

О.І. ЛИТВИНОВ, Л.І. МОРОЗ

ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ОКР «МОЛОДШИЙ СПЕЦІАЛІСТ»

НІЖИН-2013

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ
І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

НІЖИНСЬКИЙ АГРОТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

О.І. Литвинов, А.І. Мороз

ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
ДЛЯ ОКР «МОЛОДШИЙ СПЕЦІАЛІСТ»
СПЕЦІАЛЬНІСТЬ 5.10010102 «МОНТАЖ,
ОБСЛУГОВУВАННЯ ТА РЕМОНТ
ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ УСТАНОВОК В
АГРОПРОМИСЛОВОМУ КОМПЛЕКСІ»**

НІЖИН-2013

УДК 531.(075.8)
ББК 22.21Я 73
Б81

Друкується за рішенням Вченої ради
Ніжинського агротехнічного інституту
(Протокол №3 від 14. 10. 2013р.)

Рецензенти:

Ю.М. Андрєєв, доктор технічних наук, професор НТУ «ХПІ».

С. П. Приходько, старший викладач НАТІ

Укладачі навчального посібника висловлюють глибоку вдячність студентці факультету механізації сільського господарства (гр.БМ122ск) Супрун Ользі Миколаївні за допомогу в підготовці рукопису.

Литвинов О.І., Мороз Л.І. Інженерна механіка. Навчальний посібник для ОКР «Молодший спеціаліст». Спеціальність 5.10010102 «Монтаж, обслуговування та ремонт електротехнічних установок в агропромисловому комплексі» – Ніжин: ПП Лисенко М.М., 2013. 522 с.

Навчальний посібник «Інженерна механіка» складається із трьох частин, в яких висвітлюються матеріали наукових основ теоретичної механіки, опору матеріалів і деталей приладів і машин.

У матеріалах навчального посібника викладаються основні теоретичні положення, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє, на наш погляд, засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає у самостійній роботі студентів, виконанні лабораторно-практичних і розрахунково-графічних робіт.

- © О.І. Литвинов, Л.І. Мороз, 2013
- © Ніжинський агротехнічний інститут, 2013
- © Циклова комісія загально-технічних дисциплін, оригінал-макет, 2013

ЗМІСТ

Передмова	12
ЧАСТИНА I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ	
1. Вступ. Предмет механіки. Структура курсу.....	16
2. Короткий історичний нарис розвитку механіки	20
РОЗДІЛ I. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА	
1.1. Предмет і задачі статички. Механічні в'язі, реакції в'язей	28
1.1.1. Предмет статички. Основні поняття.	28
1.1.2. Задачі статички. Основні визначення	29
1.1.3. Аксиоми статички	31
1.1.4. Невільне тверде тіло. Механічна в'язь і реакція в'язі. Реакції основних типів в'язей	34
1.1.5. Класифікація систем сил. Метод перерізів.....	40
<i>Запитання для самоконтролю</i>	42
1.2. Система збіжних сил. Визначення рівнодійної.	
Умови рівноваги тіл	42
1.2.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної. Векторний спосіб додавання сил.....	42
1.2.2. Умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній формі...	44
1.2.3. Проекція сили на вісь і на площину	45
1.2.4. Визначення сили за її проекціями	47
1.2.5. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь.....	48
1.2.6. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил	49
1.2.7. Умови рівноваги тіла під дією системи збіжних сил	49
1.2.8. Методика розв'язування задач статички. Приклади	50
<i>Запитання для самоконтролю</i>	56
1.3. Теорія моментів і пар сил на площині	56
1.3.1. Алгебраїчний момент сили відносно центра (точки).....	56
1.3.2. Момент сили відносно центра (точки) як вектор	58
1.3.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної збіжних сил	61
1.3.4. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил...	63
1.3.5. Пара сил. Момент пари сил.....	65
Властивості пари сил	66
Теорема про еквівалентність пар сил.....	68
Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил на площині	70
<i>Запитання для самоконтролю</i>	70

1.4. Плоска система довільних сил. Додавання сил і умови рівноваги	71
1.4.1. Система сил, довільно розміщених на площині. Лема про паралельне перенесення лінії дії сили	71
1.4.2. Зведення плоскої системи довільних сил до заданого центра. Основна теорема статички	72
1.4.3. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил.....	74
1.4.4. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи паралельних сил	76
1.4.5. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил.....	77
<i>Запитання для самоконтролю</i>	81
1.5. Розрахунок системи із декількох тіл	81
1.5.1. Зосереджені сили і розподілені навантаження	81
1.5.2. Статично визначені і статично невизначені задачі	83
1.5.3. Рівновага системи із декількох твердих тіл	84
1.5.4. Методика і приклади розв'язування задач на рівновагу системи тіл	85
<i>Запитання для самоконтролю</i>	87
1.6. Розрахунок плоских ферм	87
1.6.1. Характеристика ферм. Порядок розрахунку	87
1.6.2. Метод вирізування вузлів.....	89
1.6.3. Метод Ріттера (метод перетину).....	93
<i>Запитання для самоконтролю</i>	95
1.7. Тертя ковзання і тертя кочення	95
1.7.1. Рівновага тіла з урахуванням тертя. Сили тертя ковзання	95
1.7.2. Кут і конус тертя ковзання.....	97
1.7.3. Рівновага тіла на похилій площині	100
1.7.4. Тертя кочення	101
1.7.5. Тертя нитки і шорсткої циліндричної поверхні.....	102
<i>Запитання для самоконтролю</i>	106
1.8. Просторова система сил. Момент сили відносно осі	106
1.8.1. Система сил у просторі.....	106
1.8.2. Момент сили відносно осі.....	107
<i>Запитання для самоконтролю</i>	109
1.9. Просторова система пар сил. Головний вектор	

і головний момент системи сил	109
1.9.1. Пари сил у просторі	109
1.9.2. Теорема про перенесення пари сил у паралельну площину.....	110
1.9.3. Умови еквівалентності пар сил у просторі.....	111
1.9.4. Додавання просторової системи пар.....	111
1.9.5. Умови рівноваги системи пар у просторі	112
1.9.6. Зведення просторової системи довільних сил до центра. Головний вектор і головний момент системи.....	113
1.9.7. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи довільних сил	114
<i>Запитання для самоконтролю</i>	115
1.10. Рівновага тіла під дією просторових систем сил	116
1.10.1. Умови рівноваги тіла у просторі	116
1.10.2. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи паралельних сил	117
1.10.3. Методика і приклади розв'язання задач просторової системи довільних сил.....	117
<i>Запитання для самоконтролю</i>	119
1.11. Центр паралельних сил і центр ваги	120
1.11.1. Центр паралельних сил.....	120
1.11.2. Координати центра паралельних сил.....	122
1.11.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії	123
<i>Запитання для самоконтролю</i>	126
1.11.4. Способи визначення координат центра ваги тіла.....	127
1.11.5. Центр ваги деяких однорідних тіл	130
Центр ваги дуги кола	130
Центр ваги трикутника.....	131
Центр ваги сектора.....	132
<i>Запитання для самоконтролю</i>	133
РОЗДІЛ II. КІНЕМАТИКА	
2.1. Вступ. Кінематика матеріальної точки	134
2.1.1. Предмет кінематики.....	134
2.1.2. Основні положення кінематики точки.....	136
2.1.3. Способи завдання руху матеріальної точки. Векторний спосіб	137
2.1.4. Координатний спосіб завдання руху точки.....	141
Траєкторія точки	142

