).

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 12}{\pi \cdot 2,5 \cdot 10^4}} = 0,135 \text{ м} = 135 \text{ мм.}$$

### Приклад 2.8

Визначити діаметр суцільного вала, зображеного на рис. 2.29, при наступних величинах моментів, що передаються чотирма шківками (третій із них – ведучий):  $M_1 = 900 \text{ Нм}$ ,  $M_2 = 1200 \text{ Нм}$ ,  $M_3 = 3000 \text{ Нм}$ ,  $M_4 = 900 \text{ Нм}$ .

Допустиме напруження  $[\tau] = 3 \cdot 10^4 \text{ кН / м}^2$ .

Допустимий відносний кут скручування вала  $[\theta] = \frac{\pi}{180 \cdot 4} \text{ рад / м}$ .

Модуль пружності сталі при зсуві  $G = 8 \cdot 10^7 \text{ кН / м}^2$ .

### Розв'язок

Побудуємо епюру крутних моментів  $M_k$  по окремих ділянках вала. Найбільший момент має місце на ділянці 2-3 (рис. 2.29)

$$M_{K \max} = M_1 + M_2 = 900 + 1200 = 2100 \text{ Нм.}$$

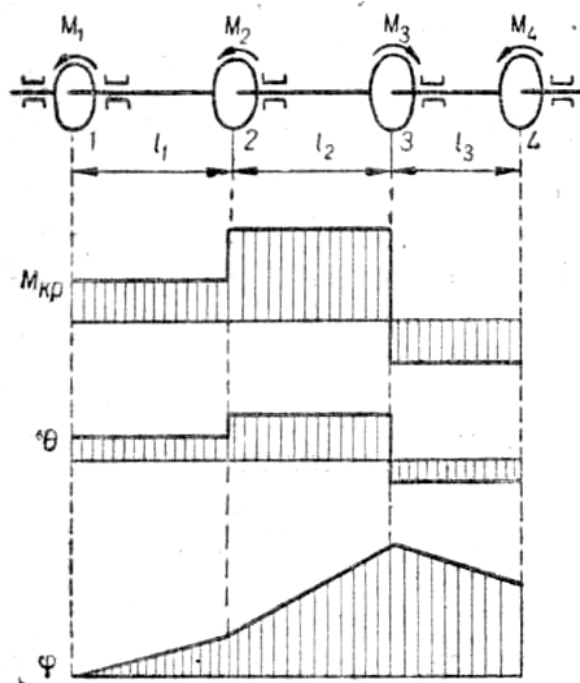


Рис. 2.29

Спочатку виберемо діаметр вала за умови міцності (2.82)

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,1}{\pi \cdot 3 \cdot 10^4}} = 0,071 \text{ м} = 71 \text{ мм.}$$

Далі визначимо діаметр вала за умови крутильної жорсткості (2.81)

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{G\pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,1 \cdot 180 \cdot 4}{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^7}} = 0,088 \text{ м} = 88 \text{ мм.}$$

Із двох знайдених значень діаметра вала належить обрати більший за умови крутильної жорсткості, приймаючи  $d = 90 \text{ мм}$ .

Далі визначимо відносний кут скручування вала по окремих ділянках, користуючись формулою (2.75).

$$\theta_1 = \frac{M_1}{GJ_p} = \frac{0,9 \cdot 32}{8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot (9 \cdot 10^{-2})^4} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м};$$

$$\theta_2 = \frac{M_2}{GJ_p} = \frac{2,1 \cdot 32}{8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot (9 \cdot 10^{-2})^4} = 4,07 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м};$$

$$\theta_3 = \frac{M_3}{GJ_p} = \frac{0,9 \cdot 32}{8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot (9 \cdot 10^{-2})^4} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м};$$

Епюра знайдених відносних кутів скручування ділянок вала показана на рис. 2.29.

На цьому ж рисунку знизу показано епюру повного кута скручування ділянок вала, обчисленого на підставі формули (2.76.)

#### **2.4.5. Потенціальна енергія деформації при крученні**

Уявимо круглий циліндричний брус сталого перерізу, жорстко закріплений одним кінцем і навантажений на другому кінці крутильним моментом, прикладеним статично, тобто, момент повільно збільшується від нуля до якогось значення  $M_K$ .

Вважаємо, що кутові деформації залишаються у межах пропорційності, підкоряючись закону Гука.

Крутильний момент викликає в брусі деформацію кручення, яка акумулюється у вигляді потенціальної енергії деформації  $U$ .

Без врахування незначної втрати енергії можна вважати, що робота моменту і потенціальна енергія деформації при крученні дорівнюють

$$A = U.$$

$$U = A = \frac{M_k \varphi}{2} = \frac{M_k^2 l}{2GJ_P}, \quad (2.83)$$

де  $\varphi$  – повний кут закручування бруса за формулою (2.76).

Потенціальна енергія деформації при крученні може бути виражена і через кутове переміщення  $\varphi$ , якщо із формули (2.76) визначити спочатку крутний момент  $M_k$

$$M_k = \frac{GJ_P}{l} \varphi.$$

Підставляючи цей вираз в (2.83), дістанемо:

$$U = \frac{\varphi^2 GJ_P}{2l}. \quad (2.84)$$

Із формул (2.83) і (2.84) випливає, що потенціальна енергія деформації при крученні уявляє собою квадратичну функцію силового фактора  $M_k$  або відповідного йому кутового переміщення  $\varphi$ .

Якщо на брус одночасно діє кілька крутильних моментів, або коли він має змінні розміри поперечного перерізу, то брус розділяють на ділянки і потенціальну енергію деформації всього бруса визначають як суму потенціальних енергій окремих ділянок.

## 2.5. Плоский згин прямого бруса

### 2.5.1. Загальні поняття про деформацію згину. Навантаження і типи опор балок

*Згином називається деформація, яка супроводжується зміною кривини осі бруса (балки).*

Деформація згину виникає під дією прикладених до бруса сил або пар сил, розміщених у площині, яка проходить через його подовжню вісь.

Якщо сили, прикладені до бруса, перпендикулярні до його центральної осі, то такий згин носить назву поперечного. Під дією цих сил брус згинається, а його вісь скривлюється саме в центральній площині

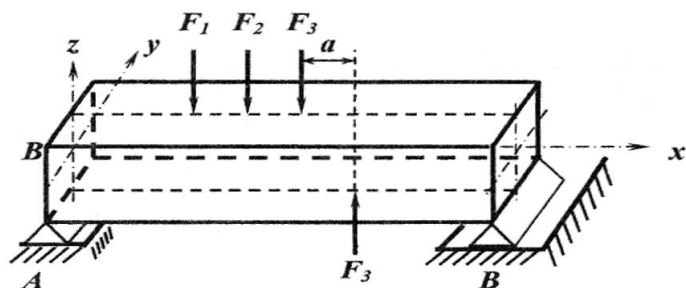


Рис. 2.30

(рис. 2.30), де розміщені центри ваги перерізів.

**Брус, який піддається плоскому згину, називають балкою.**

Якщо прикладені сили лежать у площині (силова площина), яка проходить через подовжню вісь балки і в ній розміщується одна з головних осей інерції, то відбувається **плоский згин**. При плоскому згині вісь бруса скривлюється у площині діючих сил. Внаслідок цього зігнута вісь балки уявляє собою плоску криву. Майже всі балки, що зустрічаються в інженерній практиці, мають не менше однієї осі симетрії, а сили, що діють на них, розташовуються в площині, яка збігається з однією з головних осей інерції. Тому вивчення плоского згину має великий практичний інтерес, оскільки знайдені результати придатні для проектування різних елементів конструкцій і машин. Вивчення плоского згину потребує визначення:

1. рівнодійних сил пружності, які виникають у перерізі балки;
2. закону розподілу сил пружності у перерізі і виведення розрахункових формул для балок.

Балка може бути навантажена зосередженими силами і розподіленими навантаженнями. Насправді, всі навантаження діють на певну площу. Якщо ж ця площа мала порівняно з довжиною балки, то таке навантаження можна розглядати як зосереджену силу. Наприклад, тиск від коліс автомобіля можна вважати зосередженими силами (рис. 2.31 а). До розподілених навантажень належать: рівномірно розподілені навантаження (рис. 2.31 б), навантаження від моменту (рис. 2.31 в) і навантаження, розподілені за законом трикутника (рис. 2.31 г).

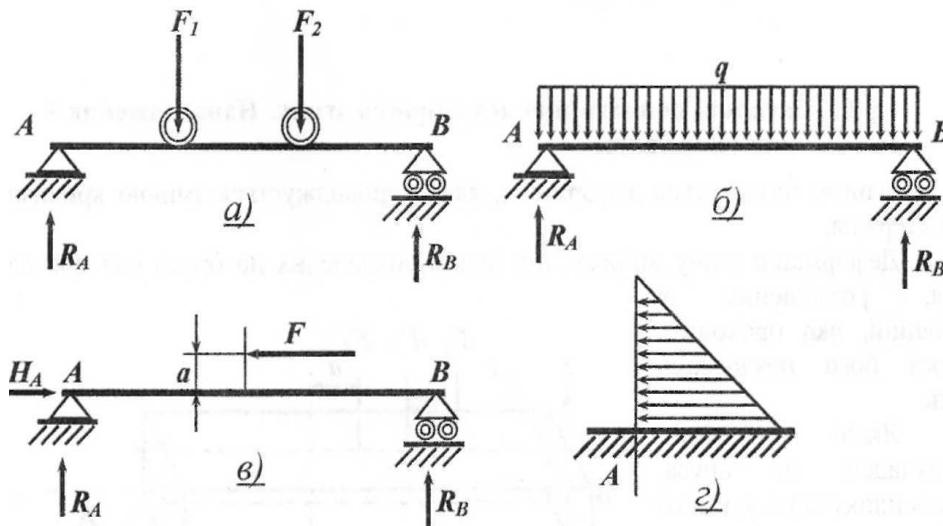


Рис. 2.31

Балка чинить тиск, який виникає від дії прикладеного до неї навантаження, на інші конструктивні елементи. Внаслідок цього на опорних елементах балки виникають сили реакцій.

Визначення величин опорних реакцій є першим етапом розв'язку

задачі на згин і виконується методами теоретичної механіки. Застосування цих методів до пружних елементів можливе внаслідок того, що деформації балок незначні і вони не впливають істотно на рівновагу системи. Балки можуть мати такі опори:

- а) шарнірно-нерухому;
- б) шарнірно-рухому (коток);
- в) жорстке закріплення.

Під дією навантаження в місці розміщення опор балки виникають певні сили реакцій, а в останній опорі і реактивний момент (див. рис. ?).

Балку з одним закріпленим кінцем (другий вільний), називають **консольною балкою** або консоллю.

**2.5.2. Визначення згинальних моментів і поперечних сил.**

При розрахунках балок дуже корисно застосовувати одноманітну систему сил. Як відомо з курсу теоретичної механіки, будь-яка система сил, що лежить у площині, може бути еквівалентно зведена до однієї сили і до однієї пари сил. Для цього треба навантаження і опорні реакції, що діють на балку, звести до зазначеного вище виду сил. При цьому за центр зведення сил зручно брати центр ваги розглядуваного перерізу балки, що значно спрощує визначення складових цих сил. Систему сил, які діють на балку зліва від перерізу  $mn$ , розміщеного на відстані  $x$  від опори  $A$  (рис. 2.32), можна виразити через момент пари сил і зосереджену силу.

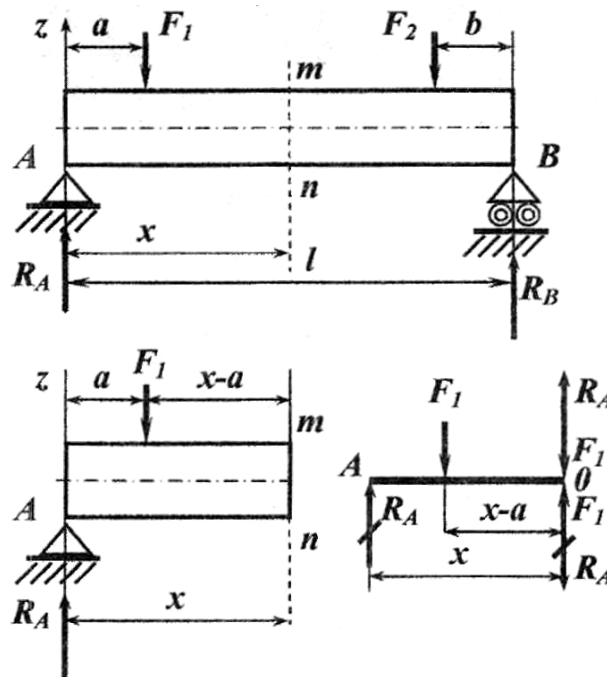


Рис. 2.32

**Частина друга**

Для цього в даному місці прикладемо, згідно теореми Пуансо, по дві рівні і протилежно направлені сили  $R_A$  і  $F_I$ . Отже, система сил, що діє зліва від перерізу  $m$ , зводиться до головного моменту (пари сил) і головного вектора

$$M_x = R_A \cdot x - F_I(x - a),$$

$$Q_x = R_A - F_I. \quad (2.85)$$

Головний момент пари  $M_x$  називається згинальним моментом у даному перерізі, а головний вектор  $Q_x$  – поперечною силою у тому самому перерізі.

*Згинальний момент у будь-якому перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил, які діють із одного боку від проведеного перерізу балки відносно центра ваги перерізу.*

*Поперечна сила в будь-якому перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх зовнішніх сил, прикладених з одного боку проведеного перерізу балки на напрям площини перерізу.*

Прийнято застосовувати таке правило знаків для  $M_x$  і  $Q_x$ .

1. Згинальний момент вважається додатним, якщо сумарний момент усіх сил зліва від перерізу має напрям за годинниковою стрілкою. Цей момент згинає горизонтальну балку випуклістю вниз. При згині балки в зворотному напрямі вважається, що в цьому перерізі діє від'ємний згинальний момент (рис. 2.32).

2. Поперечна сила вважається додатною, якщо сумарна проєкція всіх сил зліва від перерізу направлена вгору. При зворотному напрямі рівно дійної поперечна сила буде від'ємною (рис. 2.33).

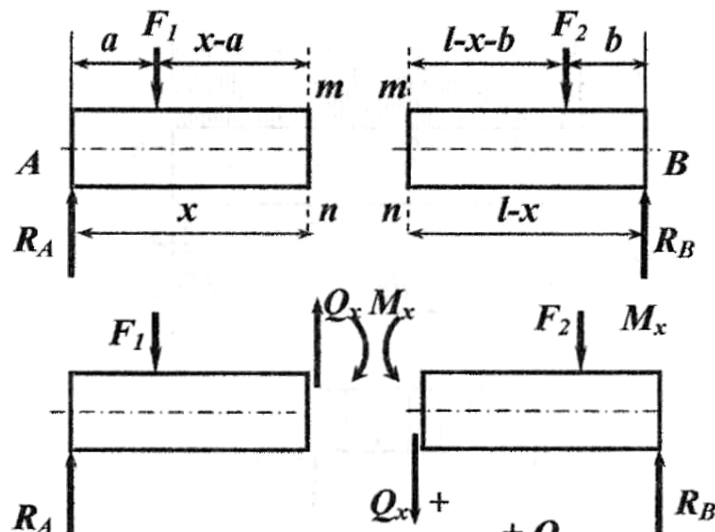


Рис. 2.33



У багатьох випадках для зменшення обсягу обчислень зручно розглядати праву частину балки замість лівої, якщо до неї прикладена менша кількість сил.

Для дотримання прийнятого вище правила знаків згинальних моментів і поперечних сил при розгляді правої частини балки слід враховувати, що:

а) згинальний момент буде додатним, якщо він спрямований проти годинникової стрілки і згинає балку випуклістю вниз;

б) поперечна сила буде додатна, якщо вона направлена вниз.

Слід також зазначити, що прийняте правило знаків пов'язане з характером деформації балки.

### 2.5.3 Теорема про диференціальну залежність між згинальним моментом і поперечною силою

Нехай на балку, яка розміщена на двох опорах, діє деяка система сил (рис. 2.34). Виділимо на балці елементарну ділянку довжиною  $dx$  і замінимо дію відкинутих частин балки зліва і справа відповідними згинальними моментами і поперечними силами.

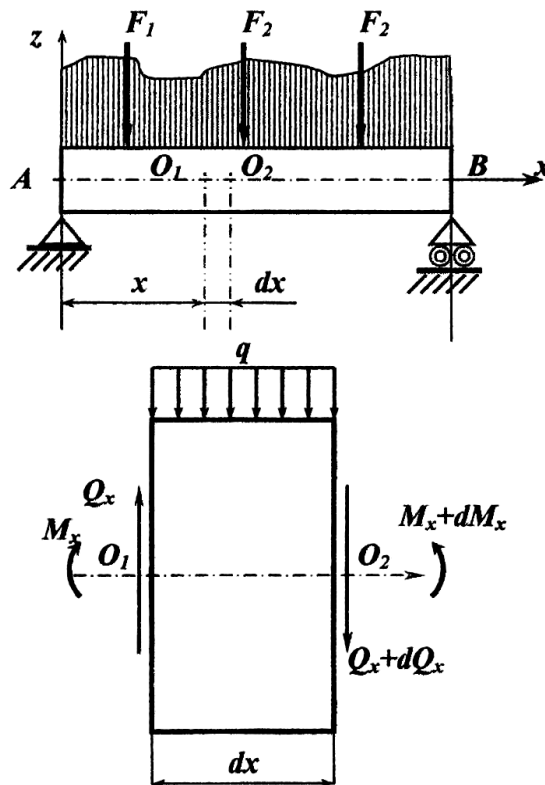


Рис. 2.34

Дію відкинутої лівої частини замінимо згинальним моментом  $M_x$  і поперечною силою  $Q_x$ , які вважаємо додатними. Взаємодія справа відрізняється елементарними величинами  $dM_x$  і  $dQ_x$ .

Із умов рівноваги виділеного елемента зусилля справа повинні бути направлені в протилежну відносно  $M_x$  і  $Q_x$  сторону. Складемо рівняння рівноваги елемента балки:

$$\begin{aligned} \sum Z_k = 0; \quad Q_x - q dx - (Q_x + dQ_x) = 0; \\ \sum M_{O_1} = 0; \quad -M_x - q_x dx \cdot \frac{dx}{2} + (M_x + dM_x) - (Q_x + dQ_x) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Із першого рівняння дістанемо:

$$q_x = -\frac{dQ_x}{dx}. \quad (2.87)$$

***Похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює обраній з протилежним знаком інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження в даному перерізі.***

Із другого рівняння, нехтуючи нескінченно малими величинами другого порядку малізми, матимемо:

$$Q_x dx - dM_x = 0. \quad Q_x = \frac{dM_x}{dx} \text{ або } q_x = \frac{d^2 M_x}{dx^2}. \quad (2.88)$$

***Похідна від згинального моменту за абсцисою перерізу балки дорівнює поперечній силі.***

Подальші побудови епюр  $M_x$  і  $Q_x$  дають наочне уявлення про цю важливу теорему при розв'язуванні задач згину.

#### **2.5.4. Побудова епюр згинальних моментів і поперечних сил**

Зусилля, які виникають у перерізі балки, залежать від величин згинальних моментів і поперечних сил. Зрівноважити момент зовнішніх сил може тільки момент сил пружності балки, утворений силами, направленими по нормалі до перерізу балки. Поперечна сила може бути урівноважена силою, яка є рівнодійною сил пружності, розміщених у площині перерізу балки. Таким чином, нормальні напруження, які виникають у перерізі балки, залежать від величини згинального моменту, а дотичні – від величини поперечної сили. Цю залежність у загальному вигляді можна записати так:

$$\sigma=f_1(M_x); \tau=f_2(Q_x).$$

Тому при визначенні найбільш напруженого перерізу потрібно знати закони зміни згинального моменту і поперечної сили за абсцисою цього перерізу вдовж балки. Для цього будують два графіки, які дають змогу встановити закони зміни згинального моменту і поперечної сили по довжині балки. Ці графіки називають епюрами.

Порядок побудови епюр  $M_x$  і  $Q_x$  такий:

- визначають величини опорних реакцій і перевіряють правильність їх обчислень;
- ділять балку на окремі ділянки з однаковим законом зміни навантаження;
- складають рівняння для визначення значень згинальних моментів і поперечних сил на кожній ділянці. Слід пам'ятати, що на межі ділянок величини  $M_x$  і  $Q_x$ , обчислені справа і зліва, повинні дорівнювати одна одній із врахуванням прикладених сил або моментів;
- обчислюють ординати  $M_x$  і  $Q_x$  за складеними для окремих ділянок рівняннями;
- будують у прийнятому масштабі епюри  $M_x$  і  $Q_x$ .

Епюру згинальних моментів будують із боку стисненого волокна.

Нульовою лінією епюри називається лінія, яка відповідає нульовим значенням  $M_x$  і  $Q_x$ . При побудові епюр поперечних сил відкладаємо вгору від нульової лінії її додатні значення, а вниз – від'ємні.

Епюри слід штрихувати лініями, перпендикулярними до осі балки, тому що вони одночасно будуть і величинами ординат згинальних моментів та поперечних сил у відповідних перерізах балки.

Для контролю правильності побудов епюр  $M_x$  і  $Q_x$  слід застосовувати вище згадану диференціальну залежність між величинами цих характеристик згину. Геометричну інтерпретацію похідної можна уявити так: поперечна сила є тангенсом кута нахилу дотичної в епюрі  $M_x$ .

### **Приклад 2.9**

Консольна балка навантажена зосередженою силою  $P$ , яка прикладена до вільного кінця балки (рис. 2.35).

Балка має одну ділянку довжиною  $l$ . Будуємо епюри справа наліво, взявши за початок відліку абсциси  $x$  точку  $B$ .

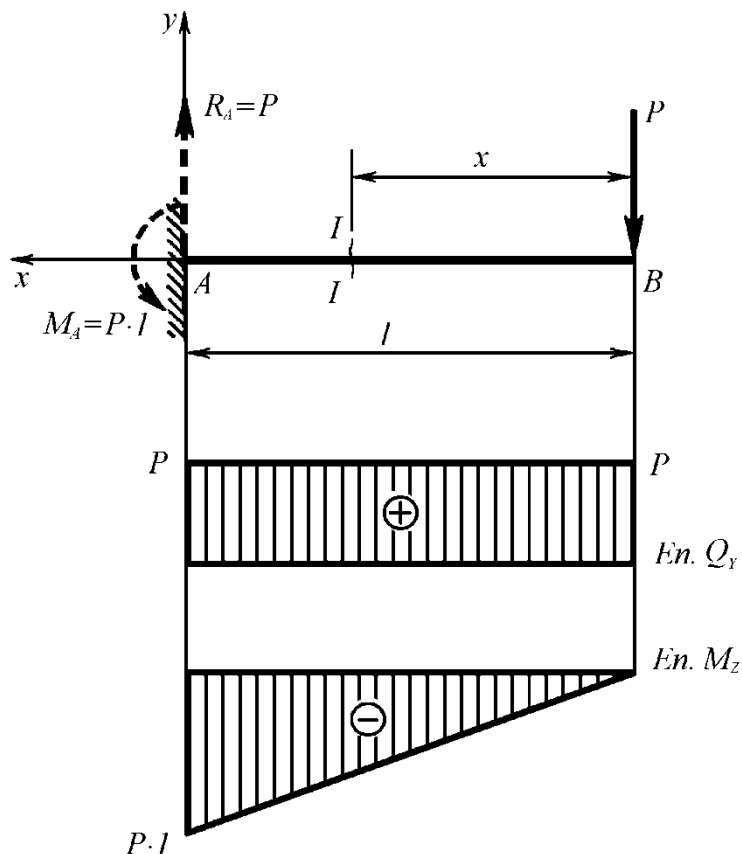


Рис. 2.35

Розглянувши рівновагу правої частини балки, визначаємо функції  $M_z(x)$  і  $Q_y(x)$  на довжині  $0 \leq x \leq l$ :

$$Q_y(x) = P, \quad M_z(x) = -P \cdot x.$$

Отже, поперечні сили в перерізах мають постійне додатне значення по довжині балки, а функція згинального моменту  $M_z(x)$  є лінійною з такими значеннями в характерних перерізах:

при  $x = 0$  (переріз B):  $M_B = -P \cdot 0 = 0,$

при  $x = l$  (переріз A):  $M_A = -P \cdot l.$

За отриманими даними будуємо епюри поперечних сил і згинальних моментів (рис. 2.35). Максимальний згинальний момент – в точці A.

### Приклад 2.10

На консольну балку діє рівномірно розподілене по довжині навантаження інтенсивності  $q \left( \frac{\kappa H}{m} \right)$  (рис. 2.36).

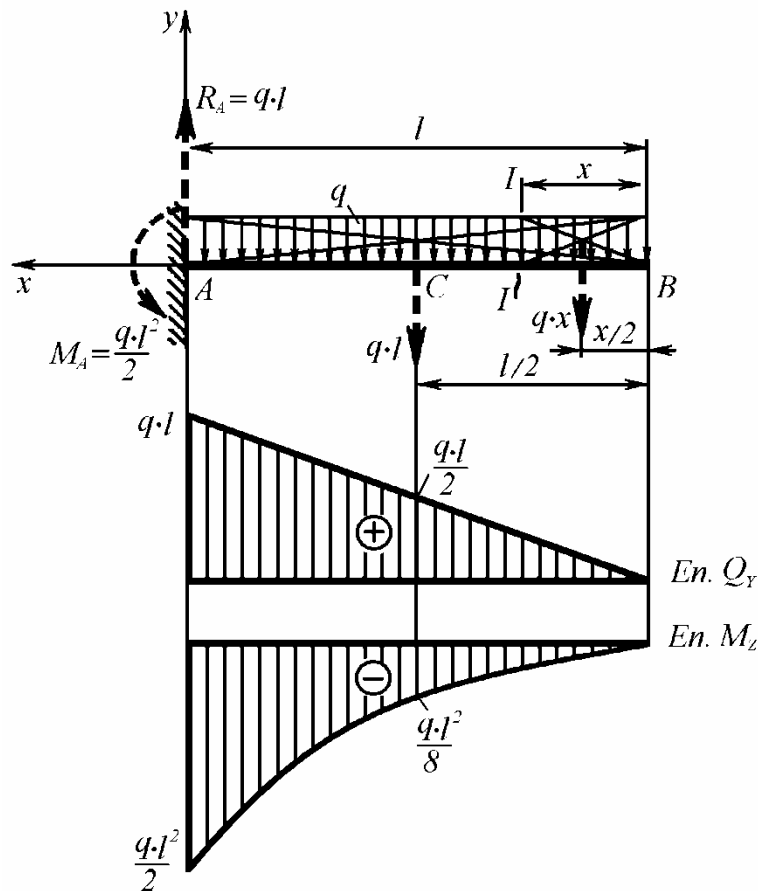


Рис. 2.36

Балка має одну ділянку довжиною  $l$ . Будуємо епюри справа наліво, прийнявши за початок відліку  $x$  точку  $B$ .

Розглянувши рівновагу правої частини балки, визначаємо функції  $M_z(x)$  і  $Q_y(x)$  на довжині  $0 \leq x \leq l$ :

$$Q_y(x) = -q \cdot x, \quad M_z(x) = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

За рівняннями поперечна сила  $Q_y(x)$  змінюється за законом прямої, а згинальний момент  $M_z(x)$  – за законом квадратичної параболи.

Для побудови епюри поперечних сил достатньо визначити ординати у двох характерних перерізах:

при  $x=0$  (переріз  $B$ ):  $Q_B = -q \cdot 0 = 0$ , при  $x=l$  (переріз  $A$ ):  $Q_A = -q \cdot l$ .

Враховуючи, що епюра згинальних моментів є кривою, для її побудови визначимо ординати в трьох поперечних перерізах:

при  $x=0$  (переріз  $B$ ):  $M_B=0$ , при  $x=\frac{l}{2}$  (переріз  $C$ ):  $M_A=-\frac{ql^2}{8}$ ,

при  $x=l$  (переріз  $A$ ):  $M_A=-\frac{ql^2}{2}$ .

За отриманими даними будуюмо епюри поперечних сил і згинальних моментів (рис. 2.36).

Перейдемо до розгляду балок на двох опорах, де потрібно попередньо визначати опорні реакції.

### Приклад 2.11

Двохопорна балка навантажена зосередженою силою  $P$  (рис. 2.37).

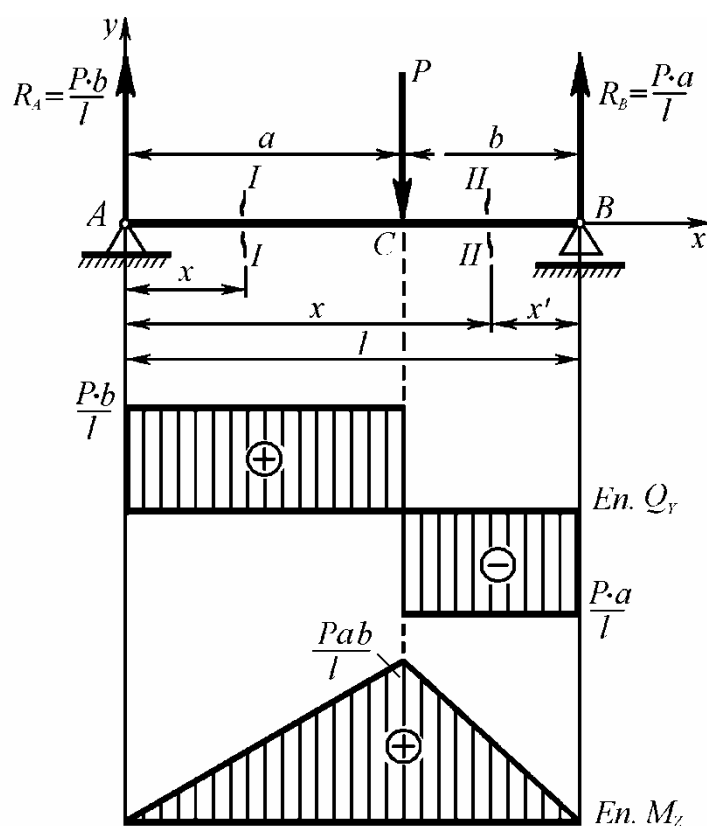


Рис. 2.37

Спочатку визначимо опорні реакції.

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad -R_A \cdot l + P \cdot b = 0, \quad R_A = \frac{Pb}{l},$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad -P \cdot a + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{Pa}{l}.$$

В даному випадку балка має дві ділянки  $AC$  і  $CB$  із точкою  $C$  на їх

границі. Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку  $x$  точку  $A$ .

Розглядаємо рівновагу лівої частини балки.

На першій ділянці  $AC$  в межах значень  $0 \leq x \leq a$  для довільного перерізу  $I - I$ :

$$Q_y^I(x) = R_A = \frac{Pb}{l} \quad M_z^I(x) = R_A \cdot x = \frac{Pb}{l} \cdot x.$$

Отже, на першій ділянці поперечні сили  $Q_y^I(x)$  однакові у всіх перерізах і дорівнюють додатному значенню реакції в опорі  $A$ , їх епюра має вигляд горизонтальної прямої.

Епюра згинальних моментів  $M_z^I(x)$  змінюється лінійно з величинами в характерних перерізах:

$$\text{при } x=0 \text{ (переріз } A): M_A = 0, \text{ при } x=a \text{ (переріз } C): M_B = \frac{Pab}{l}.$$

На другій ділянці  $CB$  в межах значень  $a \leq x \leq l$  для довільного перерізу  $II - II$ :

$$Q_y^{II}(x) = R_A - P = \frac{Pb}{l} - P = -P \frac{l-b}{l} = -\frac{Pa}{l}$$

$$\begin{aligned} M_z^{II}(x) &= R_A \cdot x - P(x-a) = \frac{Pb}{l} \cdot x - P(x-a) = \\ &= \frac{P}{l}(bx - lx + la) = \frac{P}{l}(-ax + la) = \frac{Pa}{l}(l-x). \end{aligned}$$

В даному випадку функції  $M_z^{II}(x)$  і  $Q_y^{II}(x)$  простіше було визначати при побудові епюри на цій ділянці справа наліво із застосуванням координати довільного перерізу  $x'$  в напрямку від точки  $B$  до точки  $A$ ):

$$Q_y^{II}(x') = -R_B = -\frac{Pa}{l}, \quad M_z^{II}(x') = R_B \cdot x' = R_B \cdot (l-x) = \frac{Pa}{l} \cdot (l-x).$$

На другій ділянці поперечні сили  $Q_y^{II}(x)$  також постійні за величиною, але мають від'ємне значення реакції в опорі  $B$ . Згинальні моменти  $M_z^{II}(x)$  змінюються лінійно, їх величини в характерних перерізах дорівнюють:

$$\text{при } x=a \text{ (переріз } C): M_C = \frac{Pa}{l}(l-a) = \frac{Pab}{l},$$

при  $x=l$  (переріз  $B$ ):  $M_B = \frac{Pa}{l}(l-l) = 0$ .

В результаті отримаємо епюри, які представлені на рис. 3.36. Епюра свідчить, що при  $x=a$  функція  $Q_y(x)$  має стрибок на величину зовнішньої сили  $P$ , а функція  $M_z(x)$  в цьому перерізі має злам при максимальному значенні.

### Приклад 2.12

Двохопорна балка навантажена зосередженою парою сил, із моментом  $M$  (рис. 2.38).

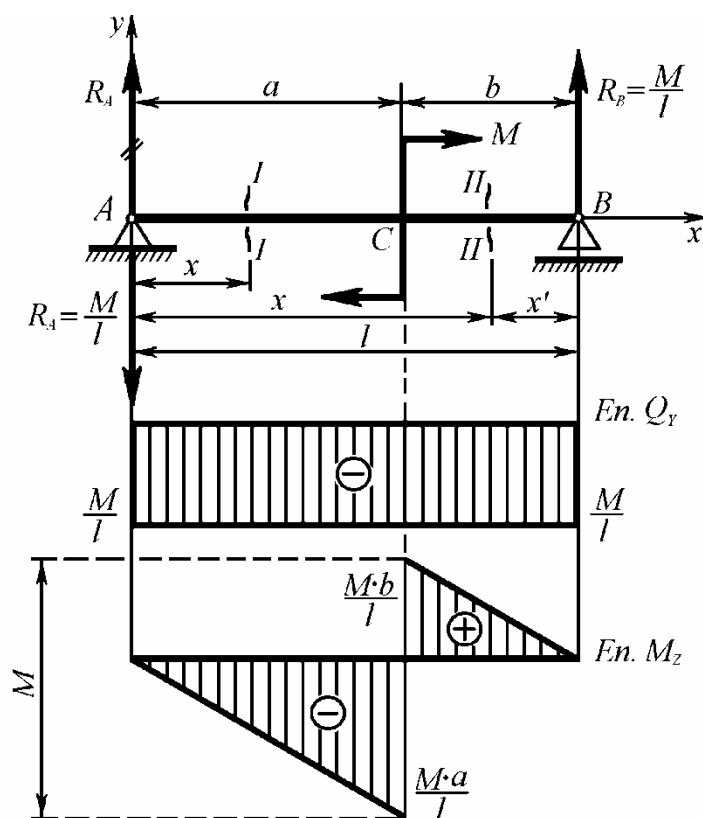


Рис. 2.38

Спочатку визначимо опорні реакції.

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad -R_A \cdot l - M = 0, \quad R_A = -\frac{M}{l},$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad -M + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{M}{l}.$$

Отримане від'ємне значення реакції  $R_A$  вказує на те, що в дійсності



вона направлена вниз. Змінюємо напрямок  $R_A$  на розрахунковій схемі балки на протилежний і приймаємо його значення додатним.

Балка має дві ділянки  $AC$  і  $CB$  із точкою  $C$  на їх границі. Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку  $x$  точку  $A$ .

Розглядаємо рівновагу лівої частини балки.

На першій ділянці  $AC$  в межах значень  $0 \leq x \leq a$  для довільного перерізу  $I - I$ :

$$Q_y^I(x) = -R_A = -\frac{M}{l} \quad M_z^I(x) = -R_A \cdot x = \frac{M}{l} \cdot x.$$

На другій ділянці  $CB$  в межах значень  $a \leq x \leq l$  для довільного перерізу  $II - II$ :

$$Q_y^{II}(x) = -R_A = -\frac{M}{l},$$

$$\begin{aligned} M_z^{II}(x) &= -R_A \cdot x + M = -\frac{M}{l} \cdot x + M = \\ &= \frac{Ml}{l} - \frac{M}{l}x = \frac{M}{l}(l-x). \end{aligned}$$

Із цих виразів видно, що поперечні сили  $Q_y(x)$  у всіх перерізах балки на обох ділянках мають однакове від'ємне значення. Функція згинального моменту  $M_z(x)$  має лінійний характер і в характерних перерізах обох ділянок набуває наступні значення:

на першій ділянці  $AC$  ( $0 \leq x \leq a$ )

при  $x=0$  (переріз  $A$ ):  $M_A = 0$ , при  $x=a$  (переріз  $C$ ):  $M_C = \frac{Ma}{l}$ ,

на другій ділянці  $CB$  ( $a \leq x \leq l$ )

при  $x=a$  (переріз  $C$ ):  $M_C = \frac{Ma}{l} + M$ ,

при  $x=l$  (переріз  $B$ ):  $M_B = \frac{Ma}{l}(l-l) + M = 0$ .

Епюри поперечних сил і згинаючих моментів, побудовані по отриманим значенням, показані на рис. 2.38.

Функція  $M_z(x)$  в місці дії зовнішнього моменту  $M$  (при  $x=a$ ) має стрибок на величину цього моменту.

Максимальне значення епюра згинальних моментів – в місці дії зовнішнього моменту.

### Приклад 2.13

На двохопорну балку діє рівномірно розподілене по довжині

навантаження інтенсивності  $q \left( \frac{\kappa H}{m} \right)$  (рис. 2.39).

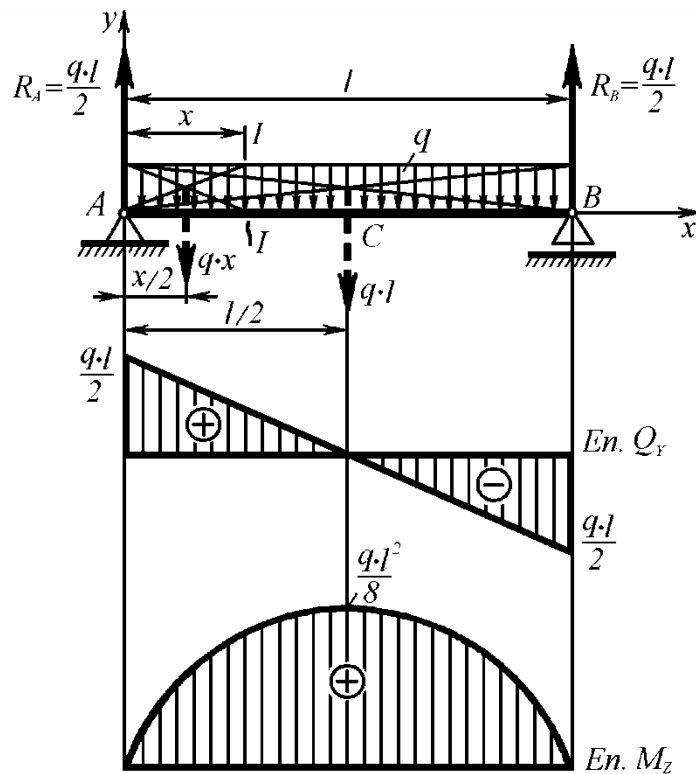


Рис. 2.39

Визначаємо опорні реакції балки. Для цього зведемо розподілене навантаження до зосередженої сили  $ql$ , що прикладена посередині балки, і з рівнянь рівноваги для симетричної системи отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad -R_A \cdot l + ql \cdot \frac{l}{2} = 0, \quad R_A = \frac{ql}{2},$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad -ql \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{ql}{2}.$$

Переходимо до побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів.

Балка має одну ділянку  $AB$  довжиною  $l$ . Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку  $x$  точку  $A$ .

Розглянувши рівновагу лівої частини балки, визначаємо функції  $M_z(x)$  і  $Q_y(x)$  на довжині  $0 \leq x \leq l$ :

$$Q_y(x) = R_A - q \cdot x = \frac{ql}{2} - qx, \quad M_z(x) = R_A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Отже, поперечна сила  $Q_y(x)$  змінюється за лінійним законом, а згинальний момент  $M_z(x)$  – за законом квадратичної параболи.

Для побудови епюри поперечних сил достатньо визначити ординати у двох характерних перерізах:

$$\text{при } x=0 \text{ (переріз } A\text{): } Q_A = \frac{ql}{2}, \text{ при } x=l \text{ (переріз } B\text{): } Q_B = -\frac{ql}{2}.$$

Враховуючи, що епюра згинальних моментів є кривою, для її побудови визначимо ординати в трьох поперечних перерізах:

$$\text{при } x=0 \text{ (переріз } A\text{): } M_A = 0,$$

$$\text{при } x = \frac{l}{2} \text{ (переріз } C\text{): } M_C = -\frac{ql^2}{8},$$

$$\text{при } x=l \text{ (переріз } B\text{): } M_B = 0.$$

На підставі розглянутих прикладів можна визначити загальні закономірності побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів.

1. На ділянці балки, де відсутнє розподілене навантаження, епюра  $Q_y$  є прямою, яка паралельна подовжній осі балки, а епюра  $M_z$  – похила пряма.

2. В перерізі, де до балки прикладена зосереджена сила  $P$ , на епюрі  $Q_y$  буде стрибок на величину цієї зовнішньої сили, а на епюрі  $M_z$  – злам.

3. В перерізі, де до балки прикладена зосереджена пара сил з моментом  $M$ , на епюрі  $M_z$  буде стрибок на величину цього моменту, а на епюрі  $Q_y$  змін не буде.

4. На ділянці дії рівномірно розподіленого навантаження  $q$  епюра  $Q_y$  буде похилою прямою, а епюра  $M_z$  – параболою із випуклістю назустріч дії розподіленого навантаження.

5. Якщо на ділянці дії розподіленого навантаження  $q$  епюра  $Q_y$  перетинає базову лінію (точка, де  $Q_y = 0$ ), то в цьому перерізі згинальний момент має екстремальне значення.

6. Згинальний момент в кінцевих перерізах балки завжди дорівнює нулю, крім випадку, коли до цього перерізу прикладена пара сил з моментом  $M$ . В такому разі згинальний момент  $M_z$  в кінцевому перерізі дорівнює моменту прикладеної пари сил.

Вказані закономірності дозволяють спростити процедуру побудови епюр у складних випадках навантаження балки і обчислювати значення епюр тільки в характерних перерізах балки.

### 2.5.5. Визначення нормальних напружень при згині

Над розв'язанням цього питання протягом довгого часу працювали багато видатних вчених. Перша спроба розв'язати задачу при згині брусів належить великому італійському вченому Г. Галілею (1561-1642).

Пізніше Маріотт, Лейбніц і Я. Бернуллі розглядали балку як пружне тіло і припускали, що волокна зазнають розтягу, причому нейтральним шаром є зовнішня угнута поверхня. Бернуллі ввів при вивченні згину гіпотезу плоских перерізів.

Нав'є вперше встановив правильне положення нейтральної лінії і довів аналітично, що вона проходить через центр ваги поперечного перерізу балки. Він надав сучасного вигляду формулі для визначення напружень при згині балок.

Вище зазначалося, що згинальний момент викликає в перерізі балки нормальні напруження. Тому при визначенні їх слід розглянути такий випадок навантаження, при якому в перерізах балки діятимуть тільки одні згинальні моменти, а поперечних сил не буде. Таку деформацію називають чистим згином.

Основні положення розрахунку будь-яких конструктивних елементів повинні завжди ґрунтуватись на результатах експериментальних досліджень, які проводяться на відповідних зразках у лабораторії. Експериментальні дослідження балки, яка підлягає чистому згину, дають змогу зробити такі висновки.

1. Проведені до деформації по бокових поверхнях балки дві паралельні прямі лінії, які розташовані близько одна від одної і перпендикулярні до поздовжньої осі, після навантаження на балку залишаються прямими, але поверненими відносно одна одної на деякий кут  $d\alpha$  (рис. 2.40 б).

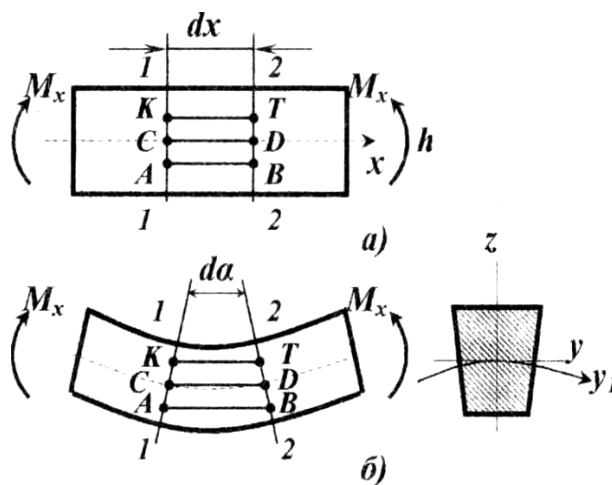


Рис. 2.40

2. Волокно  $KT$  вкорочується, а волокно  $AB$  видовжується (рис. 2.40 а). Отже, між цими волокнами повинні лежати волокна, видовження яких дорівнює нулю, що вказує на відсутність у них напружень. Такий шар волокон балки називається нейтральним.

3. Площа перерізу балки в стисненій зоні збільшується, а в розтягненій – зменшується (рис. 2.40 б).

На основі даних досліджень можна зробити такі припущення:

а) плоский поперечний переріз балки при чистому згині залишається плоским до і після деформації (гіпотеза плоских перерізів);

б) подовжні волокна під дією нормальних напружень перебувають у лінійному напруженому стані;

в) деформації волокон по ширині перерізів елемента однакові, а це дає підставу вважати, що і нормальні напруження по ширині балки також сталі.

При розв'язку даної задачі треба застосувати ще такі обмеження:

1. балка повинна мати хоча б одну вісь симетрії, яка лежить у площині дії прикладених сил;

2. матеріал балки підкоряється закону Гука, крім того, модуль пружності при розтягу і стиску однаковий;

3. розмір балки має бути таким, при якому виникає тільки плоский згин без скручування і жолоблення.

Метод визначення нормальних напружень, який ґрунтується на перерахованих вище припущеннях і обмеженнях, дає достатню для інженерної практики точність при розрахунках балок на згин.

Для визначенні закону розподілу нормальних напружень уявно відокремимо від балки двома близькими перерізами 1-1 і 2-2 елементарну ділянку довжиною  $dx$  і розглянемо її рівновагу (рис. 2.41).

Позначимо вісь  $z$  як лінію перетину площини згину з площиною перерізу балки. Вісь  $y$  є нейтральною, утвореною перерізом нейтрального шару з площиною перерізу балки. Вісь  $x$  взято вздовж нейтрального шару перпендикулярно до осей  $y$  і  $z$ .

У кожній точці поперечного перерізу діє лише нормальне напруження  $\sigma_2$ . На елементарну площадку з координатами  $y$  і  $z$  діє сила  $\sigma_2 dA$ .

Запишемо рівняння рівноваги елементарної частини балки. Із шести можливих рівнянь у випадку заданого навантаження використаємо три. Рівняння на підставі умов рівноваги  $\sum Y = 0$  і  $\sum Z = 0$  перетворюються в тотожність, тому що проекції зусилля  $\sigma_2 dA$  на ці осі дорівнюють нулю.

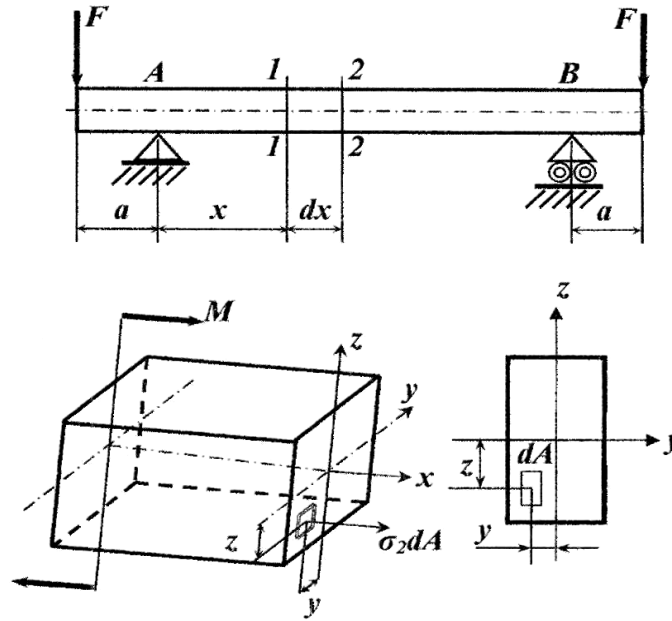


Рис. 2.41

Рівняння моментів відносно осі  $x$  також перетворюються в нуль, оскільки зусилля  $\sigma_2 dA$  паралельно до осі  $x$ .

$$\sum X_k = \int_A \sigma_2 dA = 0; \quad \sum M_y = \int_A \sigma_2 z dA - M = 0; \quad (2.89)$$

$$\sum M_z = \int_A \sigma_2 y dA = 0.$$

Проте, трьох рівнянь рівноваги статки не досить для визначення нормальних напружень. Тому треба звернутись до розгляду деформації, яка виникає при згині балки. Виділимо двома нескінченно близькими перерізами елемент довжиною  $dx$ . Під дією навантаження балка згинається, а перерізи 1-1 і 2-2 повертаються і утворюють між собою кут  $d\alpha$  (рис. 2.42).

Волокна балки скривлюються, маючи в точці  $M$  загальний центр кривини. Слід зазначити, що волокна нейтрального шару  $KT$ , скривлюючись, зберігають при цьому свою початкову довжину. Знайдемо видовження волокна  $AB$ , розміщеного на відстані  $z$  від нейтрального шару. Довжина дуги  $AB$  дорівнює:

$$\overset{\frown}{AB} = (\rho + z) d\alpha.$$

Визначимо абсолютне видовження волокна  $AB$ , враховуючи, що початкова довжина волокон дорівнює довжині волокон нейтрального шару

як до, так і після деформації самої балки.

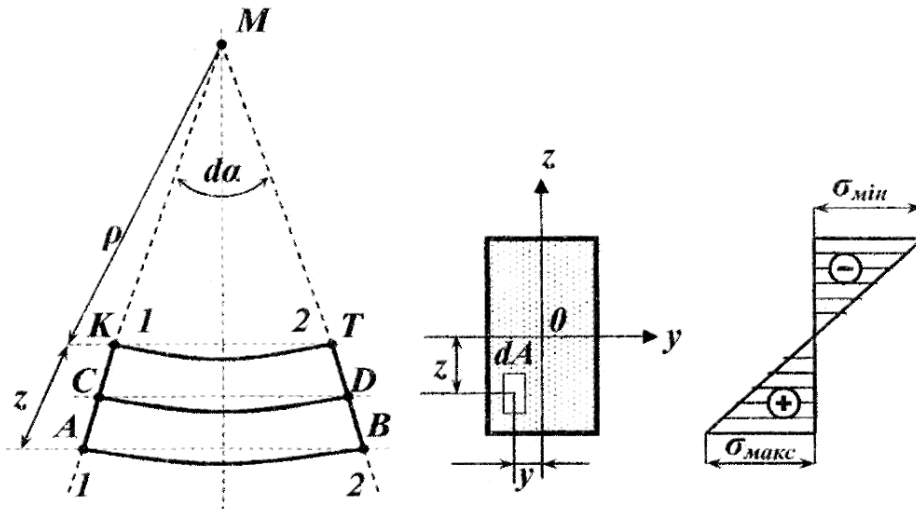


Рис. 2.42

$$\Delta l = \widehat{AB} - \overline{AB} = \widehat{AB} - \widehat{KT} = (\rho + z)d\alpha - \rho d\alpha = z d\alpha. \quad (2.90)$$

Відносне видовження волокна  $AB$  буде дорівнювати:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{AB} = \frac{z d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z}{\rho}.$$

Видовження волокон пропорційне їх відстаням до нейтрального шару. На основі другого припущення про лінійну залежність між напруженнями і деформаціями запишемо за законом Гука:

$$\sigma_2 = E\varepsilon = E \frac{z}{\rho}.$$

Звідси можна зробити висновок, що розподіл нормальних напружень по перерізу балки відбувається за лінійним законом (рис. 2.42). Підставимо значення напружень  $\sigma_2$  у перше рівняння рівноваги (2.89):

$$\frac{E}{\rho} \int_A z dA = 0; \Rightarrow \int_A z dA = 0; \quad \text{оскільки } \frac{E}{\rho} \neq 0.$$

Цей інтеграл є статичним моментом площі перерізу відносно нейтральної осі. Рівність його нулю свідчить, що нейтральна вісь проходить через центр ваги перерізу. Отже, положення нейтральної осі визначено.

Із другого рівняння рівноваги (2.89) знайдемо

$$\int_A \frac{E}{\rho} z \cdot z dA = M \quad \text{або} \quad \frac{E}{\rho} \int_A z^2 \cdot dA = M,$$

де  $\int_A z^2 dA$  – осьовий або екваторіальний момент інерції перерізу відносно нейтральної осі. Зробивши деякі перетворення, матимемо:

$$\frac{EI_y}{\rho} = M \quad \text{або} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{M}{I_y}. \quad (2.91)$$

Оскільки  $\frac{E}{\rho} z = \sigma_z$ , то остаточно будемо мати:

$$\sigma_z = \frac{M}{I_y} z. \quad (2.92)$$

Помноживши праву і ліву частину рівності (2.91) на  $z$  дістанемо:

$$\frac{E}{\rho} z = \frac{M}{I_y} z.$$

**Нормальні напруження у будь-якій точці перерізу прямо пропорційні величині згинального моменту і відстані від даної точки до нейтральної осі та обернено пропорційні моменту інерції перерізу відносно цієї ж осі.**

Підставивши значення  $\sigma_z$  у третє рівняння (2.89), дістанемо:

$$\int_A \frac{E}{\rho} zy dA = 0 \quad \text{або} \quad \frac{E}{\rho} \int_A zy dA = 0,$$

де  $\int_A zy dA$  – відцентровий момент інерції перерізу балки.

Рівність відцентрового моменту нулю вказує на те, що переріз симетричний відносно осі  $z$ .

Формула (2.92) свідчить, що максимальні нормальні напруження по перерізу виникають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної осі. Обчислюються вони за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_y} z_{\max} = \frac{M}{I_y / z_{\max}} \quad (2.93)$$



Відношення  $\frac{I_y}{z_{max}}$  називають осьовим моментом опору при згині.

Тоді формулу (2.93) можна записати у вигляді:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_y}. \quad (2.94)$$

### 2.5.6. Розрахункова формула міцності балки на згин

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальне нормальне напруження в небезпечному перерізі не повинно перевищувати допустиме.

Вважаючи, що гіпотеза про не натискання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруження в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що й у випадку чистого згину. Питання, що стосуються перевірки міцності балки на дотичні напруження і розрахунку балок на жорсткість розглядатимуться у наступних параграфах.

Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{зг max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (2.95)$$

**Нормальні напруження в небезпечному перерізі, обчислені за формулою (2.95), не повинні перевищувати допустимі.**

Допустиме нормальне напруження для випадку згину обирають таким самим, як для розтягу і стиску. Максимальний згинальний момент знаходять з епюр згинальних моментів або розраховують.

Оскільки осьовий момент опору деформації згину  $W$  у розрахунковій формулі стоїть у знаменнику, то **чим більше  $W$ , тим менші розрахункові напруження.**

Визначимо моменти опору деформації згину для найбільш поширених перерізів.

1. Прямокутники зі сторонами  $b \times h$  (рис. 2.43).

$$W = \frac{J}{y_{max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}.$$

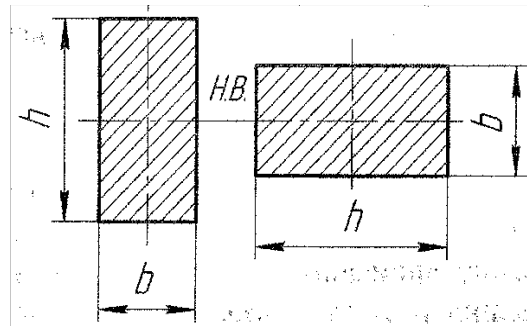


Рис. 2.43

Якщо балку прямокутного перерізу покласти плазом, то  $W' = h \cdot \frac{b^2}{6}$ ,  
тоді

$$\frac{W_{ПП}}{W'_{ПП}} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{b} > 1.$$

Отже, за інших рівних умов максимальні нормальні напруження  $\sigma'$  в прямокутній балці, яку покладено плазом, будуть більшими (мається на увазі, що згин відбувається у вертикальній площині).

Із сказаного випливає правило:

**для забезпечення максимальної міцності вісь, відносно якої момент інерції максимальний, повинна бути нейтральною.**

2. Круг діаметром  $d$ :

$$W = \frac{\pi d^4}{64} \div \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

3. Кільце розміром  $D \times d$ :

$$W = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \div \frac{D}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Момент опору кільцевого перерізу не можна обчислювати як різницю моментів опорів великого і малого кругів.

Неважко підрахувати, що при однаковій площі поперечного перерізу, тобто однаковій витраті матеріалу; момент опору кільцевого перерізу більший ніж момент опору суцільного круглого перерізу.

Оскільки поблизу нейтральної осі матеріал зазнає незначного

напруження, то вигідно більше матеріалу розміщувати далі від нейтральної осі.

Тому в машинобудуванні рідко використовують металеві балки прямокутного перерізу, але досить широко використовують прокатні профільні балки таврового, двотаврового, кутового, швелерного й інших перерізів.

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад, чавун), доцільно використовувати профілі, несиметричні відносно нейтральної осі, наприклад таврові або П-подібні. Оскільки у несиметричного профілю під час згину виникають неоднакові напруження розтягу і стиску, то переріз, наприклад, чавунної балки вигідно розміщувати так, щоб менші напруження були в зоні розтягнутих, а більші – в зоні стиснених волокон (рис. 2.44).

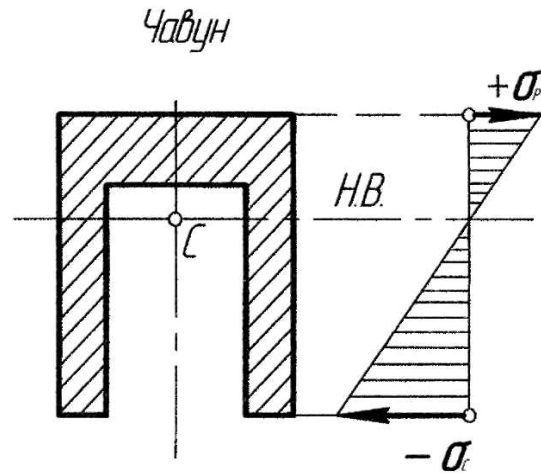


Рис. 2.44

### 2.5.7. Визначення дотичних напружень

При проектуванні інженерних споруд для залізниці Москва — Петербург потрібно було дослідити міцність складених балок і ферм. У зв'язку з цим головний проектувальник і будівельник інженерних споруд проф. Д.І. Журавський провів численні дослідження з питань розподілу дотичних напружень і в 1855 р. запропонував свій метод визначення цих напружень.

Як зазначалося вище, дотичні напруження, що виникають при згині, зрівноважують поперечну силу  $Q_x$  і зв'язані з нею також функціональною залежністю:

$$\tau_z = f_2(Q_x).$$

Д.І. Журавський при виведенні закону розподілу дотичних напружень по перерізу прямокутної балки застосував такі припущення:

1. дотичні напруження, що виникають при згині балки по перерізу, паралельні зрівноваженій ними силі  $Q_x$ ;
2. дотичні напруження сталі по ширині перерізу балки, тобто для точок, однаково віддалених від нейтральної осі, вони рівні.

**Частина друга**

При розгляді балки, яка перебуває в стані плоского згину, уявно виділимо з неї перерізами I-I та II-II елемент шириною  $dx$  (рис. 2.45).

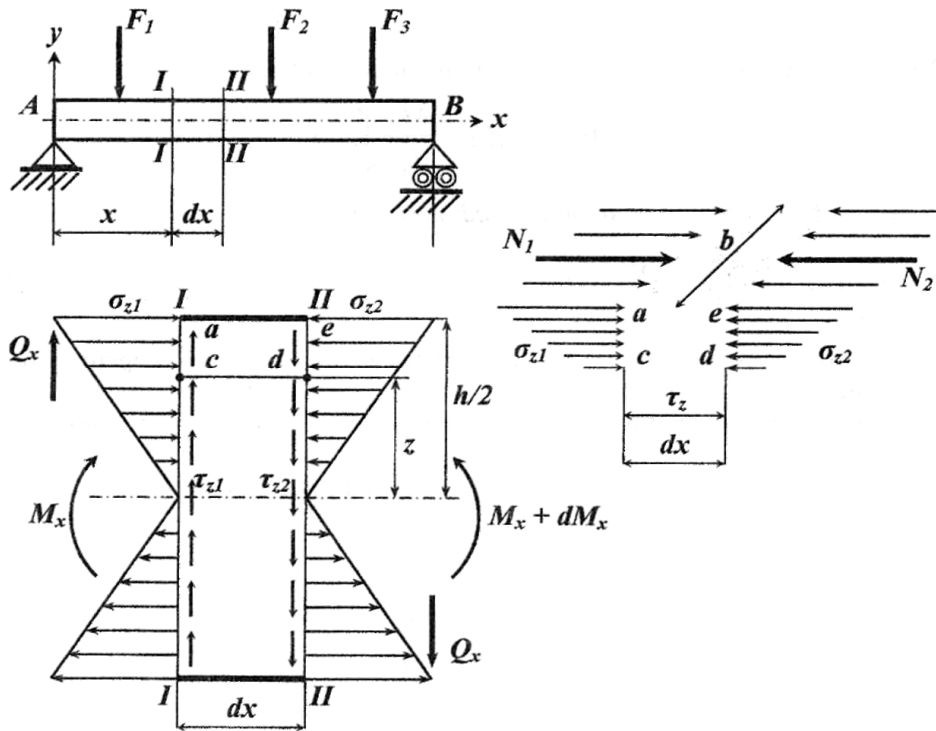


Рис. 2.45

Цей елемент розміщений на навантаженій ділянці балки і на достатній відстані від зосереджених сил. Тому по перерізах I-I та II-II діють рівні поперечні сили, які викликають однакові дотичні напруження. На вирізаний паралелепіпед діють згинальні моменти  $M_x$  і  $(M_x + dM_x)$  та поперечні сили  $Q_x$ . Ці силові фактори врівноважуються дотичними і нормальними напруженнями, що виникають по перерізах I-I та II-II.

Замість розгляду дотичних напружень по зазначених вище перерізах можна на основі закону парності цих напружень визначити їх значення в площині  $cd$ . Розглянемо рівновагу елемента  $acde$  (рис. 2.45), розміри якого будуть  $\frac{h}{2} - z$ ,  $b$  та  $dx$ .

По бічних гранях цього елемента діють зліва напруження  $\sigma_{z1}$  і  $\tau_{z1}$  а справа  $\sigma_{z2}$  та  $\tau_{z2}$ . По перерізу  $cd$  діють напруження  $\tau_z$ , які замінюють вплив відкинutoї частини балки. Із умови рівноваги можна записати, що

$$\sum X = 0 \quad \text{тобто} \quad N_1 - N_2 + \tau_z b dx = 0, \quad (2.96)$$

де  $N_1$  – рівнодійна всіх сил по площадці  $ac$ , що дорівнює:

$$N_1 = \int_A \sigma_{z_1} dA = \int_A \frac{M_x}{I_y} z_1 dA = \frac{M_x}{I_y} \int_A z_1 dA = \frac{M_x}{I_y} S(z).$$

$N_2$  – рівнодійна всіх сил на площадці  $ed$ , що дорівнює:

$$N_2 = \int_A \sigma_{z_2} dA = \int_A \frac{M_x + dM_x}{I_y} z_1 dA = \frac{M_x + dM_x}{I_y} \int_A z_1 dA = \frac{M_x + dM_x}{I_y} S(z),$$

де  $S(z)$  – статичний момент відсіченої частини поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі.

Підставивши значення  $N_1$  і  $N_2$ , із рівняння рівноваги (3.96) дістанемо:

$$\frac{M_x}{I_y} S(z) - \frac{M_x + dM_x}{I_y} S(z) + \tau_z b dx = 0.$$

$$\tau_z = \frac{dM_x}{dx} \cdot \frac{S(z)}{b I_y}.$$

Відомо, що  $\frac{dM_x}{dx} = Q_x$ , тоді остаточно матимемо:

$$\tau_z = \frac{Q_x S(z)}{b I_y}. \quad (2.97)$$

**Дотичне напруження пропорційне величині поперечної сили і статичному моменту розглядуваної частини перерізу і обернено пропорційне ширині балки і моменту інерції її перерізу відносно нейтральної осі.**

Статичний момент слід обчислювати для частини площі поперечного перерізу, яка лежить вище (або нижче) розглядуваного шару, відносно осі, яка проходить через центр ваги перерізу балки.

Епюру розподілу дотичних напружень  $\tau_z$  по висоті перерізу балки показано на рис. 2.46.

Для прямокутного перерізу епюра  $\tau$  матиме вигляд параболи (рис. 2.46 а). Найбільшого значення дотичні напруження будуть досягати в точках, які лежать на нейтральній осі. Статичний момент половини перерізу визначають за формулою

$$S_{max} = b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}.$$

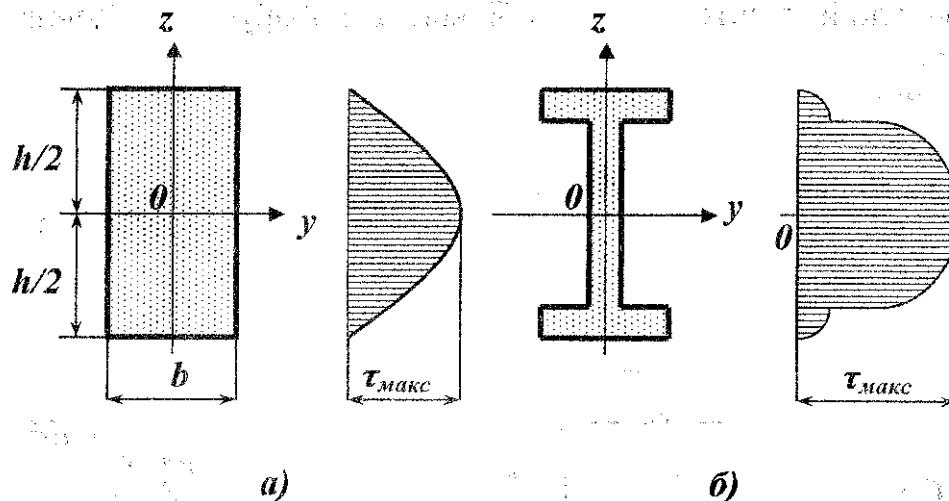


Рис. 2.46

Тоді максимальне дотичне напруження для цього перерізу

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{b I_y} = \frac{Q_{max} \cdot 12bh^2}{bh^3 b 8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{bh}. \quad (2.98)$$

У міру наближення до країв перерізу дотичні напруження зменшаться і для крайніх волокон дорівнюватимуть нулю. Формулу (2.98) виведено для суцільних балок прямокутного поперечного перерізу; для інших перерізів вона застосовується з деяким наближенням.

Для двотаврового перерізу еюра дотичних напружень має вигляд параболи, круто вигнутої в середній частині, там, де ширина перерізу різко зменшується (рис. 2.46 б).

### 2.5.8. Визначення головних напружень при згині

**Головними нормальними напруженнями називають найбільші і найменші напруження, які виникають по двох взаємно перпендикулярних площадках.**

Головними площадками називають такі площадки, по яких діють головні напруження, а дотичні відсутні. Для будь-якої точки балки завжди можна вибрати дві взаємно перпендикулярні площадки, які будуть головними, причому по одній із них діють найбільші, а по другій найменші нормальні напруження.

При визначенні величини головних напружень у довільній точці  $A$  виокремлюємо елемент  $ACD$ , на який діють сили, показані на рис. 2.47.

Головні напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  позначимо  $\sigma'$ . Площадка  $CD$  є головною, її площа дорівнює  $dA$ . Рівняння рівноваги вирізаної призми можна записати в такому вигляді:

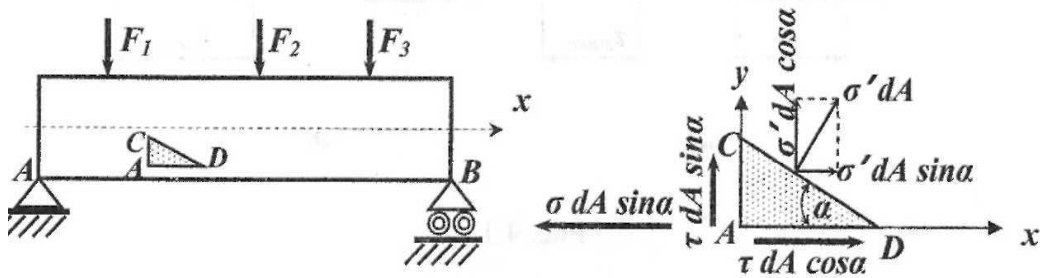


Рис. 2.47

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sigma' dA \sin \alpha - \sigma dA \sin \alpha + \tau dA \cos \alpha &= 0; \\ \sum Y = 0; \quad \sigma' dA \cos \alpha + \tau dA \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Після перетворення дістанемо:

$$\begin{aligned} (\sigma' - \sigma) \sin \alpha &= -\tau \cos \alpha; \\ \sigma' \cos \alpha &= -\tau \sin \alpha. \end{aligned}$$

Перемножуючи ліві і праві частини цих рівнянь, матимемо:

$$(\sigma' - \sigma)\sigma' = \tau^2 \quad \text{або} \quad (\sigma')^2 - \sigma\sigma' - \tau^2 = 0.$$

Визначимо корені цього квадратного рівняння:

$$\sigma_{\max \min} = \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} [\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]. \quad (2.99)$$

З рівняння  $\sigma' \cos \alpha = -\tau \sin \alpha$  визначимо кут нахилу головної площадки

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sigma'}{\tau}. \quad (2.100)$$

*Головні напруження будуть мати найбільшу величину в точках, де одночасно нормальні і дотичні напруження досягають максимального значення.*

### 2.5.9. Перевірка міцності балки на згин

Міцність балки при згині перевіряють за головними напруженнями. У загальному випадку умову міцності можна записати в такому вигляді:

$$\sigma' \leq [\sigma]. \quad (2.101)$$

де  $[\sigma]$  – допустиме напруження.

Як свідчить формула (2.101), міцність балки перевіряють за першою теорією міцності, хоча б можливо застосовувати третю і четверту теорії міцності. Прийняття такого способу перевірки, як показали дослідження, забезпечує достатню міцність балки і економію матеріалу.

Для крайніх волокон головні напруження дорівнюють нормальним. Дотичні напруження у цих волокнах дорівнюють нулю.

Звідси умова міцності має такий вигляд:

$$\sigma' = \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (2.102)$$

Для волокон, розміщених у нейтральному шарі, головні напруження за величиною дорівнюють дотичним і умова міцності для них запишеться:

$$\sigma' = \tau_{max} = \frac{M_{max} \cdot S_{max}}{b I_y}. \quad (2.103)$$

Для решти волокон балки треба спочатку обчислити дотичні і нормальні напруження за відповідними формулами, а потім перевірити їх міцність за формулою

$$\sigma_{max\ min} = \frac{1}{2} [\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}] \leq [\sigma]. \quad (2.104)$$

У балках прямокутного поперечного перерізу немає точок, в яких одночасно будуть діяти великі нормальні і дотичні напруження. Тому міцність таких балок перевіряють за формулою (2.102). У балках двотаврового поперечного перерізу в місці переходу від полиці до стінки можуть діяти одночасно великі нормальні і дотичні напруження, що зумовлює потребу перевірки міцності балки за формулою (2.104).

Отже, для перерізу балки, в якому одночасно згинальний момент і поперечна сила є досить великі, і для волокон, де ширина балки різко змінюється, міцність балки потрібно перевіряти за формулою (2.104).

### **2.5.10. Визначення деформацій балок при згині**

Вміння визначати деформації балок при згині потрібне при розв'язанні таких важливих завдань:

1. При перевірці балок на жорсткість поперечні розміри елемента повинні не лише задовольняти умовам міцності, а й деформації його не повинні бути більшими за певну величину, без чого неможлива нормальна робота конструкції. Отже, балку слід перевірити на міцність і жорсткість.

2. При розв'язанні статично невизначених задач на згин.

3. При перевірці теоретичних пропозицій у лабораторії.



Зовнішні сили, прикладені до балки, викривлюють її прямолінійну вісь, деформують.

Зігнутою віссю або пружною лінією, називається крива, в яку перетворюється при деформації прямолінійна вісь балки. На основі прийнятої гіпотези плоских перерізів поперечні перерізи залишаються під час деформації плоскими і перпендикулярними до зігнутої осі. Тому знаходження форми зігнутої осі балки дає змогу встановити переміщення будь-якої точки даного перерізу балки.

Для цього потрібно знайти функціональну залежність прогину від положення точок по довжині балки, як рівняння пружної лінії

$$y = f(x).$$

Приймаємо початок координат на опорі  $A$  (рис. 2.48), вісь  $x$  направляємо вздовж осі балки вправо, а вісь  $y$  – вгору.

На рис. 2.48 зображено зігнуту вісь простої балки. Центр ваги  $O$  перерізу на відстані  $x$  від опори  $A$  перемістився після деформації в точку  $O_1$ .

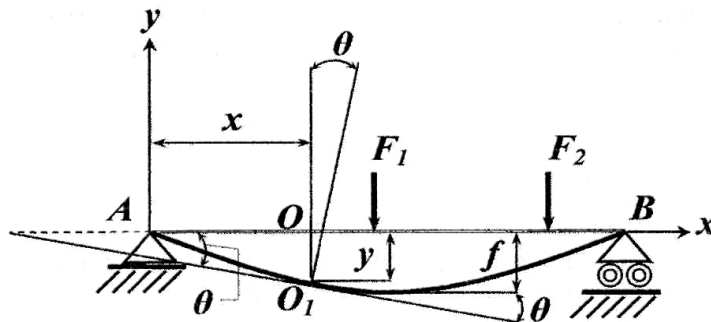


Рис. 2.48

Більшість балок, які зустрічаються в практиці, мають малу деформацію, і переміщення  $OO_1$  можна вважати перпендикулярним до початкової осі балки. Це переміщення називається прогином.

Отже, **прогином балки** у даному перерізі називається переміщення  $OO_1$  його центра ваги в напрямі, перпендикулярному до початкової осі балки.

Для визначення переміщення будь-якої точки балки потрібно знати, на який кут повернеться переріз після деформації.

**Кутом повороту  $\theta$  перерізу називається кут між його положеннями до і після деформації.**

Кут між дотичною до пружної лінії у даній точці і початковою віссю

## **Частина друга**

балки дорівнює за величиною куту повороту цього перерізу на основі взаємної перпендикулярності їхніх сторін (рис. 2.48).

Тангенс кута повороту дорівнює для малих кутів самому куту:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \cong \theta. \quad (2.105)$$

**Кут повороту перерізу дорівнює першій похідній за абсцисою  $x$  від прогину  $y$ .**

При виведенні формули нормальних напружень дістали залежність (2.91):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI},$$

де  $EI$  – лінійна жорсткість балки при згині.

**Кривина балки прямо пропорційна згинальному моменту і обернено пропорційна лінійній жорсткості балки.**

З диференціального числення кривина лінії визначається так:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Звідси можна знайти зв'язок між згинальним моментом і кривиною зігнутої осі:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_x}{EI}. \quad (2.106)$$

Правило визначення знака у цій формулі таке: якщо крива своїм угнутих боком повернена у бік додатної осі  $Oy$ , треба ставити знак плюс, а якщо в бік від'ємної – мінус.

Для більшості балок кути повороту перерізів є величинами малими

(біля  $1^\circ$ ), а їх квадрати – ще меншими, і тому членом  $\frac{dy}{dx}$  можна знехтувати. Тоді формулу (2.106) можна значно спростити і переписати при прийнятому напрямі осі  $yy$  у такому вигляді:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI}. \quad (2.107)$$

Цей вираз є наближеним диференціальним рівнянням пружної лінії або зігнутої осі балки.

Отже, між прогином, кутом повороту, моментом, поперечною силою і інтенсивністю рівномірно розподіленого навантаження існує диференціальна залежність, яку можна записати у вигляді:

$$\theta = \frac{dy}{dx}; \quad M_x = EI; \quad Q_x = EI \frac{d^3 y}{dx^3}; \quad q_x x = EI \frac{d^4 y}{dx^4}. \quad (2.108)$$

Ці залежності називаються теоремами п'яти рядків.

Деформації балок визначають теоретичним і експериментальним методами.

Теоретичне визначення прогинів і кутів повороту можна виконати такими методами: аналітичним, графічним, графоаналітичним, методом початкових параметрів.

Розглянемо аналітичний і графоаналітичний методи.

### **Аналітичний метод**

Суть цього методу полягає в тому, що складається диференціальне рівняння зігнутої осі балки, а потім його безпосередньо інтегрують.

Знайдені при інтегуванні довільні сталі інтегрування визначаються з умов закріплення балки на опорах або на межах суміжних ділянок.

Для визначення кутів повороту перерізів і прогинів треба інтегрувати диференціальне рівняння зігнутої осі (2.107). У цьому рівнянні момент  $M_x$  є функцією довжини  $x$  і має однаковий закон зміни для всієї балки або для певної ділянки.

Інтегруючи рівняння (2.107), дістанемо:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M_x dx + C. \quad (2.109)$$

Інтегруємо рівняння (2.109)

$$EI y = \int dx \int M_x dx + C_x + D. \quad (2.110)$$

Звідси кут повороту визначається за формулою

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left[ \int M_x dx + C \right] \quad (2.111)$$

а прогин дорівнюватиме:

$$y = \frac{1}{EI} \int dx \int M_x dx + C_x + D. \quad (2.112)$$

Довільні сталі інтегрування  $C$ , як зазначалося вище, знаходять із граничних умов.

### **Графоаналітичний метод**

Суть цього методу полягає в тому, що епюру моментів розглядають як фіктивне розподілене навантаження. Тоді на основі теореми п'яти рядків (2.108) прогини і кути повороту перерізів балок знаходять як моменти і поперечні сили від цього фіктивного навантаження. Їх також називають фіктивними моментами  $M_\phi$ , або фіктивними поперечними силами  $Q_\phi$ .

***Прогин балки у дорівнює фіктивному згинальному моменту, поділеному на її жорсткість  $EI$ , а кут повороту перерізу дорівнює фіктивній поперечній силі, також поділеній на жорсткість  $EI$ .***

Прогин або кут повороту визначають у такій послідовності:

- для заданого навантаження будують епюру моментів; підбирають відповідну фіктивну балку;
- для перерізу, в якому треба визначити прогин, знаходять фіктивний згинальний момент і, поділивши його на жорсткість  $E I$ , дістають величину прогину /для цього перерізу;
- для перерізу, в якому треба знайти кут повороту, визначають фіктивну поперечну силу і, поділивши її на жорсткість  $E I$ , дістають кут повороту цього перерізу.

Таким чином, суть графоаналітичного методу можна виразити такими формулами:

$$y = \frac{M_\phi}{EI}; \quad \theta = \frac{Q_\phi}{EI}. \quad (2.113)$$

### **2.5.11. Статично невизначені балки**

Щоб визначити реакції для статично невизначених балок, не досить рівнянь статики. Тому слід скласти додаткові рівняння, що виражають умови сумісності деформацій, які разом із рівняннями статики дадуть можливість визначити всі опорні реакції.

Як відомо, кількість додаткових рівнянь, потрібних для знаходження зусиль в елементах системи, дорівнює кількості зайвих зв'язків, що визначають статичну невизначеність системи.

*При розрахунку статично невизначених балок доводиться складати, крім рівнянь статики, додаткові рівняння за числом зайвих в'язей, що входять до системи.*

## **2.6. Складні деформації**

У практиці більшість елементів машин і конструкцій піддаються дії сил, які зумовлюються одночасно кількома видами деформацій. Такі складні випадки напруженого стану внаслідок малих деформацій можна при розгляді звести до найпростіших, тобто, застосувати метод суперпозиції сил.

*Отже, складною деформацією називають такий напружений стан конструкції, який можна замінити комбінацією найпростіших видів деформацій.*

Можливі такі складні опори: косий згин, згин з одночасним розтягом або стиском, позацентровий стиск або розтяг, кручення із згином тощо.

### **2.6.1. Деформація косоного згину**

Раніше було розглянуто прямий згин балок, при якому всі навантаження лежали в одній площині, що проходить через одну з головних осей перерізу. За такого згину вісь деформується у площині дії навантажень.

*Згин, при якому площина дії навантажень не збігається з однією із головних осей перерізу, називають косим.*

Розглянемо консольну балку довжиною  $l$  прямокутного перерізу, до кінця якої прикладено силу  $F$ , що утворює з віссю  $y$  кут  $\alpha$  (рис. 2.49).

Розкладемо силу  $F$  на дві складові, напрямлені вздовж головних осей перерізу, і, користуючись принципом незалежності дії сил, зведемо косий згин до прямих згинів у двох взаємно перпендикулярних площинах.

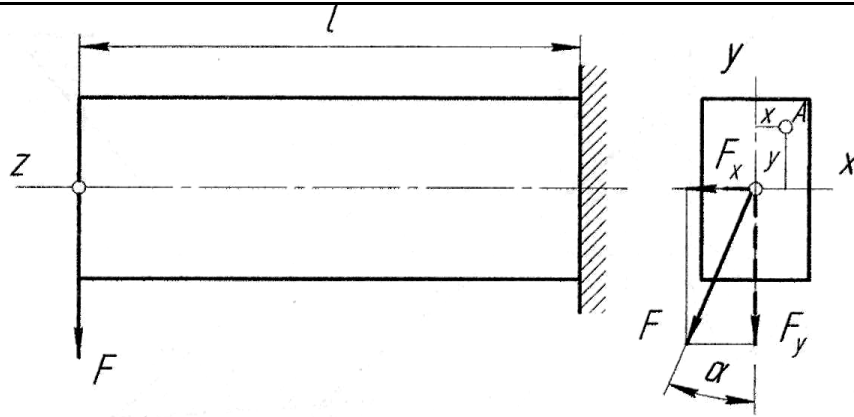


Рис. 2.49

Очевидно, що небезпечний переріз буде в закріпленні і максимальні згинальні моменти дорівнюватимуть:

$$M_{3\Gamma x} = Fl \cos \alpha, \quad M_{3\Gamma y} = Fl \sin \alpha.$$

Відповідні цим згинальним моментам нормальні напруження в якійсь точці  $A$  небезпечного перерізу обчислюють за формулами

$$\sigma_{1A} = \frac{M_{3\Gamma x}}{J_x}, \quad \sigma_{2A} = \frac{M_{3\Gamma y} x}{J_y}, \quad (2.114)$$

де  $x, y$  – поточні координати точки  $A$ ;

$J_x, J_y$  – моменти інерції перерізу відносно нейтральних осей.

Сумарне нормальне напруження у точці  $A$

$$\sigma_A = \sigma_{1A} + \sigma_{2A} = \frac{M_{3\Gamma x} y}{J_x} + \frac{M_{3\Gamma y} x}{J_y} = Fl \left( \frac{y \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \sin \alpha}{J_y} \right). \quad (2.115)$$

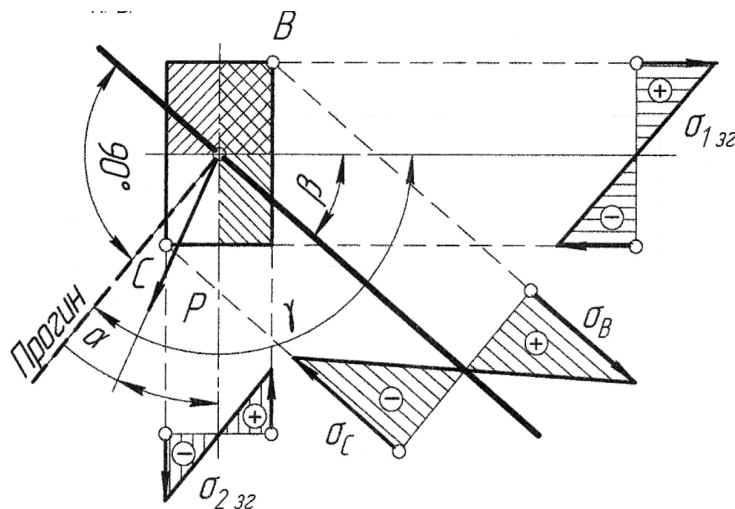


Рис. 2.50

Якщо заштрихувати в різних напрямках частини перерізу, в яких діятимуть тільки напруження розтягу  $\sigma_{132}$  і  $\sigma_{232}$ , то побачимо, що в зоні, заштрихованій в клітинку, діятимуть сумарні напруження розтягу, а в не заштрихованій – сумарні напруження стиску (рис. 2.50).

Очевидно, що максимальне напруження розтягу виникає у точці  $B$ , а максимальне напруження стиску в точці  $C$  небезпечного перерізу. Епюри нормальних напружень показано на тому самому рисунку.

Оскільки на нейтральній осі  $\sigma_A = 0$ , то рівняння цієї осі має вигляд

$$\frac{y \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \sin \alpha}{J_y} = 0,$$

де  $x, y$  – поточні координати точок нейтральної осі.

Із рівняння видно, що нейтральною віссю є пряма лінія, яка проходить через початок координат, тобто, через центр ваги перерізу балки. Визначимо кут  $\beta$ , який нейтральна вісь утворює з віссю  $x$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x} = \frac{-J_x \sin \alpha}{J_y \cos \alpha} = - \left( \frac{J_x}{J_y} \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.116)$$

Із цієї рівності видно, якщо  $J_x \neq J_y$ , то  $\beta \neq \alpha$  і нейтральна вісь не перпендикулярна до лінії дії сили  $F$ .

Користуючись принципом незалежності дії сил, визначимо напрям прогину балки під дією сили  $F$ . Прогин  $f_x$  у напрямі осі  $x$

$$f_x = \frac{F \sin \alpha \cdot l^3}{3EJ_y}. \quad (2.117)$$

Прогин  $f_y$  у напрямі осі  $y$

$$f_y = \frac{F \cos \alpha \cdot l^3}{3EJ_x}. \quad (2.118)$$

Сумарний прогин визначиться за формулою

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (2.119)$$

Позначивши кут між напрямом сумарного прогину і віссю  $x$ , матимемо:

$$ctg\gamma = \frac{f_x}{f_y} = \frac{\frac{F \sin \alpha l^3}{3EJ_y}}{\frac{F \cos \alpha l^3}{3EJ_x}}, \quad ctg\gamma = \left( \frac{J_x}{J_y} \right) tg\alpha.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою для визначення  $tg$ , бачимо, що  $ctg$  і  $tg$  мають тільки різні знаки. Отже, самі кути відрізняються на кут  $90^\circ$  і сумарний прогин балки лежить у площині, перпендикулярній до нейтральної осі.

**При косому згині площина прогину не збігається з площиною дії навантажень.**

### 2.6.2. Деформація згину і розтягу (стиску)

Розглянемо брус довжиною  $l$  сталого поперечного перерізу, затиснутий одним кінцем і навантажений на вільному кінці довільно напрямленою силою  $F$ , яку прикладено в центрі ваги перерізу (рис. 2.51).

Розкладемо силу  $F$  на складові  $F_x$ ,  $F_y$  і  $F_z$ . У результаті дії цих складових виникають одночасно деформації розтягу і поперечного згину в двох взаємно перпендикулярних площинах (дотичними напруженнями згину надалі нехтуватимемо).

Застосуємо принцип незалежності дії сил і визначимо максимальні нормальні напруження в небезпечному перерізі (закріпленні):

$$\sigma_p = \frac{F_z}{A}; \quad \sigma_{13\Gamma} = \pm \frac{F_y l}{W_x}; \quad \sigma_{23\Gamma} = \pm \frac{F_x l}{W_y}.$$

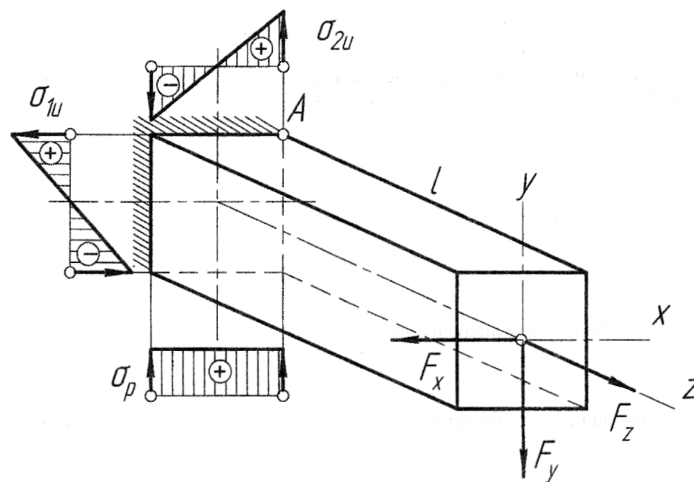


Рис. 2.51



Максимальні сумарні напруження виникнуть у точці  $A$  і будуть напруженнями розтягу

$$\sigma_{max} = \sigma_A = \frac{F_z}{A} + \frac{F_y l}{W_x} + \frac{F_x l}{W_y}. \quad (2.120)$$

Епюри нормальних напружень розтягу і згину подано на рис. 2.51. Деформації розтягу і згину поєднуються, наприклад, у гаках, гвинтах з відігнутою головкою, гвинтах слюсарних лещат тощо.

### Приклад 2.14

Визначити напруження в перерізах  $AB$  і  $CD$  сталюого гака сталого круглого перерізу (рис. 2.52). Сила розтягу, що проходить крізь подовжню вісь, дорівнює  $F = 3 \text{ кН}$ . Розміри на рисунку подано в міліметрах.

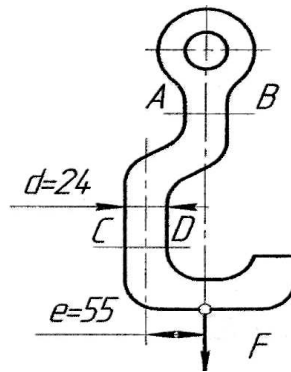


Рис. 2.52

### Розв'язок

Використовуючи метод перерізів, можна побачити, що в перерізі  $AB$  діятиме одна подовжня сила  $N=F$ . У цьому перерізі гак працює тільки на розтяг.

Обчислимо нормальне напруження;

$$\sigma_{AB} = \frac{N}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

У перерізі  $CD$  маємо поєднання згину і розтягу, згинаючий момент  $M_{зг} = F \cdot e$ .

Обчислимо максимальне сумарне напруження в перерізі  $CD$ . Це буде напруження розтягу:

$$\sigma_{CD} = \sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{F \cdot e}{W}.$$

Враховуючи, що  $e = 55 \text{ мм}$ , а  $W = 0,1 \text{ д}^2$ , дістанемо:

$$\sigma_{CD} = \frac{6,7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 \cdot 55 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 24^3 \cdot 10^{-9}} = 125,7 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

### Позацентровий стиск

Позацентровим називають такий вид деформації, при якому стисна сила паралельна осі бруса, але точка її прикладання не збігається з центром ваги перерізу (розглянуті раніше деформації були центральним стиском).

Розглянемо брус прямокутного перерізу  $b \times h$  (рис. 2.53), до якого на відстані  $e$  від центральної осі прикладено паралельну їй силу  $F$ .

Застосуємо теорему статки про паралельне перенесення лінії дії сили.

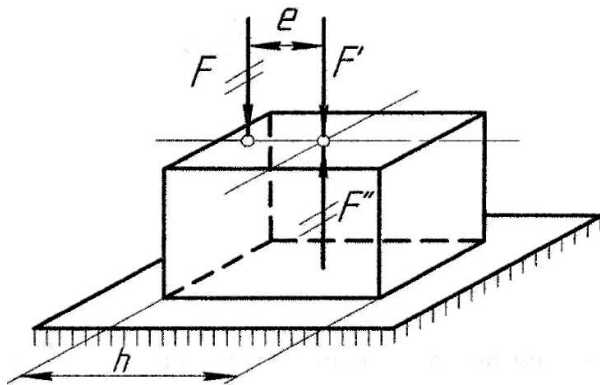


Рис. 2.53

Для цього у центрі ваги перерізу вздовж осі прикладемо дві протилежно напрямлені сили, які за модулем дорівнюють силі  $F$ .

Утворену систему трьох сил розглядатимемо як силу  $F$ , прикладену в центрі ваги, і пару сил з моментом  $m = Fe$ .

Користуючись принципом незалежності дії сил, позацентровий стиск розглядатимемо як **поєднання центрального стиску і чистого**

**згину**, причому відповідні нормальні напруження визначатимемо за формулами:

$$\sigma_c = \frac{F}{A}, \quad \sigma_{зг} = \frac{M_{зг}}{W_x},$$

а сумарні напруження – за формулою

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_{зг} = \frac{F}{A} \pm \frac{M_{зг}}{W}. \quad (2.121)$$

Максимальні сумарні напруження будуть напруженнями стиску:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W}. \quad (2.122)$$

Епюри нормальних напружень стиску, згину і сумарну епюру подано на рис. 2.54.

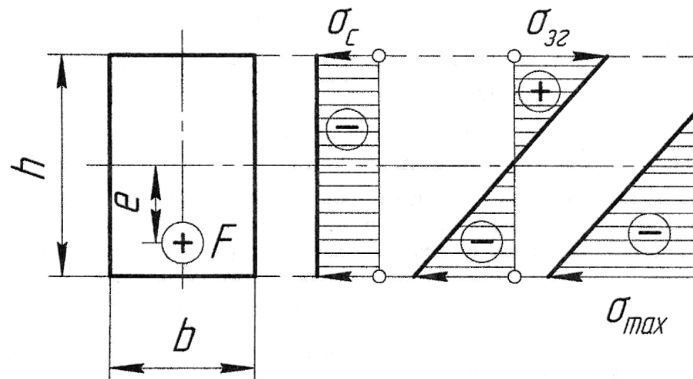


Рис. 2.54

Щоб у брусі не виникали напруження розтягу (недопустимі, наприклад, у цегляній або кам'яній кладці), має виконуватися нерівність

$$\sigma_c \geq \sigma_{zg} \quad \text{або} \quad \frac{F}{A} \geq \frac{F \cdot e}{W}, \quad \text{звідки} \quad e \geq \frac{W}{F}.$$

Для бруса прямокутного перерізу граничне значення ексцентриситету

$$e = \frac{W}{A} = \frac{bh^2}{6} \div bh = \frac{h}{6}. \quad (2.123)$$

У випадку позацинтового розтягу використовують такі ж формули, але з урахуванням знаків напружень.

### 2.6.3. Деформація згину і кручення

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, які, звичайно, бувають прямими брусами круглого або кільцевого перерізу.

Для розрахунку валів приймаємо до уваги тільки крутний і згинальний моменти, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

Максимальні нормальні і дотичні напруження для круглих валів обчислюють за формулами

$$\sigma = \frac{M_{3\Gamma}}{W}, \quad \tau = \frac{M_k}{W_p}, \quad (2.124)$$

причому, для круглих валів  $W_p = 2W$

У випадку одночасного згину і кручення небезпечними будуть точки поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності, дістанемо:

$$\begin{aligned} \sigma_{екв} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{2W}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{3\Gamma}^2 + M_k^2}{W}}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Вираз, що стоїть у чисельнику, назовемо еквівалентним моментом:

$$M_{екв} = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_k^2}, \quad (2.126)$$

тоді розрахункова формула для круглих валів набуде вигляду

$$\sigma_{екв} = \frac{M_{екв}}{W} \leq [\sigma]. \quad (2.127)$$

Вали звичайно виготовляють із матеріалу, в якого  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$ .

За цією формулою круглі вали розраховують як на згин, але за еквівалентним моментом.

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо:

$$\begin{aligned} \sigma_{екв} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_k}{2W}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{3\Gamma}^2 + 0,75 M_k^2}{W}}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Тобто, за енергетичною теорією міцності еквівалентний момент

$$M_{екв} = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + 0,75 M_k^2}. \quad (2.129)$$

### Приклад 2.15

Перевірити міцність вала зубчастої передачі, виготовленого із сталі

Ст. 4, межа текучості якої  $\sigma_T = 260$  МПа.

Потужність, що передається, дорівнює  $P = 40$  кВт, частота обертання  $n = 1000$  хв<sup>-1</sup>, допустимий коефіцієнт запасу міцності  $[n] = 3$ , діаметр вала  $d = 35$  мм.

Для розрахунку застосувати третю теорію міцності (на рис. 2.55 *a* розміри дано в міліметрах).

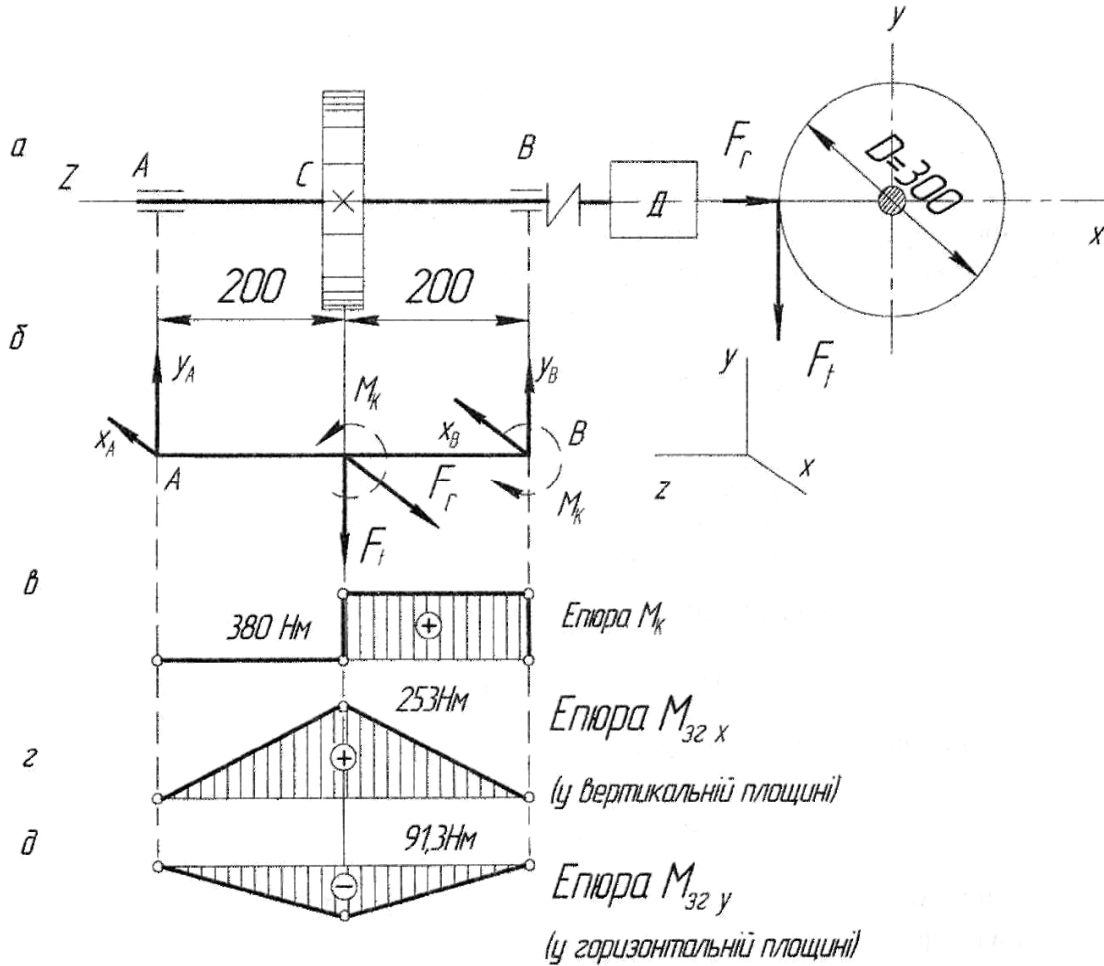


Рис. 2.55

**Розв'язок**

Визначимо обертальний момент, який передає вал:

$$T = \frac{P}{\omega}, \text{ де } \omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Підставляємо числові значення:

$$T = 40000 \cdot 30 / (3,14 \cdot 1000) = 380 \text{ Нм.}$$

Обертальний момент можна подати через колове зусилля  $F_t$ :

$$T = \frac{F_t D}{2}, \text{ звідки } F_t = \frac{2T}{D} = \frac{2 \cdot 380}{0,3} = 2530 \text{ Н.}$$

У зубчастих передачах діє також радіальне зусилля  $F_r$ , яке визначають із співвідношення

$$F_r = 0,36 F_t.$$

У даному прикладі

$$F_r = 0,36 \cdot 2530 = 913 \text{ Н.}$$

Зобразимо розрахункову схему вала (рис. 2.55 б).

Максимальний згинальний момент  $M_{3Г}$  діє у вертикальній площині

$$M_{3Г_x} = \frac{F_t l}{4} = \frac{2530 \cdot 0,4}{4} = 253 \text{ Нм.}$$

Радіальне зусилля  $F_r$  згинатиме вал у горизонтальній площині. Максимальний згинальний момент від дії сили  $F_r$  буде на середині вала, а його значення буде

$$M_{3Г_y} = \frac{F_r \cdot l}{4} = \frac{913 \cdot 0,4}{4} = 91,3 \text{ Нм.}$$

За знайденими значеннями будемо епюри  $M_k$ ;  $M_{3Г_x}$ ;  $M_{3Г_y}$  і визначаємо положення небезпечного перерізу (рис. 2.55 в, з, д).

Із епюр видно, що небезпечний переріз знаходиться у місці закріплення зубчастого колеса.

Застосуємо третю теорію міцності:: враховуючи, що  $W = 0,1 d^3$ ,  $M_k = T$ , дістанемо:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\frac{253^2 + 91,3^2 + 380^2}{0,1 \cdot 35 \cdot 10^{-9}}} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па} = 109 \text{ МПа.}$$

Визначимо коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{екв}} = \frac{260}{109} = 2,38.$$

Порівнюючи знайдене значення  $n$  з допустимим коефіцієнтом запасу міцності  $[n]$ , бачимо, що  $n < [n]$ , (міцність вала недостатня).

### **2.6.4 Деформація кручення і розтягу (стиску)**

Одночасних деформацій кручення і розтягу зазнають, наприклад, болти і кріпильні гвинти, а деформацій кручення і стиску – гвинти домкратів і гвинтових пресів, свердла і шпинделі свердлильних верстатів. Ці деталі, звичайно, виготовляють з матеріалів, для яких  $[\sigma_p] = [\sigma_{ск}] = [\sigma]$ .

Нормальні і максимальні дотичні напруження в цих випадках обчислюють за формулами

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \tau = \frac{M_k}{W_p}.$$

Застосувавши третю теорію міцності, знайдемо розрахункову формулу

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (2.130)$$

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (2.131)$$

## **2.7. Стійкість елементів конструкцій**

### **2.7.1. Подовжній згин**

У розрахунках на міцність і жорсткість, наведених у попередніх розділах, припускалося, що під час деформації конструкції між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами пружності була стійка форма рівноваги, при якій малим збурювальним діям відповідають малі відхилення статично навантаженої конструкції від початкової форми. Навантаження, при яких втрачається стійкість, називають критичними, а відповідні стани – критичними станами. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стрижнів, пластинок і оболонок. Явища втрати стійкості різноманітні. Найважливіші такі випадки прояву нестійкості:

1. виникнення якісно нових форм рівноваги;
2. зникнення стійких форм рівноваги.

Прикладом може бути центральний стиск прямого пружного

## Частина друга

стрижня. При невеликих значеннях стискної сили прямолінійна форма – єдина і притому стійка форма рівноваги; малим збудженням цієї форми, які виникають, наприклад, під час невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини. При критичному значенні стискної сили  $F_{кр}$  прямолінійна форма стає нестійкою і після малих збурень стрижень набирає нової (нестійкої) форми рівноваги, якій відповідає зігнута вісь (рис. 2.56).

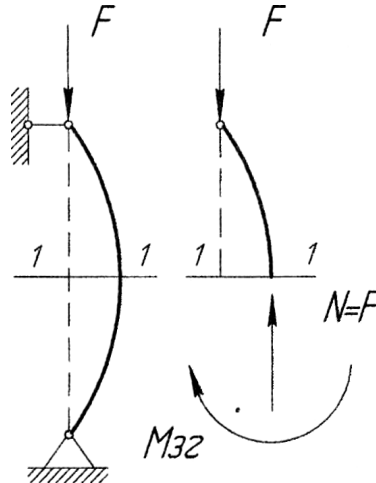


Рис. 2.56

Критичною силою називається найбільше значення стискної сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стрижня є стійкою. Згин, пов'язаний із втратою стійкості стрижня прямолінійної форми, називається подовжнім згином.

Розглянемо тонкий сталевий стрижень, довжина якого значно більша за поперечні розміри, що стискається силою  $F$ , трохи більшою за  $F_{кр}$  (рис. 2.56). Застосовуючи метод перерізів, упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стрижня виникають два силові фактори – подовжня сила  $N = F$  і згинальний момент  $M_{зг}$ . Отже, викривлений стрижень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину. Якщо стискаючі сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруження згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції.

Тому критичний стан, який безпосередньо передуює руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв'язку з цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стиска сила  $F$ , яка діє на стрижень, була менша за критичну  $F_{кр}$ .

Позначимо допустиму стисну силу  $[F]$  тоді



$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_{ст}]}, \quad (2.132)$$

де  $[n_{ст}]$  – допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Очевидно, що стійкість стрижня достатня, якщо  $[n_{ст}] > 1$ .

Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стрижня і його матеріалу.

Звичайно для сталей  $[n_{ст}] = 1,8 \dots 3$ ; для чавунів  $[n_{ст}] = 5 \dots 5,5$ ; для дерева  $[n_{ст}] = 2,8 \dots 3,2$ .

### 2.7.2. Формула Ейлера

Для розрахунків стиснених стрижнів на стійкість треба знати способи визначення критичної сили  $F_{кр}$ .

Вперше стійкість стиснених стрижнів досліджував академік Петербурзької Академії наук, швейцарець за походженням, Леонард Ейлер (1707-1783). Л. Ейлер, який прожив у Росії близько 30 років, залишив незгладимий слід у механіці і математиці.

Пізніше значну роботу в галузі теоретичного і експериментального дослідження питань стійкості виконав російський учений, професор Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення Ф.С. Ясинський (1856-1899), який у 1893 р. опублікував велику працю «Досвід розвитку теорії подовжнього згину».