Швидкість точки	143
Прискорення точки	144
<i>Запитання для самоконтролю</i>	145
2.1.5. Натуральний спосіб завдання руху матеріальної точки	145
2.1.6. Зв'язок між координатним і натуральним способами	147
2.1.7. Натуральний тригранник і натуральні осі координат	148
2.1.8. Кривина кривої.....	149
2.1.9. Прискорення точки в натуральних осях координат	150
2.1.10. Окремі випадки руху матеріальної точки.....	154
<i>Запитання для самоконтролю</i>	160
2.2. Кінематика твердого тіла	161
2.2.1. Поступальний рух твердого тіла	161
2.2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.	
Закон обертального руху.....	163
Кутова швидкість і кутове прискорення обертового тіла.....	165
Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі.....	166
Розподіл лінійних швидкостей і прискорень точок обертового тіла.....	168
Передача обертального руху.....	177
Методика і приклади розв'язування задач	178
<i>Запитання для самоконтролю</i>	179
2.2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла.....	179
Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи.....	180
Аналітичні дослідження плоскопаралельного руху тіла	181
Визначення швидкостей точок плоскої фігури	183
Визначення прискорень точок плоскої фігури	185
<i>Запитання для самоконтролю</i>	186
Миттєвий центр швидкостей.....	186
Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей	188
Визначення швидкостей точок фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей.....	190
<i>Запитання для самоконтролю</i>	192
РОЗДІЛ III. ДИНАМІКА	
3.1. Динаміка матеріальної точки	194
3.1.1. Вступ. Задачі динаміки. Динаміка вільної матеріальної точки	194

Закони динаміки матеріальної точки	196
Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	202
Дві задачі динаміки матеріальної точки	204
Інтегрування диференціальних рівнянь руху вільної точки ...	206
3.1.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки	214
3.1.3. Принцип д'Аламбера для невільної матеріальної точки	214
<i>Запитання для самоконтролю</i>	218
3.1.4. Коливання матеріальної точки	219
Кінематика гармонічних коливань	219
Класифікація коливань	220
Динаміка коливань. Вільні коливання матеріальної точки	221
Згасаючі коливання матеріальної точки	226
<i>Запитання для самоконтролю</i>	231
Змушені коливання точки без урахування опору	231
Явище механічного резонансу	235
Змушені коливання точки з урахуванням в'язкого тертя	237
Загальні властивості змушених коливань	241
<i>Запитання для самоконтролю</i>	241
3.2. Матеріальна система. Геометрія мас	243
3.2.1. Маса і центр мас матеріальної системи.	243
3.2.2. Моменти інерції матеріальної системи (тіла)	244
3.2.3. Радіус інерції тіла	246
3.2.4. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей	246
3.2.5. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми.	247
3.2.6. Відцентрові моменти інерції тіла	249
3.2.7. Момент інерції тіла відносно довільної осі, що перетинає задану точку	250
<i>Запитання для самоконтролю</i>	252
3.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи	253
3.3.1. Класифікація сил і їхні властивості	253
3.3.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи	254
3.3.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи	254
3.3.4. Закон збереження руху центра мас	256
<i>Запитання для самоконтролю</i>	257
3.4. Основні (загальні) теореми динаміки	258
3.4.1. Міри механічного руху і міри дії сил	258
3.4.2. Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи	259

3.4.3. Імпульс сили	260
3.4.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки.....	261
3.4.5. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи	262
3.4.6. Закон збереження кількості руху матеріальної системи.....	263
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>264</i>
3.5. Теорема про зміну моменту кількості руху точки і кінетичного моменту системи	264
3.5.1. Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі	264
3.5.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і закон його збереження.....	266
3.5.3. Кінетичний момент системи відносно центра і осі	268
3.5.4. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання	268
3.5.5. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи і закон його збереження.....	269
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>271</i>
3.6. Динаміка твердого тіла.	271
3.6.1. Основні задачі. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла	271
3.6.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла	272
3.6.3. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла.....	275
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>277</i>
3.7. Робота і потужність сили	278
3.7.1. Елементарна робота сили	278
3.7.2. Робота сили на кінцевому переміщенні. Потужність сили	279
3.7.3. Теорема про роботу рівнодійної сили.....	281
3.7.4. Робота сили в окремих випадках.....	282
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>286</i>
3.8. Кінетична енергія матеріальних точки і системи	287
3.8.1. Визначення кінетичної енергії. Теорема Кьоніга	287
3.8.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки	289
3.8.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла	291
3.8.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи ...	292
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>296</i>
3.10. Кінетостатика невільної матеріальної системи	296
3.10.1. Принцип д'Аламбера для матеріальної системи	297
3.10.2. Зведення сил інерції системи матеріальних точок до центра.	

Головний вектор і головний момент сил інерції	298
3.10.3. Визначення динамічних реакцій підшипників	304
3.10.4. Поняття про статичне і динамічне балансування	306
<i>Запитання для самоконтролю</i>	307
ЧАСТИНА II. РОЗРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ НА	
МІЦНІСТЬ	
2.1. Вступ. Основні положення	308
2.1.1. Задачі розрахунку на міцність елементів конструкцій	308
2.1.2. Методи розрахунків і моделі об'єктів дослідження.....	309
2.1.3. Класифікація сил, діючих на конструкції.....	311
2.1.4. Поняття про деформацію. Метод перерізів.....	311
2.1.5. Основні типи деформацій	313
2.1.6. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів	315
2.1.7. Поняття про напруження у перерізах.	316
2.2. Центральний розтяг і стиск	317
2.2.1. Види напружень по площадках, перпендикулярних до осі стрижня.....	317
2.2.2. Деформації при розтягу і стиску стрижня. Закон Гука. Коефіцієнт Пуассона.....	321
2.2.3.. Експериментальні дослідження розтягу і стиску матеріалів. Діаграма напружень	324
2.2.4. Допустимі напруження	328
2.2.5. Розрахунок на міцність стрижня при розтягу або стиску.....	329
2.2.6. Вплив власної ваги на деформацію стрижня	331
2.2.7. Розрахунок ідеальної (гнучкої) нитки.....	334
2.2.8. Напруження у стрижнях при зміні температури	335
2.2.9. Деформація зминання	336
2.3. Деформація зсуву	338
2.3.1. Дотичні напруження	338
2.3.2. Розрахунок на міцність при деформації зсуву	339
2.3.3. Закон парності дотичних напружень	341
2.3.4. Закон Гука при деформації зсуву	342
2.3.5. Напруження в похилих перерізах при лінійному напруженому стані	344
2.3.6. Напруження в похилих перерізах при плоскому	

напруженому стані	346
2.3.7. Про теорії міцності і руйнування	348
2.4. Деформація кручення	350
2.4.1. Відомості про деформацію кручення.....	350
2.4.2. Епюри крутних моментів	352
2.4.3. Закон Гука при деформації кручення. Напруження і деформації кручення	354
2.4.4. Розрахункові формули на міцність і жорсткість при крученні	357
2.4.5. Потенціальна енергія деформації кручення	360
2.5. Плоский згин прямого бруса	361
2.5.1. Загальні поняття про деформацію згину. Навантаження і типи опор балок.....	361
2.5.2. Визначення згинальних моментів і поперечних сил.....	363
2.5.3. Теорема про диференціальну залежність між згинальним моментом і поперечною силою	365
2.5.4. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів.....	366
2.5.5. Визначення нормальних напружень при згині	375
2.5.6. Розрахункова формула міцності балки на згин	380
2.5.7. Визначення дотичних напружень при згині.....	382
2.5.8. Визначення головних напружень при згині	385
2.5.9. Перевірка міцності балки на згин.....	386
2.5.10. Визначення деформацій балок при згині.....	387
2.5.11. Статична невизначеність балки	391
2.6. Складні деформації елементів конструкцій	391
2.6.1. Деформації косоного згину	392
2.6.2. Деформації згину і розтягу (стиску)	394
2.6.3. Деформації згину і кручення	397
2.6.4. Деформації кручення і розтягу (стиску)	400
2.7. Стійкість елементів конструкцій	401
2.7.1. Подовжній згин	401
2.7.2. Формула Ейлера для критичної сили.....	403
2.7.3. Розрахунки стиснених стрижнів на стійкість	406
2.8. Напруження при динамічних навантаженнях балок	409
2.8.1. Деякі загальні положення.....	409
2.8.2. Напруження при рівноприскореному русі	411
2.8.3. Розрахунок на удар	412
2.8.4. Розрахунки на міцність при змінних напруженнях.....	415