Л. Ейлер вивів формулу для визначення величини критичної сили. Наведемо формулу Ейлера без виведення:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l_{зв}^2}. \quad (2.133)$$

де  $E$  – модуль пружності першого роду;

$J_{min}$  – найменший з осевих моментів інерції перерізу, оскільки стрижень викривляється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитись, стискаючи поздовжньою силою слюсарну лінійку;

$l_{зв}$  – зведена довжина стрижня:

$$l_{зв} = \mu l, \quad (2.134)$$

де  $l$  – довжина стрижня;

$\mu$  – коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стрижня; його інакше називають коефіцієнтом кріплення.

## Частина друга

На рис. 2.57 зображено способи кріплення кінців стрижня, які найчастіше застосовують, і наведено значення  $\mu$ :

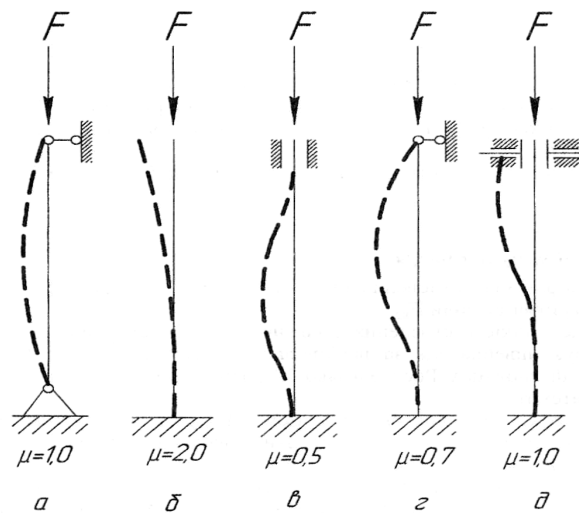


Рис. 2.57

- 1) обидва кінці стрижня закріплені шарнірно і можуть зближуватися (а);
- 2) нижній кінець жорстко закріплений, верхній – вільний (б);
- 3) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися (в);
- 4) нижній кінець закріплений жорстко, верхній – шарнірно, кінці можуть зближуватися (г);
- 5) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення (д).

Зазначимо, що чим менше  $\mu$ , тим більша критична сила, а отже, і допустиме стиснене навантаження. Наприклад, стиснене навантаження стрижня, жорстко закріпленого обома кінцями ( $\mu = 0,5$ ), може бути в 16 разів більше від навантаження стрижня, закріпленого одним кінцем ( $\mu = 2$ ). Тому там, де це можливо, треба жорстко кріпити обидва кінці стрижня.

Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, поки напруження не перевищують границі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися не завжди.

Для визначення границь застосовності формули Ейлера знайдемо критичне напруження  $\sigma_{кр}$ , яке виникає в поперечному перерізі  $A$  стрижня під дією критичної сили:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2 A}. \quad (2.135)$$

Введемо поняття найменшого радіуса інерції поперечного перерізу

стрижня  $i_{min}$ :

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}. \quad (2.136)$$

Перепишемо формулу для  $\sigma_{кр}$  так:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{min}}\right)^2}.$$

Вираз  $\frac{\mu l}{i_{min}}$  називають гнучкістю стрижня. Це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стрижня і способу закріплення його кінців. Остаточню

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (2.137)$$

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли виконується умова

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{ПЦ}.$$

де  $\sigma_{ПЦ}$  – межа пропорційності матеріалу стрижня.

Отже,

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{ПЦ}}}. \quad (2.138)$$

Величину, яка стоїть у правій частині нерівності, називають граничною гнучкістю і позначають  $\lambda_{ер}$ .

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стрижня і є сталою для даного матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді

$$\lambda \geq \lambda_{ер}.$$

## Частина друга

Тобто, формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стрижня більша або дорівнює граничній гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Обчислимо, як приклад, значення  $\lambda_{zp}$  для маловуглецевої сталі Ст 3 ( $\sigma_{пц}=200$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа).

$$\lambda_{zp} = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6}} = 100.$$

Для стрижнів із маловуглецевої сталі формула Ейлера застосовна, якщо їх гнучкість  $\lambda > 100$ . Аналогічно можна обчислити значення граничної гнучкості для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну  $\lambda_{zp} = 80$ ; для дерева (сосна)  $\lambda_{zp} = 110$ .

Якщо гнучкість стрижнів менша від наведених величин, то формула Ейлера вже не застосовна і в розрахунках користуються формулою Ясинського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (3.139)$$

де  $a$  і  $b$  – коефіцієнти, які залежать від матеріалу; їх беруть із довідкових таблиць. Зокрема, для сталі Ст3 при гнучкостях від  $\lambda = 40 \div 100$  можна брати  $a=310$  МПа,  $b=1,14$  МПа.

Якщо гнучкість  $\lambda < 40$ , стрижні можна розраховувати на міцність при простому стисканні, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто, за формулою  $\sigma = E/A$ .

Отже, при малих значеннях  $\lambda$  ( $\lambda < 40$ ) стрижні із маловуглецевої сталі розраховують на просте стискання; при середніх значеннях ( $40 \leq \lambda < 100$ ) розраховують за формулою Ясинського, а при великих ( $\lambda > 100$ ) – за формулою Ейлера.

Зазначимо:

1) при малих значеннях  $\lambda$  критичне напруження  $\sigma_{кр}$  дорівнює межі текучості  $\sigma_T$ ;

2) при середніх значеннях  $\lambda$  критичне напруження менше від межі текучості  $\sigma_T$ , але більше, ніж межа пропорційності ( $\sigma_{пц} < \sigma_{кр} < \sigma_T$ );

3) при великих значеннях  $\lambda$  критичне напруження менше від межі пропорційності.

### 2.7.3. Розрахунки стиснених стрижнів на стійкість

Залежно від мети розрізняють три види розрахунків на стійкість:

1. Перевірний розрахунок, коли визначають коефіцієнт запасу стійкості  $n_{ст}$  і порівнюють знайдене значення з допустимим [ $n_{ст}$ ]:

$$n = \frac{F_{\text{ст}}}{F} \geq [n_{\text{ст}}], \quad (2.140)$$

де  $F$  – діюче навантаження.

2. Визначення допустимого навантаження  $[F]$ :

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[n_{\text{ст}}]}. \quad (2.141)$$

3. Проектний розрахунок, коли визначають потрібне значення мінімального моменту інерції поперечного перерізу стрижня:

$$J \geq \frac{F \cdot [n_{\text{ст}}] \cdot (\mu l)^2}{\pi^2 E}, \quad (2.142)$$

після чого знаходять гнучкість і порівнюють її з граничною.

Розрахунок стиснених стрижнів на стійкість можна звести за формою до розрахунку на простий стиск. Розраховуючи будівельні конструкції, часто застосовують таку формулу:

$$[F] = \varphi [\sigma_{\text{ск}}] A, \quad (2.143)$$

де  $[\sigma_{\text{ск}}]$  – основне допустиме напруження на стиск,

$\varphi$  – коефіцієнт подовжнього згину.

Величина коефіцієнта  $\varphi$  залежить від гнучкості стрижня, його матеріалу. Для сталей його визначають з таблиць.

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стрижнів на стиск є кільцеві і коробчасті тонкостінні перерізи.

Доведено, що заміна стиснених стрижнів у вигляді кутиків і двотаврів трубчастими стрижнями дає економію матеріалу до 20... 40 %.

### **Приклад 2.16**

Перевірити на стійкість стояк, зображений на рис. 2.58, якщо  $l = 3\text{м}$ ,  $[n_{\text{ст}}] = 2$ , матеріал стояка Ст 3,  $F = 65\text{кН}$ ,  $d = 60\text{мм}$ .

#### **Розв'язок**

Для заданого закріплення кінців стояка  $\mu = 1$ . Перевіримо застосовність формули Ейлера. Визначимо параметри для круга:

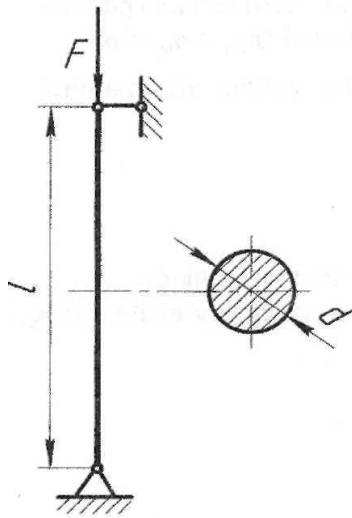


Рис. 2.58

$$J_{min} = J = \frac{\pi d^4}{64}; \quad i = \sqrt{\frac{J}{A}}; \quad A = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$i = \frac{d}{4} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{4} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Визначимо гнучкість стояка:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 3}{15 \cdot 10^{-3}} = 200 > 100,$$

отже, формула Ейлера застосовна. Обчислимо критичну силу:

$$F = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{(1 \cdot 3)^2 \cdot 64} = 143 \text{ кН.}$$

Визначимо коефіцієнт запасу стійкості:

$$n_{ст} = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{143}{62} = 2,2 > 2,$$

отже, стійкість стояка достатня.

### Приклад 2.17.

Знайти критичну силу  $F_{кр}$  і допустиме навантаження  $[F]$  для стояка кільцевого перерізу з сталі Ст 3 (рис. 2.59), якщо допустиме напруження на стиск  $[\sigma_{ск}] = 140 \text{ МПа}$ .

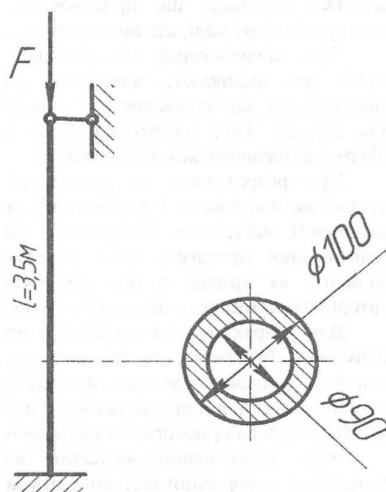


Рис. 2.59

Визначити, з яким коефіцієнтом запасу стійкості  $n_{ст}$  працюватиме стаяк під навантаженням, яке дорівнює допустимому.

### Розв'язок

Обчислюємо момент інерції кільцевого перерізу:

$$J_{min} = J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4);$$

$$J_{min} = J = \frac{3,14}{64} \left[ (100 \cdot 10^{-3})^4 - (90 \cdot 10^{-3})^4 \right] = \\ = 169 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Площа поперечного перерізу стояка

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2);$$

$$A = \frac{\pi}{4} \left[ (100 \cdot 10^{-3})^2 - (90 \cdot 10^{-3})^2 \right] = 14,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Знаходимо радіус інерції перерізу:

$$i_{min} = i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{169 \cdot 10^{-8}}{14,9 \cdot 10^{-4}}} = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для заданого способу кріплення кінців стояка коефіцієнт зведення довжини  $\mu = 0,7$ .

Визначаємо гнучкість стояка:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 3,5}{3,36 \cdot 10^{-2}} = 72,5 < 100,$$

отже, формула Ейлера незастосовна.

Обчислимо критичне напруження за формулою Ясинського.

Із довідкових таблиць знаходимо:

$$a = 310 \text{ МПа}; b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 72,5 = 227 \text{ МПа}.$$

Визначимо критичну силу:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = 227 \cdot 10^6 \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} = 340 \text{ кН}.$$

Допустиме навантаження  $[F]$  визначимо за допомогою коефіцієнта подовжнього згину  $\varphi$  за формулою:

$$[F] = \varphi[\sigma_{ск}]A.$$

Для сталі Ст 3, коли  $\lambda = 72,5$ , то  $\varphi = 0,795$ ; тоді

$$[F] = 0,795 \cdot 140 \cdot 10^6 \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} \approx 166 \cdot 10^3 \text{ Н} = 166 \text{ кН}.$$

Коефіцієнт запасу стійкості  $n_{ст}$  визначаємо з співвідношення

$$n_{ст} = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{340}{166} = 2,05.$$

## **2.8. Динамічні навантаження і напруження**

### **2.8.1. Деякі загальні положення**

При вивченні напружень і деформацій вважали, що навантаження прикладаються статично. Як відомо, статичні навантаження поступово збільшуються від нуля до кінцевих значень і змінюють свою величину настільки повільно, що прискорення, які дістають при цьому елементи конструкцій, такі малі, що ними можна знехтувати.

При навантаженні, що швидко збільшується, слід враховувати сили інерції, які виникають внаслідок деформації системи; при дії на тіло навантаження, що зумовлює рух тіла з прискоренням, також треба врахувати сили інерції. Таке навантаження, а також спричинені ним напруження і деформації називаються динамічними.

При розрахунках на динамічне навантаження ускладнюється метод визначення напружень і деформацій, до того ж іноді змінюються механічні властивості матеріалів.

Наприклад, під час ударного навантаження (воно відбувається протягом надзвичайно короткого часу) деякі пластичні матеріали працюють як крихкі, а при дії змінного навантаження, що багаторазово повторюється, міцність матеріалів зменшується.

Для розрахунку на динамічне навантаження користуються принципом д'Аламбера.

Нагадаємо, що згідно з цим принципом всяке тіло, що рухається, ланка механізму, елемент конструкції можуть бути розглянуті як такі, що перебувають у стані миттєвої рівноваги, якщо до зовнішніх сил, які діють на тіло, і сил реакцій в'язей, які обмежують рух в певному напрямі, додати силу інерції, яка дорівнює добутку маси тіла на його прискорення і направлена у бік, протилежний прискоренню.

Якщо сили інерції і сили реакцій в'язей визначати важко, то для



визначення динамічних напружень і деформацій застосовують закон збереження енергії.

### 2.8.2. Напруження при рівноприскореному русі

Якщо прискорення, з якими переміщуються деталі, відоме, то динамічні напруження обчислюються просто. Нехай вантаж  $F$  піднімається рівноприскорено на сталюму тросі з поперечним перерізом  $A$  (рис. 2.60). Об'ємну вагу матеріалу троса позначимо  $\gamma$ , прискорення вантажу, що піднімається –  $a$ . Визначимо напруження в перерізі троса на відстані  $x$  від нижнього його кінця.

Для цього застосуємо метод перерізів і розглянемо умови рівноваги нижньої відсіченої його частини.

Ця частина перебуває у стані руху з прискоренням, тому сила інерції, яка дорівнює добутку маси цієї частини на прискорення, буде:

$$\frac{F + \gamma Ax}{g} a,$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Таким чином, динамічне напруження  $\sigma_{дин}$ , що виникає в розглядуваному перерізі, дорівнюватиме:

$$\sigma_{дин} = \frac{F + \gamma Ax}{A} + \frac{F + \gamma Ax}{gA} a = \frac{F + \gamma Ax}{A} \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad (2.144)$$

Як видно із цього виразу, величина  $\frac{F + \gamma Ax}{g}$  є статичним напруженням  $\sigma_{ст}$  у перерізі троса, з урахуванням його власної ваги, тому можна написати:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad (2.145)$$

Тобто величина динамічного напруження дорівнює статичному

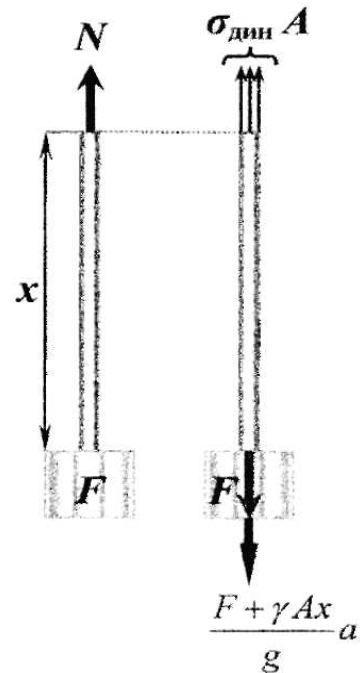


Рис. 2.60

напруженню, помноженому на величину  $(1 + \frac{a}{g})$  яка називається динамічним коефіцієнтом  $k_{дин}$ . Отже, формулу (2.145) можна записати так:

$$\sigma_{дин} = k_{дин}\sigma_{ст}. \quad (2.146)$$

Умова міцності при динамічному навантаженні буде:

$$\sigma_{дин} = k_{дин}\sigma_{ст} \leq [\sigma]. \quad (2.147)$$

звідси

$$\sigma_{ст} \leq \frac{[\sigma]}{k_{дин}}. \quad (2.148)$$

За формулою (2.145) при  $a=0$  (якщо прискорення немає) динамічні напруження дорівнюють статичним, тобто у випадку рівномірного прямолінійного руху напруження у перерізах троса будуть такими самими, як і при нерухомому вантажі.

Із викладеного видно, що динамічний розрахунок можна замінити статичним. Для цього досить зменшити допустиме напруження, поділивши його на динамічний коефіцієнт.

### **2.8.3. Розрахунок на удар**

Якщо швидкість елемента конструкції або частин, що з ним стикаються, змінюється за дуже короткий відрізок часу, відбувається явище удару. Завдяки великому прискоренню чи миттєвому сповільненню виникає значна сила інерції, величина якої визначає силу удару.

На нерухомо закріплену пружну систему (рис. 2.61) з деякої висоти  $h$  падає вантаж  $F$ . Пройшовши шлях  $h$ , вантаж  $F$ , який рухається з деякою швидкістю, зустрічається з нерухомою системою і в процесі подальшого руху зумовлює її деформацію. Розглянемо випадки, коли ці деформації пружні, тобто, коли напруження, спричинені ударом, не перевищують межі пружності.

Удар може бути подовжнім (розтяжним або стискним – рис. 2.61 *а*), коли вантаж падає на стрижень вздовж його осі, і поперечним (згинальним – рис. 2.61 *б*), якщо вантаж падає перпендикулярно до осі балки.

Метою розрахунку конструкції або деталі у даному випадку є визначення найбільших напружень і деформацій, які виникають під час удару.

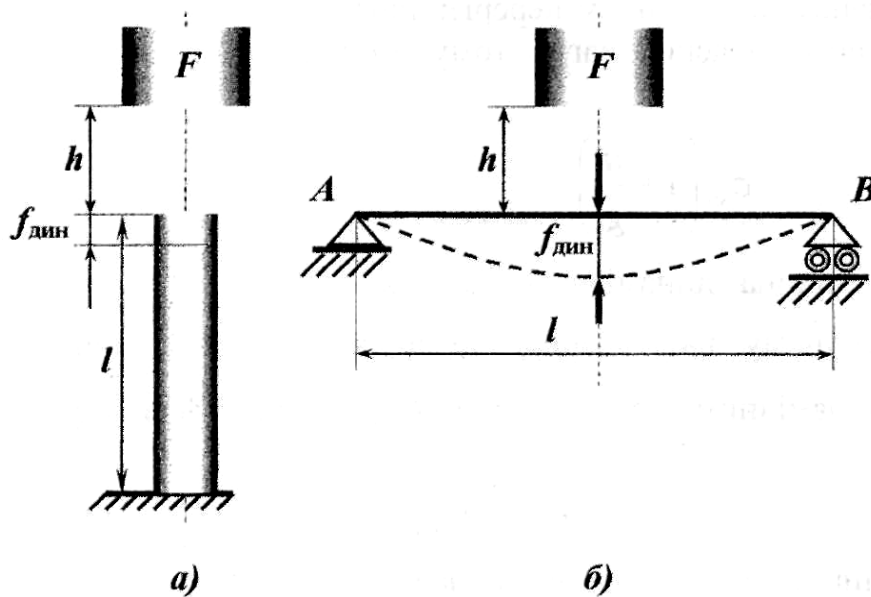


Рис. 2.61

Крім обмеження, що під час удару виникають лише пружні деформації, припускаємо додатково, що маса тіла, що піддається удару, досить незначна, порівняно з тілом, що наносить удар, і при розрахунку цю масу не приймаємо до уваги.

При цьому еюра переміщень системи від вантажу  $F$  при ударі подібна до еюри переміщень, що виникає від цього ж вантажу, але такого, що діє статично, тобто

$$\frac{f_{\text{дин}}}{f_{\text{ст}}} = k_{\text{дин}}, \quad (2.149)$$

де  $f_{\text{дин}}$ ,  $f_{\text{ст}}$  – динамічні і статичні деформації в тому самому напрямі від динамічної і статичної дії вантажу  $F$ .

Робота вантажу  $F$  внаслідок падіння його з висоти  $h$  дорівнює  $F(h + f_{\text{дин}})$ . Skorистаємось законом збереження енергії і порівняємо роботу вантажу  $F$ , що падає, до потенціальної енергії деформації

$$U = F(h + f_{\text{дин}}). \quad (2.150)$$

Переміщення від динамічної (ударної) дії навантаження  $F$  можна розглядати як статичне переміщення від сили  $F$ , помножене на динамічний коефіцієнт. Тоді потенціальна енергія деформації системи може бути виражена формулою

$$U = \frac{1}{2} F k_{\text{дин}} f_{\text{дин}}. \quad (2.151)$$

Порівнявши праві частини формул (2.150) і (2.151) і враховуючи (2.149), матимемо квадратне рівняння

$$f_{\text{дин}}^2 - 2 f_{\text{ст}} f_{\text{дин}} - 2h f_{\text{ст}} = 0. \quad (2.152)$$

Із рівняння (2.152) дістанемо вираз для динамічного коефіцієнта

$$f_{\text{дин}} = f_{\text{ст}} + \sqrt{f_{\text{ст}}^2 - 2h f_{\text{ст}}} = f_{\text{ст}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}}}} \right), \quad (2.153)$$

або

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}}}}. \quad (2.154)$$

У формулі (2.154) перед знаком радикала стоїть знак плюс, тому що динамічний коефіцієнт  $f_{\text{дин}}$  не може бути від'ємним.

Використавши формулу Г. Галілея для вільного падіння  $v = \sqrt{2gh}$ , вираз (2.154) можна записати так:

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g f_{\text{ст}}}}. \quad (2.155)$$

Враховуючи справедливість закону Гука для розглянутого випадку, можна написати, що динамічні напруження  $\sigma_{\text{дин}}$  відносяться до статичних напружень як відповідне переміщення за формулою (2.149)  $\sigma_{\text{ст}}$

$$\frac{\sigma_{\text{дин}}}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{f_{\text{дин}}}{f_{\text{ст}}} = k_{\text{дин}},$$

звідки

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}}. \quad (2.156)$$

Із викладеного видно, що, визначивши переміщення і напруження від статично прикладеного навантаження  $F$  і перемноживши ці величини на динамічний коефіцієнт, дістанемо переміщення і напруження при ударній дії навантаження  $F$ .

Із формули (2.154) видно, що при миттєвому прикладанні навантаження (якщо  $h = 0$ ) динамічний коефіцієнт дорівнює

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + 0} = 2. \quad (2.157)$$

тобто, напруження і деформації у цьому разі у два рази більші, ніж при статичній дії того самого вантажу.

Якщо висота падіння вантажу  $h > 1$ , то у формулах (2.154) і (2.155) можна знехтувати одиницями

$$k_{дин} = \sqrt{\frac{2h}{f_{ст}}} = \sqrt{\frac{v^2}{f_{ст} g}}. \quad (2.158)$$

Слід відмітити, що при ударній дії навантаження напруження залежать від модуля пружності, тому що до виразів для  $k_{дин}$  входять переміщення  $f_{ст}$ .

У випадку позовжнього удару і при  $h = 1$  дістанемо з формули (2.158)

$$k_{дин} = \sqrt{\frac{2h}{f_{ст}}} = \sqrt{\frac{2hEA}{Fl}}, \quad (2.159)$$

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} k_{дин} = \frac{F}{A} \sqrt{\frac{2hEA}{Fl}}. \quad (2.160)$$

Таким чином, напруження при позовжньому ударі обернено пропорційні квадратному кореню із довжини стрижня. При статичній дії навантаження напруження не залежать від довжини стрижня.

Якщо вантаж падає на вільний кінець балки, один кінець якої закріплено, значення динамічного коефіцієнта матимемо з формули (2.154), підставляючи вираз

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{6Elh}{Fl^3}}. \quad (2.161)$$

Аналогічно можна дістати значення  $k_{дин}$  для інших випадків. Формули (2.154) та (2.155) є загальними і ними можна безпосередньо користуватися під час розв'язку задач.

#### **2.8.4. Розрахунки на міцність при змінних напруженнях**

Розрахунки на міцність при змінних напруженнях у більшості випадків перевірні. У результаті дістають фактичні коефіцієнти запасу міцності  $n$ , які порівнюють із потрібними (допустимими) для даної конструкції коефіцієнтами запасу міцності  $[n]$  за умови

$$n \geq [n], \quad (2.162)$$

Звичайно, для сталених деталей  $[n] = 1, 3 \dots 3$  і більше залежно від виду і призначення деталі.

При симетричному циклі зміни напружень коефіцієнт запасу міцності визначають за формулами:

для розтягу (стиску)

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1p} \varepsilon_{\sigma} \beta}{k_{\sigma} \sigma}, \quad (2.163)$$

для кручення

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1p} \varepsilon_{\tau} \beta}{k_{\tau} \tau}, \quad (2.164)$$

для згину

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1p} \varepsilon_{\sigma} \beta}{k_{\sigma} \sigma}, \quad (2.165)$$

де  $\sigma$  і  $\tau$  – номінальні значення максимальних нормальних і дотичних напружень;

$k_{\sigma}, k_{\tau}$  – ефективні коефіцієнти концентрації напружень;

$\varepsilon_{\sigma}, \varepsilon_{\tau}$  – коефіцієнти, які враховують вплив абсолютних розмірів деталі;

$\beta$  – коефіцієнт якості поверхні.

Для деталей, які працюють в умовах асиметричного циклу, коефіцієнти запасу міцності  $n_a$  і  $n_x$  визначають за формулами Серенсена-Кінасашвілі [6]

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\left(\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta}\right) \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}, \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\left(\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \beta}\right) \sigma_a + \psi_{\tau} \tau_m}, \quad (2.166)$$

де  $\psi_{\sigma}$  і  $\psi_{\tau}$  – коефіцієнти зведення асиметричного циклу до рівнонебезпечного симетричного; вони відбивають вплив асиметрії циклу на величину межі витривалості й обчислюються за формулами

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad \psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}, \quad (2.167)$$

де  $\sigma_0$  і  $\tau_0$  – межі витривалості при віднульовому циклі зміни

напружень. Значення  $\psi_\sigma, \psi_\tau$  наводяться у спеціальних довідниках.

У випадку поєднання основних деформацій (згину і кручення, кручення і розтягу або стиску), тобто, для спрощеного плоского напруженого стану, загальний коефіцієнт запасу міцності  $n$  визначають з виразу

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \quad n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (2.168)$$

Тут  $n_\sigma$  – коефіцієнт запасу міцності для нормальних напружень;

$n_\tau$  – коефіцієнт запасу міцності для дотичних напружень.

Формули для обчислення  $n_\sigma$  і  $n_\tau$  наведено вище.

Крім коефіцієнта запасу міцності відносно межі витривалості, обчислюють коефіцієнт запасу міцності за опором пластичним деформаціям, тобто, відносно межі текучості  $\sigma_\tau$  (або  $\tau_\tau$ )  $\approx (0,55 \div 0,60) \sigma_\sigma$ .

Коефіцієнти запасу міцності за опором пластичним деформаціям визначають за формулами

$$n_{\sigma_T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m}, \quad n_{\tau_T} = \frac{\tau_T}{\tau_{max}} = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_m}. \quad (2.169)$$

Загальний коефіцієнт запасу міцності за опором пластичним деформаціям  $n_T$  обчислюють за формулою

$$n_T = \frac{n_{\sigma_T} n_{\tau_T}}{\sqrt{n_{\sigma_T}^2 + n_{\tau_T}^2}}. \quad (2.170)$$

Знайдені значення  $n$  і  $n_T$  порівнюють з допустимим значенням коефіцієнта запасу міцності  $[n]$ . Зазначимо, що із знайдених значень  $n$  і  $n_T$  у наступних розрахунках обирають менше значення.

## **СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. Изд.15-е. / Н.М. Беляев – М.: «Наука», 1976. – 607 с.
2. Биргер И.А.,. Сопротивление материалов. / И.А. Биргер, Р.Р. Мамонов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
3. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов. Учебник. / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др. – К.: «Вища школа», 1986. – 725 с.
4. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. / Ю.Н Работнов. – М.: Физматгиз, 1962.– 455 с.
5. Цурпал І.А. Механіка матеріалів і конструкцій. Навчальний посібник. / І.А. Цурпал. – К.: Вища освіта, 2005. – 357 с.
6. Серенсен С.В. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович. – М.: Машгиз, 1963. – 452 с.
7. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов. / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: «Наукова думка», 1988. – 725 с.
8. Тимошенко С.П. Механика материалов. / С.П. Тимошенко, Д.Ж. Гере. – М.: «Мир», 1976. – 670 с.



## ЧАСТИНА III

### ОСНОВИ КУРСУ «ДЕТАЛІ МАШИН»

#### 3.1. Основні положення

*Деталі машин — це технічна дисципліна, в якій вивчають методи і норми розрахунку та конструювання типових деталей і складальних одиниць машин.*

Деталі машин, синтезуючи досягнення математичних і технічних наук з результатами лабораторних досліджень і практики застосування різних машин, є теоретичною основою машинобудування.

*Метою* деталей машин є вивчення сучасних інженерних методів, правил і норм розрахунку та конструювання (проектування) деталей і складальних одиниць машин загального призначення (болти, гайки, вали, зубчасті колеса, підшипники та ін.).

*Завданням* деталей машин є отримання навичок розрахунку і конструювання типових деталей і складальних одиниць машин загального призначення, раціонального вибору матеріалу і форми деталей, правильного визначення точності і якості обробки поверхонь, розрахунків на міцність, жорсткість, стійкість, зносостійкість і т. ін., виходячи із заданих умов роботи деталей у машині.

Деталі машин тісно пов'язані з попередніми розділами технічної механіки: теоретичною механікою, теорією механізмів і машин, правилами і законами яких дають можливість визначати діючі на деталь сили і закони руху деталей; опором матеріалів, який дає змогу розраховувати деталі на міцність, жорсткість і стійкість. Деталі машин також пов'язані із іншими загальнотехнічними дисциплінами: матеріалознавством, технологією металів і неметалевих матеріалів, які дають необхідні відомості про раціональний вибір матеріалу деталі та методи її виготовлення, технічним (машинобудівним) кресленням, що дає правила і закони оформлення креслень конструкцій машин, окремих деталей і складальних одиниць.

При проектуванні і виготовленні технічних виробів машинобудування розрізняють наступні їх види: *деталь, складальна одиниця, комплекси, комплекти.*

Названі вироби, залежно від наявності або відсутності в них складових частин, поділяють на *неспецифіковані*, тобто такі, що не мають складових частин (деталі), і *специфіковані*, що складаються з двох (і більше) складових частин (складальні одиниці, комплекси або комплекти).

*Деталлю називається виріб, виготовлений з однорідного*

*матеріалу без застосування монтажних і складальних операцій.*

Наприклад, гвинт, болт, гайка, шуруп, вал, шків, зубчасте колесо, литий корпус.

*Виріб, що складається з кількох частин (деталей), з'єднаних між собою складальними операціями, називається складальною одиницею.* Наприклад, муфта, підшипник, редуктор, коробка передач, зварний корпус.

*Два (і більше) специфіковані вироби, не з'єднані складальними операціями, але призначені для виконання взаємопов'язаних експлуатаційних функцій, називаються комплексом.*

Наприклад, потокова лінія, деревообробний комплекс і т. ін.

*Два (і більше) вироби, що не з'єднані складальними операціями і являють собою набір виробів допоміжного характеру, називаються комплектом.*

Наприклад, комплект запасних частин, комплект інструменту і приладдя.

У машинобудуванні і народному господарстві застосовується багато різних деталей і складальних одиниць машин. Всю різноманітність деталей (складальних одиниць) машин можна умовно поділити на дві групи: **загального призначення і спеціального призначення.**

Деталі загального призначення зустрічаються майже у всіх машинах і складають більшість всіх деталей, а деталі спеціального призначення зустрічаються тільки у одному або кількох типах машин.

До деталей загального призначення відносяться:

- з'єднувальні деталі (шпонки, штифти, болти, гвинти, гайки тощо) і з'єднання (зварні, заклепочні, клейові, клинові, шліцьові, шпонкові та ін.);
- передачі обертального руху (фрикційні, пасові, ланцюгові, зубчасті, черв'ячні і т. ін.);
- деталі, що обслуговують передачі (вали, осі, підшипники, муфти).

До деталей спеціального призначення відносяться: шатуни, кривошипи, колінчасті вали, поршні, куліси, коромисла, кулачки, ексцентрики, маховики, лопатки і диски турбін, рейки, блоки, гаки і т. ін.

### **3.1.1. Вимоги до машин та їх деталей**

Сучасний розвиток машинобудування вимагає при проектуванні та виготовленні нових машин і механізмів гармонійності конструкції і раціонального компоновання її деталей та складальних одиниць при забезпеченні високих функціональних властивостей.

Виріб повинен бути надійним і точним, міцним і довговічним, бути зручним для монтажу, демонтажу і придатним для ремонту, мати високу продуктивність, відзначатись простотою керування, обслуговування та догляду, мати малі габарити, бути транспортабельним, швидко окупати всі затрати на проектування і виготовлення, а також відповідати вимогам

естетичності (художнє проектування і технічний дизайн).

Деталі проекрованої машини повинні задовольняти наступним вимогам: мати достатню міцність, жорсткість, стійкість, зносостійкість, допускати можливість виготовлення з недорогих матеріалів, мати таку конструктивну форму, щоб їх можна було виготовити найпростішими і найпродуктивнішими технологічними процесами.

Тобто, деталі повинні бути *технологічними* і мати високу *надійність* (виконувати задані функції із збереженням експлуатаційних показників протягом потрібного ресурсу).

*Міцність і довговічність* деталей можна підвищити наступним чином:

– використовуючи матеріали з високими фізико-механічними характеристиками (звичайно, застосування таких матеріалів, наприклад високоякісних легованих сталей, обмежується високою їх вартістю);

– конструктивною зміною форми деталі (наприклад, для деталей, які працюють на згин, раціональніше застосовувати кільцевий або двотавровий переріз замість круглого чи прямокутного);

– впровадженням термохімічної обробки або поверхневого пластичного деформування деталі (обкатка поверхні деталі роликми або обдування сталі дробом);

– використання плазменого, іонно-плазменого і газотермічного напилення поверхонь деталей порошковими матеріалами, що істотно поліпшує антикорозійні властивості і зносостійкість.

Поверхнєве пластичне деформування і напилення – простий і дуже ефективний спосіб підвищення довговічності деталі. Ресурс таких деталей збільшується в 3 ... 15 разів.

Для зміцнення пружин, ресор, шатунів, зубчастих коліс застосовують дробострумінні пристрої. Для зміцнення осей, валів, плунжерів – спеціальні верстати для обкатки роликми або кульками. Для зміцнення лопаток компресорів і турбін, пружин, валів — гідроабразивні і гідродробострумінні пристрої.

Сформулюємо докладніше вимоги економічного характеру до конструкцій машин, їх складальних одиниць і деталей.

*Економічність* – це забезпечення мінімальних затрат на придбання матеріалів та обладнання, заміна дорогих матеріалів дешевшими з необхідною міцністю, жорсткістю і зносостійкістю (заміна легованих сталей вуглецевими або заміна кольорових металів і сплавів пластмасами та синтетичними матеріалами тощо).

*Технологічність* – це забезпечення швидкого і високоякісного виготовлення деталей, а також монтажу складальних одиниць і всієї машини при мінімальних затратах коштів і часу на технічну підготовку. Технологічні конструкції дають змогу застосовувати прогресивні методи

### **Частина третя**

---

виготовлення і монтажу в умовах підприємства.

*Використання деталей і складальних одиниць*, які раніше освоєні в працюючих машинах і можуть виконувати відповідні функції в машині нової конструкції.

*Уніфікація конструкції* – це максимально можлива заміна деталей різної форми і типорозмірів однаковими (болти, гайки, шайби, підшипники, осі, вали, зубчасті колеса, шпонки), а також застосування по можливості однакових діаметрів отворів і валів, розмірів фасок, галтелей; використання однакових класів точності і шорсткості поверхонь; однакових способів зміцнюючої технології (загартування, ціанування, азотування, наклепування тощо).

*Спрощення конструкції* – це застосування деталей найпростіших форм, виготовлення яких не потребує спеціального обладнання або високої кваліфікації робітника.

#### **3.1.2. Відомості про машинобудівні матеріали**

Для виготовлення деталей машин застосовують різні матеріали – металеві, неметалеві, композиційні. Правильний вибір матеріалу деталі – важливий етап процесу конструювання і виготовлення, від якого в значній мірі залежить вага, габарити, вартість і довговічність машини.

Тому загальними передумовами вибору матеріалу деталі є експлуатаційна надійність, технологічність і економічність.

Дуже поширеними в машинобудуванні є метали, які розділяють на чорні і кольорові.

*Чорні метали* (сталі і чавуни) в машинах займають більше 90 % їх ваги. Вони відносно дешеві, мають високу міцність і жорсткість. Основні недоліки чорних металів – значна питома вага і низька корозійна стійкість.

*Сталь* (вуглецева і легована) – один із основних матеріалів машинобудування.

Сталь вуглецева звичайної якості, яку поставляють за механічними властивостями, позначається так: Ст0, Ст1, Ст2, Ст3, ..., Ст6. Нумерують ці сталі в порядку зростання їх твердості, границь міцності і текучості та зниження пластичності.

Сталь вуглецева якісна конструкційна позначається так: Сталь 10, Сталь 15, Сталь 20, ..., Сталь 55 і т. д., де числа 10, 15, 20, ... показують приблизний вміст вуглецю в сотих частках процента. Якісна вуглецева конструкційна сталь з підвищеним вмістом марганцю позначається так: Сталь 15Г, Сталь 20Г, Сталь 50Г і т. д.

Сталь легована конструкційна позначається так: Сталь 15Х, Сталь 35Х, Сталь 40ХНЗА і т. д., де перші дві цифри (15, 35, 40) показують орієнтовний вміст вуглецю в сотих частках процента, а наступні букви і

цифри показують легуючий елемент та його орієнтовний процентний вміст. Так, сталь 15X13H7C2A містить приблизно 0,15 % вуглецю, 13 % хрому, 7 % нікелю і 2 % кремнію; буква А показує високу якість сталі, тобто зниження до мінімуму шкідливих домішок – сірки і фосфору.

Фізико – механічні властивості сталей можна підвищити застосуванням об'ємної або поверхневої термічної (нормалізація, загартування, відпускання) або хіміко – термічної (цементация, азотування, ціанування) обробки, а також поверхневим зміцненням (дробострумінна обробка, обкатка загартованими роликками).

*Чавун* широко використовується в машинобудуванні, особливо для виготовлення литих заготовок деталей. За хімічним складом, структурою і технологією виготовлення чавун поділяють на сірий (СЧ 12-28, СЧ 15-32, СЧ 18-36 та ін.), антифрикційний (АСЧ-1, АСЧ-2, АСЧ-3 для сірого чавуну; АВЧ-1, АВЧ-2 для високоміцного чавуну), високоміцний (ВЧ 45-0, ВЧ 50-1,5 і т. п.), жаростійкий (ЖЧХ-0,8, ЖЧС-5,5 і т. ін.).

Числа, що стоять після буквеного позначення марки чавуну, показують значення його механічних характеристик. Наприклад, для сірого чавуну перше число означає границю міцності при розтягу, друге – при згині (0,1 МПа), для високоміцного чавуну перше число означає  $\sigma_B$  (0,1 МПа), а друге – відносне подовження в процентах при розриві.

*Кольорові метали* (мідь, олово, цинк, магній, хром, свинець, алюміній, титан, срібло, золото, платина) у чистому вигляді в машинобудуванні застосовуються рідко. Їх використовують в основному в вигляді сплавів (латунь – мідно – цинковий сплав, бронза – безолов'яна і олов'яна, алюмінієві і титанові сплави), які мають кращі фізико – механічні властивості, ніж кожен із цих металів окремо. Кольорові метали (за винятком сплавів) використовують для покриття металевих поверхонь з метою захисту матеріалу від корозії (лудіння, цинкування), підвищення поверхневої твердості, зносостійкості й антикорозійних властивостей сталейних деталей (хромування) або підвищення їх жаростійкості (алітування, тобто насичення поверхневого шару сталі алюмінієм). Легкі сплави (особливо титанові) мають високу міцність при малій питомій вазі.

Кольорові метали і сплави значно дорожче чорних, але їх цінні властивості, виправдовують застосування деталей із таких матеріалів в залежності від призначення і умов роботи.

*Неметалеві матеріали* – дерево, шкіра, бавовняні тканини, гума, скло, азбест, пластмаси, композиційні матеріали.

Серед неметалевих матеріалів все більше застосовуються пластмаси і особливо композиційні матеріали (склопластики, металопластики, біметали, металокераміка та багато інших).

Пластмаси мають невелику питому вагу, хімічну стійкість, водо – , масло – і бензостійкість, високі електроізоляційні властивості, достатню

### **Частина третя**

---

механічну міцність, що не поступається у ряді випадків перед міцністю сплавів кольорових металів і чавуну, малу трудомісткість переробки в деталі машин та ін. Але недоліком пластмас є їх низька теплостійкість і старіння, що супроводжується поступовою зміною механічних характеристик, кольору і навіть розмірів деталей.

Композиційні матеріали утворюються сполученням різнорідних компонентів і можуть мати певні високі фізико – механічні властивості, притаманні кожному із цих компонентів. Тому розробка і застосування нових композиційних матеріалів з підвищеними експлуатаційними якостями є важливим напрямком розвитку сучасного машинобудування.

Із пластмас та композиційних матеріалів виготовляють корпуси апаратів і машин, баки, цистерни, кузови автомобілів, корпуси суден, шлюпок, яхт, зубчасті колеса, вкладиші підшипників, труби, лопатки компресорів, а також будівельні елементи житлових будинків і промислових споруд.

#### **3.1.3. Стандартизація і взаємозамінність деталей машин**

Весь комплекс вимог до виготовленої сучасної техніки і обладнання може бути виконаний на основі використання принципів стандартизації, уніфікації і взаємозамінності деталей і складальних одиниць машин.

*Стандартизацією* називається процес встановлення і застосування обов'язкових норм, правил і вимог технічних і якісних характеристик, параметрів, яким повинна відповідати вироблена продукція, її виготовлення, транспортування і зберігання.

Завданням стандартизації як у машинобудуванні, так і інших галузях виробничої діяльності, є дотримання єдиних систем документації, норм і вимог у галузі проектування і виготовлення виробів, визначення єдиної системи показників якості виробів, запровадження єдиних науково-технічних термінів, символів, одиниць вимірювання тощо.

Переважає більшість виробів, що випускаються промисловими і народногосподарськими підприємствами України та іншими країнами близького зарубіжжя стандартизована.

У машинобудуванні, наприклад, стандартизовані:

- позначення загальнотехнічних величин, правила оформлення креслень, числові ряди лінійних розмірів;
- точність і якість поверхні деталей;
- матеріали, їх хімічний склад, основні механічні властивості і термообробка;
- форма і розміри деталей і складальних одиниць масового застосування: болтів, гвинтів, рейок, підшипників кочення, шурупів, муфт, штифтів, пасів, ланцюгів, штифтів і т. ін.;

– конструктивні елементи більшості деталей машин: модулі зубчастих і черв'ячних коліс, діаметри і ширина шківів, конструктивні форми і розміри шліцьових з'єднань і т. ін.

На нестандартні вироби завод – виготовлювач має розробляти окремі технічні умови, які також повинні відповідати вимогам певних стандартів.

Із стандартизацією тісно пов'язана уніфікація деталей і складальних одиниць машин.

*Уніфікацією* називається доцільне скорочення номенклатури, типорозмірів і конструктивних форм деталей і складальних одиниць, надання їм однаковості з метою можливого застосування і використання в різних машинах та народногосподарських об'єктах.

Зводячи різні види промислових виробів до невеликої кількості певних типів з універсальними можливостями застосування їх у машинобудуванні, уніфікація дає змогу *скоротити номенклатурний список виробів*, підвищити якість виробів, зменшити затрати виробництва і збільшити можливість взаємозамінності деталей і складальних одиниць однієї машини деталями і складальними одиницями іншої.

*Взаємозамінністю* називається властивість конструкції складової частини виробу забезпечити можливість її застосування замість іншої без додаткової обробки, зі збереженням заданої якості виробу, до складу якого вона входить. Взаємозамінність є важливою рисою сучасного машинобудування, без якої неможливе серійне і масове виробництво.

Таким чином, стандартизація, уніфікація і взаємозамінність створюють сприятливі умови для організації масового виробництва деталей і складальних одиниць на спеціалізованих підприємствах, зменшують трудомісткість і вартість виготовлення, забезпечують підвищення якості і збільшення довговічності деталей; скорочують час конструювання та освоєння нових машин; спрощують ремонт, зводячи його до заміни спрацьованих або тих, що вийшли з ладу, деталей і складальних одиниць новими, стандартними.

### **3.1.4. Нерознімні з'єднання**

З'єднання деталей машин і інших технічних виробів може бути *нерознімними і рознімними*.

*Нерознімними* називаються з'єднання, які неможливо розібрати без руйнування або пошкодження деталей, що його складають. До них відносяться заклепочні, зварні, клейові, паяні та інші.

На відміну від нерознімних з'єднань рознімні можливо розібрати і знову зібрати без їх руйнування. До них відносяться різьбові, шпонкові, шліцьові та інші.

Розглянемо спочатку докладніше основні типи нерознімних

з'єднань.

### **3.1.5. Заклепочні з'єднання**

*Заклепочне з'єднання* здійснюється за допомогою *клепок* – конструктивних елементів, які, як правило, являють собою металеві стержні циліндричної форми із закладною головкою на кінці.

Для утворення заклепочного шва стержень заклепки треба ввести в отвори, продавлені або просвердлені в з'єднуваних деталях, і ударами молотка або тисненням спеціальних клепальних машин за допомогою обтискачів розклепати виступаючий кінець заклепки (утворити замикаючу головку).

*Переваги заклепочних з'єднань:*

- висока міцність і надійність з'єднання;
- простота контролю якості з'єднання;
- можливість з'єднання деталей із будь – яких матеріалів;
- незмінність фізико – хімічних властивостей матеріалів деталей з'єднання у процесі клепання;
- висока працездатність при ударних і повторно – змінних навантаженнях.

*Недоліки заклепочних з'єднань:*

- неповне використання матеріалу з'єднуваних деталей внаслідок ослаблення їх заклепочними отворами;
  - складність технологічного процесу виготовлення клепаних конструкцій;
  - важкість з'єднання деталей складної конструкції;
  - з'єднання деталей у стик потребує застосування спеціальних накладок, що призводить до додаткового збільшення маси конструкцій.
- Усі ці недоліки дуже істотні, тому вони привели до різкого скорочення застосування заклепочних з'єднань і заміни їх зварними, паяними та клейовими з'єднаннями.

Заклепки застосовують у з'єднаннях, для яких методи зварювання і склеювання розроблено недостатньо або вони малоефективні; у з'єднаннях деталей з різнорідних матеріалів, кольорових металів і сплавів, де нагрівання деталей недопустиме через короблення або відпускання; в особливо відповідальних з'єднаннях (унікальні ферми залізничних мостів та ін.); у з'єднаннях, які працюють при великих ударних і вібраційних (авіація) навантаженнях, та ін.

Заклепки виготовляють із каліброваних прутків на спеціальних верстатах-автоматах. Найпоширеніші заклепки із сталі Ст2, Ст3, 10, 15, мідних та алюмінієвих сплавів.

За формою головки розрізняють заклепки з напівкруглою головкою,



які найбільш поширені (рис. 3.1 а), з потайною (рис. 3.1 б), напівпотайною (рис. 3.1 в), плоскою (рис. 3.1 г) головками. У деяких галузях машинобудування застосовують трубчасті і вибухові заклепки.

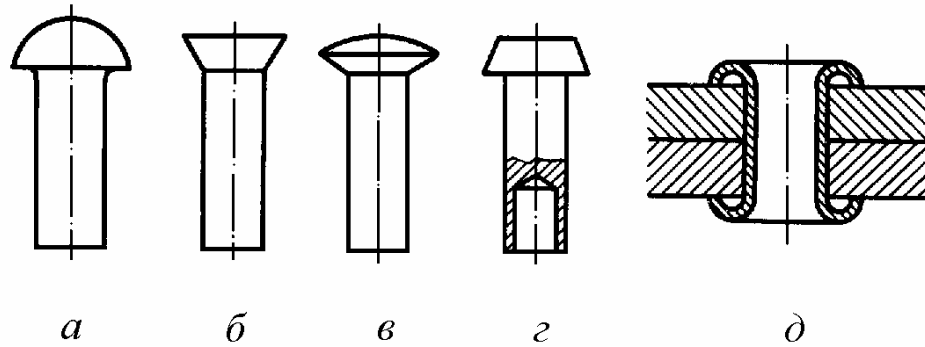


Рис. 3.1

Вибухові заклепки (рис. 3.1 г) застосовують при неможливості утворення замикаючої головки звичайними способами (за допомогою клепальної машини або молотка). Трубчасті заклепки, або заклепки – пістони (рис. 3.1 д), в основному застосовують для з'єднання неметалевих матеріалів (шкіра, фібра, прогумована тканина).

За функціональним призначенням заклепочні з'єднання класифікують на *міцні* і *щільні*, від яких потрібна не тільки міцність, а і герметичність з'єднання. Заклепки щільних швів ставлять у гарячому стані, при остиганні вони щільніше притискують поверхні з'єднаних деталей. На сьогоднішній час щільні шви майже повністю замінені зварюванням.

За конструктивними ознаками заклепочні з'єднання бувають напусківі (рис. 3.2 а), з однією (рис. 3.2 б) і двома (рис. 3.2 в) накладками; однорядні, дворядні (рис. 3.2 г), трирядні і т.д.

Незважаючи на складну залежність між силами, напруженнями і деформаціями в заклепочному шві, заклепки розраховують тільки на зріз і зминання, а з'єднані деталі – тільки на розтяг (стиск) по ослабленому отворами перерізу.

При розрахунку приймають такі допущення: навантаження рівномірно розподілено між усіма заклепками; концентрацію напружень біля отворів не враховують; тиски між бічною поверхнею заклепки і стінкою отвору (напруження зминання) вважають розподіленими рівномірно; напруження зрізу приймають розподіленими рівномірно по поперечному перерізу заклепки.

Розрахункові формули на міцність заклепочного з'єднання мають наступний вигляд.

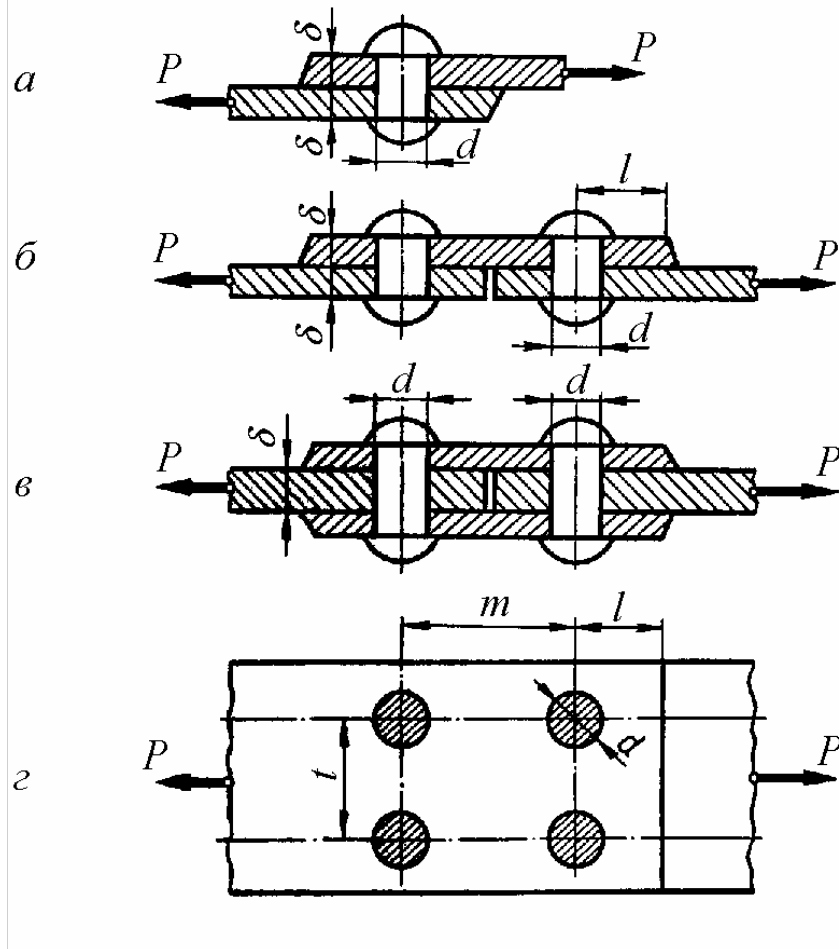


Рис. 3.2

Міцність заклепок на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{P}{A_{зр} n i} \leq [\tau_{зр}], \quad (3.1)$$

де  $A_{зр} = \frac{\pi d^2}{4}$  – площа зрізу однієї заклепки,  $n$  – кількість заклепок у з'єднанні,  $i$  – кількість площин зрізу однієї заклепки.

Міцність з'єднання на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{A_{зм} n} \leq [\sigma_{зм}], \quad (3.2)$$

де  $A_{зм} = d \delta_{min}$  – площа зминання однієї заклепки,  $\delta_{min}$  – найменша товщина з'єднаних деталей,  $n$  – кількість заклепок у з'єднанні.

Міцність з'єднаних листів на розтяг (стиск):

$$\sigma_p = \frac{P}{A_p n} \leq [\sigma_p], \quad (3.3)$$

де  $A_{зм}$  – розрахункова площа у небезпечному перерізі розтягнутого (стиснутого листа),

$n$  – кількість отворів у небезпечному перерізі листа.

Із умови рівномірності з'єднання крок заклепочного шва приймають  $t = (3...6)d$ , відстань між рядами заклепок –  $(2...3)d$ , де  $d$  – діаметр заклепки.

### **3.1.6. Зварні з'єднання**

У сучасному машинобудуванні і будівництві великого поширення набули нерознімні з'єднання, які здійснюються за допомогою зварювання.

*Зварювання* – технологічний процес утворення нероз'ємного з'єднання деталей за допомогою місцевого сплавлення або деформування із метою утворення міцних зв'язків між атомами і молекулами.

На сьогоднішній день існує понад 60 методів зварювання, які поділяються на дві основні групи: *зварювання плавленням* (газове, аргонодугове, високочастотне, дугове та ін.) і *зварювання пластичним деформуванням* (холодне, газопресове, контактне, стикове, точкове та ін.).

*Газове зварювання* – зварювання плавленням, при якому джерелом теплоти є високотемпературне полум'я горючих газів (ацетилену, водню) в струмені кисню. За допомогою газового зварювання можна зварювати тонку листову сталь, чавун, кольорові метали і сплави. Полум'я газового пальника використовують також для різання металів.

*Контактне зварювання* – зварювання, при якому зварювані деталі розігріваються теплою, що виділяється при проходженні електричного струму через місце контакту з'єднуваних деталей, доводяться до пластичного стану і механічно здавлюються.

*Електродугове зварювання* – зварювання, при якому між електродом, що є присадним металом, і зварюваними деталями утворюється електрична дуга, в зоні якої формується шов внаслідок плавлення електрода.

Крім перелічених видів зварювання застосовують і інші: *електрошлакове* – при великій товщині з'єднуваних деталей (до 2 м), *ковальське*, *термітне*, *атомно-водневе*, *ультразвукове*, *тертям*, *електронно – променево*, *дифузне*, *плазмове*, *світловим промінням* та ін.

Пластмаси зварюють у струмені гарячого повітря або гарячим металевим лезом, струмами високої частоти, ультразвуком.

Електродугове зварювання можна виконувати вручну і автоматично. При автоматичному зварюванні непокритий електродний дріт безперервно подається в зону зварювання і дуга горить під шаром шлаку (флюсу), що

### **Частина третя**

---

забезпечує високу якість шва. Крім того, автоматичний метод зварювання в 10...20 раз продуктивніший від ручного.

*Основні переваги зварних з'єднань по відношенню до заклепочних:*

- економія матеріалу (зварні конструкції в середньому легші від клепаєних на 20...25 %);
- щільність з'єднань (в клепаєних котлах та інших резервуарах, що перебувають під тиском);
- можливість з'єднувати деталі будь-яких криволінійних профілів довільної товщини;
- зменшення витрат праці у зв'язку із виключенням операцій розмітки і свердління або продавлювання отворів;
- менша собівартість;
- безшумність технологічного процесу зварювання і можливість автоматизації.

*Основні недоліки зварних з'єднань:*

- можливість порушення фізико – хімічних властивостей з'єднуваних деталей у зоні зварювання;
- висока концентрація напружень у зоні зварних швів, обумовлена як геометрією зварюваних деталей і самих швів, так і можливими дефектами зварювання.

Концентрація напружень знижує міцність з'єднання, особливо при ударних і вібраційних навантаженнях.

При електродуговому зварюванні в залежності від взаємного розташування деталей, що зварюються розрізняють стикові, напусткові, таврові і кутові з'єднання.

*Стикове з'єднання* (рис. 3.3 а) двох деталей, які розташовані в одній площині (на одній поверхні), є найраціональнішим видом зварного з'єднання.

Стикові з'єднання характеризуються високою міцністю і надійністю при всіх видах навантажень.

У *напусткових з'єднаннях* (рис. 3.3 б) з'єднувані деталі розташовані паралельно і частково перекривають одна одну.

*Таврове з'єднання* (рис. 3.3 в) – це зварне з'єднання, в якому до бічної поверхні однієї деталі виробу примикає під кутом і приварена торцем інша деталь

*Кутове з'єднання* (рис. 3.3 г) двох деталей, розташованих під будь – яким кутом (найчастіше 90°) і зварених у місці примикання їх країв, застосовують для виготовлення захисних засобів, тари та інших виробів, деталі яких сприймають невеликі навантаження. Кутові і таврові з'єднання відзначаються простотою виконання і економною витратою матеріалу.

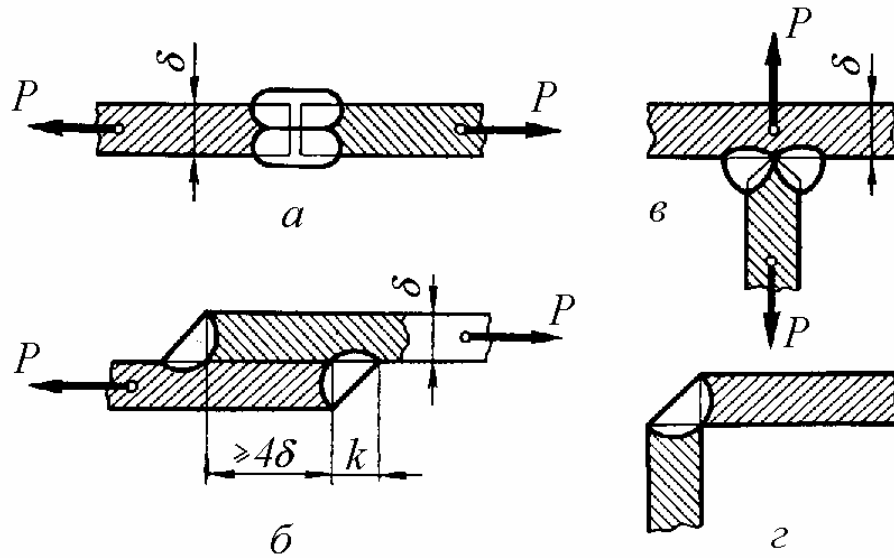


Рис. 3.3

За формою підготовки кромки листів розрізняють зварні з'єднання із відбортованими кромками (рис. 3.4 а), без скошених кромки (рис. 3.4 б, в) і зі скошеними кромками (рис. 3.4 г), односторонні (рис. 3.4 б) і двосторонні (рис. 3.4 в, г).

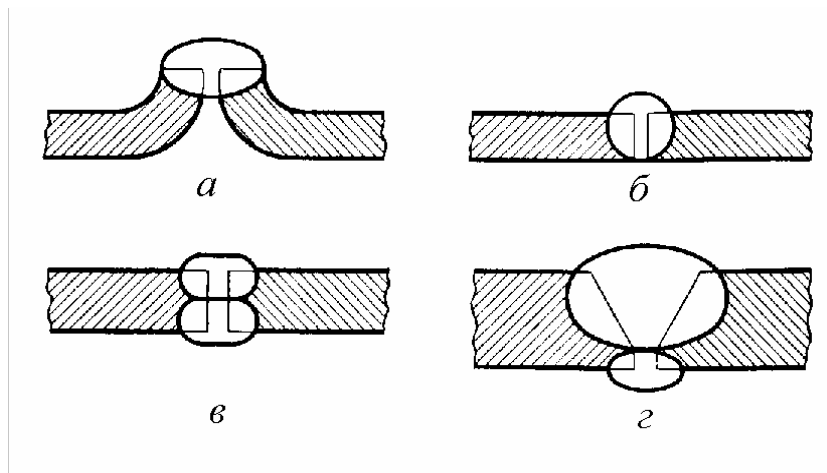


Рис. 3.4

Зварні шви також поділяються за протяжністю – на неперервні і переривчасті; по положенню у просторі – на нижні, горизонтальні, вертикальні і стельові; за зовнішньою формою – на плоскі (рис. 3.5 а), угнуті (рис. 3.5 б) і опуклі (рис. 3.5 в).

Треба відмітити, що раціональнішими є шви плоского і угнутого профілів. Угнутий профіль особливо доцільний при динамічних навантаженнях, так як забезпечує знижену концентрацію напружень. При ручному зварюванні звичайно застосовуються опуклі шви.

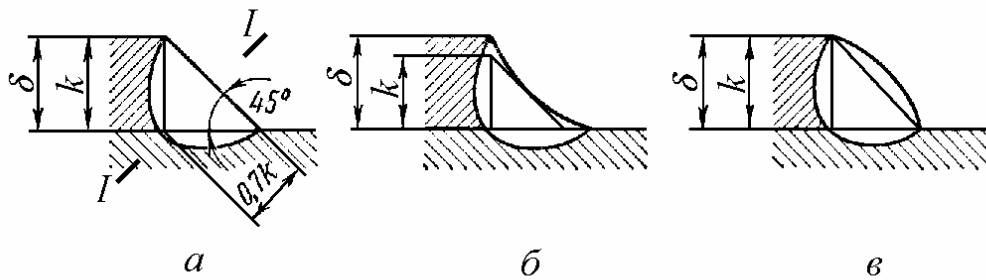


Рис. 3.5

Основним критерієм працездатності швів зварних з'єднань є їх *міцність*. Незважаючи на нерівномірність розподілу напружень по периметру шва, при розрахунках зварних з'єднань на міцність концентрацію напружень не враховують. Такий розрахунок умовний, однак виправданий практикою експлуатації.

*Стикові зварні з'єднання* розраховують тільки за нормальними напруженнями розтягу (стиску):

$$\sigma'_{p,c} = \frac{P}{\delta l} \leq [\sigma'_{p,c}], \quad (3.4)$$

де  $P$  – зовнішня сила розтягу (стиску) з'єднання;

$\delta$  – товщина елементів з'єднання;

$l$  – довжина шва;

$[\sigma'_{p,c}]$  – допустиме напруження матеріалу шва.

*Напусткові зварні з'єднання* розраховують тільки на зріз за дотичними напруженнями  $\tau'_{зр}$ .

Небезпечним тут приймають бісекторний переріз  $I-I$  шва заввишки приблизно  $k \cos 45^\circ \approx 0,7k$ , де  $k$  – катет шва (рис. 3.5 а).

Таким чином, розрахункову площу зрізу шва при його сумарній довжині  $l$  визначають із виразу:

$$A_{зр} = 0,7kl.$$

При цьому рівняння міцності зварного шва на зріз має вигляд:

$$\tau'_{зр} = \frac{P}{A_{зр}} = \frac{P}{0,7kl} \leq [\tau'_{зр}], \quad (3.5)$$

де  $[\tau'_{p,c}]$  – допустиме дотичне напруження матеріалу шва.

Наведені розрахункові формули (3.4) і (3.5) застосовуються для швів зварних з'єднань, навантажених осьовими силами, але не моментами.

Останній випадок зустрічається рідко і тут не розглядається.

*Допустимі напруження* зварних швів приймають залежно від допустимого напруження  $[\sigma_p]$  основного металу конструкції, способу зварювання та характеристики електродів. Орієнтовано для сталевих конструкцій при статичному навантаженні:

$$\begin{aligned}[\sigma'_p] &= (0,9 \dots 1,0) [\sigma_p], & [\sigma'_c] &= [\sigma_p], \\ [\tau'] &= (0,6 \dots 0,65) [\sigma_p].\end{aligned}$$

Значення допустимого напруження при розтягу залежить від границі текучості  $\sigma_T$  основного матеріалу (з'єднуваних деталей) і допустимого коефіцієнту запасу міцності  $[n]$ :

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{[n]}.$$

Для низьковуглецевої сталі приймають  $[n] = 1,3 \dots 1,6$ , а для низьколегованої сталі –  $[n] = 1,5 \dots 1,7$ . Менші значення  $[n]$  рекомендується брати для маловідповідальних з'єднань і при легких режимах роботи, більші – у відповідальних (крани, ферми мостів і т. д.) і при важких умовах роботи.

### **3.1.7. Клейові і інші нероз'ємні з'єднання**

*Клейовим* називається нероз'ємне з'єднання, яке отримують методом склеювання деталей із однорідних або неоднорідних матеріалів (сталі, чавуну, алюмінію та його сплавів, міді, латуні, скла, мармуру, пластичних мас, синтетичних матеріалів, тканин, гумових виробів, шкіри і т. ін.).

Склеювання деталей із металевих матеріалів, матеріалів органічного та неорганічного походження засновано на утворенні міцних зв'язків між молекулами клейової плівки і поверхнями деталей.

Такий вид з'єднання перспективний і постійно вдосконалюється.

*Основні переваги клейових з'єднань:*

- корозійна і бензомаслостійкість;
- зменшення маси конструкції порівняно з іншими видами з'єднань;
- невисока концентрація напружень у місці з'єднання;
- можливість з'єднання практично будь – яких конструкційних матеріалів, однорідних і неоднорідних;
- можливість з'єднання деталей практично будь – якої форми поверхонь склеювання;
- герметичність і достатня надійність з'єднання;
- висока втомна міцність, яка перевершує в ряді випадків міцність паяних і зварних з'єднань;
- відсутність короблення з'єднуваних деталей;

### Частина третя

- значно менша, ніж при зварюванні і клепанні, собівартість;
- міцність і щільність з'єднання.

*Основні недоліки клейових з'єднань:*

- «старіння», тобто зниження міцності з'єднання з часом;
- низька теплостійкість – міцність з'єднання порушується при порівняно невисоких температурах 60...100 °С. (деякі марки клеїв на основі елементоорганічних і неорганічних полімерів задовільно працюють при  $t = 1000^\circ\text{C}$ , але не мають достатньої еластичності);
- невисокий опір проти розтягу і зсуву, особливо в разі нерівномірного відриву;
- необхідність старанного зачищення і припасування поверхонь.

Незважаючи на перелічені недоліки, застосування клейових з'єднань у народному господарстві розширюється. Це виробництво електро- і радіообладнання, оптична, мебльова і деревообробна промисловість, авіація, виготовлення різального і вимірювального інструменту, будівництво, кріплення арматури, виготовлення оснастки і т. ін.

Міцність клейового з'єднання залежить від площі склеювання. Найбільш міцним є з'єднання, яке працює на зсув або рівномірний відрив, коли напруження по всій площі розподілені відносно рівномірно.

У випадку нерівномірного відриву застосовують комбіновані з'єднання – клейозаклепочні і клейозварні.

Розрахункові формули на зсув (зріз) і відрив (розтяг – стиск) для клейових з'єднань мають вигляд:

$$\tau_{зр} = \frac{P}{A_{\kappa}} \leq [\tau_{зр}], \quad (3.6)$$

$$\sigma_p = \frac{P}{A_{\kappa}} \leq [\sigma_p], \quad (3.7)$$

де  $P$  – діюча сила,  $A_{\kappa}$  – площа склеювання.

При цьому допустимі напруження визначаються із відомих залежностей:

$$[\tau_{зр}] = \frac{\tau_B}{[n]}, \quad [\sigma_p] = \frac{\sigma_B}{[n]},$$

де межа міцності при зсуві  $\tau_B \leq 60 \text{ МПа}$ , межа міцності при розтягу  $\sigma_B \leq 50 \text{ МПа}$ , а допустимий коефіцієнт запасу міцності  $[n] = 1,2 \dots 1,5$ .

Крім клейових, зварних і заклепочних існують також інші види нероз'ємних з'єднань.

*З'єднання пайкою*, коли деталі з'єднуються за допомогою розплавленого припою. В якості припою застосовують метали і сплави, які можна розділити на легкоплавкі (з температурою плавлення до  $300^\circ\text{C}$ ) і



тугоплавкі (з температурою плавлення вище  $500^{\circ}\text{C}$ ). До легкоплавких припоїв належать сплави олова і свинцю, сплави олова, свинцю і кадмію. До тугоплавких – сплави срібла, міді і кадмію, сплави міді і нікелю, сплави срібла, міді і олова. Для очищення поверхні деталей перед пайкою застосовують флюси (каніфоль, буру, кислотні і спиртові розчини).

Пайкою з'єднують вироби із сталі, чавуну, кольорових металів і сплавів, благородних металів. Таким способом можливо з'єднати також різнорідні матеріали: метал із склом, гумою, але для цього поверхню неметалевої деталі необхідно металізувати гальванічним способом.

Паяні з'єднання широко застосовуються в приладобудуванні і електронній промисловості.

*З'єднання пресуванням (з натягом)* отримують для деталей циліндричної форми при застосуванні пресових посадок.(з'єднання зубчастого колеса із валом, втулки із валом). При пресовій посадці вал виготовляють більшого діаметру, ніж діаметр отвору відповідної деталі. Тому їх з'єднання можливо за допомогою преса, який створює необхідну силу тиску. Отвір деталі перед посадкою можна також розігріти (гаряча посадка). При цьому на поверхні контакту деталей після посадки утворюються зусилля тиску, які і утримують деталі виробу разом. Такі посадки ще називають посадками з натягом.

Такий спосіб з'єднання застосовують в машинобудуванні для збірки деталей, на які діють значні вібраційні і ударні навантаження.

Слід відмітити, що з'єднання з натягом умовно відносять до нероз'ємних. При достатній міцності і твердості поверхні деталей вони можуть бути розібрані (розпресовані) і знову зібрані.

*З'єднання формуванням* отримують заливкою металічних частин виробу рідкою пластмасою, гумою або іншою масою, яка після затвердіння утворює нероз'ємне з'єднання.

Такий спосіб з'єднання широко застосовують як у промисловості, так і при виготовленні товарів народного споживання.

---

## **ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. Що вивчають в деталях машин?
2. Дайте визначення деталі, складальної одиниці, комплексу, комплекту.
3. Назвіть деталі загального і спеціального призначення.
4. Які основні вимоги ставляться до машин і їх деталей?
5. Як можна підвищити міцність і довговічність деталі?
6. Яку конструкцію можна вважати економічною і технологічною?
7. Що таке уніфікація конструкції?
8. Які фактори впливають на вибір матеріалу деталі?

9. Як класифікують машинобудівні матеріали?
10. Для чого потрібна стандартизація і взаємозамінність деталей машин?
11. Які з'єднання називають нероз'ємними?
12. Які переваги і недоліки заклепочних з'єднань?
13. Напишіть основні формули розрахунку заклепочних з'єднань.
14. Навести основні методи зварювання.
15. Які переваги і недоліки зварних з'єднань?
16. Напишіть основні формули розрахунку зварних з'єднань.
17. Які переваги і недоліки клейових з'єднань?
18. Яким чином здійснюється з'єднання пайкою?
19. Як здійснюється з'єднання пресуванням і формуванням?

### **3.2. Рознімні з'єднання**

З'єднання деталей машин і інших технічних виробів, які розбираються і знову можуть бути зібрані без пошкодження їх складових частин називаються *рознімними*. До рознімних належать різьбові, шпонкові, шліцьові і штифтові з'єднання. Розглянемо докладніше основні їх типи.

#### **3.2.1. Різьбові з'єднання**

*Різьбові з'єднання*, здійснюються різьбовими кріпильними деталями (болтами, гвинтами, шпильками) або безпосереднім згвинчуванням деталей з різьбою. Завдяки зручності складання і розбирання та високій надійності різьбові з'єднання набули великого поширення.

Основою різьбового з'єднання є *різьба*, яку отримують шляхом вирізання на поверхні деталей канавок по *гвинтовій лінії*.

Розглянемо, як утворюється гвинтова лінія.

Якщо прямий коловий циліндр огинати прямокутним трикутником (рис. 3.6) так, щоб точки одного з катетів  $AC$  збігалися з відповідними точками кола  $\pi d_2$  основи циліндра, то гіпотенуза  $AB$  опише на бічній поверхні циліндра *гвинтову лінію*.

Кут, утворений гіпотенузою  $AB$ , яка є розгорткою гвинтової лінії, і катетом  $AC$  (розгортка кола основи циліндра) називається *кутом підйому гвинтової лінії*  $\psi$ . Відстань  $AB$  між двома сусідніми точками гвинтової лінії, які лежать на одній із твірних циліндра, називається *кроком*  $p$  *гвинтової лінії*.

Якщо геометричну фігуру (трикутник, прямокутник, трапецію, сегмент), що лежить в одній площині з віссю циліндра, обертати навколо його осі так, щоб будь – яка з точок основи фігури ковзала по гвинтовій лінії, то контурні лінії заданої фігури опишуть *гвинтову поверхню*.

Таким чином, *різьбою* називається поверхня, утворена при гвинтовому русі плоского контуру (трикутника, трапеції і т. д.) по циліндричній або конічній поверхні. Різьба, утворена на циліндричній поверхні, називається *циліндричною*, а на конічній – *конічною*.

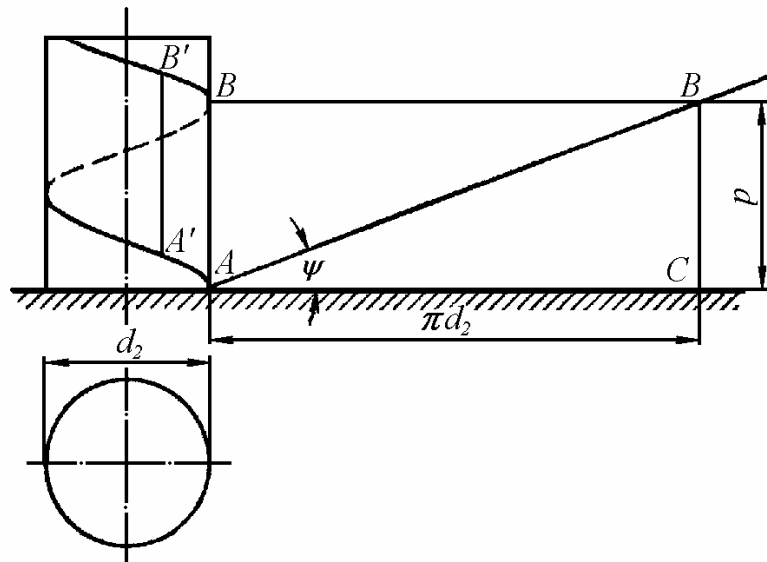


Рис. 3.6

Циліндр або конус, бічна поверхня якого переходить у гвинтову поверхню, називається гвинтом – циліндричним або конічним. Один оберт різьби (гвинтової лінії) на бічній поверхні циліндра (конуса) називається *витком*.

Розглянемо основні геометричні параметри різьби.

Контур перерізу різьби в площині, яка проходить через її вісь (вісь гвинта), називається *профілем різьби*. Очевидно, профілем різьби є та фігура, при гвинтовому русі якої утворюється різьба.

Із них найбільшого поширення набули в машинобудуванні трикутна (кріпильна різьба) і трапецеїдальна (ходова, яка призначена для передавання сили і руху в гвинтах пресів, домкратів, верстатів тощо).

Відстань між сусідніми однойменними бічними сторонами профілю в напрямку, паралельному осі різьби, називається *кроком різьби*  $p$ .

На рис. 3.7 показано п'ять основних профілів різьби:  $a$  – трикутна,  $b$  – упорна,  $v$  – трапецеїдальна,  $z$  – прямокутна,  $d$  – кругла.

Якщо на видимій частині циліндра (конуса) гвинтова поверхня піднімається зліва направо, то різьбу називають *правою* (рис. 3.8 а, в), а якщо справа наліво, то *лівою* (рис. 3.8 б).

Різьбу нарізують або накатують на циліндричному (конічному) стержні різьбонарізним інструментом (різець, плашка, фреза, гребінка, ролики). Якщо обидві основи циліндра (обидва торця заготовки для гвинта)

### Частина третя

поділити на кілька однакових частин (дві, три, чотири і т. ін.) і потім з розмічених точок нарізати різьбу, то на тілі гвинта (болта) утвориться дво – (рис. 3.8 б), три – (рис. 3.8 в) і чотиризахідна різьба.

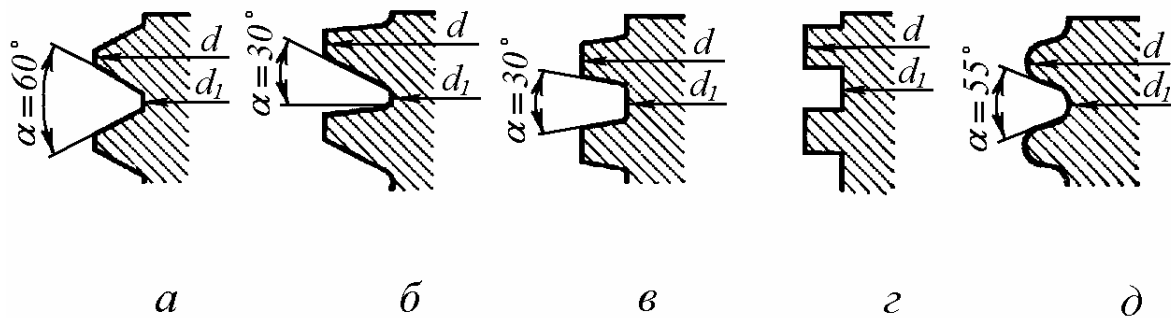


Рис. 3.7

Багатозахідна різьба характеризується кроком  $p$  і ходом  $p_h$ . Відстань між найближчими однойменними бічними сторонами профілю, що належать тій самій гвинтовій поверхні в напрямі осі різьби, називається *ходом різьби*  $p_h$  (рис. 3.8 б, в). Для однозахідної різьби поняття кроку і ходу збігаються (рис. 3.8 а).

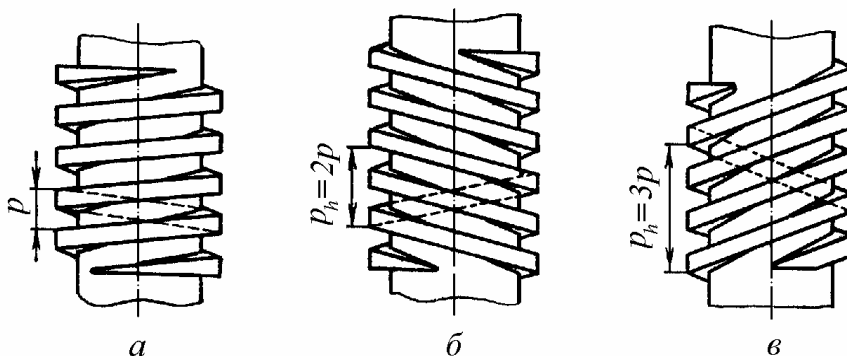


Рис. 3.8

Для багатозахідних різьб хід дорівнює добутковій кількості заходів  $n$  на крок різьби:

$$p_h = n p . \quad (3.8)$$

Різьбу також характеризують діаметри: зовнішній  $d$ , внутрішній  $d_1$  і середній  $d_2$ :

$$d_2 = \frac{(d + d_1)}{2}. \quad (3.9)$$

Під кутом підйому різьби розуміють кут підйому гвинтової лінії на циліндрі з діаметром, який дорівнює середньому діаметру  $d_2$ .

Кут підйому багатозахідної різьби дорівнює

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{P_h}{\pi d_2}. \quad (3.10)$$

Розглянемо класифікацію різьб за призначенням.

Залежно від призначення різьби можна поділити на три групи: *кріпильна*, яка забезпечує міцність з'єднання; *кріпильно – ущільнювальна*, яка забезпечує міцність і герметичність з'єднання (арматура трубопроводів; з'єднування трубопроводів для рідин, пари і газів), цю різьбу часто роблять конічною; *спеціальна*, яку застосовують для передавання руху з зовнішнім навантаженням (гвинти вантажопідйомних, натискних пристроїв тощо).

Кріпильна і кріпильно – ущільнювальна різьби, як правило, мають трикутний профіль, який забезпечує високу міцність різьби і найсприятливіші умови для самовідгвинчування.

Різьби трикутного профілю поділяють на два основних типи.

1. *Метрична* з великим і малим кроком, яка стандартизована для  $d = 0,25 \dots 600 \text{ мм}$ ,  $p = 0,075 \dots 6 \text{ мм}$ , має кут профілю  $\alpha = 60^\circ$  і є *основною кріпильною різьбою*. Циліндричну метричну різьбу з великим кроком позначають буквою  $M$  і числом, що відповідає її зовнішньому (номінальному) діаметру, наприклад,  $M22$  для  $d = 22 \text{ мм}$ . У позначенні різьби з малим кроком значення кроку вказують співмножником, наприклад  $M24 \times 2$  для  $d = 24 \text{ мм}$  і  $p = 2 \text{ мм}$ . Конічну метричну різьбу позначають буквами  $MK$  і співмножниками  $d$  і  $p$ , наприклад  $MK20 \times 1,5$  для  $d = 20 \text{ мм}$  і  $p = 1,5 \text{ мм}$ .

2. *Трубна* циліндрична різьба для  $d = 1/8 \dots 6''$  при 28...11 витках на  $1''$  (один дюйм) з кутом профілю  $\alpha = 55^\circ$ . Її позначення:  $2''$  Труб для  $d = 2''$ . За номінальний діаметр трубної різьби  $d$  беруть внутрішній діаметр труби (прохід у проясненні) в дюймах ( $1'' = 25,4 \text{ мм}$ ).

Як *спеціальні* різьби застосовують: *трапецеїдальну* для  $d = 10 \dots 640 \text{ мм}$ ,  $p = 2 \dots 48 \text{ мм}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ; *упорну* для  $d = 10 \dots 600 \text{ мм}$ ,  $p = 2 \dots 48 \text{ мм}$ ; нестандартну *прямокутну*.

У деяких окремих випадках при важких умовах експлуатації (вагонні стяжки) або при частому згвинчуванні в забрудненому середовищі (пожежна і гідравлічна арматура), а також для накатки в тонкостінних

### Частина третя

виробах (цоколі і патрони електроламп) застосовують *круглу* різьбу із  $d = 8...200\text{ мм}$ ,  $p = 2,54...6,35\text{ мм}$ .

Розглянемо конструктивні форми різьбових з'єднань.

Залежно від призначення різьбового з'єднання в машинобудуванні застосовують різні типи кріпильних виробів: болти, гвинти, шпильки, гайки, шайби, параметри і якісні характеристики яких стандартизовано.

*Болтом* (рис. 4.9, а) називають циліндричний стержень з різьбою і головкою (шестигранною, рідше чотиригранною, півкруглою). Стержень болта з головкою може бути зроблений із шестигранного прутка або іншого профілю, що відповідає профілеві головки болта. Болти застосовують у з'єднаннях, в яких з'єднувані деталі мають відносно невелику товщину.

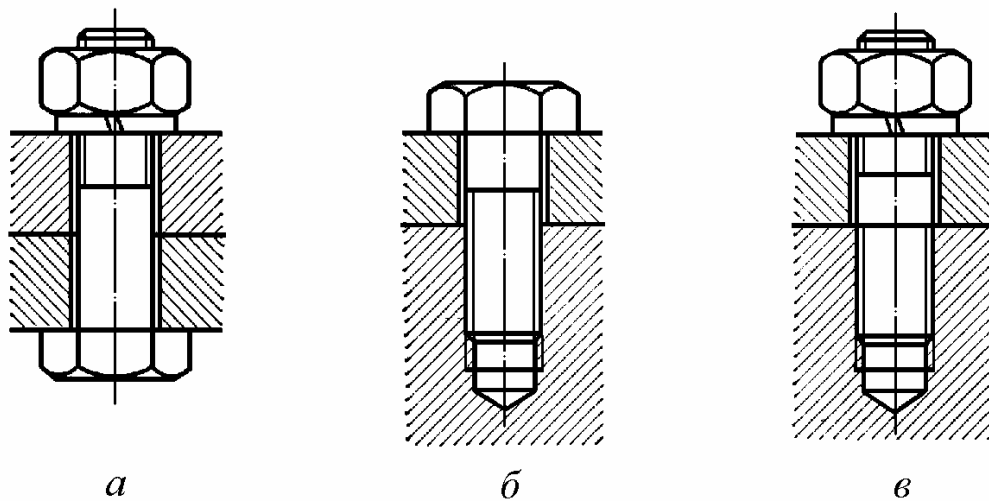


Рис. 3.9

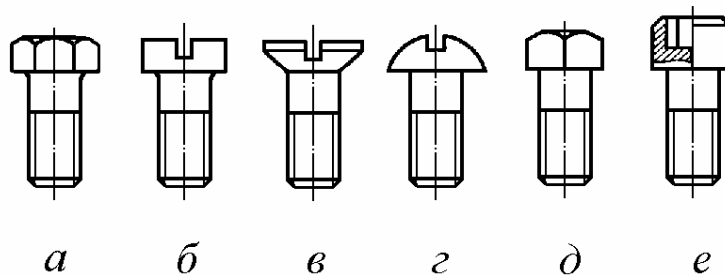


Рис. 3.10

*Гвинт* (рис. 3.9 б) – це болт, гайкою якого є одна із скріплюваних деталей. Залежно від розмірів та призначення гвинти (болти) мають різні головки: шестигранні, циліндричні з шліцом під викрутку, потайні, циліндричні напівкруглі, чотиригранні, циліндричні з внутрішнім

шестигранником під ключ (рис. 3.10).

Шпилька (рис. 3.9, в) – це циліндричний стержень з гвинтовою нарізкою з обох кінців. Шпильки застосовують у тих випадках, коли болт не можна пропустити крізь занадто товсті деталі або коли необхідно часто виконувати операцію розбирання і збирання конструкції .

Гайка – деталь з різьбовим отвором. Гайка є замикаючим елементом різьбового (болтового) з'єднання. Залежно від призначення гайки мають різну конструктивну форму. Найбільш поширеними є *шестигранні гайки*.

*Шайба* (підкладна і стопорна) – це деталь невеликої товщини з круглим отвором для вільного проходу болта, гвинта, шпильки.

Підкладну шайбу закладають між з'єднуваною деталлю і гайкою або між деталлю і головкою болта (гвинта) для вирівнювання і зменшення напруження змінання на опорній поверхні деталі і захисту поверхні від пошкодження. Стопорні шайби застосовують, щоб захистити гайки від самовідгвинчування.

Існують також спеціальні болти (гвинти): *фундаментні* болти для з'єднання машин з фундаментом, *розпірні* болти для збереження сталої відстані між з'єднуваними деталями, *анкерні* болти для укріплення станин машин, які працюють з динамічними (ударними) навантаженнями, до фундаменту, *відкидні* болти для закріплення і вивільнення деталей у з'єднаннях, які часто розбирають, *установочні гвинти* для закріплення на валу установочних кілець, невеликих шківів, покажчиків, щоб запобігти зміщенню їх уздовж осі вала при невеликих осьових силах.

### **3.2.2. Розрахунок різьбових з'єднань**

Переважає більшість болтів, гвинтів і шпильок працює зі значною попередньою затяжкою. В результаті затягнення болта (гвинта, шпильки) в його поперечному перерізі виникають поздовжня сила і крутний момент. Таким чином, стержень гвинта зазнає розтягу і кручення, а різьба гвинта піддається зрізу, згинанню і змінанню.

При стандартизації різьбових виробів висота головки болтів і гайок встановлюється, виходячи із умови рівномірності їх із стержнем болта (гвинта, шпильки) по різьбі. Тому для стандартних кріпильних виробів, які працюють при статичних навантаженнях, можна обмежитись розрахунком за основним критерієм працездатності – міцності стержня болта при одночасній дії розтягу і кручення.

Небезпечним перерізом болта (гвинта, шпильки), що працює на розтяг або розтяг і кручення, приймають переріз в його нарізаній частині з *розрахунковим діаметром*

$$d_p \approx d - 0,94 p, \quad (3.11)$$

де  $d$  – зовнішній діаметр,  $p$  – крок різьби.

Розглянемо характерні приклади розрахунків болтового з'єднання.

**1. Розрахунок незатягнутого болтового з'єднання під дією зовнішнього осьового навантаження.**

Незатягнуті (ненапружені) болти, які навантажені осьовою силою, трапляються дуже рідко, наприклад хвостовик вантажного гака (рис. 3.11).

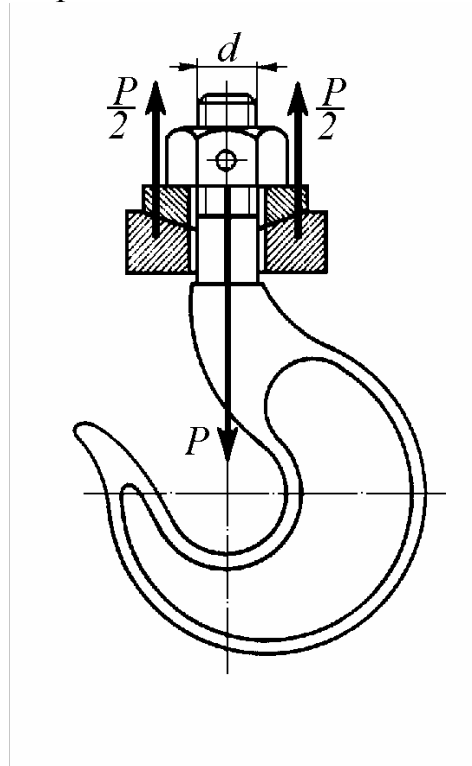


Рис. 3.11

Незатягнуті болти розраховують тільки на розтяг за умовою міцності:

$$\sigma_p = \frac{P}{A_p} = \frac{4P}{\pi d_p^2} \leq [\sigma_p], \quad (3.12)$$

де  $P$  — осьове навантаження, еквівалентне поздовжній силі,  
 $A_p = \frac{\pi d^2}{4}$  — розрахункова площа поперечного перерізу болта;

$[\sigma_p]$  — допустиме напруження на розтяг. Для болтів із вуглецевої сталі  $[\sigma_p] = 0,6 \sigma_T$ .

Із попередньої формули визначаємо розрахунковий діаметр різьби:

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma_p]}}. \quad (3.13)$$



Знайшовши  $d_p$ , інші розміри різьби визначають за стандартами.

## 2. Розрахунок затягнутого болтового з'єднання без зовнішнього навантаження.

Прикладом такого з'єднання є кріплення люків, кришок, до герметичності яких нема особливих вимог (рис. 3.12).

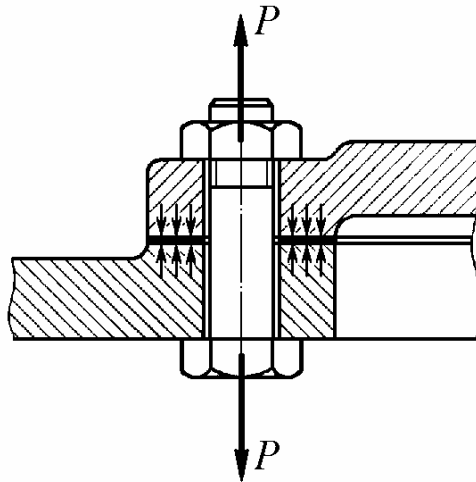


Рис. 3.12

В результаті затяжки з'єднання болт отримує деформацію розтягу і кручення. В цьому випадку розрахунки проводять тільки на розтяг, а вплив кручення при затягненні болта враховують коефіцієнтом  $k_{зам}$ , значення якого залежить від співвідношення параметрів різьби і умов навантаження. Для розрахунків метричної різьби можна прийняти  $k_{зам} = 1,3$ .

Тоді із умови міцності на розтяг:

$$d_p = \sqrt{\frac{4P_0}{\pi[\sigma_p]}} = \sqrt{\frac{5,2P}{\pi[\sigma_p]}}, \quad (3.14)$$

де  $P_0 = k_{зам} P = 1,3P$  — розрахункове осьове навантаження.

## 3. Розрахунок затягнутого болтового з'єднання під дією зовнішнього осьового навантаження.

Розглянутий приклад характерний для герметичного кріплення кришок резервуарів під тиском рідини або газу (рис. 3.13).

В даному випадку із урахуванням впливу кручення при затяжці для забезпечення нерозкриття стику і в залежності від пружних властивостей матеріалу розрахункове осьове навантаження  $P_0$  приймають в межах  $P_0 = (1,4...1,8)P$ .

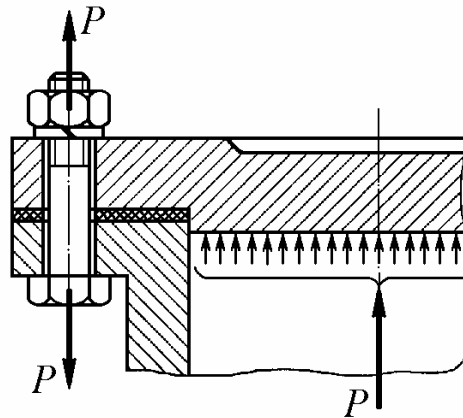


Рис. 3.13

Прийнявши  $P_0 = 1,8 P$ , отримаємо наступну формулу для визначення розрахункового діаметра різьби:

$$d_p \geq \sqrt{\frac{7,2 P}{\pi [\sigma_p]}}. \quad (3.15)$$

### 3. Розрахунок болтового з'єднання, під дією зовнішньої поперечної сили.

У випадку, якщо болт поставлений в отвір із зазором (рис. 3.14 а), його необхідно затягнути з такою силою  $F_r$ , щоб сила тертя  $R_f$  між поверхнями стичних деталей забезпечила нормальну роботу з'єднання без відносного зміщення його частин від поперечної сили  $Q$ .

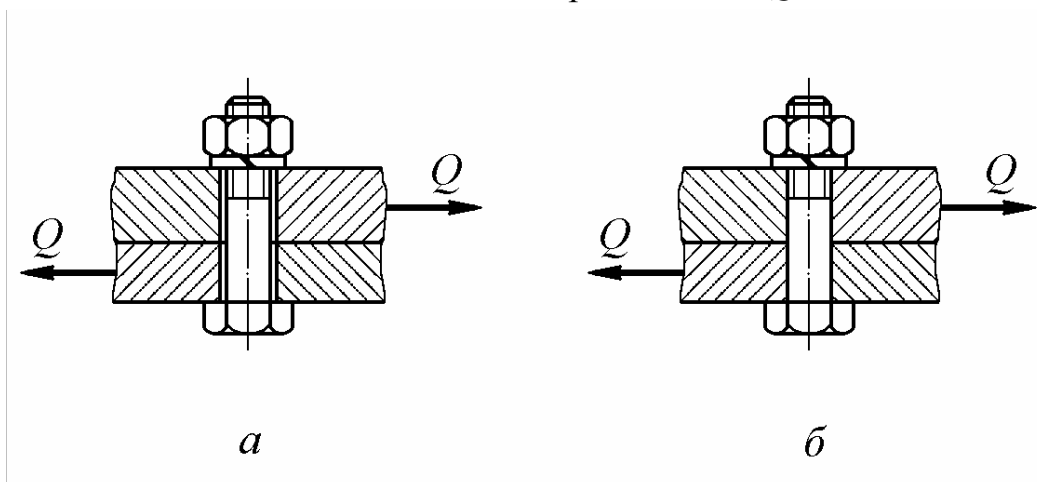


Рис. 3.14

Зв'язок між силою тертя  $R_f$  і силою затяжки  $F_r$  при коефіцієнті тертя  $f$  і поперечній силі  $Q$  буде наступним:

$$R_f = f F_r \approx (1,2 \dots 1,3) Q,$$

звідки

$$F_r \geq (1,2 \dots 1,3) \frac{Q}{f}. \quad (3.16)$$

Враховуючи, що при цьому також відбувається розтяг і кручення болта при його затяжці, розрахункова формула діаметру болта має вигляд:

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 \cdot 1,2 Q}{\pi f [\sigma_p]}} \approx 1,4 \sqrt{\frac{Q}{\pi f [\sigma_p]}}. \quad (3.17)$$

У випадку, якщо болт поставлений в отвір без зазору (рис. 3.14, б), його діаметр визначають із розрахунків на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{Q}{A_{зр}} = \frac{4Q}{\pi d_o^2 i} \leq [\tau_{зр}] \quad (3.18)$$

і перевіряють на умову міцності зминанню:

$$\sigma_{зм} = \frac{Q}{A_{зм}} = \frac{Q}{d_o \delta_{min}} \leq [\sigma_{зм}], \quad (3.19)$$

де  $d_o$  – діаметр стержня болта (ненарізаної частини),  $A_{зр} = \frac{\pi d_o^2 i}{4}$  – розрахункова площа зрізу;

$i$  — кількість площин зрізу болта (при з'єднанні більше ніж двох деталей);  $A_{зм} = d_o \delta_{min}$  – розрахункова площа зминання стержня болта;

$\delta_{min}$  – найменша товщина з'єднаних деталей

При розрахунках різьбових з'єднань, які складаються із  $n$  болтів, треба врахувати, що розрахункова площа цих з'єднань збільшуються відповідно в  $n$  разів.

### 3.2.3. Шпонкові з'єднання

*Шпонковим* називають рознімне з'єднання складових частин виробу із застосуванням шпонок.

*Шпонка* – це елемент з'єднання, що встановлюється у пази стикованих деталей і перешкоджає їх відносному повороту або зсуву. Шпонки переважно застосовують для передавання обертального моменту від вала до шків, зірочки, зубчастого колеса і т. ін. або навпаки.

З'єднання деталей за допомогою шпонок можуть бути напруженими і ненапруженими. З'єднання називають напруженими, якщо в їхніх деталях

### Частина третя

виникають напруження в процесі складання, тобто до прикладення робочих навантажень. До напружених належать з'єднання *клиновими шпонками*, які добре сприймають ударні навантаження.

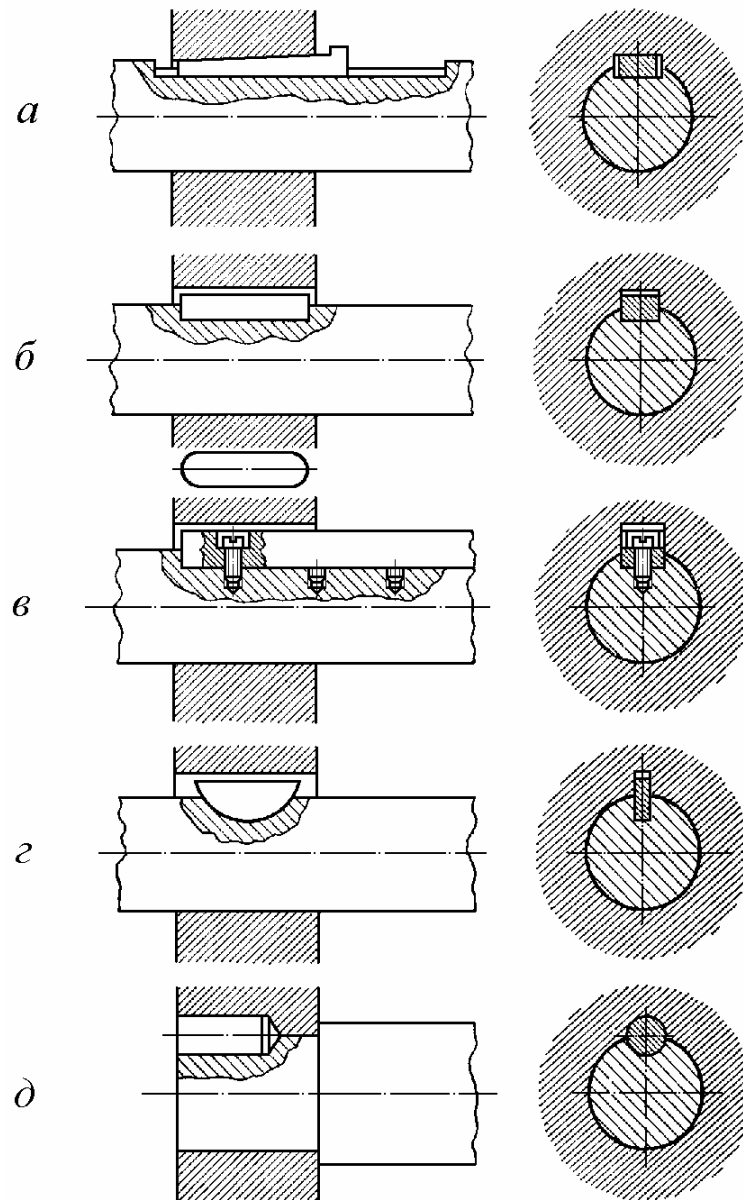


Рис. 3.15

Клинова шпонка (рис. 3.15, а) має форму клина з уклоном верхньої грані  $1 : 100$  і монтується між валом і деталлю ударами молотка (забивна шпонка) або затягується насаджуваною на вал деталлю (закладна шпонка), що забезпечує напруженість з'єднання. Робочими поверхнями клинових шпонок є верхня і нижня широкі грані.

Клинові шпонки застосовують у тихохідних передачах низької точності. При посадці зубчастого колеса, шків, зірочки, муфти тощо на вал за допомогою клинової шпонки порушується центрування деталі і вала внаслідок зміщення осі отвору деталі відносно осі вала. Це приводить до порушення нормальної роботи передачі, збільшення биття або перекосу з'єднаних деталей.

Ненапружені шпонкові з'єднання здійснюють призматичними і сегментними шпонками.

*Призматичні шпонки* (рис. 3.15, б) бувають зі закругленими торцями, плоскими торцями, одним закругленим і другим плоским торцем. У цих шпонках робочими є бічні грані.

Крім звичайних призматичних шпонок застосовують напрямні шпонки, які кріплять до вала гвинтами (рис. 3.15, в). По цим шпонкам уздовж вала переміщують шестерні коробок передач, рухомі частини кулачкових і фрикційних муфт і т. ін.

*Сегментні шпонки* (рис. 3.15, г) набули великого поширення в автотракторобудуванні, верстатобудуванні і літакобудуванні завдяки простоті виготовлення і зручності при складанні та розбиранні. Обертальний момент від вала до насадженої деталі (або від деталі до вала) передається бічними гранями шпонки. При передаванні великих моментів можна ставити в ряд по довжині вала дві або три шпонки.

Розміри шпонок регламентовано відповідними стандартами, крім круглої циліндричної і конічної шпонок (рис. 3.15, д).

*Переваги шпонкових з'єднань:*

- простота і надійність конструкції;
- легкість збирання і розбирання з'єднання;
- порівняно низька вартість.

*Недоліки шпонкових з'єднань:*

- шпонкові пази істотно ослаблюють міцність стикованих деталей вала і насадженої на нього деталі;
- концентрація напружень, що виникають у зоні шпонкової канавки; знижує опір проти втомленості вала;
- складність забезпечення взаємозамінності призматичних шпонок через припасування або добирання шпонки по пазу (сегментні шпонки з глибоким пазом не мають цього недоліку і тому їх застосовують при масовому виробництві).

Шпонки виготовляють із сталі Ст5, Ст6, 45, 50, 55, 60 та інших більш міцних марок з границею міцності  $\sigma_B \geq 590 \text{ МПа}$ .

Розміри шпонки вибирають за таблицями стандарту залежно від діаметра вала і роблять перевірючий розрахунок.

З'єднання, здійснювані за допомогою призматичних або сегментних шпонок, перевіряють переважно на зминання робочих поверхонь шпонки і

### Частина третя

з'єднаних деталей (рис. 3.16) за формулою:

$$\sigma_{зм} = \frac{F_t}{A_{зм}} = \frac{2M}{d(h-t_1)l_p} \leq [\sigma_{зм}], \quad (3.20)$$

де  $F_t = \frac{2M}{d}$  – колове зусилля, яке діє на шпонку;

$M$  — обертальний момент на валу;

$d$  — діаметр вала,  $A_{зм} = (h-t_1)l_p$  — розрахункова площа змінання паза в маточині;

$h$  — висота перерізу шпонки;

$t_1$  — глибина паза вала;

$l_p$  — робоча довжина шпонки.

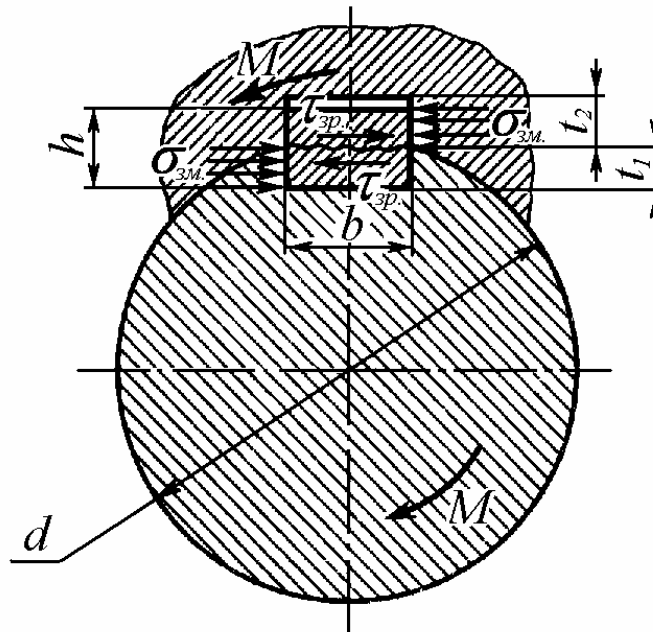


Рис. 3.16

Сегментні шпонки на відміну від призматичних крім змінання перевіряють також на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{F_t}{A_{зр}} = \frac{2M}{dbl_p} \leq [\tau_{зр}], \quad (3.21)$$

де  $A_{зр} = dbl_p$  – розрахункова площа зрізу:

$b$  — ширина шпонки (рис. 3.16).

Допустимі напруження при розрахунках шпонкових з'єднань

приймаються наступними:  $[\tau_{зр}] = 60 \dots 100 \text{ МПа}$  – допустиме напруження на зріз,  $[\sigma_{зм}] = 100 \dots 130 \text{ МПа}$  – допустиме напруження на зминання для маточин із сталі і  $[\sigma_{зм}] = 50 \dots 70 \text{ МПа}$  – із чавуну. Менші значення допустимих напружень вибирають при нерівномірних і ударних навантаженнях.