ЧАСТИНА III. ОСНОВИ КОНСТРУЮВАННЯ ДЕТАЛЕЙ ПРИЛАДІВ І МАШИН

Вступ	419
3.1. Основні критерії проектування. Конструктивні матеріали деталей приладів і машин	420
3.1.1. Умови працездатності деталей	420
3.1.2. Матеріали для приладів і машин	421
3.2. Механічні передачі	424
3.2.1 Характеристика механічних передач.....	424
3.2.2. Класифікація і основні параметри передач	424
3.3. Зубчаті і черв'ячні передачі	425
3.3.1. Загальна характеристика передач	425
3.3.2 Критерії працездатності зубчатих передач.	428
3.3.3. Розрахунок циліндричних прямозубих передач.	429
3.3.4. Геометрія циліндричних косозубих і конічних коліс	434
3.3.5. Розрахунок циліндричних косозубих і конічних коліс та черв'ячних передач	437
3.3.6. Точність зубчатих передач.....	441
3.3.7. Виготовлення зубчатих коліс.....	442
3.3.8. Передачі з зачепленням Новікова	444
3.3.9. Хвильова передача.....	445
3.3.10. Основні типи механічних редукторів	446
3.4. Ланцюгові передачі	448
3.4.1. Загальна характеристика передачі	448
3.4.2. Параметри ланцюгових передач.....	450
3.4.3. Кінематичний і силовий розрахунок ланцюгової передачі	452
3.4.4. Розрахунок і критерії працездатності ланцюгової передачі.....	454
3.5. Фрикційні передачі і варіатори	455
3.5.1. Загальна характеристика передач.....	455
3.6. Пасові передачі	457
3.6.1. Загальні відомості	457
3.6.2. Конструкція і матеріали пасових передач. Плоскі паси	457
3.6.3. Механіка пасових передач	459
3.6.4. Критерії працездатності і розрахунок пасових передач	463
3.7. Розрахунок і конструювання валів механічних передач	466
3.7.1. Загальні відомості	466
3.7.2. Матеріали валів. Визначення допустимих напружень.....	466

3.7.3. Розрахунок валів передач.....	468
Орієнтовний розрахунок валів.....	468
Розрахунок валів за еквівалентним моментом.....	469
Розрахунок валів на витривалість	470
Розрахунок валів на жорсткість	472
Розрахунок валів на коливання	473
3.7.4. Основи конструювання валів.....	473
3.8. Підшипники ковзання і підшипники кочення	474
3.8.1. Розрахунок і застосування підшипників ковзання.....	474
3.8.2. Класифікація і характеристика підшипників кочення	476
3.8.3. Несуча здатність підшипників кочення.....	479
3.8.4. Підбір підшипників кочення.....	480
3.9. Механічні з'єднання	483
3.9.1. Загальні відомості	483
3.9.2. Зварні з'єднання	483
3.9.3. Заклепочні з'єднання	488
3.9.4. Паяні та клейові з'єднання.....	490
3.9.5. Нарізні з'єднання	491
Момент загвинчування, к.к.д. і умови самогальмування	493
Розрахунок нарізних з'єднань.....	496
3.9.6. Клемові з'єднання	500
3.9.7. Шпонкові з'єднання.....	501
3.9.8. Шліцьові з'єднання.....	505
Розрахунок шліцьових з'єднань на зминання і зношування	506
3.10. Муфти	509
3.10.1. Призначення і класифікація муфт	509
3.10.2. Глухі муфти	510
3.10.3. Компенсуючі муфти.....	511
3.10.4. Керовані і самодіючі муфти.....	513
3.11. Ущільнення, мастильні матеріали та пристрої	517
3.11.1. Ущільнення.....	517
Ущільнення рухомих деталей.....	518
3.11.2. Мастильні матеріали та пристрої	518
Список літератури.....	521

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник з курсу інженерної механіки написаний, спираючись на багаторічний досвід викладання цього предмету фахівцями кафедри механіки і ТММ НУБіП України і кафедри загально-технічних дисциплін Ніжинського агротехнічного інституту. У матеріалах видання опрацьована українська технічна термінологія не тільки теоретичної і прикладної механіки, але і інших інженерно-технічних дисциплін.

Матеріал посібника відповідає сучасним вимогам до курсу інженерної механіки для вищих навчальних техніко-технологічних закладів освіти і викладений таким чином, що може бути корисним як для студентів денної та дистанційної форм навчання, які вивчають курс у повному обсязі, так і для студентів, які навчаються за скороченими програмами. Частина матеріалу призначена для самостійного опрацювання.

Науковим змістом дисципліни є дослідження рухів фізичних об'єктів, розробка і застосування методів аналізу та синтезу їх кінематичних і динамічних моделей, методів розрахунку елементів конструкцій із різних матеріалів, викладення основ конструювання деталей приладів і машин. Курс інженерної механіки орієнтований на забезпечення практичних і лабораторних занять, розрахунково-графічних робіт та інших видів самостійної роботи студентів. Вивчення курсу допомагає формуванню у студентів інженерного розуміння фізичної сутності процесу руху матеріальних систем і роботи конкретних механізмів, процесу перетворення енергії, умінь і навичок оцінювати ці процеси, вмінню визначати та розраховувати основні кінематичні і динамічні характеристики для керування технологічними процесами і режимами, розвивати спроможності передбачати розвиток цих процесів.

Прогрес сучасної техніки незаперечно засвідчує, що інженерна механіка є актуальною в наш час не тільки як засіб інформації про основні закони природи, на підставі яких моделюються механічні процеси, але і як засіб виховання у майбутніх інженерів навичок щодо наукових узагальнень і розвитку творчих здібностей.

Автори намагались поєднати ємність матеріалу з лаконічністю викладення. Поряд з доступністю і чіткістю викладення матеріалу особливу увагу в посібнику приділено тлумаченню основних понять і положень інженерної механіки та їхнього зв'язку з реальною дійсністю та виробничо-технічною практикою.

Запитання для самоконтролю і методичні вказівки, що наводяться після кожної глави, сприятимуть після їх опрацювання засвоєнню курсу інженерної механіки та застосуванню її методів в інженерній практиці. У кінці посібника надано список літератури, з якої використано фактичний

матеріал.

За змістом посібник складається із трьох суттєво різних частин. Перша частина – теоретичні основи механіки; друга частина – основні методики розрахунків елементів конструкцій на міцність і жорсткість; третя частина – основи конструювання деталей приладів і машин.

Перша частина, теоретичні основи механіки, складається із вступу і трьох основних розділів: статика, кінематика, динаміка. Тут висвітлюються основні теоретичні положення цих розділів, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає студентам у самостійній роботі, розв'язуванні задач, виконанні лабораторно-практичних та розрахунково-графічних робіт. Значне місце відводиться розв'язанню практичних інженерно-технічних задач, у тому числі і в галузі машинобудування, тут наводяться оригінальні авторські розрахунки.

Структура розташування параграфів відповідає програмі дисципліни і загальноприйнятій схемі викладання курсу. Спочатку подаються загальні відомості про предмет висвітлення, означення, а далі викладається теорія і практичні методи їх аналізу, орієнтування студентів на самостійну роботу. Така побудова дозволяє краще розуміти фізичну сутність процесів і явищ, полегшує вивчення предмету.

Матеріали окремих частин інженерної механіки досить повно висвітлені у вітчизняній літературі і на високому науковому рівні для студентів механічних спеціальностей. Проте, окремого посібника з інженерної механіки, де в одній книжці могли б висвітлені всі програмні матеріалу курсу, немає.

Крім того, сучасні тенденції розвитку вищої освіти в країні викликають необхідність більш спрямованого орієнтування курсу на творчу самостійну роботу студентів і наближення його до майбутньої спеціальності. У посібнику поряд з теоретичним матеріалом наведено багато прикладів з типових задач, надається методика їх розв'язування різними способами, що повинно сприяти розвитку у студентів навичок моделювання реальних технічних об'єктів.