### 3.2.4. Шліцьові з'єднання

*Шліцьовим* називається рознімне з'єднання складових частин виробу із застосуванням пазів (шліців) і виступів (зубів). Шліцьове або зубчасте з'єднання можна розглядати як багатошпонкове, в якому шпонки – зуби виготовлені разом з валом.

У шліцьовому з'єднанні профіль перерізу зубів має прямокутну, евольвентну або трикутну форму (рис. 3.17).

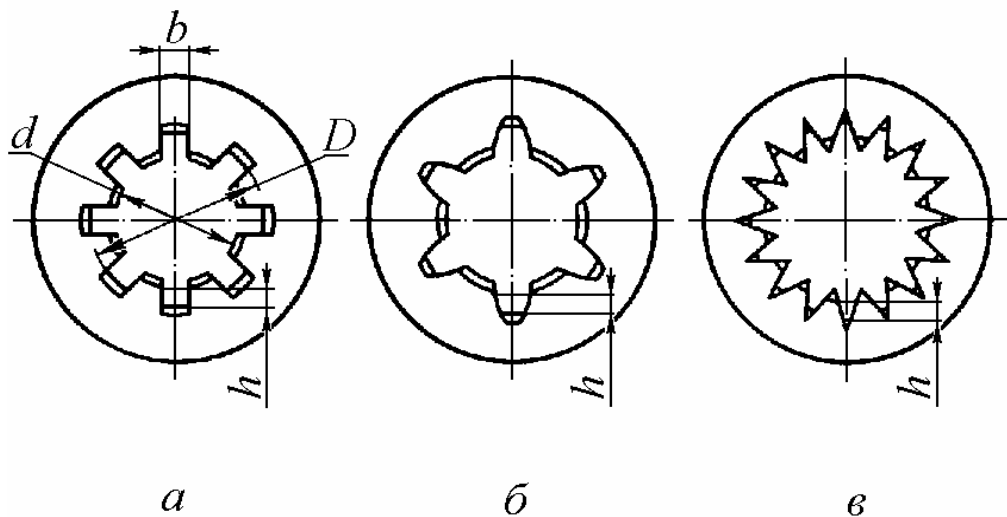


Рис. 3.17

Найбільш поширені *прямокутні* (рис. 3.17 а) і *евольвентні* (рис. 3.17 б) зубчасті з'єднання, які стандартизовані і застосовуються в рухомих та нерухомих з'єднаннях. Останнім часом перевагу віддають евольвентним шліцьовим з'єднанням, оскільки їх можна виготовляти за допомогою устаткування для нарізування зубчастих коліс, а також внаслідок підвищеної міцності цих з'єднань і достатньої точності центрування стичних деталей.

Шліцьові з'єднання з *трикутним* (рис. 3.17 в) профілем зубів менш поширені, ніж евольвентні і прямокутні, вони не стандартизовані. Завдяки великій кількості низьких зубів їх успішно застосовують у нерухомих з'єднаннях тонкостінних втулок або порожнистих валів, які передають

### Частина третя

невеликі моменти, а також коли потрібні відносно малі регулювальні повороти деталей.

Шліцьові з'єднання можуть бути рухомими (встановлення рухомих шестерень коробок передач верстатів або автомобілів на шліцьовий вал) або нерухомими (нерухоме закріплення деталей на шліцьовому валу).

Стандартом регламентовано три серії з'єднань з прямобічним профілем зубів: *легку*, в основному для нерухомих і малонавантажених з'єднань; *середню*, головним чином для рухомих середньонавантажених з'єднань з великою кількістю зубів, причому втулка переміщується по шліцах без навантаження (коробка передач); *важку* для передавання великих моментів і пересування втулки під навантаженням.

*Переваги шліцьових з'єднань порівняно із шпонковими:*

– деталі краще центруються на валах і мають точніший напрям при осьовому переміщенні;

– внаслідок збільшення сумарної робочої поверхні зубів, зменшення глибини пазів і рівномірного розподілу навантаження по колу вала міцність з'єднання, особливо при динамічних навантаженнях, істотно підвищується.

Усе це забезпечує велике поширення шліцьових з'єднань в автотракторній промисловості, верстатобудуванні, авіабудуванні та ін.

*Недоліком шліцьових з'єднань є складність технології їх виготовлення і висока вартість.*

Шліцьові з'єднання вибирають за таблицями стандартів залежно від діаметра вала.

Вибране шліцьове з'єднання перевіряють на зминання активних поверхонь зубів і пазів за наступними формулами.

Для прямобічних шліців

$$\sigma_{зм} = \frac{F_t}{A_{зм}} = \frac{2M}{(D+d)hl_p z} \leq [\sigma_{зм}], \quad (3.22)$$

де  $F_t = \frac{2M}{d_{cp}}$  – колове зусилля;

$M$  — обертальний момент на валу;

$d_{cp} = \frac{D+d}{2}$  — середній діаметр з'єднання;

$D$  і  $d$  – відповідно зовнішній і внутрішній діаметр шліців;

$A_{зм} = hl_p z$  – розрахункова площа зминання зубів;

$h$  — робоча висота зуба;

$l_p$  – робоча довжина зуба;

$z$  — кількість зубів з'єднання.



Для евольвентних шліців

$$\sigma_{зм} = \frac{P_t}{A_{зм}} = \frac{2M}{0,8(D+d)ml_p z} \leq [\sigma_{зм}], \quad (3.23)$$

де  $P_t = \frac{2M}{d}$  – колове зусилля ;

$$d = \frac{D+d}{2} = mz \text{ — діаметр ділильного кола}$$

$m$  — модуль зуба;

$z$  — кількість зубів;

$A_{зм} = 0,8ml_p z$  – розрахункова площа змінання зубів евольвентного профілю;

$l_p$  – робоча довжина зуба.

Допустиме напруження на змінання визначається як

$$[\sigma_{зм}] = \frac{\sigma_T}{nK_{зм}K_\delta}, \quad (3.24)$$

де  $n = 1,25 \dots 1,4$  – коефіцієнт запасу міцності,  $\sigma_T$  – границя текучості матеріалу зуба,  $K_{зм} = 4 \dots 5$  – загальний коефіцієнт концентрації навантаження,  $K_\delta = 2 \dots 2,5$  – коефіцієнт динамічного навантаження.

### 3.2.5. Клинові і штифтові з'єднання

*Клиновим* називається роз'ємне з'єднання складових частин виробу із застосуванням деталі, яка має форму клина.

Клинові з'єднання можна поділити на *установочні* та *силові*.

*Установочні* (рис. 3.18, а) клинові з'єднання призначені для регулювання і встановлення потрібного відносного положення деталей, а *силові* (рис. 3.18, б, в) – для міцного їх з'єднання.

В свою чергу силові клинові з'єднання поділяють на *ненапружені* і *напружені*.

*Ненапружені* (рис. 3.18, в) клинові з'єднання (до прикладення зовнішніх навантажень у деталях цього з'єднання напружень немає) застосовують при односторонніх навантаженнях.

Найбільшого поширення набули *напружені* (рис. 3.18, б) клинові з'єднання (клин запресовується в отвір з'єднуваних деталей з деякою силою, що спричинює напруження до прикладення зовнішнього навантаження), які забезпечують достатню надійність у режимі змінних навантажень.

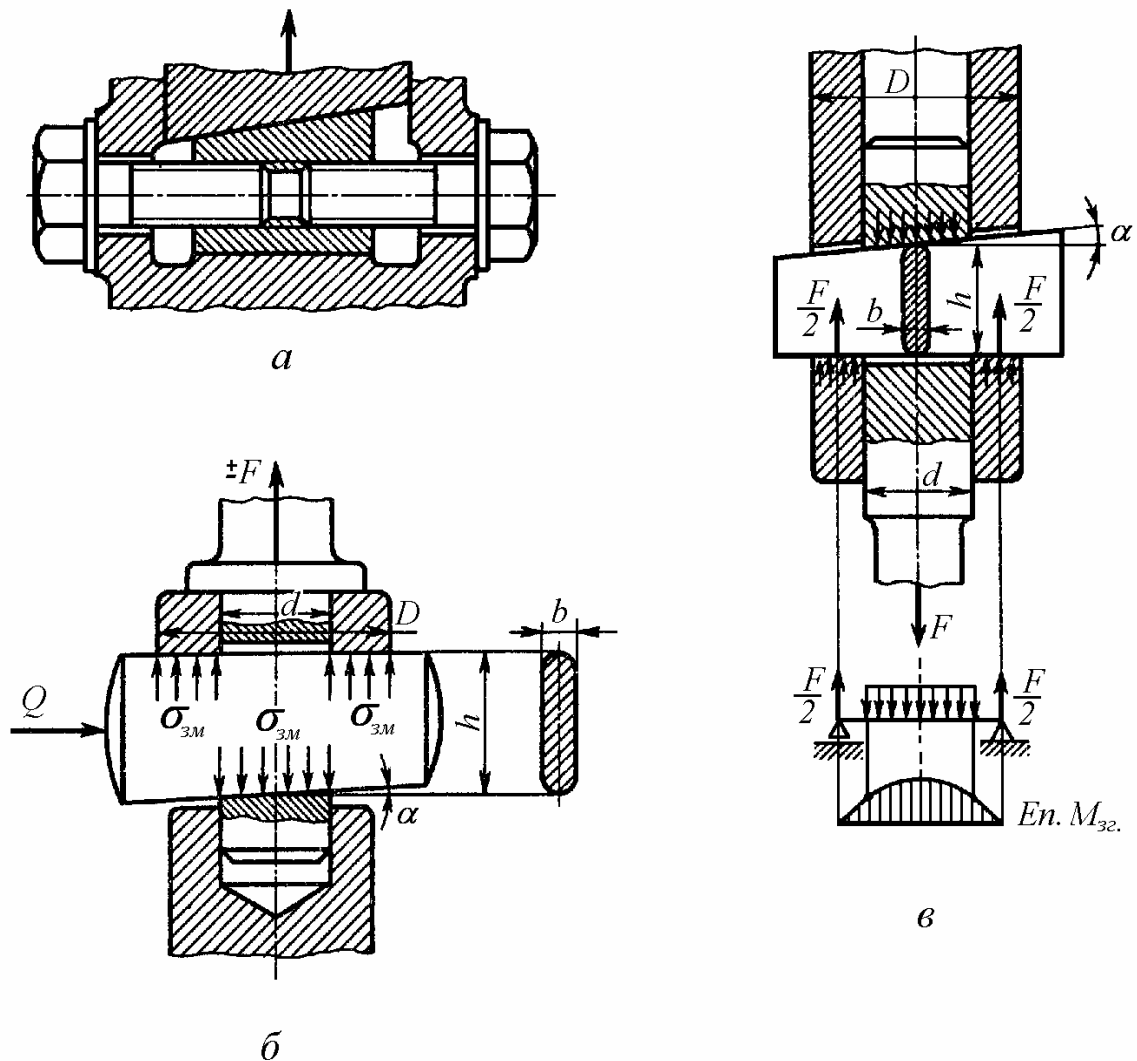


Рис. 3.18

Силкові клини застосовують для з'єднання тяг, різних маховиків, поршневих штоків з повзунами, вкладишів та ін.

Для забезпечення самогальмування приймають, що кут клина в силових клинових з'єднаннях дорівнює  $1:100$ ,  $1:40$  або  $1:30$ , а в установочних —  $1:10$ ,  $1:6$  або  $1:4$ .

*Переваги силових клинових з'єднань:*

- простота конструкції, складання і розбирання;
- відносна дешевизна,
- можливість передавати значні навантаження.

*Недоліки:*

- ослаблення з'єднаних деталей отвором під клин;
- відносна складність обробки отворів;
- необхідність індивідуального припасування клина до отвору.

При конструюванні клинового з'єднання орієнтовно можна брати

товщину клина  $b = (1/4...1/3)d$ , висоту перерізу клина  $h \geq 3b$ .

Вибрані розміри з'єднання можуть перевірятись за умовами (рівняннями) міцності на зминання, на зріз і на згин. Розрахункова схема клина на згин показана на рис. 3.18, в.

*Штифтовим* називається роз'ємне з'єднання складових частин виробу із застосуванням *штифта*. При цьому штифти можуть бути *циліндричними, конічними або фасонними*.

На рис. 3.19 показано різновиди штифтових з'єднань: за допомогою циліндричного штифта (а), конічного штифта (б, в), конічного розвідного штифта (г).

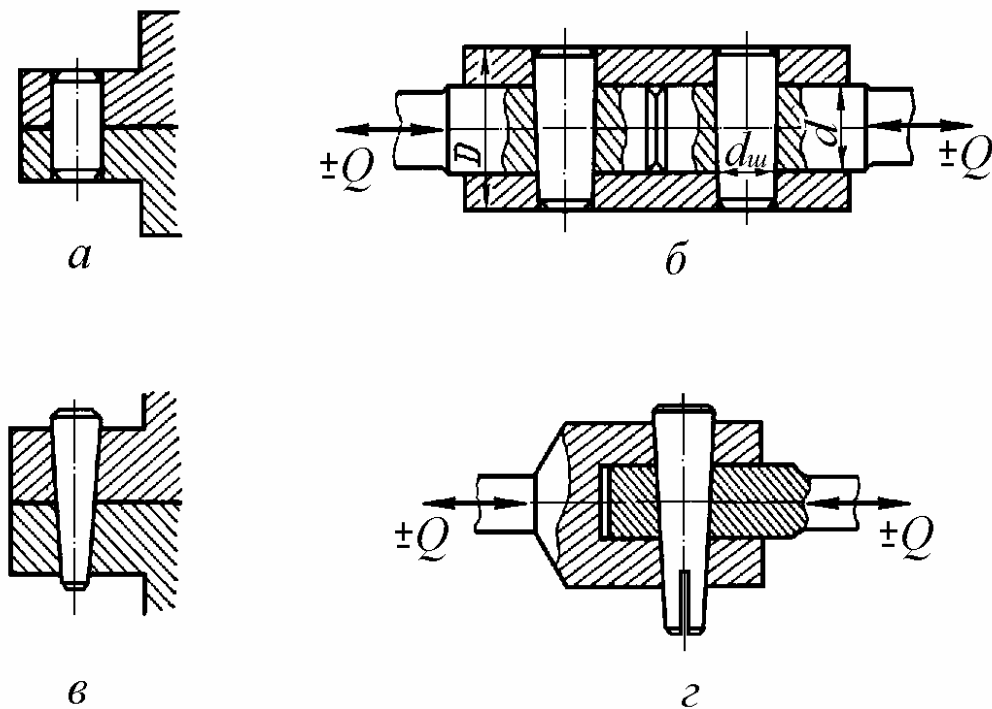


Рис. 3.19

*Циліндричні і конічні штифти* застосовують як установочні (рис. 3.19, а, в) або для передавання відносно невеликих навантажень (рис. 3.19, б, г).

Великого поширення набули гладкі конічні (конусність 1:50) і фасонні (циліндричні і конічні з видавленими або насіченими канавками, штифти, які забезпечують центрування з'єднуваних деталей і надійне самогальмування.

При передаванні поперечного навантаження штифт працює на зріз і зминання і тому його розраховують на умову міцності зрізу і зминання.

---

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Назвіть основні види роз'ємних з'єднань.
2. Дайте визначення різьбового з'єднання.
3. Назвіть основні геометричні параметри різьби.
4. Назвіть основні типи різьб.
5. Які є основні конструктивні типи кріпильних виробів із різьбою?
6. Чим відрізняється розрахунок незатягнутого і затягнутого різьбового з'єднання?
7. Дайте визначення шпонкового з'єднання.
8. Як класифікують шпонкові з'єднання?
9. Напишіть основні формули розрахунку шпонкових з'єднань.
10. Дайте визначення шліцьового з'єднання і його класифікацію.
11. Напишіть основні формули розрахунку шліцьових з'єднань.
12. Які переваги і недоліки шліцьових з'єднань порівняно із шпонковими?
13. Які з'єднання називають клиновими? Назвіть їх основні види.
14. Які переваги і недоліки клинових з'єднань?
15. Що таке штифтове з'єднання?
16. Назвіть основні типи штифтів і їх призначення.

### 3.3. Загальні відомості про передачі

Механічні пристрої, що застосовуються для передавання механічної енергії від джерела до споживача із зміною кутової швидкості або виду руху, називають *механічними передачами* або просто *передачами*.

Необхідність введення передачі між двигуном і виробничою машиною пояснюється багатьма причинами.

1. Джерела руху — двигуни — працюють, як правило, в режимі високих кутових швидкостей, які забезпечують їм найбільшу потужність, к. к. д. і малі габаритні розміри. При цьому кутові швидкості валів виробничих машин відрізняються від кутової швидкості вала двигуна.

2. Зміну швидкості виробничої машини, а отже, і значення обертового моменту вигідніше здійснювати за допомогою передачі, а не зміною кутової швидкості вала двигуна, оскільки при зменшенні кутової швидкості вала двигуна його потужність і к. к. д. знижуються.

3. Двигуни, як правило, передають обертовий рух, а робочі органи машини іноді потребують зворотно-поступального, хитного, гвинтового та інших видів руху.

4. Часто виникає необхідність передавати енергію від одного двигуна до кількох виробничих машин, вали яких обертаються з неоднаковими кутовими швидкостями.

За способом передавання руху механічні передачі класифікують на *передачі тертям* — фрикційні, пасові, канатні і *передачі зачепленням* — зубчасті, черв'ячні, гвинтові, ланцюгові. Можливий і інший принцип класифікації механічних передач, згідно з яким їх поділяють на передачі з безпосереднім контактом (фрикційні, зубчасті, черв'ячні та ін.) і передачі з проміжною гнучкою ланкою (пасові, ланцюгові і канатні).

В кожному передаточному механізмі існує дві ланки: *ведуча* і *ведена*. В багатоступінчастих передачах існують також проміжні ланки.

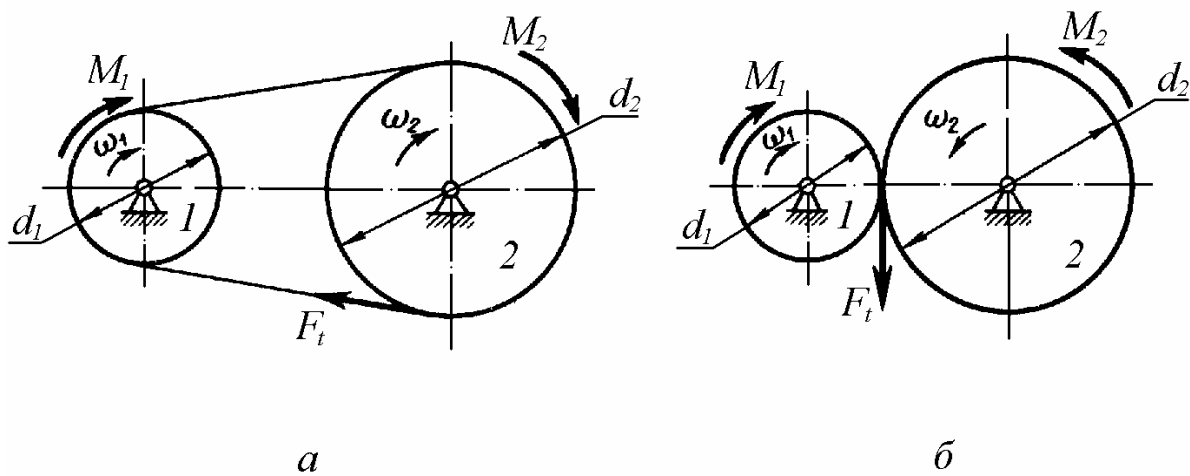


Рис. 3.20

На рис. 3.20 схематично зображені передача з гнучкою ланкою (а) і передача з безпосереднім контактом (б). Ведучі ланки і величини, які до них відносяться позначаються індексом 1, а ведені – індексом 2.

Визначимо параметри, якими характеризуються механічні передачі.

1. Потужність ведучої і веденої ланок:  $N_1$  і  $N_2$ , (Вт).

2. Кутова швидкість ведучої і веденої ланок:  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , (рад/с)

або частота їх обертання  $n_1$  і  $n_2$ , (об/хв)

На підставі цих параметрів за формулами, відомими із теоретичної механіки, можна визначити інші параметри передачі:

3. Механічний коефіцієнт корисної дії (ККД) передачі:

$$\eta = \frac{N_2}{N_1}.$$

Механічний ККД характеризує втрати потужності на сили шкідливого опору в передачі (тертя рухомих частин, деформації робочих тіл і т. ін.). Для різних передач ККД знаходиться в межах 0,85...0,98 і залежить від їх конструктивних особливостей.

4. Коллові швидкості ведучої і веденої ланки:

$$v_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2}, \quad v_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2},$$

де  $d_1, d_2$  – відповідно діаметри ведучої і веденої ланки (колеса, шківів, котка і т. ін.).

Колові швидкості обох ланок при відсутності проковзування за величиною повинні бути однаковими:  $v_1 = v_2$ .

7. Передаточне відношення (передаточне число).

На підставі того, що при відсутності проковзування  $v_1 = v_2$ , запишемо:

$$\omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2} \quad \text{або} \quad \frac{\pi n_1 d_1}{60} = \frac{\pi n_2 d_2}{60},$$

звідки

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Відношення кутової швидкості ведучої ланки до кутової швидкості веденої називається *передаточним відношенням*:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (3.25)$$

Тобто, передаточне відношення характеризує відносну зміну кутової швидкості при передачі обертального руху від ведучої ланки 1 до веденої ланки 2. Якщо передаточне відношення менше одиниці, то передача понижуюча, а якщо більше одиниці – то підвищуюча.

Передачі закритого виконання, які призначені для зменшення кутової швидкості називаються *редукторами*, а для збільшення – *мультиплікаторами*.

*Передаточним числом* передачі називається відношення завжди більшої кутової швидкості до меншої незалежно від того, яка ланка ведуча, а яка ведена:

$$u = \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} \geq 1. \quad (3.26)$$

На відміну від передаточного відношення передаточне число не може бути меншим одиниці. Цілком зрозуміло, що для передач, які зменшують кутову швидкість ( $\omega_1 \geq \omega_2$ ), передаточне число і передаточне відношення співпадають:  $u = i_{12}$ , а для передач, які збільшують кутову швидкість ці величини обернено пропорційні:  $u = \frac{1}{i_{12}}$ .

Слід зазначити, що традиційно розрахункові формули на міцність передач містять, як правило, передаточні числа, а при кінематичних

розрахунках, особливо багатоступінчастих передач з проміжними ланками, застосовують передаточні відношення.

5. Обертальні моменти на ведучій і веденій ланках відповідно дорівнюють:

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega_1}, \quad M_2 = \frac{N_2}{\omega_2}.$$

Визначимо співвідношення між обертальними моментами  $M_1$  і  $M_2$ .

Так як  $N_2 = \eta N_1$ , то

$$M_2 \omega_2 = \eta M_1 \omega_1,$$

$$M_2 = \eta M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \eta M_1 i_{12}. \quad (3.27)$$

Якщо втрати в передачі невеликі, то ними нехтують і приймають

$$M_2 \approx M_1 i_{12}. \quad (3.28)$$

6. Колове зусилля  $F_t$  від обертального моменту  $M_1$  на ведучій ланці:

$$F_t = \frac{2M_1}{d_1} = \frac{N_1}{v_1}.$$

Обертальний момент  $M_2$  веденої ланки через рушійну колову силу  $F_t$  (при невеликих втратах на тертя) можна виразити як:

$$M_2 = \eta F_t \frac{d_2}{2} \approx F_t \frac{d_2}{2}. \quad (3.29)$$

Визначимо передаточне відношення, ККД і обертальний момент  $M_3$  на вихідному валу для двохступінчастої передачі. Для цього послідовно з'єднаємо дві окремих передачі (рис. 3.21).

Передаточне відношення цієї передачі дорівнює:

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{12} i_{23}.$$

Коефіцієнт корисної дії:

$$\eta_{13} = \frac{N_2}{N_1} \frac{N_3}{N_2} = \frac{N_3}{N_1} = \eta_{12} \eta_{23}.$$

Обертальний момент  $M_3$  на третьому валу:

$$M_3 = M_2 i_{23} \eta_{23} = M_1 i_{12} i_{23} \eta_{12} \eta_{23} = M_1 i_{13} \eta_{13}.$$

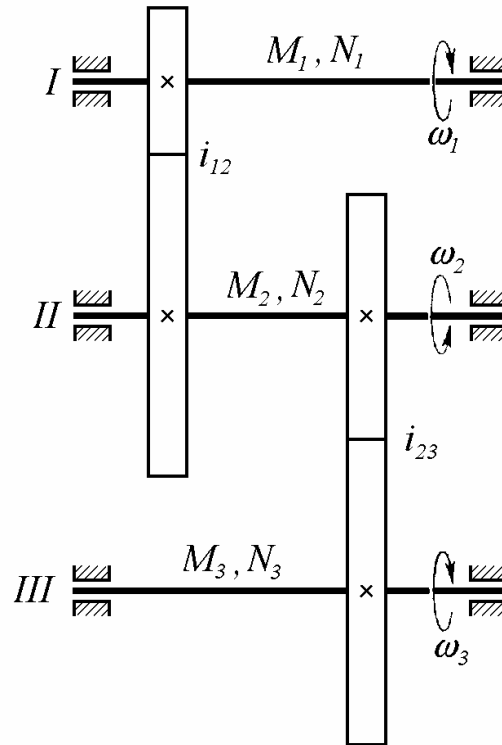


Рис. 3.21

В загальному випадку для багатоступінчастої передачі її передаточне відношення і ККД відповідно дорівнює:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} \dots \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = i_{12} i_{23} i_{34} \dots i_{n-1 n}, \quad (3.30)$$

$$\eta_{1n} = \frac{N_n}{N_1} = \frac{N_2}{N_1} \frac{N_3}{N_2} \frac{N_4}{N_3} \dots \frac{N_n}{N_{n-1}} = \eta_{12} \eta_{23} \eta_{34} \dots \eta_{n-1 n}, \quad (3.31)$$

де  $i_{12}$ ,  $i_{23}$ ,  $i_{34}$ ,  $i_{n-1 n}$  – передаточні відношення між кожною парою коліс;

$\eta_{12}$ ,  $\eta_{23}$ ,  $\eta_{34}$ ,  $\eta_{n-1 n}$  – коефіцієнти корисної дії кожної пари коліс у багатоступінчастій передачі.

Тобто, загальне передаточне відношення ряду послідовно з'єднаних передач дорівнює добутку їх передаточних відношень.

Загальний ККД багатоступінчастої послідовно з'єднаної передачі дорівнює добутку ККД передач, що входять до її складу.

Обертальний момент на валу  $n$  для такої передачі дорівнює:

$$M_n = M_1 i_{1n} \eta_{1n}, \quad (3.32)$$

Обертальний момент на валу  $n$  багатоступінчастої послідовно з'єднаної передачі дорівнює добутку моменту на ведучому валу,



### **3.3.1. Фрикційні передачі**

Передачі, в яких рух від одного вала до іншого передається силами тертя, що виникають між робочими поверхнями обертових котків, називають *фрикційними*.

Для утворення сили тертя, достатньої для передачі заданого моменту від ведучого вала до веденого, у фрикційних передачах застосовують натискні пристрої із використанням сили ваги, пружин, системи важелів тощо.

Залежно від призначення фрикційні передачі поділяють на передачі з *умовно сталим передаточним відношенням* між валами (передаточне відношення не може бути цілком сталим, оскільки завжди є відносне проковзування котків, яке змінюється залежно від навантаження передачі) з паралельними (рис. 3.22, а, б) і пересічними (рис. 3.22, в) геометричними осями, а також на передачі із *змінним передаточним відношенням* – варіатори (рис. 3.22, г).

*Переваги фрикційних передач відносно інших:*

- плавність і безшумність роботи;
- простота конструкції;
- можливість безступінчастого регулювання швидкості, включення і виключення передачі без зупинки машини;
- при перевантаженнях відбувається проковзування (буксування) котків, яке захищає механізм привода від руйнування.

*Недоліки фрикційних передач:*

- несталість передаточного відношення;
- обмеженість потужностей, що можуть ними передаватись – до  $10...20\text{ KВт}$  (але силові фрикційні передачі із сталевими загартованими котками, які працюють у маслі, можуть передавати значно більшу потужність – до  $200...300\text{ KВт}$ ;

– великі навантаження на вали та їх опори (підшипники), що приводить до громіздкості конструкції і великих втрат енергії на подолання тертя в опорах;

– порівняно низький ККД ( $\eta = 0,85...0,97$ );

– підвищене і часто нерівномірне спрацювання активних (робочих) поверхонь котків.

Через інтенсивне спрацювання активних поверхонь котків та значне їх нагрівання колова швидкість силової передачі не повинна перевищувати  $7...10\text{ м/с}$  (при  $v \geq 7...10\text{ м/с}$  котки звичайно працюють у маслі).

У машинобудуванні фрикційні силові передачі з умовно сталим передаточним відношенням використовують дуже рідко. Як приклад

### Частина третя

можна назвати фрикційні лебідки, які іноді застосовують у буровій техніці. Варіатори широко використовують у різних галузях промисловості. Їх часто застосовують у приводах транспортерів, зварювальних і ливарних машинах, металорізальних і інших верстатах.

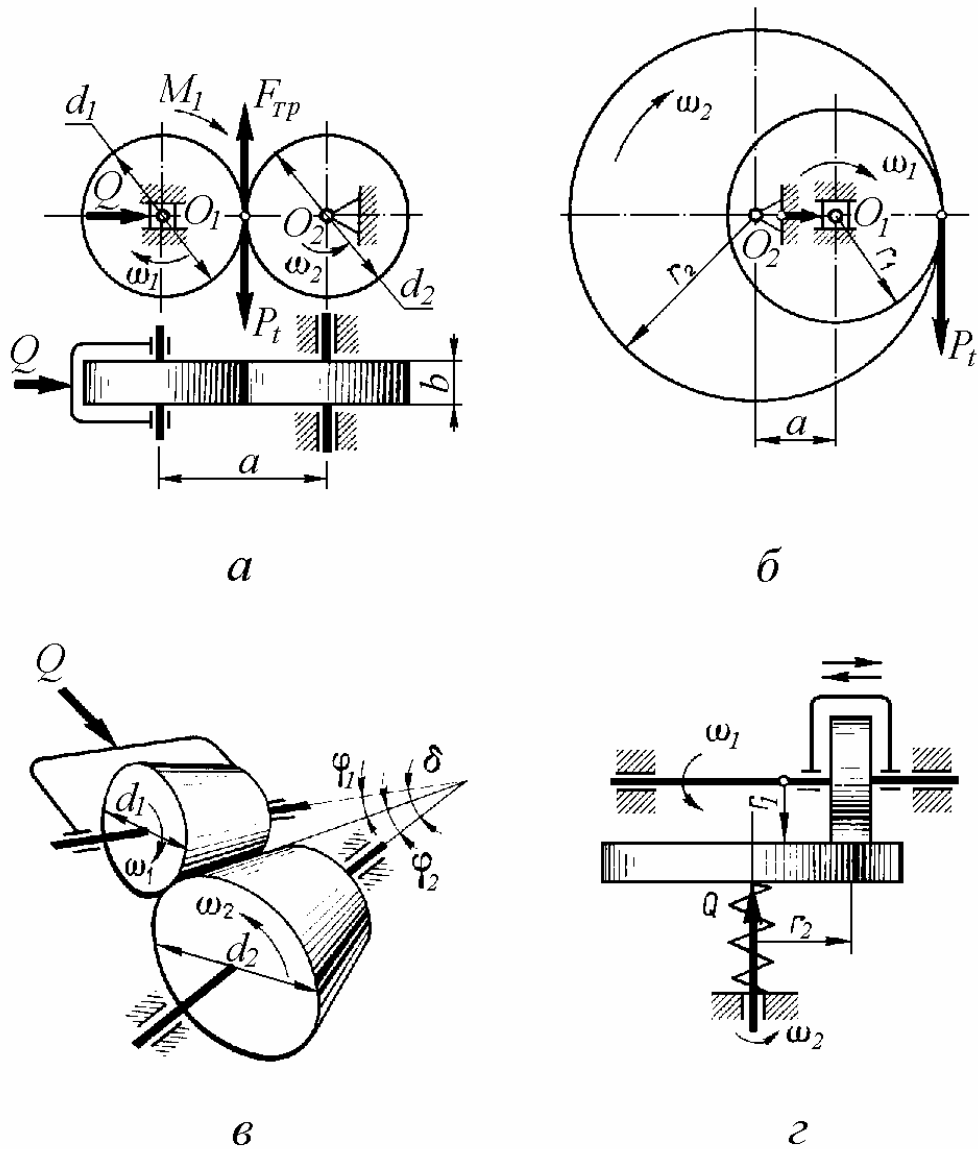


Рис. 3.22

До матеріалів, що застосовуються для виготовлення фрикційних котків, ставляться такі вимоги: зносостійкість; високий коефіцієнт тертя, що забезпечує при невеликих силах стиску на стикових активних поверхнях котків достатні сили тертя для передачі заданого моменту; високий модуль поздовжньої пружності для забезпечення достатньої жорсткості котків.

При передаванні порівняно великих моментів для обмеження габаритів передачі фрикційні котки виготовляють із загартованої

шарикопідшипникової сталі (сталь ШХ 15). Котки звичайно працюють у масляній ванні. Часто застосовують також котки з чавуну з підвищеною поверхневою твердістю. Чавун може працювати в парі із сталлю.

Для передавання невеликих моментів застосовують матеріали, що мають у парі з сталлю або чавуном підвищений коефіцієнт тертя: дерево, текстоліт, гетинакс, шкіру, гуму, прогумовану тканину, фібру. Перелічені неметалеві матеріали застосовують для робочої поверхні ведучого чавунного або сталюого котка. Ведений коток, як правило, виготовляють з чавуну або сталі без облицювального покриття.

Розглянемо кінематичні співвідношення і зусилля у фрикційній циліндричній передачі із гладкими котками і паралельним розташуванням осей валів (рис. 3.22, а).

Без проковзування (при однакових швидкостях точок контактів котків  $v_1 = v_2$ ) передаточне число (передаточне відношення) передачі:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \approx \frac{d_2}{d_1}.$$

Проковзування котків, яке в дійсності зменшує кутову швидкість  $\omega_2$ , враховується коефіцієнтом ковзання, який залежить від конструкції передачі, навантаження, матеріалу котків і приймається в межах  $\varepsilon = 0,01 \dots 0,03$ .

Тоді із урахуванням проковзування передаточне число дорівнює:

$$u = \frac{d_2}{d_1(1 - \varepsilon)}. \quad (3.33)$$

Для однієї пари котків силових передач приймають  $u \leq 7$ , для передач приладів –  $u \leq 25$ .

Нормальна робота (без буксування) фрикційної передачі буде забезпечена, якщо сила тертя  $F_{mp}$ , що виникає між котками при стисканні їх із силою  $Q$ , буде не меншою від колової сили  $F_t$ , необхідної для передавання моменту  $M_1$ :

$$F_{mp} \geq F_t = \frac{2M_1}{d_1},$$

або

$$\frac{F_{Tp} d_1}{2} = \frac{f Q d_1}{2} \geq M_1, \quad (3.34)$$

де  $f$  — коефіцієнт тертя ковзання для матеріалів котків, який приймається  $f = 0,04 \dots 0,05$  – для сталі і чавуну із змащуванням,  $f = 0,15 \dots 0,20$  – без змащування,  $f = 0,20 \dots 0,30$  – для неметалічного котка.

Застосувавши коефіцієнт запасу зчеплення  $k$ , отримаємо:

$$\frac{f Q d_1}{2} = k M_1.$$

Звідки необхідна сила притискання котків:

$$Q = \frac{2k M_1}{f d_1}. \quad (3.35)$$

Коефіцієнт запасу зчеплення або коефіцієнт навантаження  $k$  приймають у силових передачах  $k = 1, 2 \dots 1, 5$ , для передач приладів –  $k = 3 \dots 5$ .

Фрикційні передачі розраховують на контактну витривалість і зносостійкість.

При стисканні котків силами  $Q$  в місці їх стикання на поверхні виникає місцева деформація стиску, яка є причиною утворення контактних напружень  $\sigma_H$ .

Для матеріалів, що підпорядковані закону Гука, модуль найбільших контактних напружень визначається за формулою Герца — Беляєва:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{Q E_{36}}{2\pi(1-\nu^2)b\rho_{36}}}. \quad (3.36)$$

Для котків із сталі та інших матеріалів, коефіцієнт Пуассона яких  $\nu \approx 0,3$ , формулу (3.36) можна записати у вигляді:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{Q E_{36}}{b\rho_{36}}}, \quad (3.37)$$

де  $E_{36} = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}$  — зведений модуль пружності котків,  $E_1, E_2$  —

модулі пружності матеріалів взаємодіючих котків,  $\rho_{36} = \frac{d_1 d_2}{2(d_1 + d_2)}$  — зведений радіус кривизни котків,  $d_1$  і  $d_2$  — діаметри циліндричних котків.

При значних контактних напруженнях, які циклічно змінюються, на активних поверхнях котків виникають тріщини від втомленості, що приводить до поступового руйнування котків. Для запобігання цьому явищу, розрахункові контактні напруження не повинні перевищувати допустимих, тобто умова контактної витривалості повинна мати вигляд:

$$\sigma_H \leq [\sigma_H]$$

При *проектному* розрахунку циліндричної фрикційної передачі, котки якої виготовлені з матеріалів, що *підпорядковані закону Гука*, визначається міжосьова відстань  $a$  передачі із умови контактної

витривалості:

$$a \geq (u + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{0,418}{[\sigma_H]}\right)^2 \frac{E_{36} k M_1}{f \psi_a u}}, \quad (3.38)$$

де  $u$  – передаточне число фрикційної передачі,  $\psi_a = 0,2 \dots 0,4$  – коефіцієнт ширини котків,  $b$  – ширина котків.

Визначивши міжосьову відстань, діаметри і ширину котків можна розрахувати за формулами:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{2a}{u + 1}, \\ d_2 &= d_1 u, \\ b &= \psi_a a. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Допустиме контактне напруження  $[\sigma_H] = 1,2 \dots 1,5 \text{ НВ, МПа}$  – для сталевих котків без змащування,  $[\sigma_H] = 2,4 \dots 2,8 \text{ НВ, МПа}$  — для сталевих котків із змащуванням,  $[\sigma_H] \approx 1,5 \sigma_{B.32}$ . — для чавунних котків, де  $\text{НВ}$  — число твердості за Брінеллем,  $\sigma_{B.32}$ . — границя міцності чавуну при згинанні.

Для котків з робочою поверхнею з дерева, шкіри, гуми та інших матеріалів, які не підпорядковані закону Гука, параметри передачі визначають із розрахунку на зносостійкість за допустимим навантаженням  $q$ , яке діє на одиницю довжини контактної лінії:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{2 k M_1}{b f d_1} \leq [q]. \quad (3.40)$$

Із урахуванням (3.39) отримуємо формулу для проектного розрахунку:

$$a \geq \sqrt{\frac{k M_1 (u + 1)}{[q] f \psi_a}}. \quad (3.41)$$

Допустиме навантаження  $[q]$  орієнтовно приймається:  
 $[q] = 40 \dots 80 \text{ Н/мм}$  — для пластмас,  $[q] = 2,5 \dots 5,0 \text{ Н/мм}$  — для деревини,  
 $[q] = 10 \dots 30 \text{ Н/мм}$  — для резини,  $[q] = 15 \dots 25 \text{ Н/мм}$  — для шкіри.

### 3.3.2. Пасові передачі

Передача руху, що здійснюється гнучким зв'язком за допомогою тертя між пасом і шківом, називається *пасовою*. Пасова передача

### Частина третя

складається з двох або більшої кількості шківів і безкінечного паса, надітого на шківів з натягом (рис. 3.23).

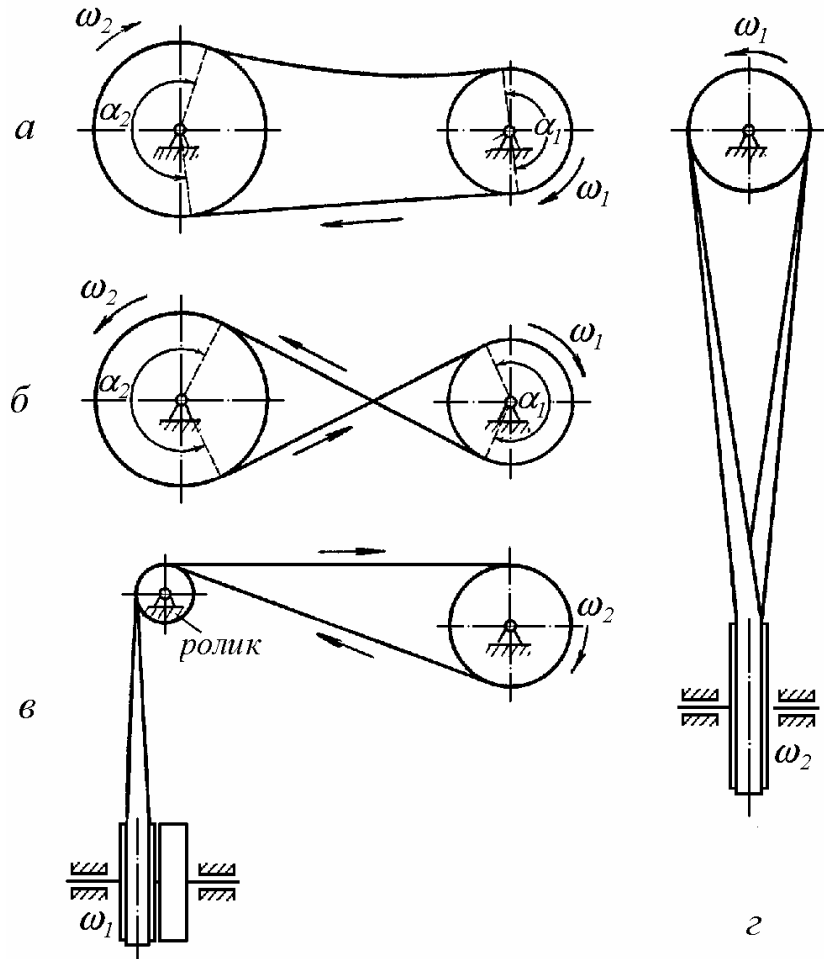


Рис. 3.23

Залежно від призначення передачі та взаємного розміщення осей валів пасові передачі класифікують на *відкриті* з паралельними осями валів і обертанням їхніх шківів в одному напрямі (рис. 3.23, а); *перехресні* з паралельними осями валів і обертанням шківів у протилежних напрямках (рис. 3.23, б); *кутові* з осями валів, які схрещуються або перехрещуються (рис. 3.23, в); *напівперехресні* з перехресними осями валів (рис. 3.23, г).

Залежно від форми поперечного перерізу паса розрізняють наступні види пасових передач: *плоскопасові* з прямокутним профілем поперечного перерізу паса (рис. 3.24, а); *клинопасові* з трапецієвидним профілем поперечного перерізу паса (рис. 3.24, б); *поліклинопасові*, що мають поздовжні клинові виступи – ребра на внутрішній поверхні паса, які

входять у кільцеві клинові канавки шківів(рис. 3.24, в); *круглопасові* з круглим профілем поперечного перерізу паса (рис. 3.24, г).

Крім названих видів пасових передач у машинобудуванні також широко застосовують передачі із *зубчастими пасами* (рис. 3.24, д), які забезпечують постійне значення передаточного відношення і добру тягову здатність.

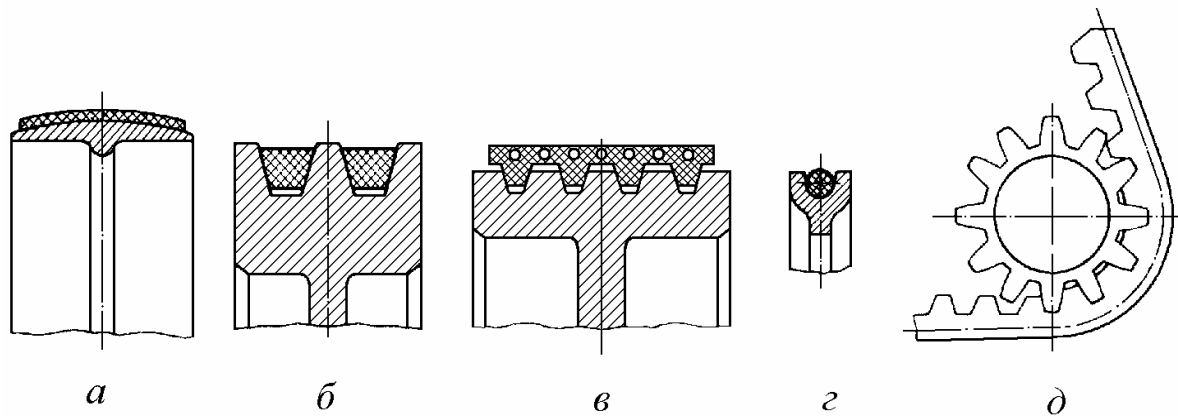


Рис. 3.24

Найбільшого поширення набули відкриті плоско – і клинопасові передачі (клинові, поліклинові зубчасті паси можна застосовувати тільки у відкритих передачах).

*Переваги пасових передач:*

- можливість передавання енергії на значні відстані:  $a_{max} = 12...25$  м плоскими пасами і  $a_{max} = 6,0$  м клиновими пасами;
- простота і низька вартість конструкції;
- плавність і безшумність ходу, здатність пом'якшувати удари завдяки еластичності паса і захищати механізм від руйнування при буксуванні і перевантаженні;
- можливість передавати потужності до  $50$  кВт ( рідко до  $300$  кВт) при коловій швидкості до  $30$  м/с ;
- простота обслуговування і догляду.

*Недоліки пасових передач.*

- нестале передаточне відношення, яке змінюється залежно від навантаження внаслідок пружного ковзання;
- відносно великі габарити передачі і невисока довговічність паса (особливо у швидкохідних передачах);
- витягування паса в процесі експлуатації передачі приводить до необхідності застосування додаткових натяжних пристроїв або до частого перешивання плоского паса;
- неможливість застосування у вибухонебезпечних приміщеннях

### **Частина третя**

---

внаслідок електризації паса;

– великі навантаження на вали та їх опори (підшипники);

Незважаючи на ці недоліки, пасові передачі широко використовуються в промисловості і народному господарстві. У будь-якій галузі машинобудування і приладобудування можна зустріти плоскопасову або клинопасову передачу: приводи насосів, вентиляторів, транспортерів, приводи комбайнів та інших сільськогосподарських машин; приводи машин у текстильній, автомобільній, тракторній, хімічній, нафтовій та інших галузях промисловості.

*Плоскопасові передачі* рекомендується застосовувати при високих колових швидкостях, великих міжосьових відстанях та підвищених вимогах до плавності і еластичності роботи передачі.

*Клинопасові і поліклинопасові* передачі застосовують при порівняно великих передаточних відношеннях, вертикальному і похилому розташуванні паралельних осей валів, потребі у малогабаритності передачі і менших навантажень на опори валів, передаванні енергії на кілька валів.

*Круглопасові передачі* призначені в основному для передавання малих потужностей і тому менше поширені (швейні машини, радіоапаратура, прилади, настільні верстати, машини домашнього вжитку).

Тяговим елементом пасових передач є пас, від якості якого залежать довговічність і нормальна робота передачі.

До нього ставляться наступні вимоги: достатня міцність, надійність і довговічність, невисока вартість матеріалу паса, висока тягова здатність та еластичність, відносно високий коефіцієнт тертя між пасом і шківом.

*Плоскі приводні паси* мають прямокутний поперечний переріз і являють собою гнучку скінчену або рідше безконечну стрічку з прогумованої бавовняної тканини або шкіри.

*Шкіряні паси* мають високу тягову здатність, пружність і еластичність, але мають також високу вартість.

*Зубчасті паси* можуть передавати енергію при незмінному передаточному відношенні з високими коловими швидкостями. Ці паси виготовляють з армованого металевим тросом неопрену, значно рідше використовують пластмасу (поліуретан). Для використання в кінематичних механізмах верстатів їх каркас виготовляють із скловолокна або поліамідного шнура.

У *поліклинових пасах* несучий шар виготовляють у вигляді корд-шнура з хімічних волокон (віскоза, лавсан, скловолокно). Ці паси поєднують достоїнства плоских пасів — монолітність і гнучкість і клинових — підвищене зчеплення з шківом.

Роботоздатність і довговічність пасів залежать від якості тканини, кордної нитки, поліамідних смол і каучуку. Застосування синтетичних матеріалів і сталених тросів істотно збільшує міцність і довговічність



пасів. Нові *плівкові паси*, що виготовляються із пластмас на основі поліамідних смол, армованих кордом з капрону або лавсану, мають високу статичну міцність і міцність на втомленість.

*Кордтканинні або кординурові клинові паси* загального призначення стандартизовані і використовуються для вентиляторів автомобілів, тракторів і комбайнів.

*Гумотканинні паси* при постійних навантаженнях мають добру тягову здатність і пружність при відносно низькій вартості. Тому вони дуже поширені і працюють у широкому діапазоні потужностей (до 50 кВт) зі значними швидкостями (до 30 м/с).

*Шківні пасових передач* виготовляють із сталі при  $v \geq 30$  м/с або із чавуну при менших швидкостях. У швидкохідних передачах рекомендується застосовувати шківні із алюмінієвих сплавів. Найпоширенішим матеріалом для виготовлення шківів являється сірий чавун СЧ 12-28 при  $v \leq 25$  м/с, СЧ 15-32 і СЧ 21-40 при  $v \leq 30$  м/с.

Розглянемо кінематичні і силові співвідношення у пасових передачах.

На рис. 3.25 представлена схема відкритої передачі, яка складається із двох шківів і плоского паса. Частина паса, що набігає на ведучій шків називається *ведучою* (в даному випадку – нижня), а та, що набігає на ведений шків – *веденою*.

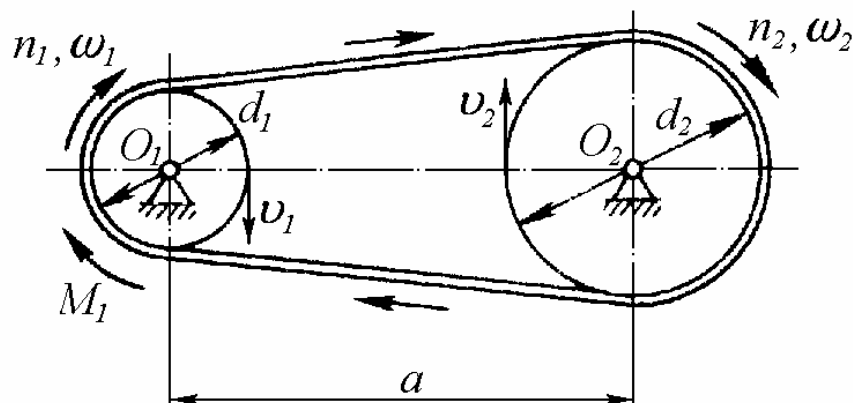


Рис. 3.25

Довжина паса (довжина гнучкої нерозтяжної нитки) визначається за формулою:

$$L \approx 2a + \frac{\pi}{2}(d_2 + d_1) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}. \quad (3.42)$$

### Частина третя

Чим коротшим буде пас, тим частіше він при даній швидкості додатково деформується при огинанні шківів і тим скоріше вийде з ладу внаслідок втомлюваності. Тому міжцентрову відстань вибирають із умови втомної довговічності паса за емпіричною формулою:

$$a \approx (0,1 \dots 0,7)v,$$

або

$$a \geq (1,5 \dots 2,0)(d_1 + d_2).$$

Для визначення передаточного числа треба знати колові швидкості ведучого і веденого шківів, які знаходимо через їх відповідні кутові швидкості  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  і діаметри  $d_1$ ,  $d_2$  шківів:

$$v_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2}$$

$$v_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2}$$

Без пружного ковзання пасу по шківу при однакових лінійних швидкостях шківів ( $v_1 = v_2$ ) передаточне число (передаточне відношення) передачі дорівнює:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \approx \frac{d_2}{d_1}.$$

Пружне ковзання в дійсності зменшує кутову швидкість  $\omega_2$ , і лінійну швидкість  $v_2$  веденого шківа. Це зменшення характеризується *коефіцієнтом пружного ковзання*, який залежить від конструкції передачі, навантаження, матеріалів і приймається в межах  $\varepsilon = 0,01 \dots 0,03$ .

Враховуючи ковзання, можна записати:

$$v_2 = (1 - \varepsilon)v_1$$

а передаточне число буде дорівнювати:

$$u = \frac{d_2}{d_1(1 - \varepsilon)}. \quad (3.43)$$

Найменший кут обхвату (кут обхвату малого шківа) визначається співвідношенням:

$$\alpha_1 = 180^\circ - 57^\circ \frac{d_2 - d_1}{a}.$$

Для плоскопасових передач рекомендовано  $\alpha_1 \geq 150^\circ$ , а для клинопасових  $\alpha_1 \geq 120^\circ$ . Якщо  $\alpha_1$  виявиться меншим від рекомендованих значень, треба збільшити міжосьову відстань або встановити натяжний ролик.

Необхідну силу тертя між пасом і шківками, яка забезпечує передачу

потрібного (заданого) моменту, досягають попереднім (початковим) натягом паси. При цьому у гілках непрацюючого паси виникає сила  $F_0$  (рис. 3.26, а). Такі самі сили діють і при холостому ході передачі.

При роботі (навантаженні) пасової передачі, тобто при прикладенні до ведучого вала обертаючого моменту  $M_1$ , а до веденого вала моменту опору  $M'_2$ , який направлений протилежно напрямку  $\omega_2$ , сила натягу ведучої частини паси збільшується до значення  $F_1$ , а веденої – зменшується до значення  $F_2$  (рис. 3.26, б).

При цьому колова сила пасової передачі дорівнює:

$$F_t = \frac{2M_1}{d_1}$$

Із умови рівноваги (при  $\omega_1 = const$ ) ведучого шківів:

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad F_1 \frac{d_1}{2} - F_2 \frac{d_1}{2} - M_1 = 0,$$

звідки

$$F_1 - F_2 = \frac{2M_1}{d_1} = F_t. \quad (3.44)$$

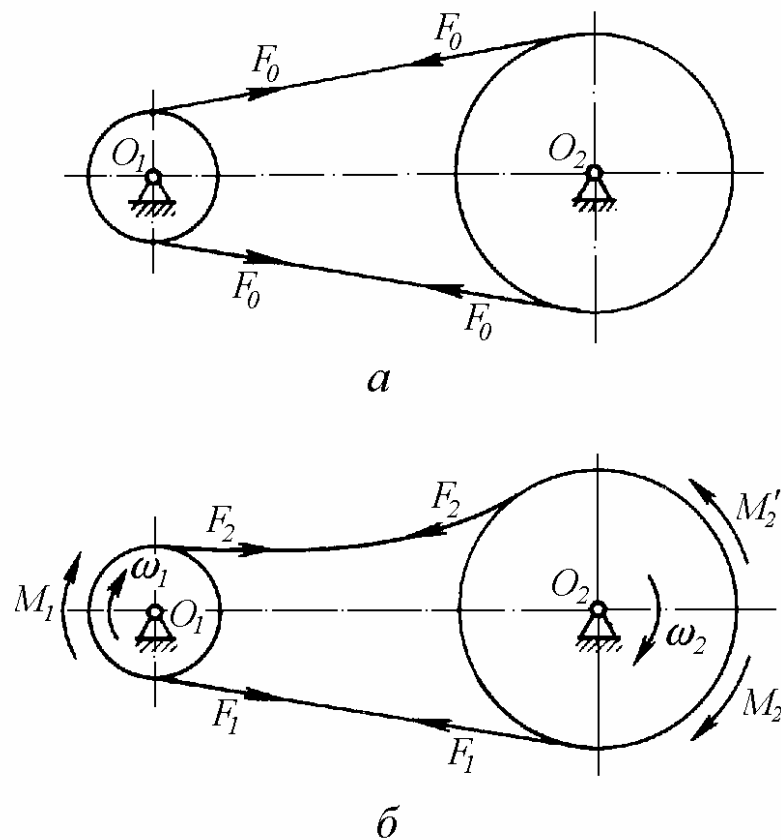


Рис. 3.26

### Частина третя

Таким чином, колова сила дорівнює різниці між силами натягу ведучої і веденої частин пасу.

Неоднаковий натяг пасу і є причиною його пружного ковзання, яке характерне для всіх пасових передач (крім зубчастих).

Визначимо напруження, що виникають у пасі під час роботи передачі. Ці напруження обумовлені згином пасу при набіганні на шків, дією відцентрових сил і сил розтягу.

Нормальні напруження від розтягу пасу:

$$\sigma_l = \frac{F_l}{A} = \frac{F_l}{\delta b},$$

де  $F_l$  – сила розтягу ведучої частини пасу;

$A = \delta b$  – площа поперечного перерізу пасу:

$\delta$  – товщина пасу;

$b$  – ширина пасу.

Нормальні напруження згину в місці набігання пасу на менший шків (ведучій шків діаметром  $d_1$ ):

$$\sigma_{зг} = \frac{E\delta}{d_1},$$

де  $E$  – модуль поздовжньої пружності пасу.

Нормальні напруження від дії відцентрових сил:

$$\sigma_v = q_0 v^2,$$

де  $q$  – густина пасу (маса  $1\text{ м}$  пасу із площею перерізу  $1\text{ м}^2$ ).

Максимальні напруження виникають у місці набігання пасу на шків меншого діаметру і дорівнюють:

$$\sigma_{max} = \sigma_l + \sigma_{зг} + \sigma_v = \frac{F_l}{\delta b} + \frac{E\delta}{d_1} + q_0 v^2. \quad (3.45)$$

Треба зауважити, що основним методом розрахунку пасових передач (крім зубчастих) є не розрахунок пасу на міцність по максимальним напруженням, а розрахунок передачі за тяговою здатністю, який забезпечує високий ККД передачі при достатній довговічності пасу. При цьому виходять із того, що пасова передача повинна передавати максимально можливе колове зусилля без буксування. На відміну від пружного ковзання, яке є нормальним і закономірним явищем пасових передач, буксування є наслідком перевантаження і вважається неприпустимим.

Але із збільшенням  $F_l$  зростає і ковзання, яке може перерости в буксування, тому що збільшується різниця між силами натягу ведучої і

веденої частини пасу ( $F_t = F_1 - F_2$ ). Провівши заміри  $F_t$  і  $\varepsilon$ , можна отримати їх графічну залежність і визначити критичну точку початку буксування.

При цьому на практиці зручніше користуватися залежністю між корисним напруженням  $k_0 = \frac{F_t}{A}$  (тобто зусиллям  $F_t$ , що приходить на одиницю площі перерізу пасу) і коефіцієнтом ковзання  $\varepsilon$ , яка називається *кривою ковзання*. Такі криві, отримані експериментально для різних пасів, являються характеристикою їх тягової здатності і є критерієм працездатності пасових передач із тертям.

### **3.3.3. Ланцюгові передачі**

Передача руху між двома або кількома паралельними валами, що здійснюється зачепленням за допомогою гнучкого нескінченного ланцюга і зірочок, називається *ланцюговою*.

У машинобудуванні і народному господарстві існують наступні види ланцюгів: *вантажні*, які застосовуються для підвішування, піднімання і опускання вантажу в різних підійомно – транспортних механізмах при швидкостях, які не перевищують  $0,25...0,5$  м/с; *тягові*, які застосовуються для транспортування вантажів (транспортери, елеватори, ескалатори) при невеликих лінійних швидкостях – до  $2...4$  м/с; *приводні*, що використовуються для передавання енергії в широкому діапазоні швидкостей з сталим передаточним відношенням.

Далі будемо розглядати тільки приводні ланцюги (рис. 3.27).

Приводні ланцюги — роликові, втулкові і зубчасті – застосовують у велосипедах, мотоциклах, сільськогосподарських машинах, верстатах, транспортерах, комбайнах, приводах допоміжного механізму прокатного устаткування, приводах підійомно – транспортних машин і т. ін.

*Переваги ланцюгових передач:*

- можливість передавати потужності на значні відстані ( $a \leq 8$  м) при передаточному відношенні  $i \leq 6$ ;
- порівняно невеликі (менші, ніж у фрикційних і пасових передачах) навантаження на вали та їх опори;
- великий діапазон потужностей: від часток кіловата до сотень кіловат (відомі передачі потужністю до 4000 кВт) і великий діапазон швидкостей: від часток м/с до  $30...35$  м/с; роликові втулкові ланцюги допускають швидкість до  $10... 15$  м/с;
- можливість передавати рух одним ланцюгом кільком валам із однаковим або протилежним напрямом обертання;
- високий ККД:  $\eta = 0,94...0,98$  (при передаванні повної потужності, старанному догляді і доброму мащенні).

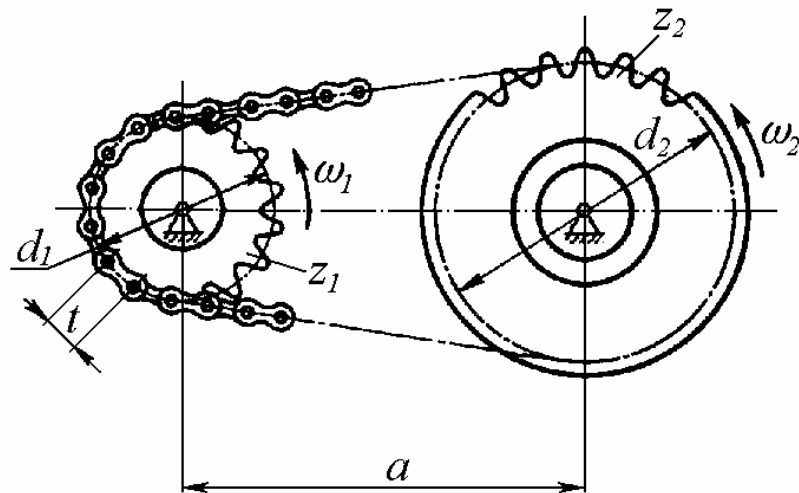


Рис. 3.27

*Недоліки ланцюгових передач:*

- ланцюгові передачі дорожчі, потребують вищої точності встановлення валів, ніж пасові передачі, і складнішого догляду – мащення, регулювання;
- складність мащення шарнірів збільшує їх спрацювання, внаслідок чого ланцюг витягується і потребує встановлення натяжних пристроїв, строк служби передачі скорочується;
- основною причиною спрацювання шарнірів (крім недостатнього мащення), шуму, додаткових динамічних навантажень і нерівномірності обертання веденої системи є те, що ланцюг складається з окремих ланок, розташованих на зірочках не по дугах кіл, а по ламаних лініях.

Ланцюгові передачі складаються із ланцюга і зірочок.

*Роликові ланцюги* (рис. 3.28, а) виготовляють одно – і багаторядними. Звичайні однорядні роликові ланцюги мають по два ряди зовнішніх і внутрішніх пластин. На вісь, що зароблена у зовнішні пластини, надіта втулка, яка запресована у внутрішні пластини. На втулку насаджений ролик, який вільно обертається і перекочується по зубцям зірочки.

*Втулкові ланцюги* (рис. 3.28, б) відрізняються від розглянутих тим, що в них немає роликів, тому зносостійкість їх нижча.

Втулкові і роликові ланцюги малих кроків і високої якості виготовлення (ланцюги для нафтової промисловості) при великій кількості зубів зірочок і доброму мащенні допускають швидкість 15...30 м/с. Втулкові ланцюги також установлюються у двигунах автомобілів і працюють при швидкості до 20 м/с.

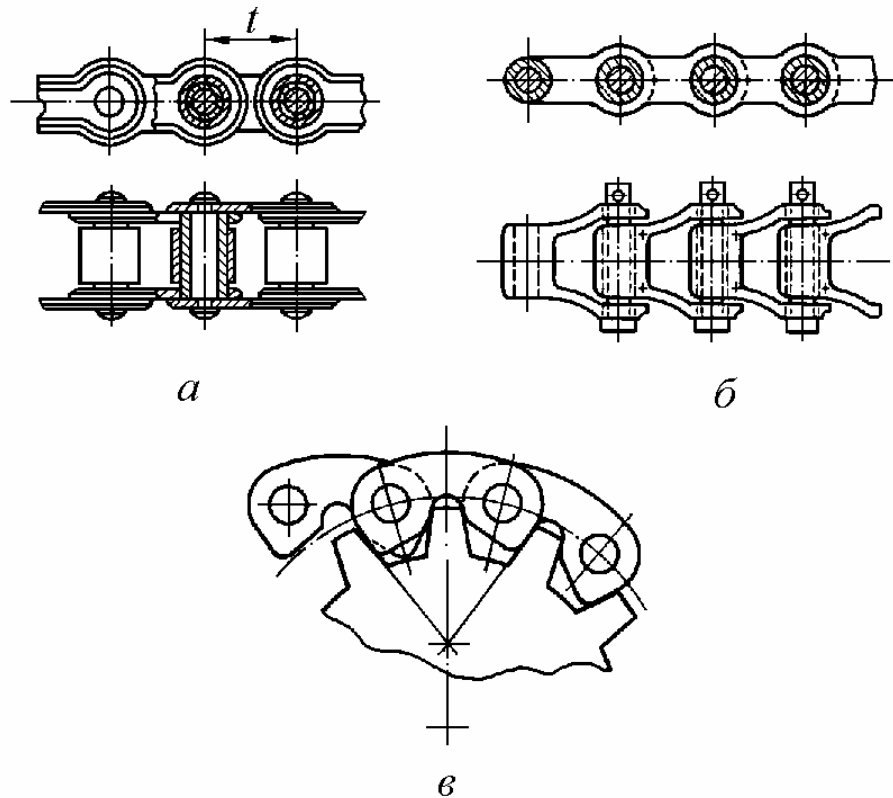


Рис. 3.28

Зубчасті ланцюги (рис. 3.28, в) застосовують при значних швидкостях – до 25...35 м/с, вони працюють плавно із меншим шумом, менше витягуються, однак важкі і дорогі. Ланцюг складається із набору шарнірно з'єднаних зубчастих пластин особливого профілю, який відповідає профілю зубів зірочки.

Для роликівих і втулкових ланцюгів виготовляють зірочки із робочим профілем зуба, окресленого дугою відповідного кола (рис. 3.27). Для зубчастих ланцюгів профілі зубів більш складні і мають прямолінійну робочу ділянку (рис. 3.28, в).

Конструктивні розміри і форма зірочок залежать від параметрів вибраного ланцюга та передаточного відношення, яке лімітує кількість зубів меншої зірочки. Мінімальне число зубів для роликівих і втулкових ланцюгів  $z_{min} = 13$ , для зубчастих ланцюгів –  $z_{min} = 17$ . Правильний вибір профілю і числа зубів меншої (ведучої) зірочки впливає на працездатність і надійність ланцюгової передачі.

Для виготовлення ланцюгових передач використовують вуглецеві (сталь 10, 15, 40, 45, 50) і леговані (сталь 15Х, 15ХА, 12ХНЗА, 20Х, 40Х, 40ХН) термооброблені сталі.

Передаточне число (передаточне відношення) ланцюгової передачі

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

### Частина третя

де  $\omega_1, \omega_2, n_1, n_2$  – кутові швидкості і частота обертання відповідно ведучого і веденого вала;

$z_1, z_2$  – число зубів ведучої і веденої зірочок.

Треба зауважити, що передаточне число (передаточне відношення) ланцюгової передачі за один оберт ведучої зірочки не лишається сталою величиною, тобто відбувається коливання кутової швидкості веденої ланки. Сталим можна рахувати тільки середнє значення  $u$ .

Основним геометричним параметром ланцюга є його крок  $t$  – відстань між однойменними точками двох сусідніх ланок ланцюга (рис. 3.28, а). Номінальне значення кроку ланцюгової передачі визначається із розрахунку на зносостійкість по величині тиску в шарнірах ланцюга.

Формула проектного розрахунку кроку  $t$ , мм має вигляд:  
для втулкових і роликкових ланцюгів

$$t = 2,83 \sqrt{\frac{M_1 k}{z_1 [p] m}},$$

для зубчастих ланцюгів

$$t = 3,33 \sqrt{\frac{M_1 k}{z_1 [p] \psi_t}},$$

де  $M_1$  – обертальний момент на ведучому валу,  $H \cdot \text{мм}$ ;

$k$  – коефіцієнт навантаження;

$[p]$  – допустимий тиск в шарнірах,  $\text{МПа}$ ;

$m$  – число рядів ланцюга;

$\psi_t = 2 \dots 8$  – коефіцієнт ширини  $b$  ланцюга ( $\psi_t = b/t$ ).

Коефіцієнт навантаження  $k$  дорівнює добутку трьох коефіцієнтів:

$$k = k_1 k_2 k_3,$$

де  $k_1 = 1 \dots 1,4$ ,  $k_2 = 1 \dots 1,5$ ,  $k_3 = 1 \dots 1,45$  – межі значень коефіцієнтів, які відповідно враховують характер навантаження, засоби мащення і середню тривалість роботи ланцюга за робочий день:

Отримане значення кроку округляється до найближчого стандартного (бажано меншого) значення.

Міжосьова відстань вибирається в межах  $a = (30 \dots 50)t$  при максимальному значенні  $a_{\text{max}} = 80t$ .

Кількість ланок ланцюга визначається за формулою:

$$L_t = 2 \frac{a}{t} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \left( \frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{a}, \quad (3.46)$$

де  $L = t L_t$  – довжина ланцюга.



Лінійна (колова швидкість,  $m/s$ ) ланцюга визначається як:

$$v = \frac{t z_1 n_1}{60 \cdot 1000}.$$

Вибрані ланцюги перевіряють на зносостійкість по допустимому тиску у шарнірах  $[p]$ :

$$p = \frac{F_t k}{A} \leq [p], \quad (3.47)$$

де  $p$  – фактичний тиск у шарнірах ланцюга,  $F_t = \frac{N_1}{v}$  – колове зусилля, що передається ланцюгом,  $N_1$  – потужність передачі,  $k$  – коефіцієнт навантаження,  $A$  – площа проекції опорної поверхні шарніра ( $A = db$  – для втулкових і роликів ланцюгів,  $A = 0,76 db$  – для зубчастих ланцюгів,  $d$  – діаметр осі шарніра,  $b$  – ширина ланцюга).

---

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають механічною передачею?
2. Дайте основну класифікацію передач.
3. Якими основними параметрами характеризується передачі?
4. Чим передаточне число відрізняється від передаточного відношення?
5. Напишіть формулу визначення передаточного числа і ККД багатоступінчастої передачі із послідовно з'єднаними ланками.
6. Дайте визначення фрикційної передачі.
7. Які основні переваги і недоліки фрикційних передач?
8. Напишіть формулу Герца – Беляєва і поясніть її призначення..
9. Дайте визначення пасової передачі і основну класифікацію.
10. Які переваги і недоліки пасових передач?
11. Назвіть основні типи пасових передач за формою поперечного перерізу паса і галузь їх застосування.
12. Поясніть причину виникнення пружного ковзання в пасовій передачі.
13. Як визначити максимальні нормальні напруження в поперечному перерізі паса навантаженої пасової передачі?
14. Що таке тягова здатність пасової передачі?
15. Дайте визначення ланцюгової передачі і основну класифікацію.
16. Які основні переваги і недоліки ланцюгових передач?
17. Назвіть основні типи ланцюгів і галузь їх застосування.
18. Як розраховують ланцюгові передачі?

### 3.4. Зубчасті передачі. Загальні відомості

Механізм, призначений для передавання (перетворення) обертального руху за допомогою пари зубчастих коліс (колеса і рейки), що перебувають у зачепленні, називають *зубчастою передачею*. Зубчасті передачі можуть бути із зовнішнім і внутрішнім зачепленням (рис. 3.29, г). Найбільше розповсюджені передачі із зовнішнім зачепленням.

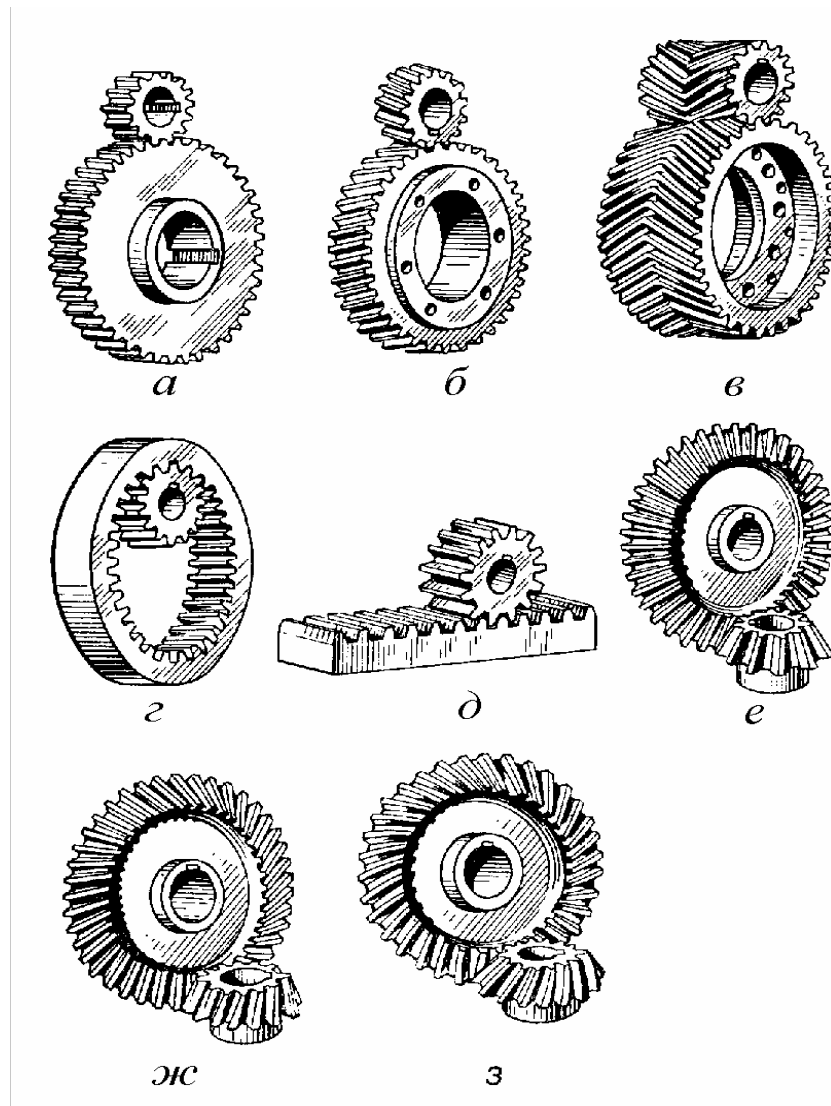


Рис. 3.29

*Переваги зубчастих передач:*

- широкий діапазон робочих потужностей (до 50 000 кВт і більше) і колових швидкостей (до 30... 150 м/с);
- стала величина передаточного відношення (за винятком спеціальних передач із некруглими зубчастими колесами);
- компактність, надійність і висока втомна довговічність передачі;

- високий ККД ( $\eta = 0,96...0,99$ ) при високій точності виготовлення та монтажу, низькій шорсткості робочої поверхні зубів і рідкому мастилі;
- простота обслуговування та догляду;
- порівняно невеликі сили тиску на вали та їх опори.

*Недоліки зубчастих передач:*

- обмеженість передаточного відношення (для однієї пари зубчастих коліс  $i_{max} = 12,5$ , а практично  $i \leq 7$ , лише у відкритих тихохідних передачах невеликої потужності  $i \leq 20$ );
- є джерелом вібрації і шуму, особливо при низькій якості виготовлення і монтажу та значних швидкостях;
- при великих перевантаженнях можливе зруйнування, тому що пробуксовування виключено.
- відносна складність виготовлення високоточних зубчастих коліс.

Зубчасті передачі є найбільш поширеними типами механічних передач і широко застосовуються у будь-якій галузі машинобудування, приладобудування, у транспорті і зв'язку. Їх використовують в автомобілях, тракторах, літаках, верстатах, електрорічильниках, годинниках, вимірювальних приладах і т. д.

*Зубчасті передачі класифікують:*

а) за конструктивним оформленням: *відкриті*, що не мають захисного кожуха і масляної ванни; *напіввідкриті*, які мають захисний кожух; *закриті*, що мають картер і кришку, яка добре ізолює передачу від зовнішнього середовища (редуктори, коробки передач тощо);

б) за коловою швидкістю: *тихохідні* ( $v_{max} = 3...4 \text{ м/с}$ ); *середньошвидкісні* ( $4 \text{ м/с} \leq v \leq 15 \text{ м/с}$ ); *високошвидкісні* ( $v \geq 15 \text{ м/с}$ );

в) за взаємним розташуванням осей валів: із паралельними осями валів — *циліндричні* (рис. 3.29, а, б, в, г); із осями валів, що перетинаються,— *конічні* (рис. 3.29, е, ж); із осями валів, що перехрещуються, — *гвинтові, гіпоїдні* (рис. 3.29, з).

г) за розташуванням зубів на твірній поверхні колеса: *прямозубі* (рис. 3.29, а, г, е), *косозубі* (рис. 3.29, б, ж), *шевронні* (рис. 3.29, в), *із криволінійними зубами* (рис. 3.29, з).

є) за формою профілю зуба: *евольвентні*, із зачепленням *Новикова, циклоїдальні*.

Для перетворення обертального руху у поступальний або навпаки застосовується рейкова передача (рис. 3.29, д), яка є особливим випадком циліндричної зубчастої передачі. Рейка розглядається як колесо, радіус якого дорівнює нескінченності.

Елементи зачеплення двох евольвентних зубчастих коліс.

Найбільшого поширення у сучасному машинобудуванні набули зубчасті колеса евольвентного профілю.

### 3.4.1. Елементи теорії зубчастого зачеплення

При обертанні зубчастих коліс неперервне зачеплення із сталим передаточним відношенням можливе тільки в тому разі, якщо профіль зуба окреслений кривою, що підлягає основній теоремі зачеплення.

Для збереження сталого передаточного числа необхідно і достатньо, щоб спільна нормаль  $N-N$  до спряжених профілів зубів у точці їх дотику  $k$  завжди перетинала лінію центрів  $O_1O_2$  ( міжосьову відстань  $a_\omega$  ) у одній і тій же точці  $P$ , яку називають полюсом зачеплення. Ця точка ділить лінію центрів у співвідношенні, яке дорівнює передаточному числу (рис. 3.30).

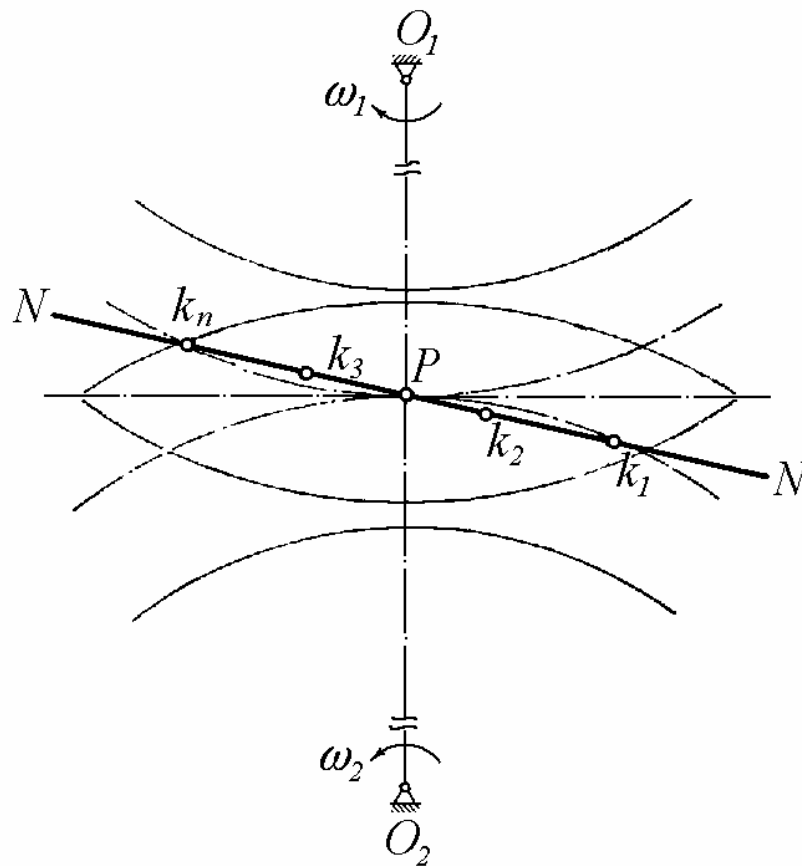


Рис. 3.30

Основному закону зачеплення відповідає багато кривих, але практично (крім окремих випадків) зуби коліс профілюють по евольвенті.

Евольвентою, або розгорткою, кола називають криву  $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$  (рис. 3.31), яку описує люба точка  $A$  прямої  $NN$ , що перекочується без ковзання по нерухомому колу діаметра  $d_b$  в площині кола. Це коло називають основним колом евольвенти  $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ .

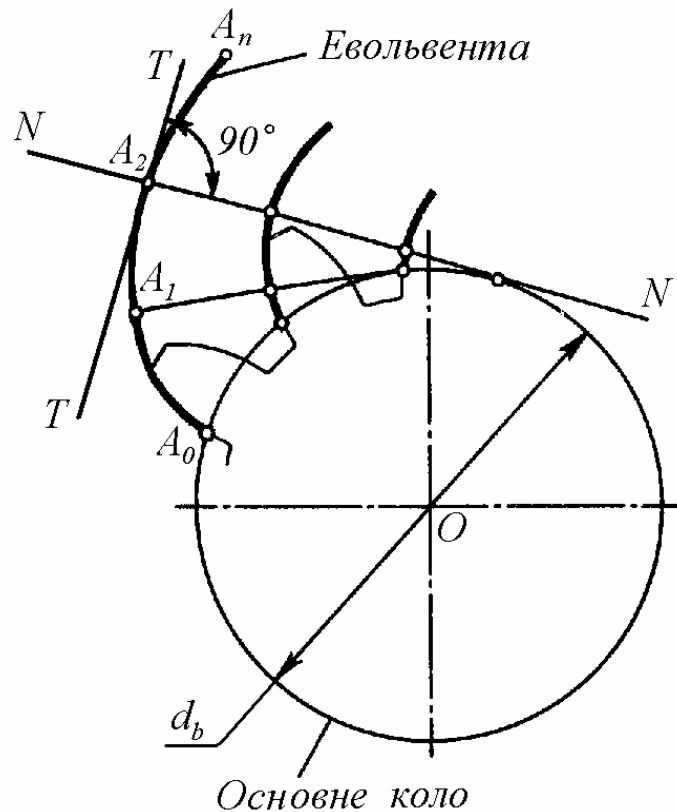


Рис. 3.31

Профілювання бічної поверхні зубів по евольвенті вперше запропонував знаменитий математик Ейлер у 1754 р. При цьому профіль зуба окреслює дві евольвенти – права і ліва, які можна отримати перекочуванням прямої  $NN$  по одному основному колу у протилежних напрямках (рис. 3.31).

Очевидно, що із збільшенням діаметра  $d_b$  основного кола радіуси кривизни евольвенти будуть збільшуватись і при  $d_b \rightarrow \infty$  евольвента перетвориться на пряму. Для рейки із евольвентним зачепленням профіль зуба має бути прямим. Тому зуби, профіль яких окреслений евольвентою, відносно легко, просто і точно можна нарізати на зуборізних верстатах інструментальною рейкою із прямолінійними ріжучими кромками.

На рис. 3.32 показана послідовність контакту точок профілю бічних поверхонь пари спряжених зубів в процесі їх зачеплення. Від початку зачеплення (точка  $k_1$ ) до його кінця (точка  $k_n$ ) всі точки контакту знаходяться на загальній нормалі  $NN$  до профілю бічних поверхонь пари зубів. При цьому положення на лінії центрів  $O_1O_2$  полюса зачеплення  $P$ , через який проходить пряма  $NN$ , лишається незмінним. Тобто, умови

### Частина третя

основної теореми зачеплення виконуються.

Нормаль  $NN$  до спряжених профілів зубів, яка є геометричним місцем їх точок контакту, називають *лінією зачеплення*. Лінія зачеплення одночасно є *лінією тиску* спряжених зубів в процесі передачі руху від одного колеса друге.

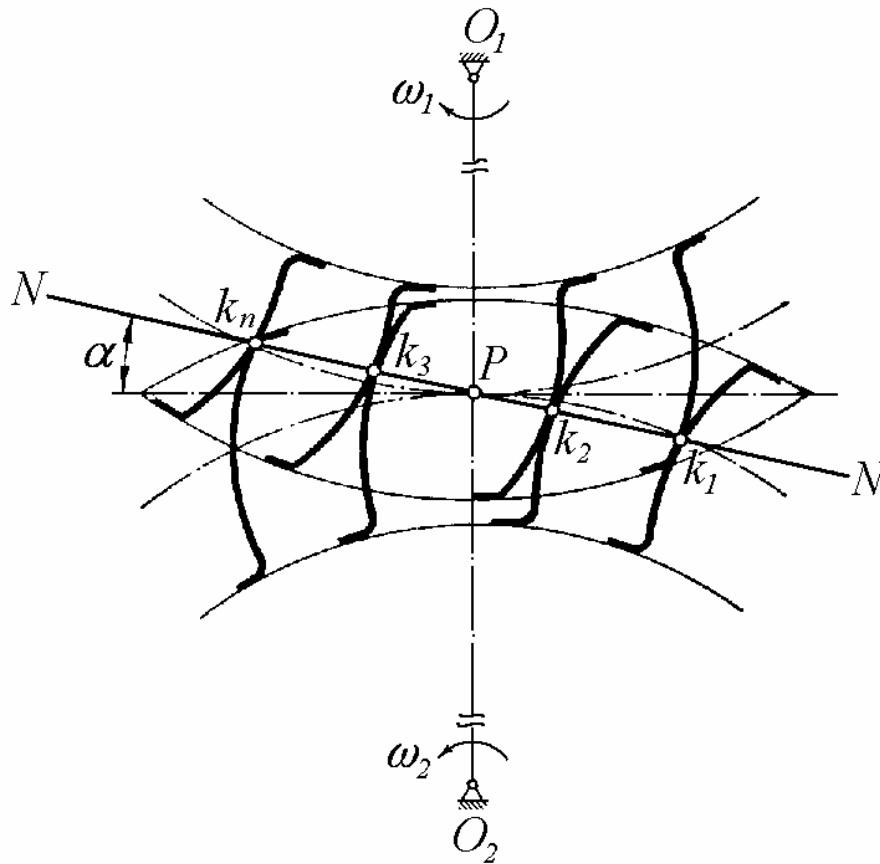


Рис. 3.32

Лінія зачеплення утворює із перпендикуляром до лінії центрів  $O_1O_2$  кут  $\alpha$ , який називається *кутом зачеплення*. Значення кута зачеплення стандартизовано і складає  $\alpha = 20^\circ$ .

Евольвентна система зачеплення забезпечує високу міцність зубів, простоту і зручність вимірювання параметрів зачеплення та взаємозамінність зубчастих коліс при різних передаточних відношеннях.

Зубчасте колесо із меншою кількістю зубів називають шестернею, а з більшим – колесом.

Треба відмітити, що при виготовленні шестерні із мінімальною кількістю зубів, може відбутись підрізання зубів – врізання головки зуба нарізної рейки у ніжку зуба шестерні (рис. 3.33). При цьому значно знижується міцність шестерні. Тому при проектуванні зубчастих передач кількість зубів шестерні приймають не менше ніж  $z_{min} = 17$ .

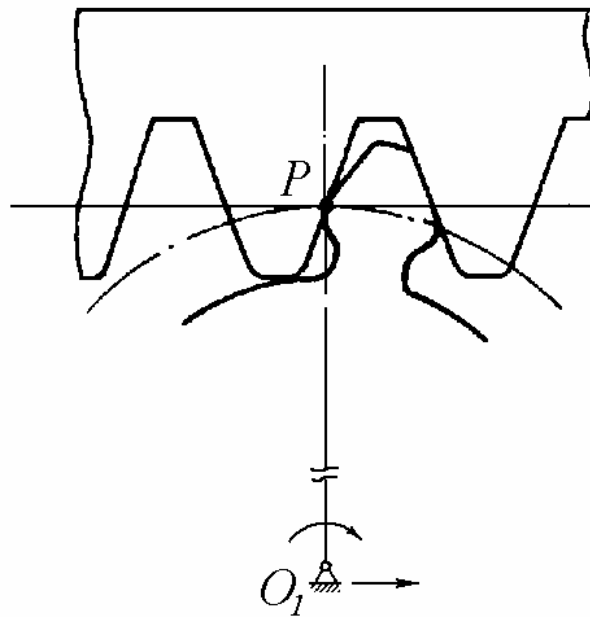


Рис. 3.33

### 3.4.2. Геометрія стандартного евольвентного зубчастого зачеплення

Кола ведучого і веденого зубчастих коліс, що стикаються одне з одним у полюсі зачеплення, мають спільні із зубчастими колесами центри і перекочуються одне по одному без ковзання, називають *початковими* (рис. 3.34). Їх діаметри позначають  $d_{\omega 1}$  і  $d_{\omega 2}$ .

При зміні міжосьової відстані  $a_{\omega} = O_1O_2$  пари зубчастих коліс змінюється і положення полюса зачеплення  $P$  на лінії центрів  $O_1O_2$ , а отже і розмір початкових діаметрів зубчастих коліс. Тобто пара спряжених зубчастих коліс може мати *незліченну кількість початкових кіл*. Таким чином, поняття «початкові кола» стосується тільки пари спряжених зубчастих коліс, а для окремо взятого зубчастого колеса не можна говорити про початкове коло.

Якщо замінити одне з коліс зубчастою рейкою, то для кожного зубчастого колеса знайдеться тільки одне коло, яке котиться по початковій прямій рейки без ковзання. Це коло називають *ділильним*.

Далі розглядаються тільки такі зубчасті передачі, в яких початкові і ділильні кола зубчастих коліс збігаються.

Оскільки у кожного зубчастого колеса є тільки одне ділильне коло, то воно покладене в основу визначення геометричних параметрів коліс





$$L_d = \pi d = p z,$$

де  $z$  – число зубів колеса.

Звідки діаметр ділительного кола можна визначити як:

$$d = \frac{p}{\pi} z = m_t z, \quad (3.47)$$

де  $m_t = \frac{p}{\pi}$  – коловий модуль зубів (для прямозубих коліс  $m_t = m$ ).

Коловий модуль зубів  $m$  є основним параметром зубчастої передачі, – це частина ділительного кола, що припадає на один зуб колеса. Значення модуля зубів стандартизовані.

Коло, яке обмежує висоту зубів, називають *колом вершин (виступів) зубчастого колеса*  $d_a$ . Коло, яке обмежує западини зубів, називають *колом западин* зубчастого колеса  $d_f$ .

Частина профілю зуба, яка обмежена ділительним колом і колом виступів, називається *головкою зуба*. Згідно стандарту висота головки зуба  $h_a$  дорівнює коловому модулю:

$$h_a = m. \quad (3.48)$$

Частина профілю зуба, обмежена ділительним колом і колом западин, називається *ніжкою зуба*. Висота ніжки зуба  $h_f$  приймається:

$$h_f = 1,25m. \quad (3.49)$$

Тоді висота зуба визначається як:

$$h = h_a + h_f = m + 1,25m = 2,25m. \quad (3.50)$$

Різниця у висоті ніжки зуба одного колеса і висоті головки другого необхідна для утворення радіального зазору

$$c = h_f - h_a = 0,25m. \quad (3.51)$$

Діаметр кола виступів і западин відповідно дорівнює

$$d_a = d + 2h_a = zm + 2m = m(z + 2). \quad (3.52)$$

$$d_f = d - 2h_f = zm - 2,5m = m(z - 2,5). \quad (3.53)$$

Міжцентрова (міжосьова) відстань двох зубчатих коліс у зачепленні дорівнює:

$$a_w = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{z_1 m}{2} + \frac{z_2 m}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}. \quad (3.54)$$

Відрізок  $A_1A_2$  лінії зачеплення, який обмежений колами виступів

### **Частина третя**

шестірні і колеса, називається активною частиною лінії зачеплення або *довжиною зачеплення*. Довжина зачеплення визначає початок і кінець зачеплення пари спряжених зубів.

Шлях, що його проходить точка профілю зуба по ділильному (початковому) колу за час його фактичного зачеплення, називається *дугою зачеплення*  $S$ . Для неперервної нормальної роботи зубчастої передачі потрібно, щоб довжина зачеплення була більшою від колового кроку  $p$ .

Відношення дуги зачеплення  $S$  до колового кроку  $p$  називається *коефіцієнтом перекриття*

$$\varepsilon = \frac{S}{p}. \quad (3.55)$$

Коефіцієнт перекриття характеризує середню кількість пар зубів, що одночасно перебуває у зачепленні. При  $\varepsilon \leq 1$  передача нормально працювати не буде, оскільки при виході із зачеплення однієї пари зубів інша пара не потрапляє на лінію зачеплення і неперервність обертання зубчастих коліс порушується. Якщо  $\varepsilon > 1$ , то до виходу із зачеплення однієї пари зубів до лінії зачеплення підходить інша пара зубів — це і забезпечує неперервність зачеплення і плавність ходу передачі.

Для циліндричних зубчастих передач приймають  $\varepsilon \geq 1,2$ .

#### **3.4.3. Виготовлення зубчастих коліс і види їх руйнування**

Зуби коліс нарізують на фрезерних або спеціальних зуборізних верстатах. Є два основні способи нарізування зубів: *копіювання*, що здійснюється на фрезерних верстатах за допомогою дискової або пальцевої фрез, ріжучі кромки яких мають профіль, що відповідає профілеві западини зуба; *обкатка*, яка здійснюється на зубофрезерних або зубостругальних верстатах за допомогою відповідного різального інструменту – черв'ячної фрези, довбача, інструментальної рейки – гребінки, які перебувають у неперервному зачепленні із заготовкою на всій стадії нарізування зубів. Спосіб обкатки забезпечує високу продуктивність і достатню точність виготовлення зубчастих коліс.

Шевронні колеса виготовляти складніше, і вони дорожчі від прямозубих і косозубих.

Зубчасті колеса виготовляють з вуглецевої сталі (Ст5, Ст6, сталь 35; 45; 50; 50Г), легованої сталі (12ХН3; 15Х; 20Х; 35Х), сталюого литва (35Л; 45Л; 55Л), чавуну (СЧ 15-32; СЧ 18-36; СЧ 21-40), неметалевих матеріалів (пластик, капрон). Чавунні зубчасті колеса застосовують у тихохідних передачах. Зубчасті колеса з неметалевих матеріалів працюють у парі з металевими і їх застосовують для зниження шуму швидкохідних передач невеликих потужностей.

До матеріалів, які застосовують для виготовлення зубчастих коліс, ставлять вимоги достатньої загальної і поверхневої міцності, твердості, опору проти втомлюваності зубів при згинанні, стійкості проти абразивного спрацювання і заїдання. Ці вимоги найкраще задовольняють термічно або термохімічно оброблені сталі.

При неточному розрахунку, вадах конструкції, великих перевантаженнях, недбалості монтажу або порушенні правил нормальної експлуатації передачі можливі поломки зубів, викришування, заїдання і передчасне спрацювання робочих поверхонь зубів.

Існують наступні види руйнування і пошкодження зубів.

*Поломка* зубів призводить не тільки до виходу із ладу передачі, а і до пошкодження підшипників, валів тощо. Причини поломки зубів: великі перевантаження ударної або статичної дії або перевантаження, що багаторазово повторюються і ведуть до втомленості матеріалу.

Щоб запобігти поломкам, зуби розраховують на згин.

*Викришування від втомленості* поверхневих шарів зубів є дуже небезпечним і найпоширенішим видом пошкодження зубів для більшості закритих, добре змащуваних і надійно захищених від забруднень зубчастих коліс. Викришування полягає в появі на активних поверхнях невеликих заглиблень і має характер втомленості. Викришування починається поблизу полюсної лінії на ніжках зубів, де виникають великі сили тертя і поступово поширюється на всю поверхню ніжок. Це приводить до підвищення тиску на непошкоджених ділянках поверхні, витискування мастила в ямки і, нарешті, до пластичного деформування або заїдання. Щоб запобігти викришуванню, зуби розраховують на контактну витривалість.

*Заїдання* є наслідком роздавлювання масляної плівки в зоні контакту зубів, зчеплення поверхневих частинок матеріалу шестірні і колеса та утворення на поверхні менш міцного зуба ямок при відносному русі зубів. Заїдають більше зуби з незагартованими поверхнями із однорідних матеріалів.

*Спрацювання* відбувається в результаті стирання активних поверхонь зубів внаслідок механічного, молекулярно – механічного і корозійно – механічного спрацювання.

#### **3.4.4. Прямозуба циліндрична передача**

Зубчаста передача, у якій твірні бічних поверхонь зубів паралельні до твірних діляльного циліндра шестерні і колеса, називається *прямозубою циліндричною* (рис. 3.35).

Основні геометричні співвідношення прямозубої циліндричної передачі визначаються за формулами (3.48) – (3.55) стандартного

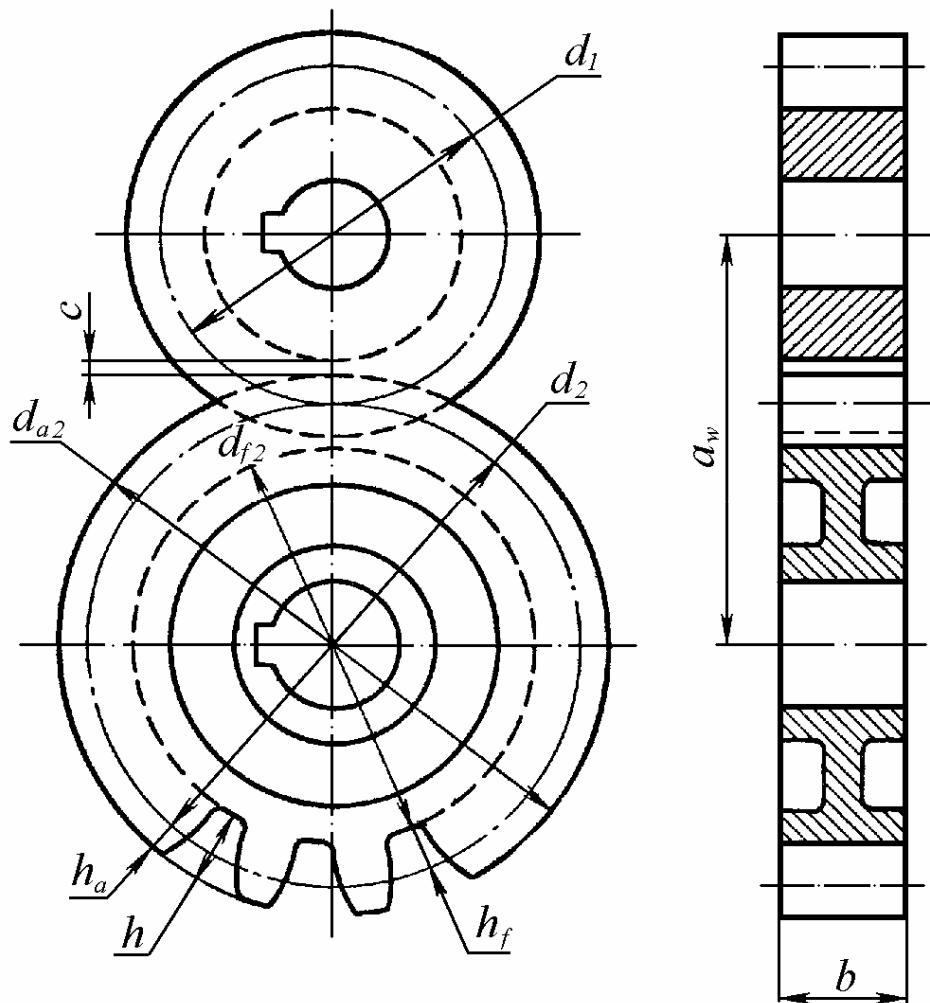


Рис. 3.35

Розглянемо сили, що діють у зачепленні передачі.

При контакті пари зубів у полюсі  $P$  силова взаємодія коліс полягає у передачі по лінії тиску (нормалі  $NN$ ) сили тиску  $F_n$ . При точному виготовленні і монтажі спряжених зубчастих коліс сила  $F_n$  рівномірно розподілена по ширині зубчастого вінця (рис. 3.36).

Перенесемо  $F_n$  по лінії  $NN$  в точку  $O$ , що лежить на осі зуба, і розкладемо за двома напрямками: по дотичній до ділильного кола (колова сила  $F_t$ ) і по нормалі до лінії центрів (радіальна сила  $F_r$ ).

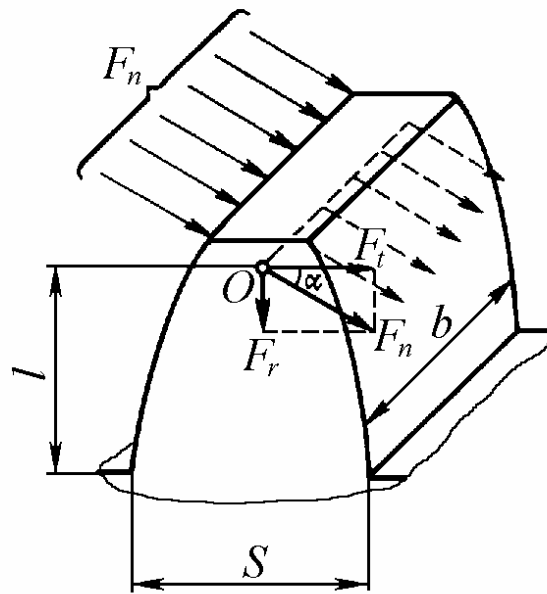


Рис. 3.36

Тоді колова сила, яка згинає зуб дорівнює

$$F_t = F_n \cos \alpha \frac{2M}{d}, \quad (3.56)$$

де  $\alpha = 20^\circ$  – кут зачеплення,  $M$  – обертальний момент, що передається.

Радіальна сила, яка стискує зуб, дорівнює

$$F_r = F_n \sin \alpha = F_t \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.57)$$

Нехтуючи відносно невеликими напруженнями стиску, розглянемо умову міцності зуба при згині.

При цьому зуб можна розглядати як консольну балку із навантаженням на вільному кінці. Тоді умова міцності має вигляд:

$$\sigma_F = \frac{M_{зз} k_\sigma}{W_x} \leq [\sigma_F],$$

де  $\sigma_F$  – напруження згину,  $M_{зз} = F_t l$  – згинаючий момент біля кореня ніжки зуба,  $l$  – плече зуба,  $W_x = \frac{bS^2}{6}$  – осьовий момент опору небезпечного перерізу,  $S$  – товщина зуба.

Застосувавши коефіцієнти  $\mu = \frac{l}{m}$  і  $\gamma = \frac{S}{m}$ , а також коефіцієнт

форми зуба  $Y_F = \frac{6\lambda k_\sigma}{\gamma^2}$  і коефіцієнт навантаження  $K_F$ , отримаємо остаточну формулу перевірного розрахунку на згин прямозубих передач:

$$\sigma_F = \frac{Y_F F_t K_F}{b m} \leq [\sigma_F], \quad (3.58)$$

де  $K_F$  – враховує нерівномірність розподілу навантаження по дожині зуба. Приблизно можна прийняти  $K_F \approx 1,5 \dots 2,0$  в залежності від положення коліс відносно опор, точності, колової швидкості і твердості поверхні зубів.

Із умови міцності (3.58) можна визначити необхідний модуль зубів:

$$m = \frac{Y_F F_t K_F}{b [\sigma_F]}. \quad (3.59)$$

Довжину зубів  $b$  виразимо через модуль  $m$ :

$$b = \psi_b m, \quad (3.60)$$

де  $\psi_b$  – коефіцієнт ширини колеса ( $\psi_b = 6 \dots 25$ ), який залежить від точності виготовлення колеса.

Колову силу виразимо через обертальний момент:

$$F_t = \frac{2 M_1}{d_1} = \frac{2 M_1}{m z_1}.$$

Підставивши значення  $b$  і  $F_t$  у (3.59), отримаємо формулу для проектного розрахунку прямозубої циліндричної передачі:

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{Y_F 2 M_1 K_F}{\psi_b z_1 [\sigma_F]}}, \quad (3.61)$$

де  $[\sigma_F]$  – допустиме напруження згину.

Дані розрахунки на міцність при згині застосовуються для відкритих зубчастих передач із врахуванням їх зносу, припускаючи, що в зачепленні перебуває одна пара зубів і сил тертя немає.

Закриті зубчасті передачі, які працюють у мастильній ванні, розраховують на контактну витривалість. При цьому максимальні контактні напруження визначають за формулою:

$$\sigma_H = z_M z_H z_\varepsilon \sqrt{\frac{2 M_2 K_H (u + 1)}{d_2^2 b}}, \quad (3.62)$$

де  $z_M$ ,  $z_H$ ,  $z_\varepsilon$  – коефіцієнти, які відповідно враховують механічні властивості матеріалів коліс, форму зубів у полюсі зачеплення і ступінь

перекриття,  $M_2$  – обертальний момент на зубчастому колесі,  $d_2$  – діаметр ділильного кола колеса,  $b$  – довжина зуба,  $K_H$  – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу навантаження по довжині зуба.

Для сталених циліндричних зубчастих передач формула для перевірного розрахунку на контактну витривалість має вигляд:

$$\sigma_H = \frac{310}{a_w} \sqrt{\frac{M_2 K_H (u+1)^3}{b_2 u^2}} \leq [\sigma_H], \quad (3.63)$$

звідки можна знайти міжосьову відстань

$$a_w = (u+1) \sqrt[3]{\left(\frac{310}{[\sigma_H] u}\right)^2 \frac{M_2 K_H}{\psi_{ba}}}, \quad (3.64)$$

де  $\psi_{ba} = \frac{b}{a_w}$  – коефіцієнт ширини зуба, який приймають в межах

$\psi_{ba} = 0,125 \dots 0,25$ , коефіцієнт навантаження  $K_H = 1,1 \dots 1,7$ .

Рекомендації по вибору основних параметрів циліндричної прямозубої передачі наступні:

– передаточне число не треба приймати більше ніж  $u = 6$  і як виключення  $u \leq 12,5$ ,

– кількість зубів шестерні бажано вибирати у межах  $z_1 = 17 \dots 30$ .

Більша кількість зубів забезпечує більш плавну роботу і більшу довговічність коліс.

### **3.4.5. Косозубі і шевронні циліндричні передачі**

Зуб прямозубого колеса входить у зачеплення відразу по всій довжині. Тому при значних швидкостях і невисокій точності виготовлення плавність роботи прямозубих передач зменшується. Внаслідок цього при колових швидкостях  $v \geq 6$  м/с краще застосовувати косозубі або шевронні передачі.

Колеса із косими і шевронними зубами (рис. 3.37) мають нахил контактної лінії до основи зуба, потовщення зуба в небезпечному перерізі, більше значення коефіцієнта перекриття і більшу сумарну довжину контактних ліній. Такі передачі міцніші від прямозубих, мають плавний хід внаслідок поступового входу зубів у зачеплення (не відразу по всій довжині, як у прямозубих) і працюють відносно безшумно навіть при високих швидкостях. Недоліком косозубої передачі (рис. 3.37, а) є наявність осьової сили  $F_a$ , яка намагається зсунути колесо вздовж осі вала.