У розділі «Статика» у традиційному стилі викладено основні поняття механіки, аксіоми та теореми статички, розглянуто рівновагу тіл і систем тіл під дією різних систем сил і наведено умови їхньої рівноваги. Наведено методику і приклади розв'язування задач статички твердого тіла. У відповідних місцях посібника нагадуються і пояснюються відомості з векторної алгебри і векторного аналізу, що необхідно для викладення тих чи інших положень теоретичної механіки.

Розділ «Кінематика» складається з кінематики точки і кінематики твердого тіла для простого і складного рухів. У цьому розділі механічний рух досліджується незалежно від сил і без урахування мас тіл, тобто як

чиста геометрія, як опис руху. Підходячи до розв'язання задач механіки, необхідно перш за все розглянути методи опису рухів. Розділ механіки, в якому розглядаються тільки методи опису рухів, а не ставиться питання про знаходження законів руху під дією сил, називається кінематикою. Кінематика вважається, з одного боку, вступом до динаміки, а, з другого боку, методи кінематики мають і самостійне практичне значення. Саме під впливом машинобудування кінематика і виділилась у самостійний розділ теоретичної механіки.

У природі не існує ні матеріальних точок, ні абсолютно твердих тіл, ні абсолютно пружних тіл, якими оперує інженерна механіка. Все це абстракції, якими користується наука за для того, щоб правильно відобразити ті властивості реальних об'єктів, які обов'язково необхідно врахувати під час розв'язання даної конкретної задачі. Зазначені абстракції не можуть повністю відображати всі властивості реальних тіл, але це і не обов'язково, якщо це помітно не відбивається на характері явища, що вивчається. Застосування абстракції суттєво спрощує розв'язання будь-якої задачі. Проте, треба намагатись застосовувати ті абстракції, які правильно відображають тільки ті властивості реальних об'єктів, які відіграють головну роль в розглянутих рухах. Але слід зауважити, що в самій теорії не можуть міститися докази правомірності застосування цих абстракцій. Тільки узгодженість теорії з дослідом слугує саме таким доказом. Тому в механіці, як і у всіх дослідних науках, під час співвіднесення теорії з дослідом визначальне слово належить останньому.

У третьому розділі «Динаміка» викладається динаміка матеріальної точки, твердого тіла, матеріальної системи. Розв'язується багато прикладів і задач по основних темах.

Метою посібника є надання студентам можливостей отримання знань та вмінь для проектування електромеханічних систем, так званих, систем «мехатроніки», засвоєння методів їх аналізу і синтезу і методології наукових досліджень.

Послідовність висвітлення матеріалу, компоновка посібника, теоретичні обґрунтування основних положень, що підкріплені великою кількістю прикладів з їх розв'язками і прикладів для самостійного опрацювання, створюють необхідні передумови для успішного засвоєння матеріалу студентами.

Основним завданням навчального процесу під час вивчення інженерної механіки є отримання міцних знань, які широко використовується студентами не тільки у подальшому навчанні, але і у розв'язанні інженерних задач після закінчення університету. Безперервний процес ускладнення машин і технічних пристроїв, поява нових принципів і схем технологічних процесів потребують глибокого розуміння основ інженерної механіки.

Розумне наближення навчальних задач до сучасної техніки сприяє

розвитку відношення до інженерної механіки з боку студента як до засадничої дисципліни. І чим ближче навчальні задачі до задач практики, тим ефективніше процес навчання.

Друга частина посібника присвячена висвітленню основних методик розрахунків елементів конструкцій, які належать більш повному курсу для інженерів-механіків «Опір матеріалів». Це наука про інженерні методи розрахунку елементів машин і споруд на міцність, жорсткість і стійкість. За методами опору матеріалів виконуються не тільки проектувальні розрахунки, але проводиться перевірка міцності елементів існуючих конструкцій, визначення допустимих навантажень тощо.

Елементи конструкцій не мають працювати на межі руйнування або втрати пружності і стійкості, а повинні мати необхідний запас міцності. Недостатній запас міцності може спричинити аварію, а надмірний запас визначає недосконалість конструкції, збільшуючи витрати матеріалів і собівартість.

Опір матеріалів є розділом більш загальної науки про міцність, яка називається будівельною механікою, де крім опору матеріалів розглядається теорія пружності, теорія пластичності, будівельна механіка стрижневих систем.

Опір матеріалів тісно поєднує теорію і дослід. Для розрахунків на міцність треба добре знати властивості матеріалу, із якого буде виготовлений елемент, що розраховується. Ці властивості вивчаються в лабораторії шляхом механічних випробувань на спеціальних машинах.

Третя частина навчального посібника присвячена основам конструювання деталей приладів і машин. Це завершальний курс загально-технічних дисциплін для інженерів всіх спеціальностей, в якому повністю використовується інформація від попередніх частин курсу: основи теоретичної механіки і методикам розрахунків із курсу опору матеріалів.

Той факт, що прилади і машини складаються із деталей, не можна спростувати. Найважливішими критеріями, яким повинні відповідати деталі приладів і машин є міцність, жорсткість, зносостійкість, термостійкість, вібростійкість. Для забезпечення таких критеріїв необхідно правильно визначати розміри деталей і обирати відповідні матеріали. Тільки тоді деталі мають задовольняти умови експлуатаційної надійності приладів і машин, будуть здатні виконувати задані функції протягом розрахункового терміну експлуатації при збереженні мінімально необхідної вартості виготовлення.

Тому від кваліфікації розраховувача і конструктора безпосередньо залежить якість конструкцій машин, споруд і приладів, що експлуатуються в країні.

ЧАСТИНА I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1. ВСТУП. ПРЕДМЕТ МЕХАНІКИ. СТРУКТУРА КУРСУ

Теоретичні основи механіки базуються на такій інженерній дисципліні як теоретична механіка – це природнича фундаментальна наука, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху і рівноваги матеріальних тіл і систем.

Під механічним рухом матеріальних тіл розуміють зміну у просторі протягом часу положень одних матеріальних тіл і систем відносно іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу і є, фактично, науковою базою майже всіх галузей сучасної техніки.

Традиційно теоретична механіка ділиться на чотири основні розділи: статику, кінематику, динаміку та аналітичну механіку.

Статика вивчає умови рівноваги тіла під дією різних систем сил, умови спільної дії останніх на тіло або систему тіл, а також розробляє методи спрощення складних систем сил.

Кінематика вивчає геометричні властивості руху матеріальних тіл без урахування їх мас і незалежно від діючих сил. Цей розділ складається з кінематики точки і кінематики твердого тіла для простого і складного рухів. У цьому розділі механічний рух досліджується незалежно від сил і без урахування мас тіл, тобто як чиста геометрія, як опис руху. Підходячи до розв'язання задач механіки, необхідно перш за все розглянути методи опису рухів. Розділ механіки, в якому розглядаються тільки методи опису рухів, а не ставиться питання про знаходження законів руху під дією сил, називається кінематикою. Кінематика вважається, з одного боку, вступом до динаміки, тому що тут потрібні кінематичні залежності і закони руху, а, з другого боку, методи кінематики мають і самостійне практичне значення. Саме під впливом машинобудування кінематика і виділилась у самостійний розділ теоретичної механіки.

У природі не існує ні матеріальних точок, ні абсолютно твердих тіл, ні абсолютно пружних тіл, якими оперує теоретична механіка. Все це абстракції, якими користується наука за для того, щоб правильно відобразити ті властивості реальних об'єктів, які обов'язково необхідно врахувати під час розв'язання даної конкретної задачі.

Динаміка вивчає закони руху матеріальних тіл під дією прикладених сил, які цей рух спричинюють.

Предметом теоретичної або загальної механіки є матеріальні тіла у

Частина перша

вигляді простіших моделей, які розглядаються у зв'язку зі зміною їхнього взаємного розміщення. Теоретична механіка вивчає спільні закономірності механічного руху матеріальних тіл і механічних, силових взаємодій між ними, а також взаємодій тіл з фізичними силовими полями. Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Тому теоретична механіка належить до фундаментальних природознавчих наук. У той же час, на відміну від ряду загально-інженерних дисциплін теоретична механіка вивчає найбільш загальні властивості руху і взаємодії тіл як абстрактних моделей.