Застосування здвоєних косозубих коліс, зуби яких нахилені в

### Частина третя

протилежні боки (шевронних коліс), усуває осьову силу (рис. 3.37, б, в). Шевронні колеса можуть передавати великі потужності при високих колових швидкостях (до 60...70 м/с) і плавності ходу, а колеса, що мають проточку між половинами зубів (рис. 3.37, в), передають ще більші потужності.

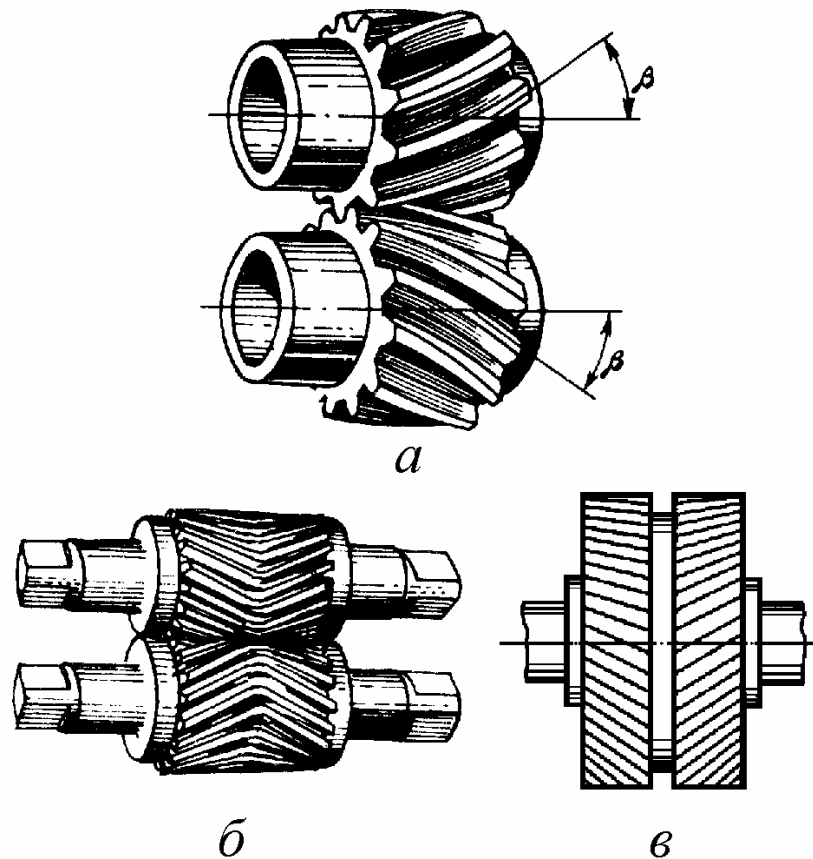


Рис. 3.37

Зуби косозубих і шевронних коліс, як і прямозубих, можуть бути нарізані методами копіювання (на фрезерних верстатах) або обкатки (на зубодовбальних або зубофрезерних верстатах).

Твірна зубів косозубих коліс розташована по гвинтовій лінії. Тому у косозубих передачах розрізняють два кроки ( $p_n, p_t$ ) і відповідно два модулі ( $m_n, m_t$ ). Крок, виміряний у площині, нормальній до бічної поверхні зуба по ділільному циліндру (рис. 4.38), називають *нормальним кроком* ( $p_n$ ). Крок, виміряний у площині обертання колеса (тобто в площині, перпендикулярній до осі обертання) по дузі ділільного кола, називають *коловим ділільним кроком* ( $p_t$ ).



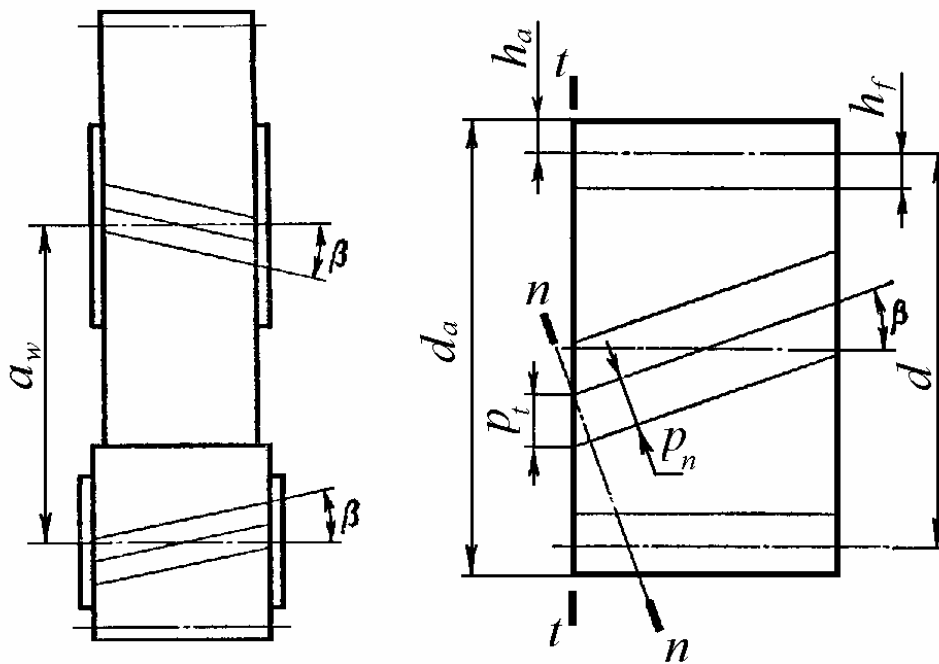


Рис. 3.38

Залежність між  $p_t$   $p_n$  і можна визначити із рис. 3.38:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}, \quad (3.65)$$

де  $\beta$  – кут нахилу зубів до осі колеса.

Відповідно нормальний і коловий модулі дорівнюють:

$$m_n = \frac{p_n}{\pi}, \quad (3.66)$$

$$m_t = \frac{p_t}{\pi} = \frac{m_n}{\cos \beta}. \quad (3.67)$$

Оскільки вихідний контур зубчастої рейки визначає параметри і профілі зубів усіх зубчастих коліс нормального зачеплення, то для косозубих і шевронних коліс із двох модулів стандартом регламентований тільки нормальний. Це не стосується шевронних коліс без проточки між половинами зубів, які нарізують на спеціальних верстатах за методом обкатки. Для них стандартизований коловий (торцевий) модуль.

У косозубих передачах ділильні діаметри можна виразити через коловий або нормальний модулі:

$$d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos \beta}. \quad (3.68)$$

### Частина третя

Висоту головки і ніжки зуба визначають через стандартний нормальний модуль:

$$h_a = m_n, \quad (3.69)$$

$$h_f = 1,25 m_n. \quad (3.70)$$

Відповідно діаметри вершин зубів і западин зубчастих коліс:

$$d_a = d + 2 m_n, \quad (3.71)$$

$$d_f = d - 2,5 m_n. \quad (3.72)$$

Міжосьова відстань дорівнює:

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = m_t \frac{z_1 + z_2}{2} = m_n \frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta} = m_n \frac{z_1(u+1)}{2 \cos \beta}. \quad (3.73)$$

Передаточне число визначають так само, як і в прямозубій передачі:

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i.$$

В косозубих передачах можна зменшити мінімально допустиму кількість зубів шестірні без ризику підрізування ніжки зуба при виготовленні зубчастих коліс методом обкатування. Для косозубих коліс

$$z_{min} = z_{min \text{ пр.}} \cos^3 \beta,$$

де  $z_{min \text{ пр.}} = 17$  для прямозубих коліс.

Ширину колеса  $b$  (довжину зуба) вибирають так, щоб зміщення  $c$  зуба дорівнювало або було більше його колового кроку:

$$c \geq b \operatorname{tg} \beta \geq p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \frac{\pi m_n}{\cos \beta},$$

або

$$b \geq \frac{\pi m_n}{\sin \beta}. \quad (3.74)$$

Як у прямозубій, так і в косозубій передачі сила тиску зуба шестірні на зуб колеса за весь період зачеплення діє по нормалі до бічної поверхні відповідних пар зубів, тобто, по лінії зачеплення.

Нормальну силу тиску  $F_n$  можна розкласти за трьома взаємно перпендикулярними напрямками на колову силу  $F_t$ , напрямлену по дотичній, радіальну силу  $F_r$  – по ділільному радіусу і  $F_a$  – по прямій, паралельній осі вала шестірні (колеса) (рис. 3.39):

$$\bar{F}_n = \bar{F}_t + \bar{F}_r + \bar{F}_a.$$

Складові  $F_a$  і  $F_r$  виражають через колову силу  $F_t = \frac{2M_1}{d_1}$ :

$$F_a = F_t \operatorname{tg} \beta, \quad (3.75)$$

$$F_r = F_t \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}, \quad (3.76)$$

де  $\alpha$  – кут профілю (зачеплення) в нормальній площині,  $\alpha = 20^\circ$ .

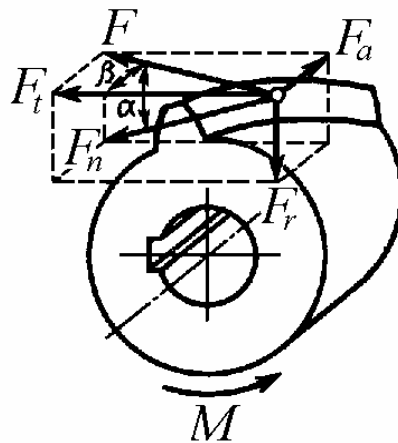


Рис. 3.39

Для запобігання великого осьового навантаження на опори валу не рекомендовано застосовувати косозубі колеса із великими кутами  $\beta$ . Як правило  $\beta \leq 15^\circ$ . Разом з тим кути менші ніж  $8^\circ$  не надають належного ефекту, що очікується від використання косозубих передач.

Кут нахилу  $\beta$  зубів у шевронних колесах в залежності від осьової відстані приймається у межах  $25 \dots 38^\circ$  і як виключення до  $45^\circ$ .

Розрахунок косозубих і шевронних передач на міцність проводять аналогічно розрахункам для прямозубих коліс, але із урахуванням геометрії косозубих коліс за допомогою відповідних коефіцієнтів.

---

### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення зубчастій передачі і основну класифікацію.
2. Які переваги і недоліки зубчастих передач?
3. Сформулюйте основну теорему зачеплення.
4. Що називають лінією зачеплення?
5. Поясніть принцип утворення евольвентного зачеплення.

### Частина третя

6. Яку мінімальну кількість зубів може мати зубчасте колесо? Чим це пояснюється?
7. Що називають ділильним колом?
8. Назвіть основні геометричні параметри евольвентного зачеплення.
9. Що характеризує коефіцієнт перекриття?
10. Назвіть види руйнування зубів зубчастих коліс.
11. Як визначити модуль зубів відкритої прямозубої циліндричної передачі?
12. Який вид розрахунку застосовується для закритих прямозубих циліндричних передач?
13. Назвіть переваги і недоліки застосування косозубих і шевронних циліндричних коліс.
14. Що таке коловий і нормальний крок в косозубих циліндричних передачах?
15. На які складові розкладають нормальну силу тиску в косозубій циліндричній передачі?

## 3.5. Просторові зубчасті передачі

### 3.5.1. Конічні зубчасті передачі

Зубчаста передача, осі валів якої перетинаються, називається *конічною*. Геометричні осі валів передачі можуть перетинатись під будь – яким кутом (рис. 3.40, а), але практично застосовують конічні зубчасті передачі, у яких кут перетину осей валів  $90^\circ$  (рис. 3.40, б).

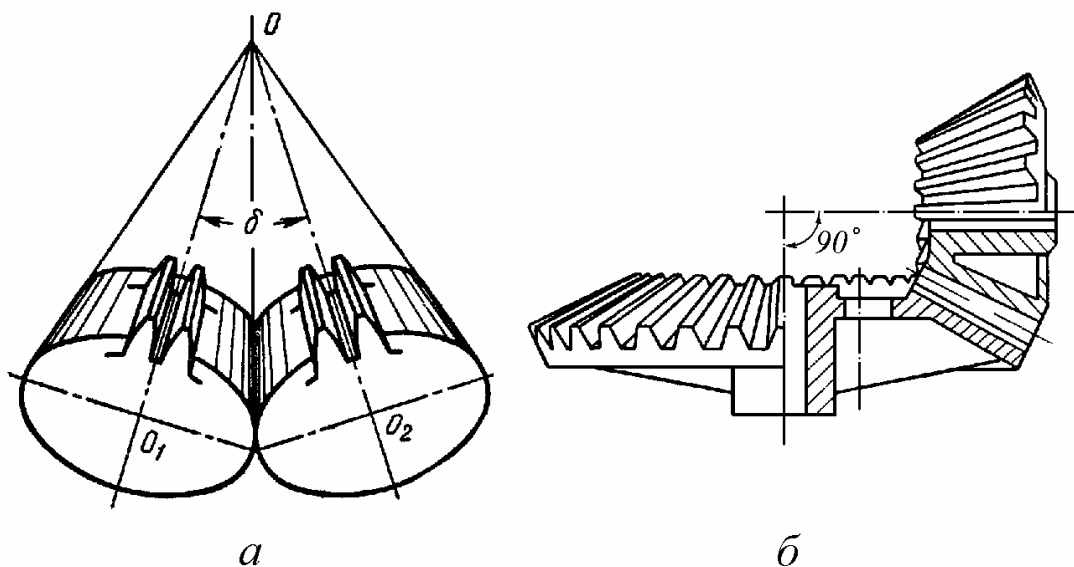


Рис. 3.40

Профільовання зубів конічних передач, як і циліндричних, найчастіше провадиться за евольвентою. При цьому конічні зубчасті колеса виготовляють з прямими, тангенціальними (косими) і коловими (криволінійними) зубами і застосовують там, де виникає необхідність передавати момент від одного вала до іншого з пересічними осями (привод заднього моста автомобіля, диференціал, редуктори, приводи механізмів пересування деяких підйомних кранів).

Конічні зубчасті передачі складніше виготовляти і складати, ніж циліндричні. Проектують їх порівняно невеликих потужностей, оскільки консольне розташування шестірні на валі при значних силах у зачепленні приводить до великих деформацій, які порушують точність зачеплення і нормальну роботу передачі. Проте іноді застосовують конічні передачі, в яких шестірня розміщена між опорами, а не консольно, але така конструкція складніша і дорожча.

Конічні передачі з тангенціальними і коловими зубами перевершують прямозубі за несучою здатністю, плавністю і безшумністю роботи при високих колових швидкостях.

Колеса конічної передачі являють собою конуси з вершинами у точці перетину осей валів. Зуби знаходяться на бічних поверхнях конусів і зменшують свій розмір (товщину і висоту) у напрямку до вершини конусів. Відповідно змінюється крок і модуль зачеплення, а також і діаметри ділильного кола, вершин і западин зубів. В торцевих перерізах зубчастих коліс, що відповідають їх найбільшим діаметрам, крок і модуль зачеплення найбільші. Тому тут розрізняють максимальний (виробничий) модуль  $m_e$  і середній модуль  $m_m$  (по середині довжини зуба). Максимальний модуль  $m_e$ , як правило, вибирають із стандартного ряду модулів.

Основні параметри зачеплення конічної прямозубої передачі виражаються через модулі (рис. 3.41):

для прямозубої передачі

$$d_m = m_{tm} z, \quad (3.77)$$

$$d_e = m_{te} z, \quad (3.78)$$

для передачі з коловими зубами

$$d_m = m_{nm} z, \quad (3.79)$$

$$d_e = m_{ne} z, \quad (3.80)$$

де  $d_m$  – середній ділильний (початковий) діаметр шестірні ( $d_{m1}$ ) або колеса ( $d_{m2}$ );

$d_e$  – зовнішній ділильний (початковий) діаметр (діаметр основи ділильного конуса) шестірні ( $d_{e1}$ ) або колеса ( $d_{e2}$ );

**Частина третя**

$z$  – кількість зубів шестірні або колеса;  
 $m_m$  і  $m_{nm}$  – середній коловий (прямий зуб) і середній нормальний (коловий зуб) модуль;  
 $m_e$  і  $m_{te}$  – зовнішній коловий модуль з прямими і коловими зубами, значення якого звичайно узгоджують із стандартом.

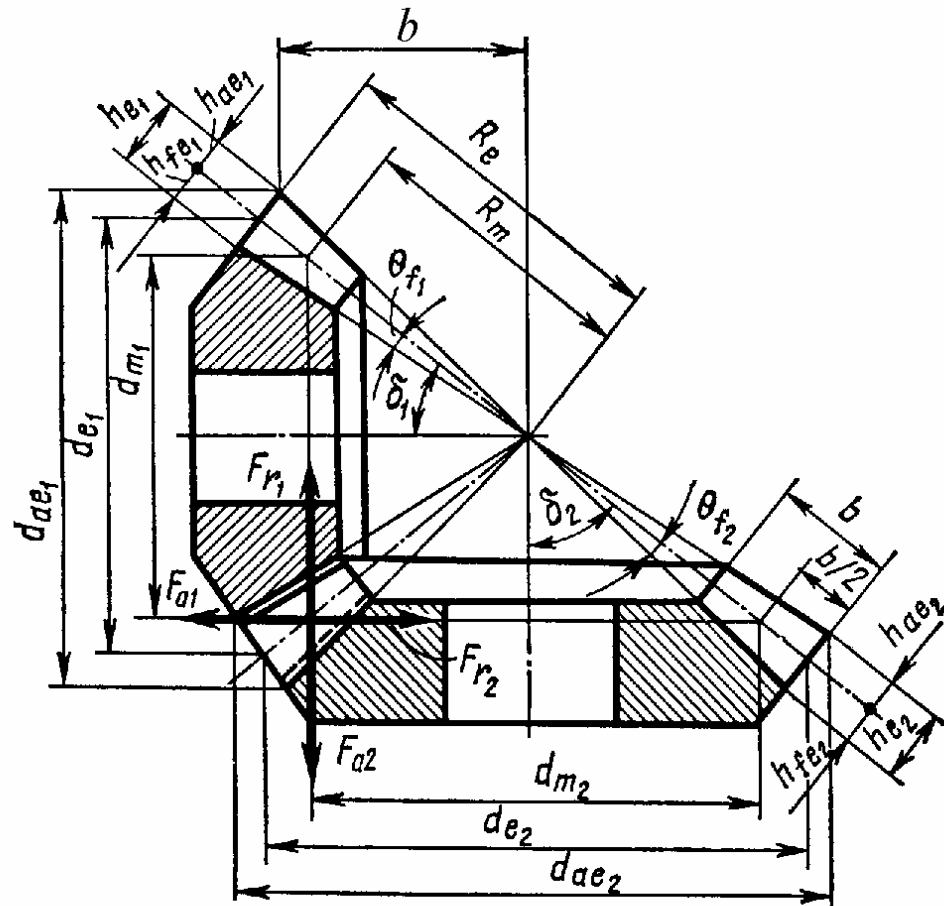


Рис. 3.41

Між модулями  $m_{nm}$ ,  $m_m$  і  $m_{te}$  ( $m_e$ ) існує залежність:

$$m_{nm} = m_n \cos \beta_m = m_{te} \left( 1 - \frac{k_{be}}{2} \right) \cos \beta_m = \left( m_{te} - b \sin \frac{\delta}{z} \right) \cos \beta_m, \quad (3.81)$$

де  $\beta_m$  – кут нахилу колового зуба;

$k_{be} = \frac{b}{R_e}$  – коефіцієнт ширини зубчастого вінця;

$b$  – ширина зубчастого вінця (довжина зуба), яка виміряна паралельно твірній ділительного конуса;

$R_e$  – зовнішня конусна відстань;

$\delta$  – кут ділительного конуса шестерні ( $\delta_1$ ) або колеса ( $\delta_2$ ),

причому  $\delta_{\Sigma} = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$ .

Зовнішню конусну відстань можна визначити як:

$$R_e = \frac{b}{k_{be}} = \frac{d_e}{2 \sin \delta} = m_{e(te)} \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{2}. \quad (3.82)$$

Середня конусна відстань дорівнює:

$$R_m = R_e - \frac{b}{2}. \quad (3.83)$$

Зовнішню висоту головки  $h_{ae}$ , ніжки  $h_{fe}$  зуба і радіальний зазор  $c$  приймають:

$$\begin{aligned} h_{ae} &= m_e = m_{te}, \\ h_{fe} &= 1,2 m_e = 1,25 m_{te}, \\ c_e &= 0,2 m_e = 0,25 m_{te}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

Кут вихідного контуру  $\alpha$ :

$$\alpha = \alpha_n = 20^\circ.$$

Діаметри вершин зубів і западин конічного зубчастого колеса відповідно дорівнюють:

для прямозубої передачі

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae} \cos \delta = d_e + 2m_e \cos \delta, \quad (3.85)$$

$$d_{fe} = d_e - 2h_{fe} \cos \delta = d_e - 2,4 m_e \cos \delta, \quad (3.86)$$

для передачі з коловими зубами

$$d_{ae} = d_e + 2m_{te} \cos \delta, \quad (3.87)$$

$$d_{fe} = d_e - 2,5 m_{te} \cos \delta. \quad (3.88)$$

Передаточне число при  $\delta_{\Sigma} = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$  визначається як

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_{e2}}{d_{e1}} = \frac{d_{m2}}{d_{m1}} = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i. \quad (3.89)$$

Розглянемо сили, що діють у зачепленні зубчастих конічних коліс.

При роботі конічної прямозубої передачі рівнодіюча  $F_n$  сил нормального тиску прикладена в середньому перерізі зуба до його бічної поверхні по лінії контакту (рис. 3.42).

Силу нормального тиску  $F_n$  можна розкласти за трьома взаємно перпендикулярними напрямками на колову силу  $F_t$ , напрямлену по

### Частина третя

дотичній до середнього ділильного діаметра шестірні і колеса, радіальну силу  $F_r$  – по середньому ділильному радіусу шестірні (колеса) і  $F_a$  – по прямій, паралельній осі вала колеса (шестірні):

$$\bar{F}_n = \bar{F}_t + \bar{F}_r + \bar{F}_a.$$

При цьому колові сили  $F_t$  на шестерні і на колесі за величиною однакові, але діють у протилежних напрямках:

$$F_{t1} = \frac{2M_1}{d_{m1}} = F_{t2}. \quad (3.90)$$

Радіальна сила на шестерні за величиною дорівнює осьовій силі на колесі:

$$F_{r1} = F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1 = F_{a2}. \quad (3.91)$$

Осьова сила на шестерні за величиною дорівнює радіальній силі на колесі:

$$F_{a1} = F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1 = F_{r2}, \quad (3.92)$$

де  $\alpha = 20^\circ$  — кут головного профілю (зацеплення).

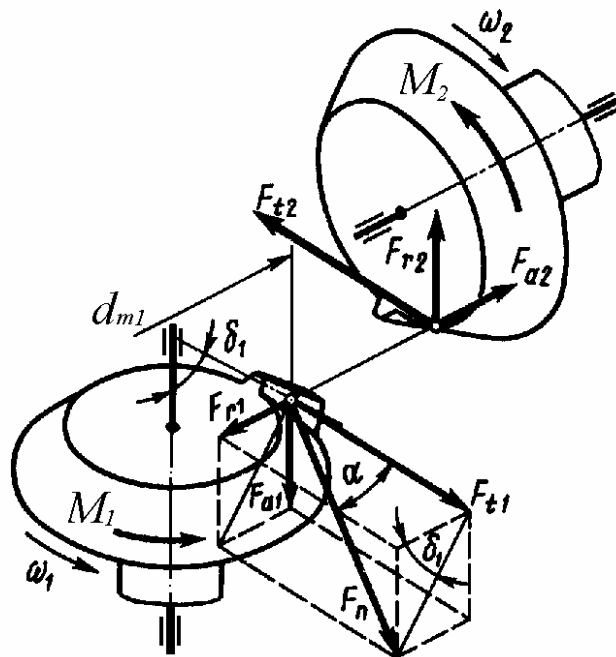


Рис. 3.42

Наявність у передачі осьових сил потребує надійного осьового кріплення валів шестірні і колеса відносно осі вала.



Розрахунок конічних зубчастих передач на міцність проводять аналогічно розрахункам для циліндричних коліс, але із урахуванням особливостей конічних коліс за допомогою відповідних коефіцієнтів. Досвід експлуатації конічних і циліндричних передач показав, що при однакових матеріалах, ширині (довжині зубів), умовах роботи, допустиме навантаження конічних передач складає 85% допустимого навантаження циліндричних передач.

### **3.5.2. Черв'ячні передачі**

*Черв'ячна (або зубчато-гвинтова)* передача (рис. 3.43, а) являє собою кінематичну пару, що складається з черв'яка і черв'ячного колеса.

Черв'ячну передачу можна розглядати як модифікацію гвинтової пари, довга гайка якої розрізається поздовжньою площиною (паралельною осі гвинта) і згинається в кругове кільце — зубчасте колесо, що охоплює тіло гвинта — черв'яка по дузі.

Черв'як — це гвинт з різьбою певного профілю, нарізаною на циліндричній поверхні – архімедів, конволютний, евольвентний та інші черв'яки (рис. 3.43, а) або на глобоїді – глобоїдний черв'як (рис. 3.43, б).

*Архімедів черв'як* (рис. 3.43, в) являє собою циліндричний гвинт з трапецеїдальним профілем різьби. У торцевому перерізі витки цього черв'яка окреслені архімедовою спіраллю.

*Конволютний черв'як* – це циліндричний гвинт з прямолінійними обрисами профілю западин або витків у перерізі, нормального до бічної поверхні різьби.

*Евольвентний черв'як* (рис. 3.43, г) можна розглядати як косозубе циліндричне колесо з дуже великим кутом нахилу зуба до твірної циліндра і з малою кількістю зубів. Профіль витків – зубів такого черв'яка окреслений евольвентою.

*Глобоїдний черв'як* (рис. 3.43, б) являє собою гвинт, нарізаний на поверхні тора (глобоїда). В центральній осьовій площині черв'яка витки мають прямолінійний профіль. Передачу з таким черв'яком називають *глобоїдною*. Незважаючи на те, що при однакових габаритних розмірах навантажувальна здатність передачі з глобоїдним черв'яком значно вища, ніж із циліндричним, вона поки що не набула значного поширення через комплекс причин, пов'язаних з тепловідведенням, виготовленням і складанням глобоїдного черв'яка і черв'ячного колеса.

Завдяки відносній простоті технології виготовлення черв'яка і колеса (зуби черв'ячного колеса нарізують черв'ячною фрезою, а різьбу черв'яка нарізують різцем на токарному верстаті або дисковою фрезою на спеціальному черв'ячно-фрезерному верстаті) передачі з циліндричним архімедовим черв'яком широко застосовуються в різних галузях

### Частина третя

машинобудування і народного господарства. Поряд з цим останнім часом дедалі більшого застосування набувають і евольвентні черв'яки.

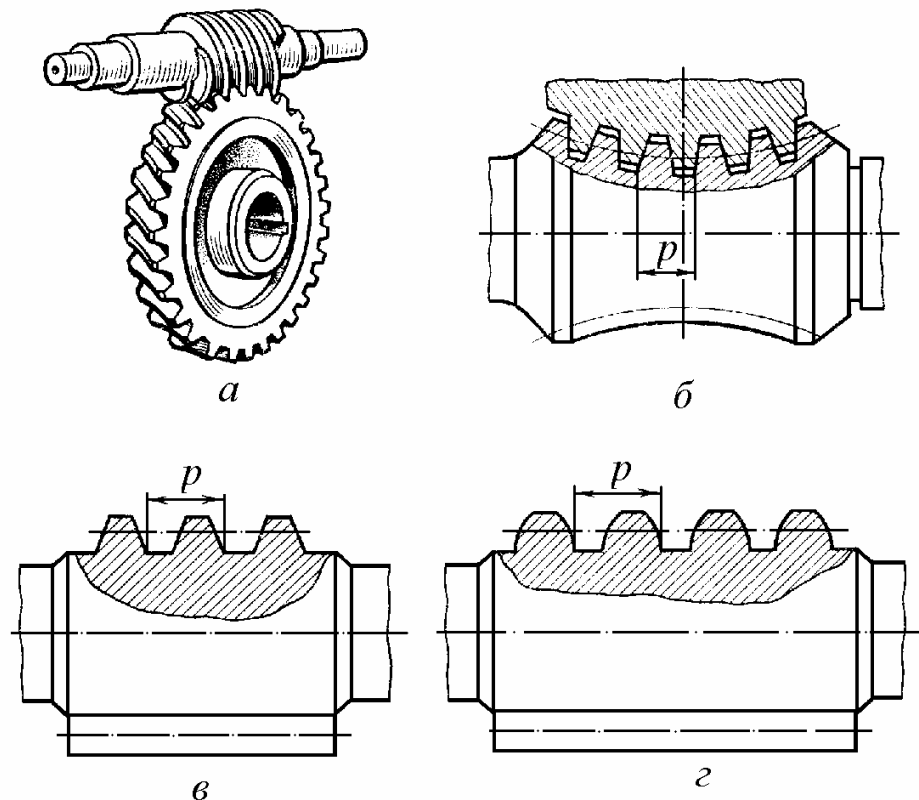


Рис. 3.43

#### *Переваги черв'ячних передач:*

- можливість здійснення одноступінчастої передачі з великими передаточними числами при невеликих габаритах (в кінематичних передачах  $u = 5...500$ , а в силових –  $u = 8...80$  і як виняток до  $120$ );
- плавність зачеплення і безшумність роботи;
- можливість здійснення самогальмівної передачі (тобто рух може передаватись тільки від черв'яка до колеса, але не навпаки, що важливо для підйомних механізмів);
- невелика маса передачі на одиницю потужності при великому передаточному числі.

#### *Недоліки черв'ячних передач:*

- порівняно низький ККД  $\eta = 0,7...0,92$  внаслідок значних сил тертя в передачі;
- обмеженість потужностей, що можуть ними передаватись, – до  $50...100$  КВт;
- сильне нагрівання передачі при тривалій неперервній роботі;

– висока вартість матеріалу вінців черв'ячних коліс (бронза) та інструменту для нарізування зубів черв'ячних коліс (черв'ячні фрези), а також шліфування черв'яка.

Незважаючи на недоліки, черв'ячні передачі широко застосовують в машинобудуванні і приладобудуванні завдяки можливості зміни кутової швидкості в широкому діапазоні при перехресних осях валів: у механізмах привода тролейбуса, підйомно – транспортних машин, пасажирських і вантажних ліфтів, верстатів, різних приладів тощо.

Розглянемо геометричні співвідношення в черв'ячній передачі з циліндричним архімедовим черв'яком.

Відстань  $p$ , виміряна між однойменними точками двох середніх витків профілю різьби черв'яка (рис. 3.44), називається *кроком* черв'яка і черв'ячного колеса. Відношення кроку  $p$  до  $\pi$  називають *модулем*:

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (3.93)$$

Циліндр, на твірній якого товщина витка і ширина западини різьби черв'яка однакові, називають *ділильним*, його діаметр позначають  $d_1$ .

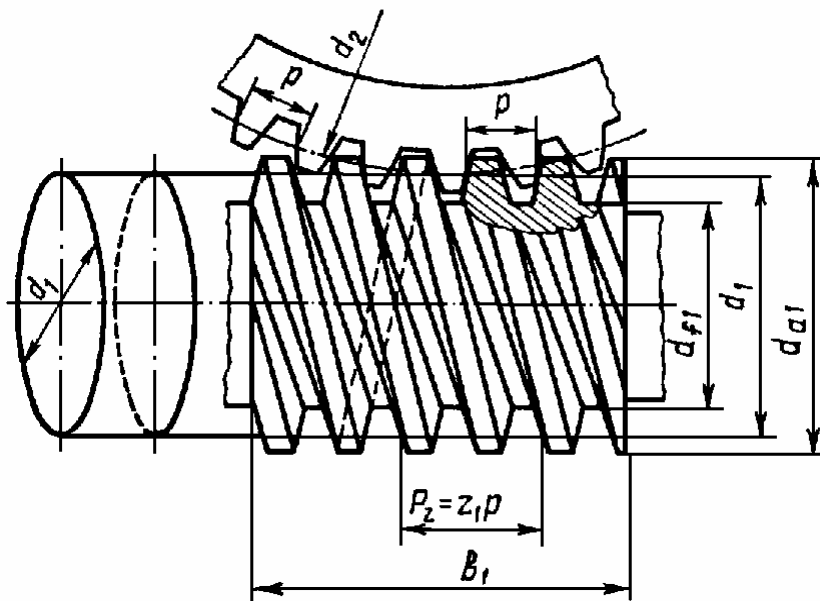


Рис. 3.44

Черв'як, як і гвинт, може мати одновиткову (однозахідну) або багатовиткову (багатозахідну) різьбу. Кількість витків різьби черв'яка позначають  $z_1$ . У силових черв'ячних передачах застосовують черв'яки із  $z_1 = 1, 2, 4$ .

Хід витка для багатозахідного черв'яка:

$$p_{z_1} = p z_1. \quad (3.94)$$

Ділильний діаметр черв'яка прийнято виражати через модуль:

$$d_1 = m q. \quad (3.95)$$

Параметр  $q$  визначає кількість модулів у ділильному діаметрі черв'яка і називається *коефіцієнтом діаметра черв'яка*. Значення  $m$  і  $q$  стандартизовані.

Тангенс кута підйому лінії витка (різьби черв'яка) визначають на ділильному циліндрі черв'яка:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{p_{z_1}}{\pi d_1} = \frac{p z_1}{\pi m q} = \frac{m z_1}{m q},$$

звідки

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_1}{q}. \quad (3.96)$$

Таким чином, зі збільшенням коефіцієнта діаметра черв'яка зменшується кут підйому його різьби, що, приводить до зниження ККД механізму.

Висоту ділильної головки  $h_{a_2}$ , ніжки  $h_{f_2}$  зуба і радіальний зазор  $c$  черв'ячного колеса відповідно приймають:

$$\begin{aligned} h_{a_2} &= m, \\ h_{f_2} &= 1,2 m, \\ c &= 0,2 m. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Діаметри вершин витків і западин черв'яка:

$$d_{a1} = d_1 + 2 h_{a_2} = d_1 + 2 m, \quad (3.98)$$

$$d_{f1} = d_1 - 2 h_{f_2} = d_1 - 2,4 m. \quad (3.99)$$

Ділильний діаметр черв'ячного колеса  $d_2$  в середньому перерізі (рис. 3.45) при кількості зубів  $z_2$ :

$$d_2 = m z_2. \quad (3.100)$$

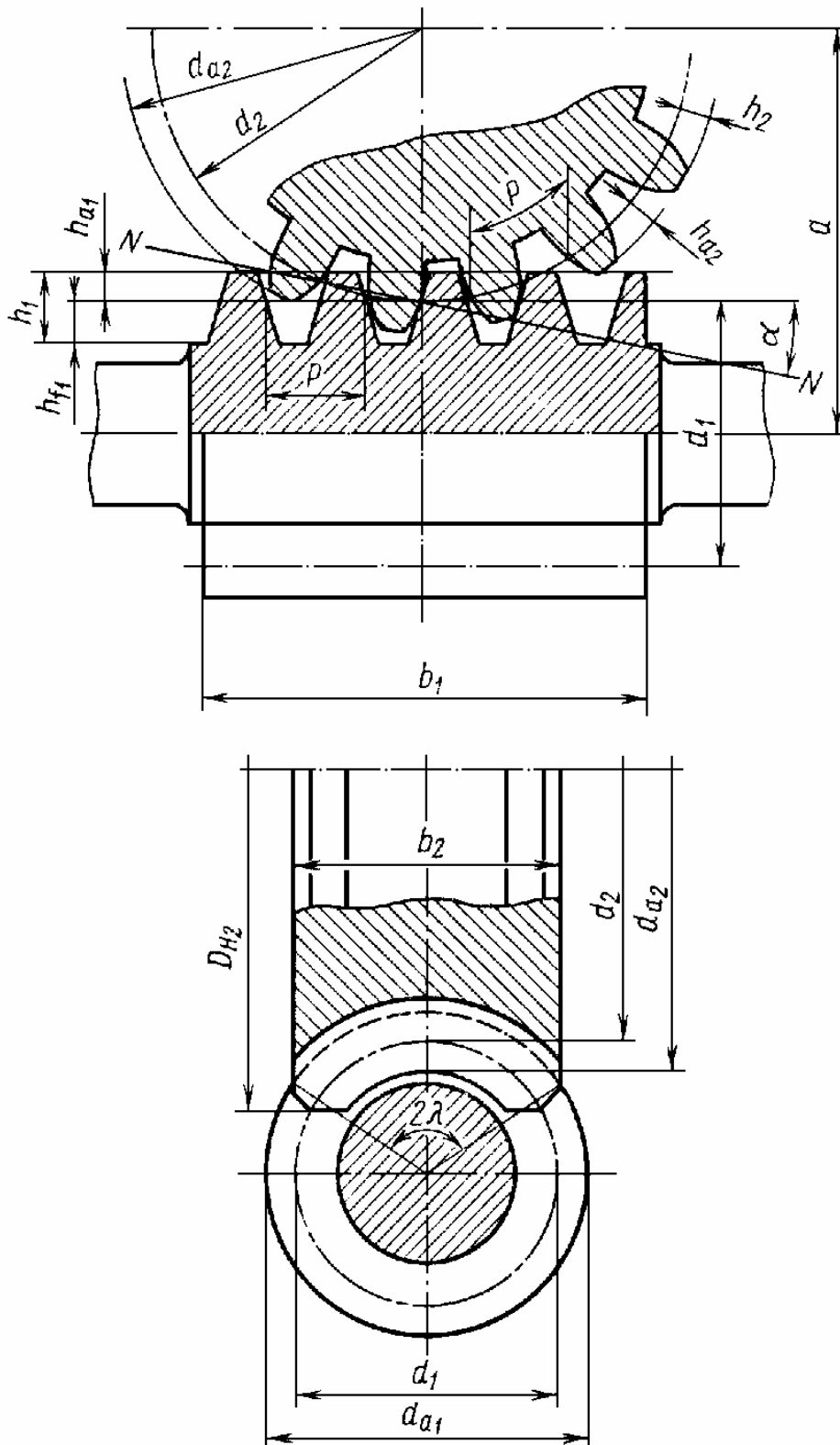


Рис. 3.45

Діаметри вершин зубів і западин черв'ячного колеса в середньому

### Частина третя

перерізі (рис. 3.45):

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = d_2 + 2m, \quad (3.101)$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} = d_2 - 2,4m. \quad (3.102)$$

Міжосьова відстань черв'ячної передачі:

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(q + z_2)}{2}. \quad (3.103)$$

Лінійна швидкість точки на ділильному колі  $d_1$  черв'яка вздовж його осі при обертанні черв'яка:

$$v_1 = \frac{p z_1 \omega_1}{2\pi} = \frac{p z_1 \omega_1}{2\pi} = \frac{p z_1 n_1}{60},$$

де  $\omega_1, n_1$  – кутова швидкість і частота обертання черв'яка відповідно.

Лінійна швидкість цієї точки на ділильному колі  $d_2$  черв'ячного колеса:

$$v_2 = \frac{d_2 \omega_2}{2} = \frac{\pi d_2 n_2}{60},$$

де  $\omega_2, n_2$  – кутова швидкість і частота обертання черв'ячного колеса.

Знайдені швидкості  $v_1 = v_2$  із умови зачеплення. Прирівнюючи праві частини двох останніх виразів, отримаємо:

$$p z_1 n_1 = \pi d_2 n_2.$$

Враховуючи, що довжина ділильного кола черв'ячного колеса  $\pi d_2 = z_2 p$ , передаточне число дорівнює:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2 p}{z_1 p} = \frac{z_2}{z_1} = i, \quad (3.104)$$

де  $z_2$ , – кількість зубів черв'ячного колеса,  $z_1$  – кількість витків черв'яка.

Розглянемо сили, що діють у зачепленні черв'ячної передачі (рис. 3.46).

Силу нормального тиску  $F_n$  між зубами колеса і витками різьби черв'яка, яка виникає при роботі черв'ячної передачі, вважаємо прикладеною в полюсі зачеплення. За правилом паралелепіеда розкладемо  $F_n$  на три взаємно перпендикулярні складові:

$$\bar{F}_n = \bar{F}_t + \bar{F}_r + \bar{F}_a.$$

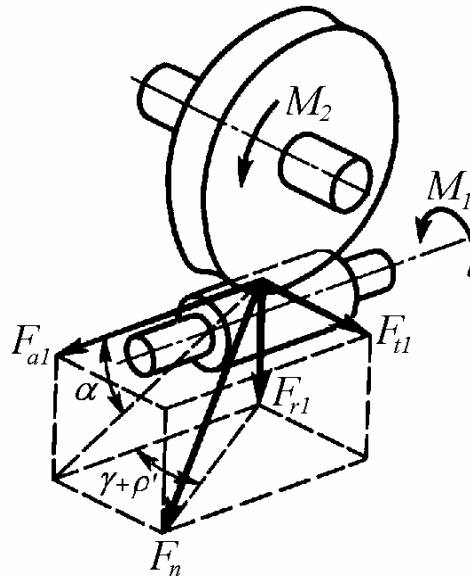


Рис. 3.46

Колова сила на черв'яку, яка дорівнює за значенням осьовій силі на черв'ячному колесі,

$$F_{t1} = \frac{2M_1}{d_1} = F_{a2}. \quad (3.105)$$

Колова сила на черв'ячному колесі, що дорівнює за значенням осьовій силі на черв'яку,

$$F_{t2} = \frac{2M_2}{d_2} = F_{a1}. \quad (3.106)$$

Співвідношення між величинами  $F_{t1}$  і  $F_{t2}$  можна знайти із їх взаємного розташування:

$$F_{t1} = F_{t2} \operatorname{tg} \gamma,$$

або із врахуванням тертя у черв'ячній парі:

$$F_{t1} = F_{t2} \operatorname{tg}(\gamma + \rho'), \quad (3.107)$$

де  $\gamma$  – кут підйому лінії витку черв'яка;

$\rho' = 1 \dots 6^\circ$  – зведений кут тертя.

Радіальна сила в черв'ячній парі:

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{a1} \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.108)$$

де  $\alpha = 20^\circ$  – кут профілю в осьовому перерізі черв'яка.

Коефіцієнт корисної дії черв'ячної передачі визначається втратами на

### Частина третя

тертя в зачепленні, втратами на розбризування і перемішування мастила в картері і втратами в опорах валів. Причому останні два види втрат окремо не враховуються, а входять у експериментально знайдене значення  $\rho'$ .

При визначенні втрат на тертя в зачепленні черв'ячної передачі як у гвинтовій парі ККД передачі можна знайти за формулою:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \rho')} \quad (3.109)$$

Оскільки ККД черв'ячної передачі істотно залежить від значення кута підйому лінії витка черв'яка (при зростанні кута  $\gamma$  ККД збільшується), то силові черв'ячні передачі не рекомендується робити одновитковими, оскільки при цьому  $\gamma$ , а отже, і ККД малі. Застосування таких передач виправдане тільки при необхідно мати велике передаточне відношення, а також коли потрібне самогальмування передачі. Орієнтовні значення к. к. д. такі: при  $z_1 = 1$   $\eta = 0,7 \dots 0,75$ , при  $z_1 = 2$   $\eta = 0,75 \dots 0,82$ , при  $z_1 = 4$   $\eta = 0,82 \dots 0,92$ .

У черв'ячних передачах поєднання великої швидкості ковзання із дуже несприятливим напрямом її відносно лінії контакту призводить до погіршення мащення, розриву масляного шару між третювими поверхнями, зниження ККД, підвищення спрацювання і схильності до заїдання. Тому основним розрахунком як для закритих, так і для відкритих черв'ячних передач є розрахунок на контактну витривалість, що запобігає викришуванню і заїданню. Розрахунок на витривалість зубів при згинанні роблять як перевірний.

Черв'яки виготовляють із вуглецевої (сталь 45; 50) або легованої (сталь 20Х; 40Х; 40ХН; 12ХНЗА; 18ХНВА; 38ХМІОА) сталі з відповідною термічною або термохімічною обробкою і наступним шліфуванням та поліруванням поверхонь зачеплення.

Довжину нарізаної частини черв'яка приймають:

при  $z_1 = 1 \dots 2$ :

$$b_1 \geq (11 + 0,06 z_1) m + a,$$

при  $z_1 = 4$ :

$$b_1 \geq (12,5 + 0,09 z_2) m + a,$$

де  $a = 25 \text{ мм}$  при  $m \leq 10 \text{ мм}$ ,  $a = 35 \dots 40 \text{ мм}$  при  $m = 11 \dots 15 \text{ мм}$ ,  $a = 50 \text{ мм}$  при  $m \geq 16 \text{ мм}$ .

Черв'ячне колесо виготовляють із чавуну при швидкості ковзання  $v_s \leq 2 \text{ м/с}$ . При більших швидкостях ковзання виникає небезпека заїдання, тому черв'ячне колесо роблять складеним: вінець (обід або бандаж) виготовляють із олов'яної (БрОФ 10-1, ОНФ, ОЦС 6-6-3) або безолов'яної (БрАЖ 9-4Л, АЖН 10-4-4Л) бронзи, а колесо (колісний центр) із чавуну



(СЧ 15-32; СЧ 18-36). Олов'яні бронзи, що мають високі антифрикційні властивості, дорогі. Тому при  $v_s \leq 7 \text{ м/с}$  рекомендується застосовувати безолов'яні бронзи або латунь (ЛАЗМц 66-6-3-2), які мають високі механічні характеристики при дещо знижених антифрикційних властивостях.

Ширину вінця черв'ячного колеса приймають:

при  $z_1 = 1 \dots 2$ :

$$b_2 \leq 0,75 d_{a1},$$

при  $z_1 = 4$ :

$$b_2 \leq 0,67 d_{a1},$$

Найбільший діаметр черв'ячного колеса:

при  $z_1 = 1$

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + 2m,$$

при  $z_1 = 2$ :

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + 1,5m,$$

при  $z_1 = 4$ :

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + m.$$

---

## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка передача називається конічною і як вона утворена?
2. Назвіть основні параметри зачеплення конічної прямозубої передачі.
3. На які складові розкладається сила нормального тиску в конічній зубчастій передачі і як їх визначити?
4. Дайте визначення черв'ячної передачі і основну класифікацію.
5. Які характерні особливості має черв'ячна передача порівняно з іншими зубчастими передачами?
6. Назвіть основні переваги і недоліки черв'ячних передач.
7. Які основні геометричні співвідношення в черв'ячній передачі?
8. Яку кількість заходів різьби може мати стандартний черв'як?
9. Що таке хід витка багатозахідного черв'яка?
10. Як визначається ділительний діаметр черв'яка?
11. Напишіть формули складових сил в зачепленні черв'ячної передачі.
12. Чому дорівнює ККД черв'ячної передачі?
13. Які матеріали застосовують для виготовлення черв'яків і черв'ячних коліс?

### 3.6. Осі, вали, муфти

Деталь, на яку насаджують (рухомою чи нерухомою) обертові пристрої (блок, зубчасте колесо та ін.), називають *віссю* або *валом*.

Осі і вали відрізняються між собою за умовами роботи: *вісь* не передає обертового моменту і працює тільки на згин (рис. 3.47, а). Вісь може бути обертовою або нерухомою. Вал завжди обертається і завжди передає обертальний момент, наприклад вал зубчастої передачі в редукторі (рис. 3.47, б), колінчастий вал двигуна, кривошипний вал (рис. 3.48, в, г).

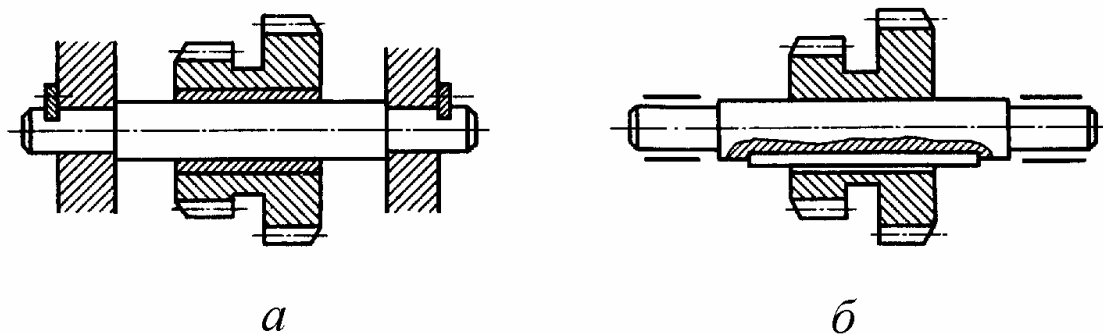


Рис. 3.47

Вали класифікують наступним чином:

– за призначенням: *вали передач* - несучі зубчасті колеса, шківні, зірочки, муфти та інші деталі передач; *корінні вали* машин, які крім деталей передач несуть ще і робочі органи виробничих машин або машин двигунів. Наприклад, вали турбін, на які насажені колеса або диски турбін, вали токарних і свердлильних верстатів, на яких встановлено затискні патрони, вали електродвигунів, на які насаджено ротори; колінчасті і кривошипні вали;

– за формою геометричної осі — *прямі* (рис. 3.48, а, б), що набули найбільшого поширення в різних галузях машинобудування; *кривошипні і колінчасті* (рис. 3.48, в, г) які використовують не тільки для передавання моменту, а і для перетворення зворотно – поступального руху на обертальний (поршневі двигуни) або, навпаки, обертального руху на зворотно-поступальний (насоси, верстати); *гнучкі* (рис. 3.48, д) із змінюваною формою геометричної осі, які застосовують у різних приводах механізованого інструменту, наприклад вал переносної свердлильної або загвинчуючої установки, а також у несилових приводах приладів, наприклад спідометрів та інших приладів дистанційного вимірювання або керування:

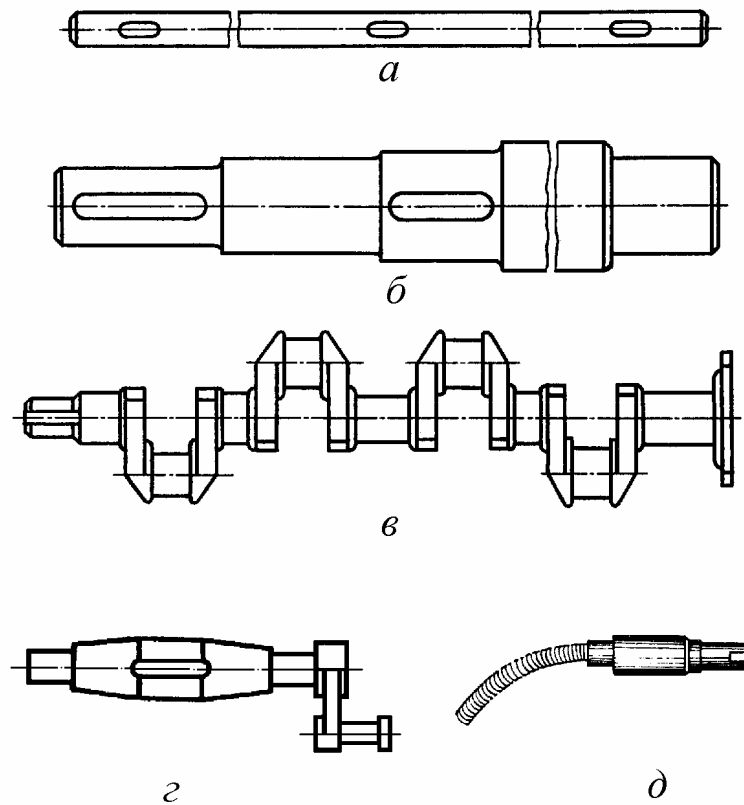


Рис. 3.48

– за формою і конструктивними ознаками – *гладкі* сталого поперечного перерізу (рис. 3.48, а) – трансмісійні, вали гребних гвинтів тощо ; *ступінчасто-змінного поперечного* перерізу (рис. 3.48, б, г, д) – вали більшості передач. Сюди ж можна віднести *шліцьові* вали, *вали-черв'яки* і *вали-шестірні*.

Для зменшення маси вали іноді роблять *порожнистими*.

Вал звичайно працює на згин, кручення (вал прямозубого редуктора, фрикційної, пасової і ланцюгової передач) або на згин, кручення і осьовий стиск (розтяг) – вал косозубого циліндричного, конічного та черв'ячного редукторів.

Осі або вали з'єднують з деталями передач (шківками, зубчастими колесами і т. п.), насадженими на них, за допомогою шпонок, шліців, штифтів і т. ін. Насаджені на вал (вісь) деталі тримаються від зсування в осьовому напрямі (косозубі циліндричні, конічні і черв'ячні зубчасті колеса та ін.) за допомогою буртів або заплечиків на валі, спеціальних установочних кілець, розпірних втулок, стопорних гвинтів і т. д.

Вали і осі виготовляють із вуглецевої (Ст3, Ст4, Ст5, сталь 30, 35, 40, 45, 50) і легованої (сталь 40Х, 40ХН, 30ХНЗА, 30ХГТ) сталей, значно рідше – із сталюого литва (сталь 35Л, 40Л, 45Л, 50Л) із відповідною термічною обробкою, а також якісного сірого чавуну, високоміцного

чавуну, сплавів кольорових металів (годинники, прилади) і пластмас.