У загальнонауковому контексті механіка охоплює цілий комплекс дисциплін, що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл і середовищ. Це, наприклад, аеромеханіка, небесна механіка; теорія коливань; електродинаміка; біомеханіка, що вивчає рух і взаємодію біологічних об'єктів тощо. Теоретичні положення механіки допомагають зрозуміти життєві явища, а також передбачати їх закономірності. Отже, критерієм істинності наших знань є практика.

Теоретична механіка широко застосовує у своїх теоремах методи математики і формальної логіки, методи подібності і абстракції. Предметом її досліджень є не самі матеріальні об'єкти, а їхні еквівалентні моделі. Як відомо, розвиток науки, у тому числі і природознавчої, йде від живого спостереження до абстрактного мислення, а від останнього – до практики. Це є справжній шлях пізнання істини.

Теоретична механіка має велике значення у підготовці інженерів усіх галузей народного господарства. Вона є науковим фундаментом для вивчення таких загально-інженерних дисциплін як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, приладів і роботів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеродинаміка, гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування тощо.

Розуміння положень, методів і законів теоретичної механіки, які правильно відображають об'єктивні реалії механічних процесів, існуючих взаємозв'язків механічних рухів і перетворення енергії, дає змогу науково передбачати закономірності у нових задачах, що виникають у процесі розвитку науки, техніки і технології. Таким чином, задача механіки – відкриття, пізнання і наступне практичне застосування кількісних і якісних закономірностей механічного руху, який має місце в природі та здійснюється людиною в його практичній діяльності. Механіка збагачує людей новими методами розкриття таємниць природи, справжнього змісту її різноманітних явищ і технічної практики.

Всесвіт – це матерія, яка закономірно і взаємопов'язано рухається у просторі і часі. Знаючи про такі зв'язки між матеріальними об'єктами світу, М.В. Ломоносов писав: «Для изучения явлений природы необходимо выпрашивать у осторожной и догадливой геометрии, советоваться с

точною и замысловатою механикой, выводивать через проницательную оптику». У сучасної науки арсенал засобів дослідження явищ природи незрівнянно ширший.

Матерія вічно перебуває у неперервному русі і безперервно розвивається. Рух є основним атрибутом матерії і формою її існування. Світ є безмежними у просторі і нескінченними у часі формами існування матерії. Притаманний матерії рух є способом збереження матерії, переконливим доказом нерозривності матерії та руху, матерії та енергії, взаємозв'язку та взаємного переходу різних форм матерії. Відмінність форм руху матерії становить об'єктивну базу для окремих відповідних галузей науки, що вивчають окремі закономірності природи. Закономірності найпростішої механічної форми руху матерії вивчає механіка, проте вона має відношення до всіх явищ природи і творень техніки, до всього природознавства, тому що механічний рух тією чи іншою мірою супроводжує всі інші форми руху матерії.

Загальна механіка пронизує всі механічні процеси у мікро- і макросвіті. Вона необхідна при вивченні поведінки плазми у магнітному полі і вона становить значну частину науки про Землю, без неї неможливе проектування і будівництво. Без знання механіки неможливо провести розрахунки технологічних процесів у машинобудуванні, металургії, легкій промисловості тощо. Теоретична механіка – це частина загальної механіки, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху макроскопічних тіл.

Оскільки наукові уявлення про простір і час розвиваються у зв'язку з розвитком понять про матерію, рух і взаємодію, то з відносних уявлень про всесвіт наука поступово наближається до абсолютної істини. Наблизитись до абсолютної істини в принципі можливо, якщо наша технічна цивілізація зможе не руйнувати своїми «могутніми силами» наданий їй у тимчасове користування найдорожчий для нас «простір і час».

На думку І. Ньютона, засновника класичної механіки, простір існує сам по собі, незалежно від речей, і є необмеженою порожниною, абсолютним вакуумом, що має три виміри: довжину, ширину й висоту. Простір вважається нерухомим і незмінним, абсолютно проникним, який не впливає на рух тіл і сам не зазнає впливу з боку тіл, що його наповнюють. А час – це тривалість, яка існує незалежно від подій, що відбуваються, і спливає безперервно і рівномірно від минулого до майбутнього. Різні моменти часу відрізняються один від одного лише подіями, що відбуваються в ці моменти.

Методом ідеалізації Ньютон пропонує упорядкувати уявлення про простір і час як деякі вмістища тіл, які не залежать від цих тіл та їх руху. За сучасними уявленнями цей абсолютний евклідів тривимірний однорідний та ізотропний простір і абсолютний арифметизований час лише наближено відображає реальні властивості природи. Але кількісні відхилення законів

Частина перша

сучасної механіки від законів класичної виявляються під час руху тіл поблизу великих мас зірок або при швидкостях, близьких до швидкості світла. За багатовіковим досвідом під час руху тіл зі швидкостями, значно меншими від швидкості світла, ідеалізація Ньютона дає достатню для практики точність як перше наближення до реального простору і часу. Тому класична механіка є надійним фундаментом і апаратом для теоретичних і практичних висновків сучасної науки і техніки.

Традиційно склалося, що за характером задач теоретична механіка поділяється на статику, кінематику, динаміку та аналітичну механіку. Такий розподіл значно полегшує вивчення механічного руху тіл і дозволяє пов'язати вивчення теоретичної механіки з іншими дисциплінами інженерно-технічних спеціальностей.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона, тому вона називається ньютонівською класичною механікою, на відміну від інших напрямів у механіці як, наприклад, релятивістська механіка. Класична механіка спирається на систему аксіом, які накопичені у галузі механіки історичною практикою. Сформулюємо коротко закони Ньютона, які є фундаментом класичної механіки.

Перший закон Галілея – Ньютона

Існує така система відліку, в якій ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку зовнішніх факторів не змінить цей стан.

Цей закон, який називають законом інерції, встановлює головну властивість реальних фізичних тіл: зберігати свій рух або спокій, якщо тіла перебувають у цих станах. Закон передбачає інерціальну Галілеєву систему відліку.

Вважається, що стан матеріальної точки або тіла визначається відносно системи координат, що рухається поступально, прямолінійно і рівномірно по відношенню до деякої умовно нерухомої системи координат. Наявність абсолютно нерухомої системи координат є одним із постулатів, на якому ґрунтується класична механіка.

Причиною зміни стану матеріальної точки є рух, який у механічній формі передається від одного тіла до іншого під час їхньої взаємодії і називається силою. Оскільки переважна більшість точок у наших умовах не рухається рівномірно і прямолінійно, то поняття ізольованої матеріальної точки є граничною абстракцією.

Другий закон Ньютона

Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює вектору сили, прикладеної до точки.

Під кількістю руху матеріальної точки, за визначенням Ньютона, розуміється векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на її швидкість. Цей закон, що встановлює зв'язок між силою і прискоренням точки у випадку незмінної маси точки, називають основним законом

динаміки.

Третій закон Ньютона

Кожній дії відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія.

Третій закон стосується системи матеріальних точок. Поширення законів Ньютона на систему матеріальних точок і тіл, на які діє система довільних сил, пристосування їх до неінерціальних систем відліку і становить головний зміст курсу теоретичної механіки. У курсі поєднуються методи поширення дії законів Ньютона з таким математичним апаратом як алгебраїчні та диференціальні рівняння, що дає можливість застосовувати аналітичні методи і комп'ютерні технології.

Четвертий закон Ньютона

Прискорення, яке отримує точка під дією декількох сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які отримувала б точка під дією кожної сили окремо.

Тобто, у випадку, якщо сили, що діють на точку, не залежать від її прискорення, то *кожна із сил надає точці прискорення, не залежне від дії інших сил.* Четвертий закон називається законом незалежності дії сил або принципом суперпозиції.

2. КОРОТКИЙ ІСТОРИЧНИЙ НАРИС РОЗВИТКУ МЕХАНІКИ

Історично механіка як відомості про найпростіші машини і механізми починається з глибокої давнини. Важіль, клин, похила площина, коток, які надавали значний вигаш у силі, використовувались у Стародавньому Єгипті і Вавилоні. Проте, на наш погляд, справжні умови будівництва єгипетських пірамід і вавилонської вежі у значній мірі приховані часом.

Перші трактати з механіки, що збереглися, де розглядався устрій найпростіших машин, ґрунтуючись на досвіді застосування різних механічних пристроїв, з'явилися у Стародавній Греції. У грецькій філософії існували різні механічні концепції. За однією з них матерії властивий саморух, без якого вона не може існувати, а природа нічого не містить, крім матерії, яка рухається у порожньому просторі. Послідовними представниками цієї концепції були атомисти Геракліт, Демокріт, Епікур, Лукрецій.

Слово «механіка» у перекладі з грецького означає «хитромудрість». Цей термін вперше був вжитий в III в. до н. е. учнем видатного давньогрецького філософа Аристотеля, вихователя Олександра Македонського, у момент спостереження роботи важеля, коли здавалося, що «мале долає велике». В працях Аристотеля (384–322 pp. до н. е.)

Частина перша

«Фізика», «Про небо», «Про виникнення і знищення», «Метафізика» містяться загальні поняття механіки. Проте, система механіки Аристотеля побудована не на дослідах, а на абстрактних міркуваннях і висновках його філософії: осмислити все суще і подати все у найбільш простій і гармонічній формі.

Нехтування дослідом, який, на думку давніх греків, є справою рабів, призвело до отримання Аристотелем результатів, які не підтверджуються практикою. Він вважав, що в околі земної поверхні важкі тіла падають швидше, а легкі повільніше, навіть якщо нехтувати опором повітря. Механічний рух Аристотель поділяв на прямолінійний і криволінійний, останній з яких є більш досконалим, а найдосконалішими кривими є кола, вздовж яких рухаються створені Богом планети сонячної системи. Теологічні моменти у фізичному вченні Аристотеля були роздуті середньовічною схоластиком і догматизовані церковними декретами, будь-які заперечення проти них проголошувалися ересю.

Історики науки одногосно вважають, що початок механіки як науки пов'язаний з ім'ям видатного механіка і математика усіх часів Архімедом (287–212 рр. до н. е.). Він заклав основи механіки як точної науки, зробив відкриття в математиці, гідростатиці, створив теорію рівноваги важеля і вчення про центр ваги тіл, збагатив античну техніку значною кількістю чудових винаходів.

У наступні півтори тисячі років розвиток механіки був зупинений. Дешева людська праця і низький рівень техніки не створювали умов для розквіту цієї науки. Приватне господарство було розраховано лише на персональні потреби.

Тільки з XII ст. відкрились перші університети Європи, але готували вони переважно служителів духовництва та правників. Навіть у Парижі викладати геометрію було дозволено лише по святах у 1355 р. Основою наук вважались праці Аристотеля, з яких було вилучено живий зміст. Теоретична традиція античного наукового спадку була втрачена остаточно і під механікою розуміли тільки будівельне й інженерне мистецтво.

Проте, поступово у середині другого тисячоліття нашої ери, починають розвиватися торговельні відносини, а з ними й промисловість. Перед механікою постали проблеми в галузі техніки, пароплавства, у військовій справі. Для ефективної експлуатації шахт і копалин необхідно було піднімати руду з великої глибини, будувати вентиляційні пристрої, відкачувати воду. Артилерія потребувала від механіки розв'язати такі питання як міцність гармати при найменшій вазі, залежність опору повітря від швидкості снаряда, визначення траєкторії руху снаряда в повітрі і порожнині.

Епоха величезних відкриттів, бурхливий розвиток теоретичної традиції починається після середньовічного застою з перших десятиліть XV ст. у галузі механіки і суміжних галузях (машинознавство, гідравліка,

астрономія, математика). Значний внесок у механіку зробили такі видатні вчені як Кузанський, Леонардо да Вінчі, Стевін, Тарталья, Бенедетті, Кардано, Кеплер та ін.

Один із попередників Коперника Микола Кузанський висунув ідеї про відносний рух і обертання Землі, а в галузі динаміки він зробив перші кроки до поняття інерціального руху.

Славнозвісний художник і геніальний вчений, механік та інженер Леонардо да Вінчі (1452–1519) досліджував тертя в машинах, рух тіла по похилій площині, працював над проблемами теорії механізмів, увів нове поняття в механіці – момент сили, намагався будувати літальні апарати. Він вважав, що рівновага блока з нерухомою віссю можлива тільки за умови, що сума моментів сил відносно точки підвісу блока дорівнює нулю.

Виключне значення для науки мало відкриття видатним вченим Миколою Коперником (1473–1543) геліоцентричної системи світу. На відміну від геоцентричної системи Птолемея (II ст. н.е.), яка була догматизована католицькою церквою, М. Коперник вважав, що Земля і всі інші планети рухаються по кругових орбітах навколо Сонця. Результати сорокарічної праці були узагальнені Коперником у книзі «Про обертання небесних сфер», з появи якої починається поступове звільнення природознавства від теології.

У праці «Нова наука» Нікколо Тарталья (1499–1557) зробив першу пробу математизації питань балістики і перші кроки до розуміння єдності аристотелівських «природного» і «насильницького» рухів.

Німецький астроном Йоганн Кеплер (1571–1630), обчисливши результати наполегливих спостережень датського астронома Тіхо Браге, відкрив закони руху планет, завершивши створення кінематики сонячної системи, і довів, що планети рухаються по еліпсах, в одному із фокусів яких перебуває Сонце. Це був початок небесної механіки і революція у світогляді людей.

З ім'ям Джеронімо Кардано (1501–1576) пов'язують подальшу розробку кінематичного напрямку у статиці, зі створенням карданної передачі і карданного підвісу.

Учень Тарталі Джованні Бенедетті (1530–1590) завдав вирішального удару по аристотелівській теорії щодо двох його фундаментальних положень: досконалого «природного» руху не існує; у природі змінного «природного» і «насильницького» рухів немає принципової різниці.

Послідовним представником геометричної статики був Сімон Стевін (1548–1620), голландський математик і механік, який зіграв завершальну роль у розвитку геометричного напрямку елементарної статики і гідростатики, ґрунтуючись на основних постулатах Архімеда. Він встановив закон додавання і розкладання сил, довів теорему про три непаралельні сили, побудував силовий трикутник.

Сучасник Кеплера Галілео Галілей (1564–1642), геніальний вчений,

Частина перша

підтримавши систему світу Коперніка, поставив під сумнів двотисячолітній авторитет Аристотеля.

Галілей не міг мириться з поглядами Аристотеля, він застосовував наукові методи замість звичайних схоластичних міркувань у той час.

Завдяки працям Галілея розвиток механіки безпосередньо пов'язується із запитами тогочасної техніки, і ці праці мали фундаментальне значення для розвитку динаміки. Він вперше сформулював принцип відносності класичної механіки, встановив закон інерції і закони вільного падіння матеріальних тіл. Галілей увів поняття про швидкість і прискорення і довів, що траєкторією руху снаряда, кинутого у порожнині під деяким кутом до горизонту, є парабола. Таким чином, він є засновником не тільки загальної механіки, але й зовнішньої балістики, науки про рух снаряда у повітрі. Галілей експериментально довів закон падіння тіл у порожнині, закон пропорційності між вагою тіла і його масою, досліджував рух математичного маятника.

Галілея вважають засновником експериментальних методів досліджування в механіці. Саме методом ретельних дослідів він встановив закон ізохронності коливання маятника, закони руху точки по похилій площині, а також закони падіння тіл.