Оскільки осі і вали мають круглий (суцільний) або рідше кільцевий поперечний переріз, то як заготовки для виготовлення їх застосовують круглий прокат при діаметрі осі або вала, що не перевищує 200 мм, або поковки при діаметрі понад 200 мм. При масовому виробництві ступінчасті вали виготовляють із штампованих заготовок. Осі і вали кільцевого перерізу можна виготовляти з труб. Посадочні поверхні осей і валів обробляють на токарних і шліфувальних верстатах. із шорсткістю  $R_a = 2,5 \dots 0,63 \text{ мкм}$ . Для зменшення концентрації напружень у місцях переходу від одного перерізу вала (осі) до іншого рекомендується плавно змінювати діаметр, тобто робити перехідні заокруглення (галтелі) по можливості більшого радіуса.

Осі і вали розраховують на міцність і жорсткість як бруси круглого поперечного перерізу, які працюють на згин (осі) або на згин із крученням (вали).

### **3.6.1. Опори валів і осей. Підшипники ковзання**

Опори осей і валів поділяють на дві групи: опори ковзання і опори кочення. Опори ковзання і кочення, призначені для сприймання радіальних навантажень, називають *підшипниками*, а опори, призначені для сприймання осьових навантажень,— *підп'ятниками*, або упорними підшипниками (для опор кочення).

Підшипники ковзання поділяють на три основних типи.

*Нерознімні (глухі) підшипники* у найпростіших конструкціях відливають як одне ціле із станиною тихохідної машини, що працює з великими перервами (рис. 3.49, а). Іноді їх роблять знімними, прикріплюючи болтами до станини машини. Знімні глухі підшипники виготовляють як із вкладишами 2 (чавунні, бронзові, капронові та інші втулки, запресовані в отвір чавунного або сталюого корпусу підшипника), так і без них. Останні застосовують для тихохідних малонавантажених валів. Основна перевага глухих підшипників — простота конструкції і дешевизна. Незважаючи на це, вони мало поширені, бо не дають можливості компенсувати спрацювання активних поверхонь втулок і валів.

Нерознімні підшипники поділяють за стандартом на вузькі, широкі, фланцеві, та гніздові.

*Рознімні підшипники* (рис. 3.49, б) складаються з корпусу 1, двох вкладишів 4 (втулка із антифрикційного матеріалу, розрізана по твірній), кришки 2 і стяжних болтів 3. Спрацювання активної поверхні вкладиша компенсується підтисканням кришки до верхньої половини вкладиша. Масло для мащення підшипників ковзання надходить на поверхні тертя через отвір у кришці з мастильного резервуара — маслянки 5 або з

масляної ванни за допомогою обертового кільця. Кільцеве мащення застосовують тільки при порівняно великих колових швидкостях цапфи.

Підшипники із самоустановними вкладишами застосовують при великих відношеннях довжини цапфи (шипа або шийки) до її діаметра. В таких випадках звичайний вкладиш не може повторювати відхилень осі цапфи від деформації вала, що порушує нормальну роботу підшипника.

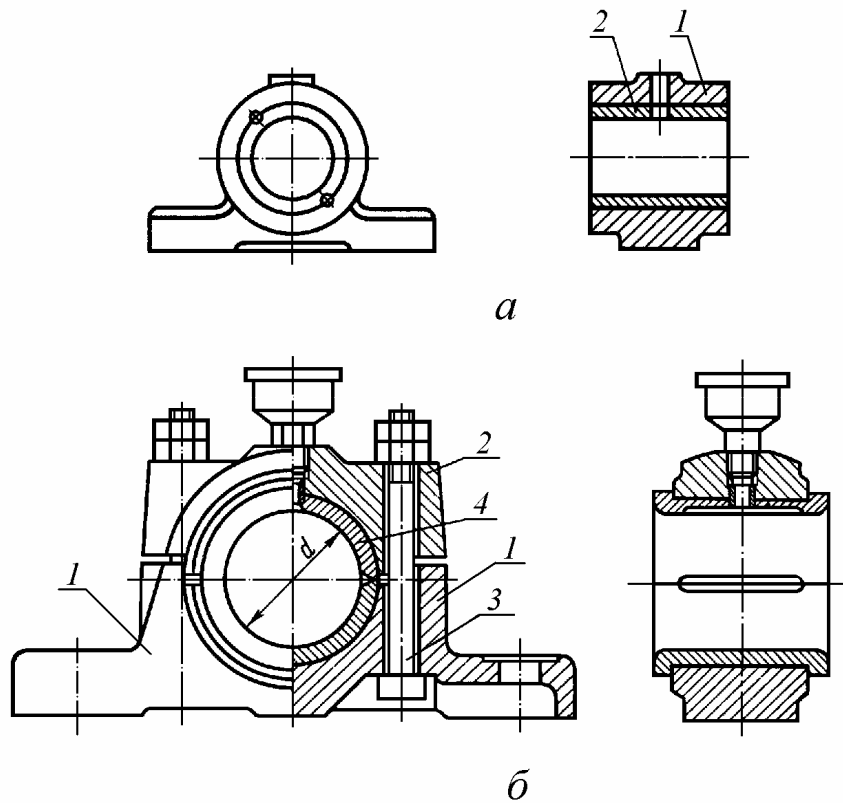


Рис. 3.49

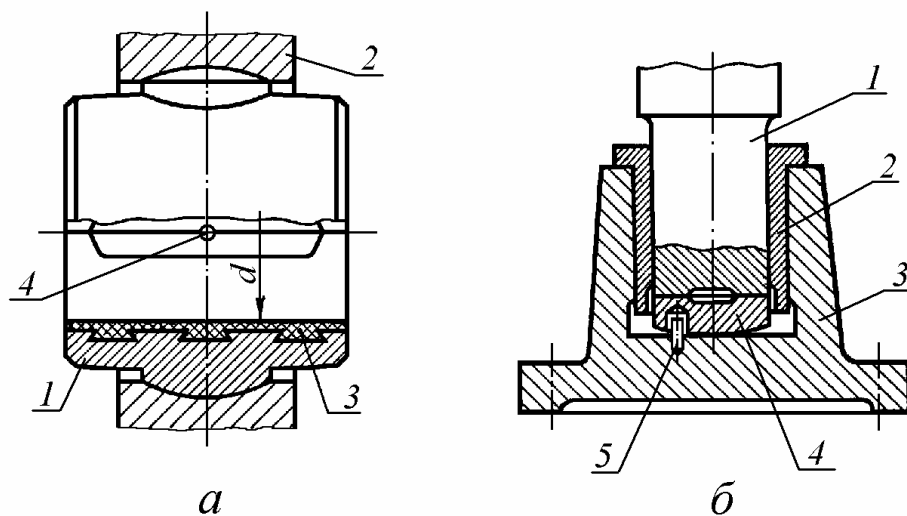


Рис. 3.50

### **Частина третя**

---

Самоустановний вкладиш 1 підшипника (рис. 4.50, а) має випуклу сферичну поверхню, що спирається на сферичну поверхню кільця 2, яке, запресоване в гніздо корпусу підшипника. Це дає можливість вкладишу повторювати відхилення осі деформованого вала. Мастило подається через отвір корпусу в канавку 4 вкладиша.

Опори ковзання для осьових навантажень — *підп'ятники* — звичайно об'єднуються в одному спільному корпусі із підшипником, який сприймає радіальні навантаження вала і врівноважує їх. Опорна частина підп'ятника (рис. 4.49, б) являє собою кільце 4 з чавуну, бронзи або іншого антифрикційного матеріалу з прорізаними по торцю мастильними канавками. Це кільце спирається на корпус 3. Радіальне навантаження опори сприймається вкладишем 2. Упорне кільце зафіксовано штифтом 5.

*Переваги підшипників ковзання:*

- висока працездатність при великих швидкостях і ударних навантаженнях;
- безшумність і забезпечення вібростійкості вала при роботі підшипника в режимі рідинного тертя (масляний шар між поверхнями цапфи і вкладиша має властивість гасити коливання);
- невеликі розміри в радіальному напрямі;
- можливість працювати в особливих умовах (хімічно агресивних середовищах, при бідному або забрудненому мащенні) і т. ін.

*Недоліки підшипників ковзання:*

- великі втрати на тертя (не стосується підшипників, що працюють у режимі рідинного тертя);
- значні розміри в осьовому напрямі;
- необхідність застосування дорогих кольорових сплавів (бронза, бабіт) для вкладишів;
- порівняна складність конструкції і велика витрата мастила;
- не забезпечена взаємозамінність підшипників, оскільки більшість їх типів не стандартизовано.

Підшипники і підп'ятники ковзання застосовують у сепараторах для високошвидкісних шпинделів верстатів, газових турбінах, центрифугах, двигунах внутрішнього згоряння (колінчасті вали встановлюють на підшипники ковзання), при особливо важких режимах роботи машин (прокатні стани, каменедробарки та ін.).

Корпус і кришку підшипників ковзання відливають із сірого чавуну. Металеві вкладиші виготовляють з антифрикційного чавуну, бронзи, сплавів на алюмінієвій основі. Бабіт, що має високі антифрикційні властивості, застосовують для заливання тонким шаром поверхні тертя чавунного, сталюого або бронзового вкладиша. Застосовують також біметалеві тонкостінні вкладиші, самозмащувані вкладиші із графіту, дисульфиду молібдену. В якості матеріалів вкладишів використовують

також металокераміку (залізографітні і бронзографітні вкладиші) і неметалеві матеріали: пластмаси (текстоліт, капрон та ін.), тверді породи дерева (самшит, бук, дуб, граб), пресовану деревину; гуму. Вибір матеріалу вкладиша залежить від умов експлуатації, характеру навантаження, кутової швидкості цапфи, режиму мащення та ін.

Підшипники ковзання переважно розраховують на зносостійкість.

### **3.6.2. Підшипники кочення**

Опори валів і осей, в яких тертя ковзання замінено тертям кочення, називають *підшипниками кочення*.

*Переваги підшипників кочення порівняно із підшипниками ковзання:*

– значно менші втрати на тертя, вищий ККД (до 0,995) і менше нагрівання;

– економія кольорових матеріалів (бабіту, бронзи);

– менші габаритні розміри в осьовому напрямку;

– простота обслуговування і заміни;

– менша витрата мастил;

– порівняно невисока вартість внаслідок масовості виготовлення стандартних підшипників, відносно малі експлуатаційні витрати, а також їх взаємозамінність, що спрощує ремонт машин і устаткування.

*Недоліки підшипників кочення:*

– обмежена можливість застосування при дуже великих навантаженнях і високих кутових швидкостях цапф (за винятком спеціальних закритих підшипників кочення);

– непридатність для роботи при значних ударних і вібраційних навантаженнях через високі контактні напруження і погану здатність демпфірувати коливання.

– більші, ніж у підшипників ковзання, габаритні розміри в радіальному напрямі.

– нероз'ємність конструкції, що не дає змоги застосовувати підшипники кочення в деяких складальних одиницях (наприклад, для шийок колінчастих валів).

Незважаючи на недоліки підшипники кочення дуже поширені. Наприклад, тільки у тракторному і сільськогосподарському машинобудуванні використовують підшипники 630 типорозмірів, які входять до 28 конструктивних груп.

Підшипники кочення (рис. 3.51) звичайно складаються з двох кілець: внутрішнього 2, насадженого на вал, і зовнішнього 1, закріпленого в корпусі підшипника; тіл кочення – кульок або роликів 3, які котяться по бігових доріжках кілець на певній відстані один від одного, і сепаратора 4 – деталі, яка відокремлює тіла кочення.

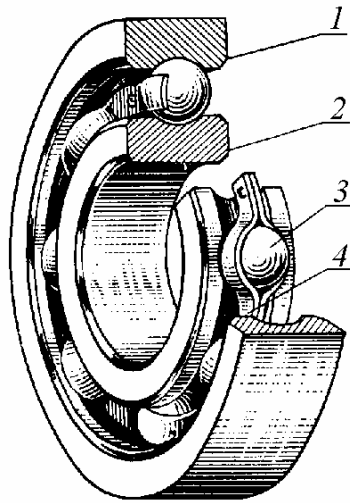


Рис. 3.51

Кільця і тіла кочення виготовляють із шарикопідшипникової сталі з високим вмістом хрому (ШХ6, ШХ15, ШХ20СГ) та інших легованих сталей, наприклад сталі 12Х2Н4А, 18ХГТ. Сепаратор виготовляють із сталей Ст1, Ст2, 0, 8, 10, а також з латуні, бронзи, капрону, текстоліту, металопластмас, фторопласту з металевими і неметалевими наповнювачами.

Підшипники кочення виготовляють різних конструкцій із зовнішнім діаметром від 1 до 3000 мм. Допуски, терміни і визначення підшипників кочення стандартизовані.

Класифікують підшипники кочення за такими ознаками.

За напрямом сприйняття навантаження — *радіальні* (рис. 3.52, а), в основному для радіальних навантажень; *радіально-упорні* (рис. 3.52, в) для сумісних радіальних та осьових навантажень; *упорні* (рис. 3.52, б) для осьових навантажень, *упорно-радіальні* для осьового та радіального навантажень.

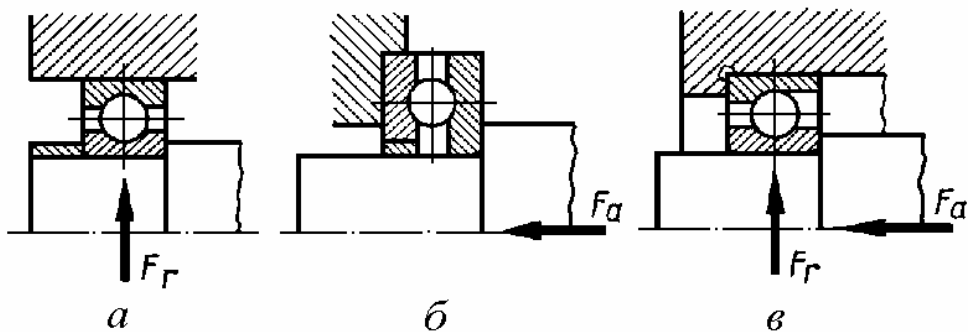


Рис. 3.52



За формою тіл кочення — *кулькові, роликові* (з циліндричними, конічними, бочкоподібними, голчастими й витими роликами).

За кількістю рядів тіл кочення — *однорядні, дворядні, чотирирядні*.

За способом самоустановлення — *несамоустановні, самоустановні* (сферичні).

Залежно від навантажувальної здатності і габаритних розмірів при одному й тому самому діаметрі внутрішнього кільця підшипники за стандартом поділяють на серії: за радіальними розмірами — *надлегкі, особливо легкі, легкі, середні, важкі*; за шириною — *вузькі, нормальні, широкі, особливо широкі*.

Коротко розглянемо найпоширеніші стандартні підшипники кочення.

*Радіальні однорядні шарикопідшипники* (рис. 3.53а,б,в) можуть сприймати радіальне і незначне осьове навантаження. Набули найбільшого поширення в машинобудуванні. Витримують великі кутові швидкості вала (особливо з сепараторами з кольорових металів) і допускають перекіс кілець до 10'. найдешевші з підшипників кочення. Можуть мати канавку на зовнішньому кільці, для запобігання від осьового зміщення у корпусі редуктора (рис. 3.53, в).

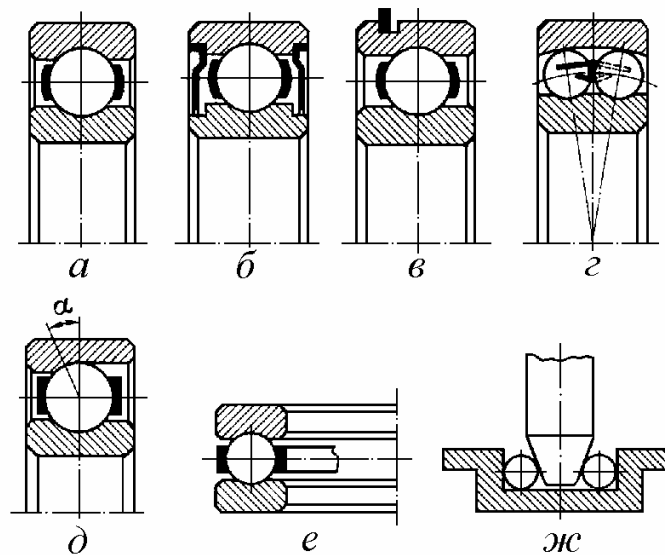


Рис. 3.53

*Радіальні роликотілопідшипники* (рис. 3.54, а) з циліндричними роликами сприймають тільки радіальне навантаження, але якщо є борти на кільцях (рис. 3.54, б), то можуть сприймати незначне осьове навантаження. Навантажувальна здатність підшипників значно більша, ніж кулькових, однак вони не допускають перекосу кілець, оскільки ролики починають

працювати кромками й підшипники швидко виходять з ладу.

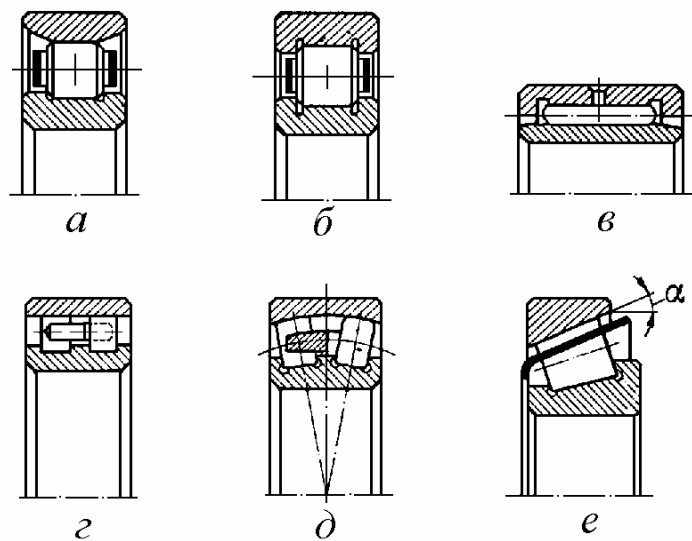


Рис. 3.54

*Роликові підшипники з витими роликами* сприймають радіальне навантаження при невисоких кутових швидкостях. Застосовують при ударних навантаженнях (удари пом'якшуються податливістю витих роликів). Не потребують високої точності монтажу і спеціального захисту від забруднень.

*Голчасті підшипники* (рис. 3.54, в) мають ролики з відношенням довжини до діаметра 4... 10. Можуть працювати при значних радіальних навантаженнях, витримують ударні навантаження при невисоких кутових швидкостях. Не допускають осьового навантаження і перекосу кілець. Стандарт також регламентує розміри голчастих підшипників без кілець. Ці підшипники застосовують у карданних шарнірах, двигунах і коробках передач мотоциклів, автомобілів і тракторів, в опорах кривошипно – повзунних і кулісних механізмів.

*Радіально – упорні шарикопідшипники* (рис. 3.53, д) застосовують у підшипникових вузлах, які сприймають разом радіальні і осьові навантаження. Радіальна вантажопідйомність таких підшипників на 30...40 % більша, ніж у радіальних однорядних шарикопідшипниках. Їх застосовують при середніх і високих кутових швидкостях і неударних навантаженнях.

Стандартом регламентовано також основні розміри *радіально-упорних роликових сферичних одинарних підшипників*. Кульковий радіально-упорний підшипник може сприймати осьове навантаження тільки в одному напрямі.

*Конічні роликові підшипники* (рис. 3.54, е) також призначені для сприймання радіального і осьового навантажень. Порівняно з радіально-упорними кульковими підшипниками мають більшу вантажопідйомність, відзначаються можливістю роздільного монтажу внутрішнього (разом з роликками і сепараторами) і зовнішнього кілець, а також властивістю сприймати невеликі ударні навантаження. Недоліком цих підшипників є велика чутливість до неспіввісності та відносного перекошення кілець.

*Кулькові* (рис. 3.53, г) і *роликові* (рис. 3.54, г) *дворядні підшипники* мають підвищену вантажопідйомність порівняно з однорядними. Допускають перекіс кілець до  $2^\circ$  і тому їх можна застосовувати для валів зниженої жорсткості, а також у тих випадках, коли співвісність посадочних місць не гарантовано.

При дії значних радіальних і осьових навантажень застосовують радіально – упорні підшипники з конічними роликками (рис. 3.54, е).

Упорні шарико – або роликопідшипники (рис. 3.53, е, ж) призначені для сприймання тільки осьового навантаження. Їх установлюють в парі з радіальними шарико – або роликопідшипниками, які центрують вісь вала і обмежують його переміщення в радіальному напрямі.

*Спеціальні підшипники:* високошвидкісні для газотурбінних двигунів, для електроагрегатів, які працюють при форсованих режимах, корозійностійкі, які працюють в агресивних середовищах (розчини кислот, лугів, морська вода) і середовищах з низькою мастильною здатністю.

Методика добирання підшипників кочення відповідає вимогам міжнародних стандартів. Підшипники розраховують (підбирають) за критерієм статичної або динамічної вантажопідйомності (вантажопідйомної сили).

Розрахунок і наступне добирання підшипників здійснюють за спеціальними таблицями каталогів залежно від ряду характеристик їх роботи: розміру й напрямку діючих на підшипник навантажень, характеру навантаження (спокійне, з поштовхами або ударами та ін.), діаметра цапфи, на яку насаджується підшипник, кутової швидкості (частоти обертання) кільця підшипника, потрібного строку служби підшипника (його довговічності), навколишнього середовища та його температури, особливих вимог до підшипника (самоустановлення, переміщення вала в осьовому напрямі, підвищення жорсткості і точності обертання) і прийнятної його вартості.

Підшипники кочення, обертові кільця яких мають кутову швидкість  $\omega \leq 0,105 \text{ рад/с}$  або частоту обертання  $n \leq 1 \text{ об/хв}$ , розраховують, а потім добирають за *статичною вантажопідйомністю* (вантажопідйомною силою):

$$P_0 \leq C_0, \quad (3.110)$$

### Частина третя

де  $P_0$  — еквівалентне навантаження підшипника,  $H$ , яке визначають за формулою

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a, \quad (3.111)$$

де  $F_r, F_a$  — відповідно радіальне і осьове навантаження підшипника;

$X_0, Y_0$  — коефіцієнти радіального і осьового навантажень;

$C_0$  — допустиме табличне значення статичної вантажопідйомності.

При частоті обертання кільця підшипника  $n > 1$  об/хв його добирають за динамічною вантажопідйомністю (розрахунок на довговічність). Для цього визначають потрібне значення динамічної вантажопідйомності  $C_{нотр}$  ( $H$  або  $\kappa H$ ) і потім за таблицею каталогу добирають підшипник, табличне значення динамічної вантажопідйомності якого не нижче від потрібного:

$$C_{нотр} \leq C. \quad (3.112)$$

Потрібне значення динамічної вантажопідйомності (вантажопідйомної сили) визначають за формулою:

$$C_{нотр} = P \left( \frac{60n L_h}{10^6} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.113)$$

де  $P, H$  — еквівалентне динамічне навантаження,  $n, об/хв$  — частота обертання,  $L_h, год$  — бажана або потрібна довговічність підшипника (для механізмів загального машинобудування  $L_h = (2...20)10^3 год$ , для підшипників редукторів рекомендовано  $L_h = (12...25)10^3 год$ ),  $p$  — величина, яка залежить від форми кривої контактної втомленості (для кулькових підшипників  $p = 3$ , для роликкових підшипників  $p = \frac{10}{3}$ ).

Еквівалентне динамічне навантаження знаходять за формулою:

$$P = (X V F_r + Y F_a) K_\sigma K_T, \quad (3.114)$$

де  $X$  — коефіцієнт радіального навантаження,  $Y$  — коефіцієнт осьового навантаження,  $F_r, H$  — фактичне радіальне навантаження підшипника,  $F_a, H$  осьове навантаження підшипника,  $V = 1,0...1,2$  — коефіцієнт обертання,  $K_\sigma = 1,0...3,0$  — коефіцієнт безпеки, що залежить від типу механізму, в якому підшипник установлений, і характеру навантаження на нього,  $K_T$  — температурний коефіцієнт, що залежить від температури підшипника (при  $t \geq 100^\circ$ ).

Коефіцієнти  $X$  і  $Y$  залежать від відношення  $\frac{F_a}{V F_r}$ , від значення коефіцієнта впливу осьового навантаження  $\varepsilon$ , а також від відношення осьового навантаження підшипника до його статичної вантажопідйомності  $\frac{F_a}{C_0}$ . Для підшипників з короткими циліндричними роликами і для голчастих підшипників  $X = 1$ , причому  $F_a = 0$ . Для упорних підшипників  $Y = 1$ , причому  $F_r = 0$ .

Під дією радіальних навантажень  $F_r$  в радіально – упорних підшипниках (кулькових і роликових) виникають осьові складові  $S$  реакцій, які розраховують за формулами:

для кулькових радіально-упорних підшипників

$$S = e F_r, \quad (3.115)$$

для конічних роликових підшипників

$$S = 0,83 e F_r, \quad (3.116)$$

де  $e$  – коефіцієнт осьового навантаження, який залежить від кута контакту.

Отже, при розрахунку радіально – упорних підшипників треба в формули (3.111) і (3.114) замість  $F_a$  підставляти сумарне осьове навантаження в опорах вала  $A$  і  $B$ :  $F_{aA}$  і  $F_{aB}$ , що відображає вплив зовнішнього осьового навантаження  $F_a$  та осьових складових реакцій  $S_A$  і  $S_B$ , які обчислюють за формулами (3.115) і (3.116).

Оскільки звичайно підшипники, на які спирається вал, мають той самий типорозмір, їх добирають за найбільшою статичною або динамічною вантажопідйомністю (вантажопідйомною силою).

При дії комбінованого навантаження (радіального  $F_r$  і осьового  $F_a$ ) можливе застосування радіальних шарико – підшипників, якщо

$$\frac{F_a}{F_{r \max}} \leq 0,2 \dots 0,25.$$

Основні геометричні розміри підшипників кочення і значення їх допустимої статичної та динамічної вантажопідйомності стандартизовані.

### **3.6.3. Муфти**

Пристрої, призначені для з'єднання двох валів між собою або із деталями, насадженими на вал, з метою передавання обертального моменту, називають *муфтами*. Функціональне призначення муфт різне. Деякі трансмісії (з'єднання валів) потребують регульованих або

### Частина третя

запобіжних муфт, а також муфт, які можуть легко з'єднувати або роз'єднувати вали, з'єднувати вали різного діаметра або віддалені кінці валів.

У машинобудуванні *механічні муфти* (електричні, гідравлічні та інші муфти не розглядаються) умовно можна поділити на чотири класи:

1. *Муфти нерозчіпні* (постійно діючі) з'єднують вали так, що їх роз'єднати можна тільки демонтажем муфти після зупинки машини. Муфти цього класу поділяють на жорсткі, компенсуючі і пружні.

2. *Муфти керовані* призначені для з'єднання або роз'єднання валів навіть під час роботи машини. До цього класу входять синхронні і фрикційні (асинхронні) муфти.

3. *Муфти самодіючі*. Ці муфти автоматично виконують включення і виключення при заданій швидкості (відцентрові муфти), передавання моменту тільки в одному напрямі (обгінні муфти), обмеження обертового моменту (запобіжні муфти).

4. *Інші муфти* являють собою конструктивне поєднання різних муфт. Розглянемо основні типи нерозчіпних муфт.

Існує три основні види *жорстких муфт*, що потребують точної співвісності з'єднаних валів. Найпростішою із них є *втулкова муфта*, яку закріплюють на валах за допомогою конічних шрифтів (рис. 3.55, а) або призматичних клинових (рідше) шпонок (рис. 3.55, б).

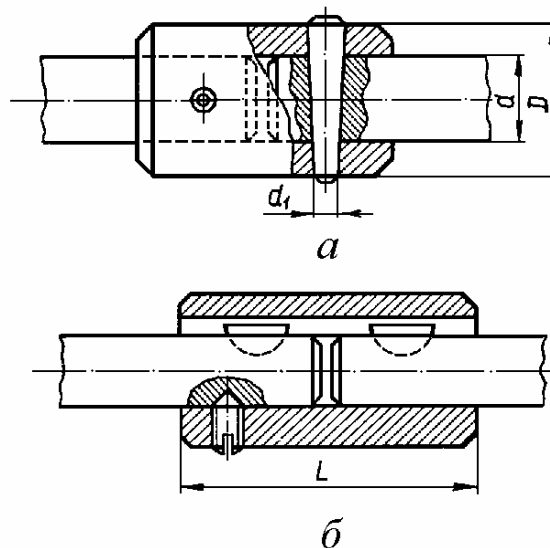


Рис. 3.55

Втулкові муфти застосовують порівняно рідко, оскільки крім загального недоліку, характерного для жорстких муфт, – вимоги точної співвісності осей з'єднаних валів – вони незручні при складанні і розбиранні.

*Фланцева муфта* складається з двох півмуфт (рис. 3.56), що мають форму фланців з коловим виступом на одній із півмуфт і западиною

(виточкою) на другій, які забезпечують співвісність фланців при складанні. Фланцеві муфти надійно з'єднують співвісні вали і можуть передавати великі моменти; вони прості за конструкцією, дешеві і можуть з'єднувати вали різних діаметрів. Півмуфти з'єднані між собою болтами, які працюють на зріз. Такі муфти застосовують там, де потрібна максимальна жорсткість з'єднання або відповідне фазове співвідношення ведучого і веденого валів.

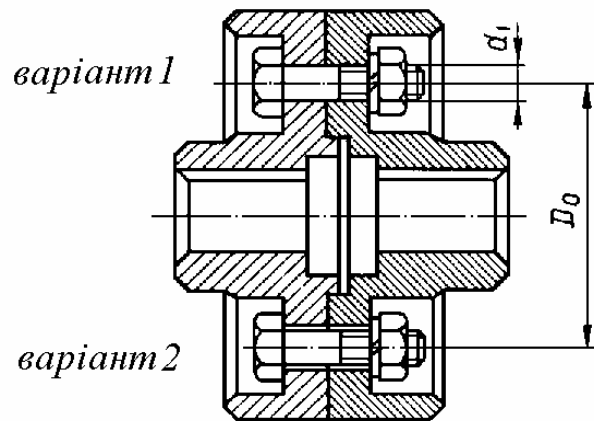


Рис. 3.56

*Поздовжньо – рознімна* муфта складається із двох половин з внутрішніми напівциліндричними поверхнями (рис. 3.57), які охоплюють консольні частини з'єднуваних валів і стягнуті болтами. Болти, що стягують півмуфти, працюють на розтяг, тобто їх треба затягти так, щоб створити між поверхнями півмуфт і охоплюваних валів сили тертя, які забезпечують передачу заданого моменту.

Як і всі жорсткі муфти, *поздовжньо – рознімна* потребує точної співвісності з'єднуваних валів та, як і втулкова муфта, призначена звичайно для з'єднання валів однакового діаметра.

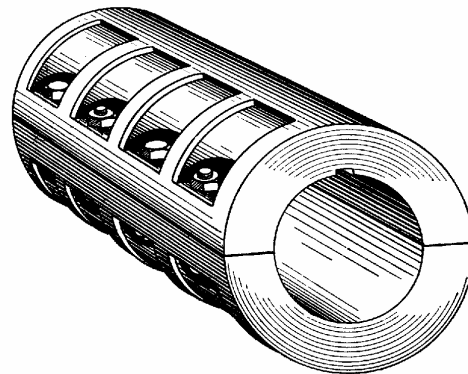


Рис. 3.57

*Компенсуючі самоустановні муфти* застосовують для компенсації помилок відносного положення з'єднаних валів – радіального зміщення центрів, неспіввісності (взаємний нахил осей валів), осьового зміщення та інших похибок, які можуть бути наслідком неточності обробки і монтажу, виникнення деформацій і зміни температури.

До компенсуючих самоустановних муфт належать:

1) кулачково – розширювальна муфта (рис. 3.58, а), яка компенсує незначні осьові переміщення;

2) кулачково – дискова муфта, що складається з двох півмуфт (рис. 3.58 б), насаджених з натягом на кінці валів, і середнього диска з двома взаємно перпендикулярними виступами (кулачками). Тертюві поверхні цієї муфти змащують, і вона компенсує радіальні і кутові зміщення осей валів;

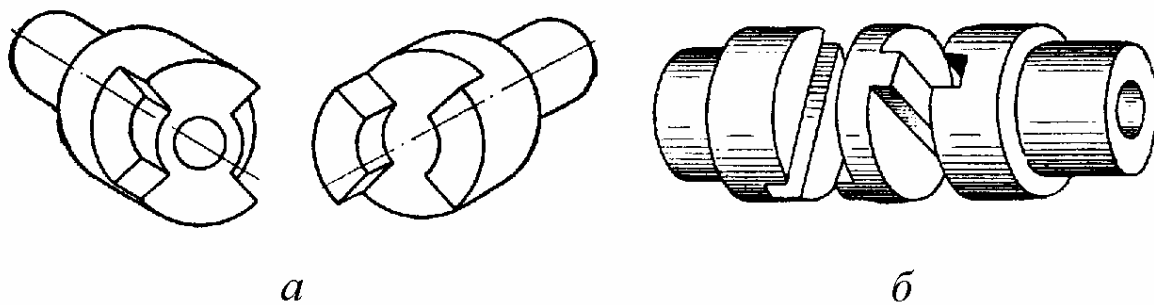


Рис. 3.58

3) зубчаста муфта (рис. 3.59, а) також компенсує радіальне і кутове зміщення осей валів і застосовується для передавання великих моментів без ударів і різких поштовхів;

4) ланцюгова муфта, яка має таке саме призначення, що і зубчаста, але передає менші моменти;

5) хрестово – шарнірна муфта (універсальна муфта Кардана – Гука (рис. 3.59, б), що дуже поширена в автомобільній та авіаційній промисловості і в приладобудуванні. Складається з двох вилок і хрестовини. Вилки насаджують на з'єднані кінці валів, а хрестовина шарнірно з'єднує вилки. Компенсує значні кути нахилу осей валів (до  $30^\circ$ ). Дві послідовно з'єднані муфти компенсують великі зміщення осей валів.

*Пружні муфти* застосовують у машинах, які працюють зі змінним навантаженням і частими включеннями, а також там, де неможливо досягти точної співвісності з'єднаних валів. Пружні елементи муфт роблять із пружинної сталі, гуми, пластмас. Вони пом'якшують поштовхи і удари при роботі муфти. Пружні муфти встановлюють на швидкохідні



вали і застосовують у механізмах, які працюють у режимі динамічних навантажень. В якості пружних елементів в різних конструкціях пружних муфт застосовують гуму, шкіру, пружини різних форм і жорсткості.

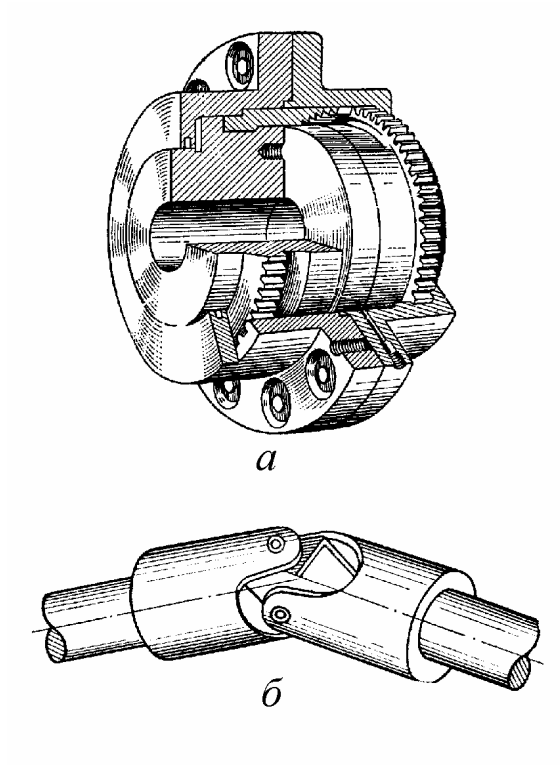


Рис. 3.59

Розглянемо керовані муфти.

Розрізняють синхронні *кулачкові* (рис. 3.60, а) і асинхронні *фрикційні* (рис. 3.60, б) керовані муфти.

Найпоширенішими є фрикційні муфти, які використовуються в транспортних машинах, верстатах і т. ін. Вони забезпечують плавне зчеплення веденого і ведучого валів за рахунок сил тертя при будь – якій різниці кутових швидкостей з'єднаних валів. При виникненні різких перевантажень півмуфти пробуксовують, захищаючи механізм від руйнування. Залежно від форми та кількості активних поверхонь тертя фрикційні муфти поділяють на дискові (рис. 3.60, б), багатодискові, конусні, циліндричні, барабанні (з колодками, розтискними кільцями або обтяжними стрічками). Найчастіше застосовують багатодискові фрикційні муфти, що мають малі габарити й потребують для включення невеликих зусиль.

Розглянемо самодіючі муфти. Ці муфти забезпечують автоматичне з'єднання і роз'єднання валів при зміні заданого режиму роботи машини.

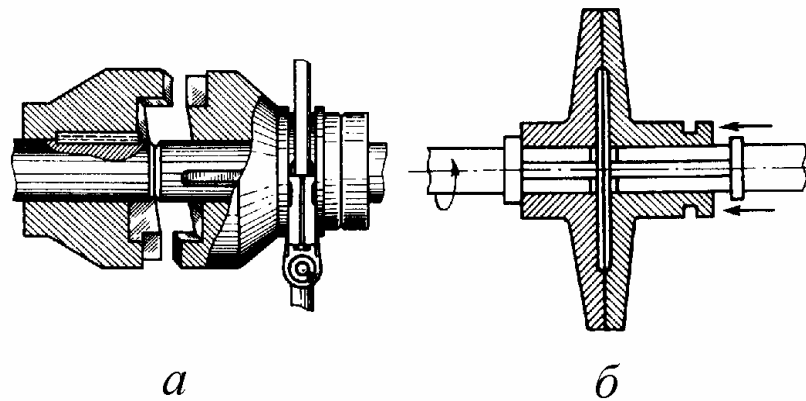


Рис. 3.60

*Відцентрова муфта* (рис. 3.61, а) призначена для автоматичного зчеплення (розчеплення) валів при певних кутових швидкостях внаслідок дії відцентрових сил, при збільшенні кутової швидкості фрикційні колодки відтискуються і муфта замикається.

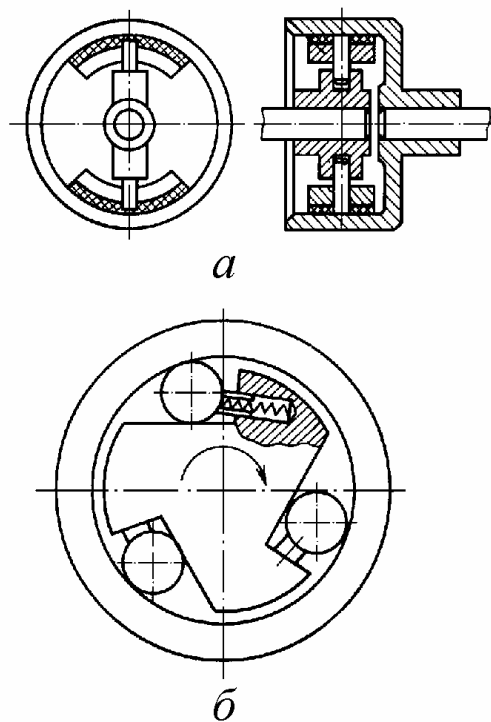


Рис. 3.61

*Обгінна муфта* (муфта вільного ходу) забезпечує автоматичне з'єднання валів. Обгінні муфти бувають зубчасті, кулачкові і фрикційні. На рис. 3.61, б показано фрикційну обгінну муфту, що набула найбільшого поширення. При передаванні обертального моменту ролики обгінної муфти внаслідок тертя заклинюються між поверхнями обойми і зірочки

муфти. При зворотному обертанні ролики викочуються в широкі ділянки обойми і муфта розмикається.

*Запобіжні фрикційні муфти* найбільше застосовуються при порівняно частих перевантаженнях. Вони відрізняються від керованих в основному тим, що в них немає механізму включення, тобто запобіжні муфти постійно замкнуті, тертьові поверхні притиснуті одна до одної пружинами. Менш поширені кулачкові і кулькові запобіжні муфти, в яких при перевантаженнях кулачки або кульки однієї півмуфти видавлюються з западин другої і муфта розмикається.

Коли перевантаження виникають рідко, застосовують *запобіжні муфти з руйнівною ланкою* – зрізним штифтом 1 (рис. 3.62). При перевантаженні сталеві штифти, вставлені в отвори загартованих втулок 2, зрізуються і муфта розмикається. Запобіжні муфти встановлюють якомога ближче до місця виникнення перевантаження; вони працездатні при точній співвісності валів.

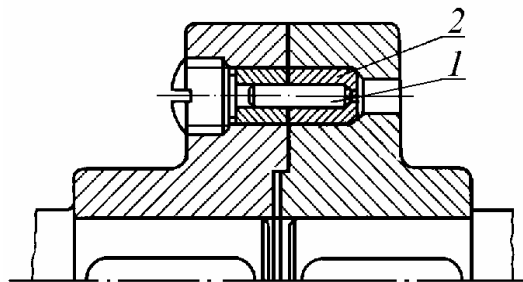


Рис. 3.62

До інших муфт відносяться такі, що складаються із комбінацій окремих муфт (найчастіше пружно – або жорсткокомпенсуючі муфти із запобіжними муфтами). Їх застосовують, коли немає можливості забезпечити потрібний характер з'єднання валів однією муфтою.

Вхідним параметром для розрахунку муфт є обертальний момент на валу.

### **3.6.4. Редуктори**

*Редуктором* називається зубчастий, черв'ячний або зубчато – черв'ячний передавальний механізм, виконаний і у закритому корпусі і призначений для зниження кутової швидкості, а отже, підвищення обертального моменту.

На відміну від редуктора, механізм, призначений для підвищення кутової швидкості (відповідно до зниження обертального моменту), називають *мультиплікатором* (прискорювачем).

### Частина третя

Закритий корпус редуктора захищає механізм передачі від пороху і бруду, а також грає роль масляної ванни. Крім цього розміщення опор валів редуктора в одному жорсткому корпусі забезпечує стале відносне розташування осей валів, що дозволяє використовувати широкі колеса із малим модулем. А застосування малих модулів, в свою чергу, приводить до збільшення точності, тихохідності передачі і до зменшення її вартості. Добре змащування сприяє збільшенню зносостійкості і ККД передачі. Наявність корпуса надає також безпеку в роботі редукторів.

Ці безперечні переваги редукторів пояснюють їх широке застосування на відміну від відкритих передач, які використовують тільки в окремих специфічних випадках, коли застосування редукторів недоцільно або неможливо.

Редуктори класифікують:

– за видом передач — на *циліндричні* з паралельними осями валів (рис. 3.63, а), *конічні* з пересічними осями валів (рис. 3.63, б), *черв'ячні* з перехресними осями валів (рис. 3.63, в), *комбіновані* конічно – циліндричні, зубчасто – черв'ячні та ін.;

– за кількістю пар передач — на *одноступінчасті циліндричні* з прямозубими колесами при  $u \leq 7$ , з косозубими або шевронними колесами при  $u \leq 10$  і  $N \leq 50000 \text{ KВт}$ , *одноступінчасті конічні* з прямими, косими і криволінійними зубами при  $u \leq 5$  і  $N \leq 100 \text{ KВт}$ , *одноступінчасті черв'ячні* при  $u = 8 \dots 80$  і  $N \leq 50 \text{ KВт}$ , *багатоступінчасті* (найчастіше дво – і триступінчасті).

Для двоступінчастих циліндричних редукторів  $u \leq 50$ , для триступінчастих  $u \leq 160$ . Треба нагадати, що загальне передаточне число багатоступінчастих передач дорівнює добуткові передаточних чисел окремих ступенів.

Тихохідний ступінь циліндричних двоступінчастих редукторів виконують прямозубим і косозубим, а швидкохідний – косозубим. При оптимальному розподілі загального передаточного числа між ступенями циліндричного редуктора рекомендується передаточне число наступного тихохідного ступеня брати на 20...40 % меншим, ніж попереднього швидкохідного. Цим досягають найменшої маси і розміру коліс усіх ступенів редуктора; поліпшуються умови мащення зачеплень і забезпечується повніше заповнення колесами внутрішнього об'єму корпуса редуктора.

Мащення зубчастих і черв'ячних редукторів зменшує втрати потужності на тертя в зачепленні і підшипниках, значно знижує спрацювання тертьових поверхонь, зменшує нагрівання передачі, знижує шум і захищає від корозії.

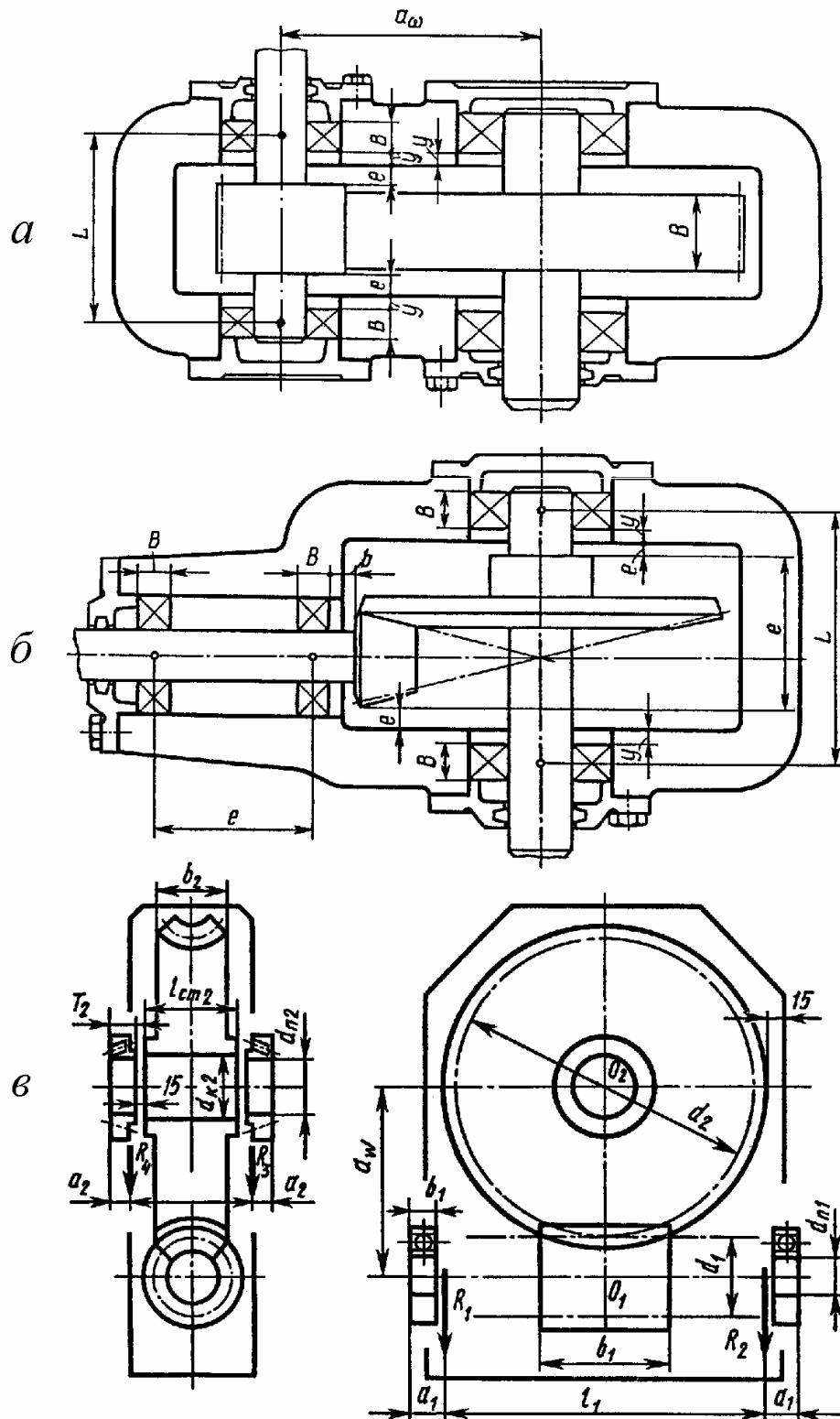


Рис. 3.63

### Частина третя

Мащення зубчастих і черв'ячних зачеплень в редукторах, які передають порівняно невеликі потужності при колових швидкостях, що не перевищують  $12 \text{ м/с}$ , здійснюють зануренням зубчастих або черв'ячних коліс (черв'яків) у масло, яке заливають у картер редуктора (для черв'ячних передач  $v_s \leq 12 \text{ м/с}$ ).

У черв'ячних редукторах при коловій швидкості черв'яка  $v_1 \geq 4 \dots 5 \text{ м/с}$  рекомендується черв'як розміщувати над колесом. При нижньому розміщенні черв'яка (під колесом) і  $v_1 \geq 5 \text{ м/с}$  черв'як інтенсивно збовтує масло, що призводить до швидкого його старіння і погіршення мащення.

Достатній такий рівень масла в корпусі редуктора, при якому забезпечено занурення циліндричного колеса на висоту зуба, а конічного – на всю довжину і висоту зуба. Звичайно глибина занурення для циліндричних зубчастих коліс дорівнює  $(1 \dots 5)t_n$ , а для конічних –  $(0,5 \dots 1)b$ . Об'єм масляної ванни приймають  $\sim 0,4 \dots 0,8 \text{ л}$  масла на  $1 \text{ кВт}$  потужності редуктора.

В багатоступінчастих редукторах діаметри коліс не однакові, тому нормальне занурення у масло зубів коліс меншого діаметра приводить до глибшого, ніж зазначено, занурення зубів коліс більшого діаметра (з метою обмеження втрати потужності на розмішування мастильного матеріалу не рекомендується занурювати тихохідне зубчасте колесо на глибину більше як  $\frac{1}{6}d_a$ ). У деяких випадках, щоб уникнути надмірного занурення коліс у масло, застосовують спеціальні мастильні шестірні, мастильні кільця, бризковики або роздільні мастильні ванни в корпусі редуктора.

У швидкохідних редукторах або в редукторах, які передають великі потужності, зачеплення передач змащують за допомогою насосів, що подають масло із картера редуктора безпосередньо в зону зачеплення.

Підшипники змащують рідким маслом, що надходить до них із загальної масляної ванни (картера) редуктора, розбризкуванням або, при малих швидкостях, пластичними мазями (солідол), які герметизують вузли тертя і добре заповнюють зазори.

Мастильний матеріал повинен мати *маслянистість* – здатність утворювати на поверхні тертя стійкі адсорбовані плівки і *в'язкість* – опір проти відносного зсуву шарів масла.

*Рідке масло* — основний мастильний матеріал. Воно має низький коефіцієнт внутрішнього тертя, легко надходить до місця мащення, має охолоджувальну дію. Стандартом регламентовано наступні марки (залежно від кінематичної в'язкості при  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ ) індустриальних масел: И – 5А, И – 8А, И – 12А, И – 20А, И – 25А, И – 30А, И – 40А, И – 50А, И – 70А, И – 100А.

---

## **ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ**

1. В чому полягає різниця між віссю і валом?
2. Наведіть основну класифікацію валів і галузь їх застосування.
3. Поясніть необхідність використання підшипників.
4. Наведіть класифікацію підшипників ковзання і галузь їх застосування.
5. Які переваги і недоліки мають підшипники ковзання у порівнянні із підшипниками кочення?
6. Наведіть класифікацію підшипників кочення і галузь їх застосування.
7. Поясніть принцип розрахунку радіальних підшипників кочення.
8. Як враховується осьова складова навантаження при розрахунках радіально – упорних підшипників?
9. Дайте визначення муфти і її основне призначення.
10. Назвіть основну класифікацію муфт і галузь їх застосування.
11. Поясніть призначення і принцип дії запобіжних муфт.
12. Дайте визначення редуктора. Чим редуктор відрізняється від мультиплікатора?
13. Які переваги мають редуктори порівняно із відкритими передачами?
14. Наведіть основну класифікацію редукторів.
15. Як здійснюється мащення механізму передачі в редукторах?

### **Список літератури**

1. Бялер І.Я., Левінсон В.Н., Михайловський В.А., Саліон В.Ю. Технічна механіка. – К.: Вища школа, 1971, – 380 с.
2. Мовнин М.С., Израелит А.Б., Рубашкин А.Г. Основы технической механики. – Л.: Судостроение, 1973, – 402 с..
3. Ковалев Н.А. Прикладная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
4. Жуков К.П. Расчет и проектирование машин. – М.: Высшая школа, 1980. – 247 с.
5. Булгаков В.М., Литвинов О.І., Войтюк Д.Г. Інженерна механіка. Ч. І. Теоретична механіка – Вінниця «Нова Книга»: , 2006. – 502 с.
6. Еременко О.І. Теорія механізмів і машин. Конспект лекцій. – К.: НАУ, 2002. – 150 с.
7. Мовнин М.С., Израелит А.Б. Техническая механика. Часть II. Сопротивление материалов. – Л.: Изд-во ЛТА, 1972. – 65 с.
8. Таубер В.А. Подъемно-транспортные машины. – М.: Лесная промышленность, 1980. – 456 с.
9. Слупський Є.І. Деталі машин. Н.: Техніка, 1971. – 136 с.
10. Решетов Д.Н. Деталі машин. – М.:Машиностроение, 1989.
- 11.Иванов М.Н., Финогенов В.А. Деталі машин. – М.: Высшая школа. 2008, – 410 с.
12. Расчет деталей машин на ЭВМ. / Под ред. Д.Н. Решетова, С.А. Шувалова. – М.: Высшая школа, 1985.



---

Навчальне видання

Литвинов Олег Іванович

Мороз Любов Іванівна

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

## **НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

Редактор Литвинов О.І.  
Макетування Литвинов О.І.