Французький філософ, математик, фізик Рене Декарт (1596–1650) вперше впроваджує у механіці поняття кількості руху тіла як міри механічного руху і відкриває закон збереження кількості руху. У працях Декарта вперше досліджується питання про додавання довільного числа рухів матеріальної точки.

Видатний голландський вчений Хрiстiан Гюйгенс (1629–1695) довів ряд теорем про відцентрову силу, теорію удару, повну теорію фізичного маятника, визначивши центр хитань. Вперше впровадив у механіку поняття осьового моменту інерції. Гюйгенс створив конструкції маятникових годинників і винайшов регулятор ходу кишенькових годинників. Недарма І. Ньютон, посилаючись на твори Гюйгенса, називав його «Щонайвищий Гюйгенс».

Роберт Гук (1635–1703), англійський природознавець, відкрив закон пропорційності між силою, прикладеною до пружного тіла, і його деформацією. Цей закон і у наш час застосовується при розрахунках конструкцій на жорсткість, міцність і стійкість.

Німецький математик, філософ і механік Вільгельм Лейбніц (1646–1716) вперше ввів термін «динаміка», впровадив у механіку поняття «живої сили» (кінетичної енергії) як міри механічного руху і встановив закон збереження «живих сил», що є першим формулюванням закону збереження енергії.

Видатний англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1642–1727) є справжнім засновником класичної механіки. Він створив гармонічну систему механіки; чітко сформулював її основні закони, що

відомі в сучасній літературі як перший, другий і третій закони Ньютона; ввів поняття маси і узагальнив поняття сили; розв'язав цілий ряд проблем у механіці. Більшість відкриттів Ньютон зробив замолоду: на початку 1665 р. він відкрив біном, у травні – метод дотичних, у листопаді – диференціальне числення; у січні 1666 р. – теорію кольорів, у травні – інтегральне числення, у серпні – відкрив Закон всесвітнього тяжіння.

Користуючись законом всесвітнього тяжіння, Ньютон розв'язав ряд задач теоретичної і небесної механіки. Головний твір Ньютона, в якому подано чітке і систематичне викладення класичної механіки, називається «Математичні засади натуральної філософії». Твір написаний латиницею і вперше виданий у 1687 р. На російську мову його переклав в 1936 р. академік О.М. Крилов, який зробив численні примітки.

Ньютон сформулював основний закон динаміки у диференціальній формі, що дало можливість розглянути численні задачі, де рух визначається змінними силами. Після цих праць задачі Галілея перетворилися в прості окремі випадки. Ньютон сформулював закон паралелограма сил і закон додавання рухів, вперше звернув увагу на різницю між поняттями інертної і гравітаційної мас. Разом з видатним німецьким вченим Вільгельмом Лейбніцем (1646 – 1716) Ньютон є фундатором диференціального й інтегрального числення.

Швидкий розвиток набула механіка в XVIII столітті. Багато відкриттів у механіці і математиці зробив видатний вчений Леонард Ейлер (1707–1783), академік Санкт-Петербурзької академії наук, швейцарець за походженням, який справив значний вплив на розвиток фізико-математичних наук у цьому столітті.

Ейлер уперше аналітично виклав механіку, довів одну з основних теорем динаміки – теорему про зміну кінетичного моменту; побудував теорію моментів інерції; ввів поняття потенціального силового поля. Заслуги Ейлера в небесній механіці, прикладній механіці, механіці суцільних середовищ, теорії стійкості надзвичайно великі.

Перший трактат Ейлера мав назву «Механіка або наука про рух в аналітичному викладенні», в якому він дав математичне формулювання другого закону Ньютона в диференціальній формі, розглядаючи пропорційність сили до приросту швидкості, розвив теорію вільного і невільного рухів матеріальної точки в натуральних координатах. У праці «Теорія руху твердих тіл» Ейлер розробив кінематику і динаміку твердого тіла, подаючи в загальному вигляді диференціальні рівняння руху твердого тіла. Титанічна творча сила Ейлера є неперевершеною в історії науки.

Працями Ньютона і Ейлера було в основному завершено побудову наукової теорії механічних явищ. У галузі механіки матеріальної точки були вирішені всі принципові проблеми і подальший інтерес учених зосередився на питаннях механіки системи матеріальних точок. Наступний розвиток механіки був зосереджений у напрямку пошуку найбільш

зручного математичного апарата для отримання і розв'язку диференціальних рівнянь опису руху матеріальних систем.

Сучасник Ейлера перший російський академік М.В. Ломоносов (1711–1765), геніальний вчений, мав великий вплив на розвиток всієї науки і, зокрема, на розвиток механіки як основи природознавства. Йому належить відкриття загального закону природи – закону збереження матерії і руху, з якого всі інші закони збереження механіки випливають як окремі випадки.

Французький математик і механік Жан Лерон д'Аламбер (1717 – 1783) видав у 1743 р свій видатний твір «Трактат із динаміки», в якому довів, як звести рівняння руху матеріальної системи до задачі динамічної рівноваги, відкривши важливий принцип теоретичної механіки.

Протягом XVIII ст. було успішно розв'язано багато проблем теоретичної механіки і на порядку денному встала задача надати загального методу аналітичного розв'язання всіх механічних проблем. І такий метод відшукав Жозеф Луї Лагранж (1736–1813). Його видатна праця «Аналітична механіка» (1788) викладена без жодного креслення на базі відкритого ним методу узагальнених координат. Лагранж не обмежується застосуванням принципу можливих переміщень для задач статички, а поєднує останній з принципом Д'Аламбера і отримує в загальному вигляді диференціальні рівняння руху матеріальної системи, які носять його ім'я, застосовуючи їх для розв'язання важливої задачі про малі коливання механічних систем. Російський переклад цієї книги був здійснений в 1950 р.

Паралельно з аналітичними методами розвивались геометричні методи механіки. Саме видатний французький геометр Луї Пуансо (1777–1859) вперше в 1803 р. виклав статику у науковій праці «Елементи статички» в такій формі, в якій вона і тепер викладається у вищих технічних навчальних закладах. Пуансо впроваджує в механіку поняття пари сил, розробляє теорію пар і застосовує цю теорію для розв'язання в загальному випадку задачі про зведення до найпростішого вигляду систем сил, прикладених до твердого тіла, і для здобуття умов рівноваги твердого тіла. Багато відкриттів і геометричних інтерпретацій законів механіки зробив Л. Пуансо в кінематиці і динаміці. Він завершує оформлення геометричного напрямку в статистиці, початок якого пов'язаний з ім'ям Архімеда. Подальший розвиток аналітична механіка набула у працях П.С. Лапласа (1749–1827), К.Г. Якобі (1804-1851), В.Р. Гамільтона (1805-1865), Г.Р. Герца (1857-1894) тощо.

Видатним представником аналітичного напрямку в теоретичній механіці був наш земляк академік М.В. Остроградський (1801-1861), автор багатьох праць з аналітичної механіки, математики і математичної фізики. Він узагальнив принцип можливих переміщень для односторонніх в'язей і вперше застосував його в загальній теорії удару, а також в загальній формі

встановив один з основних принципів механіки – принцип найменшої дії. Його учень І.А. Вишнеградський є засновником теорії автоматичного регулювання.

Багато праць в галузі механіки машин і механізмів написав видатний математик і механік академік П.Л. Чебишев (1821–1894) – засновник російської школи теорії механізмів.

Видатних результатів у самих різних галузях механіки досягнув геніальний вчений М.Є. Жуковський (1847–1921), засновник авіаційних наук: експериментальна аеродинаміка, динаміка літака (стійкість і керуваність), розрахунок літака на міцність. Його твори збагатили всі розділи теоретичної механіки: рух маятника, теорія дзиги, обчислення планетних орбіт, теорія диференціальних рівнянь, хитання кораблів на океанських хвилях, рух твердого тіла з порожнинами, заповненими рідиною, гідравлічний таран, коливання паровоза на ресорах, будівельна механіка, динаміка автомобіля тощо. Професор М.Є. Жуковський протягом 50 років був мозковим центром, навколо якого групувались інженери, розв'язуючи різні теоретичні проблеми механіки.

Видатним учнем М.Є. Жуковського був С.О. Чаплигін (1863–1945), який виконав нові дослідження з механіки рідини і газу, створив теорію крила (крила з передкрилком і крила з щитком) і заснував сучасні положення гідроаеромеханіки.

Видатне значення для теоретичної механіки мають твори геніального математика О.М. Ляпунова (1857–1918). Найбільш значуща його праця – створення теорії стійкості руху. Вона має великі технічні застосування і сьогодні багато вчених різних країн продовжують її розвивати.

Серед великих вчених і педагогів слід відмітити І.В. Мещерського (1859–1935), творця динаміки тіл змінної маси. Цей розділ науки він створив ще в 1897 р., але застосування затрималось на півстоліття до часів розвитку ракетобудування. Тепер механіка тіла змінної маси є основою теорії реактивних двигунів і динаміки ракет, а на його творі “Сборник задач по теоретической механике” і сьогодні вчать інженери країн СНД.

Видатною у всіх відношеннях є постать геніального вченого академіка О.М. Крилова (1863–1945). Він є автором праць з теорії корабля, теорії пружності, балістики, теорії диференціальних рівнянь математичної фізики. О.М. Крилов є фундатором російської школи механіків-кораблебудівників, який започаткував дослідження і створення теорії плавучості і остійності корабля, хитавиці корабля. О.М. Крилов – видатний вчений, інженер, винахідник і педагог вищої школи.

Засновником динаміки космічного польоту був видатний вчений К.Є. Ціолковський (1857–1935). Його праці мали великий вплив на подальший розвиток досліджень з ракетодинаміки. Вони відкрили шлях ґрунтовним дослідженням Ф.А. Цандлера (1887–1933) і Ю.В. Кондратюка (1897–1942). Найбільш видатним продовжувачем ідей К.Є. Ціолковського

Частина перша

був С.П. Корольов (1906–1966), геніальний вчений і конструктор в галузі ракетної і космічної техніки.

Теоретична механіка продовжує швидко розвиватись і тепер. Перед сучасними вченими постають великі задачі: засвоєння космосу, автоматика і телемеханіка, робототехніка і сучасні технології, машинобудування тощо. У другій половині ХХ ст. з'явився новий напрям науки і технологій – робототехніка, основою якого стала теоретична механіка та теорія механізмів і машин. Особливістю робототехніки є те, що вона об'єднує такі науки як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. Великий внесок у розвиток цього напрямку мають: К.В. Фролов, Е.І. Воробйов, А.Г. Овакімов, Р. Уікер, М. Вулкобратович, М.З. Згуровський та ін.

Бурхливо розвинулась у минулому столітті механіка нелінійних коливань. Великий внесок у розвиток теорії нелінійних коливань належить українським вченим: М.М. Боголюбову, Ю.О. Митропольському, М.М. Крилову та ін.

РОЗДІЛ I

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Предмет і задачі статички.

В'язі, реакції в'язей

1.1.1. Предмет статички. Основні поняття

Теоретична механіка як наука, вивчаючи певну форму руху матерії, розглядає не реальну природу з усім її різноманіттям, а ідеальні об'єкти – моделі: матеріальну точку, матеріальну систему, абсолютно тверде тіло.

Згадаємо про ці основні поняття теоретичної механіки, які добре відомі з елементарного курсу фізики. Найпоширенішою моделлю, яка відображає протяжність, тобто, геометричну форму матеріального тіла і розподіл маси у деякому геометричному об'ємі, є абсолютно тверде тіло.

Абсолютно тверде тіло – це матеріальне тіло, в якому в процесі взаємодії з іншими тілами відстані між двома довільними точками не змінюються, тобто, деформації тіла під дією сил вважаються малими і можуть не враховуватися.

Розглядаючи матеріальні тіла як абсолютно тверді, можна значно спростити дослідження умов взаємодії цих тіл, а також умов збереження свого початкового механічного стану. Ця модель є достатньо досконалою лише для вивчення окремого випадку руху тіла – стану спокою, оскільки рух окремих точок тіла у загальному випадку не однаковий. Тому доводиться починати дослідження руху з найбільш простої моделі – матеріальної точки.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло певної маси, розмірами і формою якого, вивчаючи його рух, можна знехтувати в умовах певної задачі.

Чи можливо розглядати заданий об'єкт як матеріальну точку, визначається не розмірами цього об'єкта, а ступенем ідеалізації і властивостями руху. Так, рух планет сонячної системи відносно і навколо Сонця можна розглядати як рух взаємопов'язаних точок, що доведено багаторічною практикою астрономів.

Система матеріальних точок (матеріальна система) – це сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємозумовлені.

Матеріальні системи або механічні системи, можуть бути змінними і

Частина перша

незмінними. У змінній системі відстані між точками в процесі руху або спокою можуть змінюватися.

У незмінній системі взаємне розміщення точок під час її руху або спокою зберігається. Оскільки кожне матеріальне тіло є системою матеріальних точок, то абсолютно тверде тіло є незмінною системою точок, які безперервно заповнюють деяку частину простору.

Вивчення руху рідини, газів, повітряних потоків, а також механічного руху тіл, який суттєво залежить від їхньої деформації, ґрунтується на такій абстракції, як *суцільне середовище*. Найпростішим прикладом суцільного середовища є модель абсолютно твердого тіла. Більш загальний образ суцільного середовища об'єднує пружні, рідинні, газові та інші тіла. Серед таких моделей можна відзначити *абсолютно пружне тіло, пластичне тіло, ідеальну рідину, в'язку рідину*.

1.1.2. Задачі статички. Основні визначення

Перш, ніж вивчати перший розділ теоретичної механіки – статику, сформулюємо задачі статички:

- визначення умов рівноваги тіл під дією різних систем сил як на площині, так і у просторі;
- розробка методів перетворення довільних векторних систем сил з метою їх спрощення і заміни найменшою кількістю силових факторів.

В основу цього розділу механіки покладено аксіоми статички, які розглянемо далі. А зараз зупинимося на основних поняттях статички, серед яких одним із головних є поняття сили, а також – на деяких визначеннях.

Дослідами доведено, якщо рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку відхиляється від рівномірного і прямолінійного руху, то ця точка взаємодіє з навколишніми тілами

Сила, прикладена до конкретного тіла, – це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, інтенсивність і напрямок взаємодії.

З цього класичного визначення сили і з спостережень випливає, що *сила* є величиною векторною, а тому має *три* визначальних *параметри*: чисельне значення або *величина* сили (модуль), *напрямок* дії у просторі і *точку прикладання*. Дія сили на точку залежить від напряму сили і від чисельного значення сили.

Напрямок сили визначається тим напрямом, за яким починає рухатися точка, що була у стані спокою, якщо до неї прикладається сила. Чисельне значення сили (модуль сили) є величиною, що дорівнює добутку маси точки на модуль прискорення, яке надає тілу ця сила (закон Ньютона).

Взаємодія означає **залежність руху** однієї частки матерії **від руху** і наявності **інших часток** матерії. Це перше, що виступає перед нами, коли ми розглядаємо рухому матерію загалом. Фізичні властивості простору і часу, пов'язані з фізичними полями, не враховуються в початкових уявленнях класичної механіки про простір і час у тій формі, в якій вона реалізується в реальному світі. Класична механіка не розглядає фізичних причин впливу матерії на рух і тому вводить ще одну ідеалізацію – **силову взаємодію**. Заслугою І. Ньютона є те, що він поклав в основу механіки кількісні закони дії сил незалежно від їхньої фізичної природи. Лише механічний ефект взаємодії між матеріальними тілами пов'язаний зі зміною кінематичного стану тіл.

На розрахункових силових схемах **силу зображують у вигляді вектора** довільної довжини (крім випадків графічної статистики, де силу креслять у масштабі). Покажемо, наприклад, (рис. 1.1) довільну силу \vec{F} , зображену вектором \overline{AB} і прикладену у точці A , яка діє вздовж лінії дії сили MN .

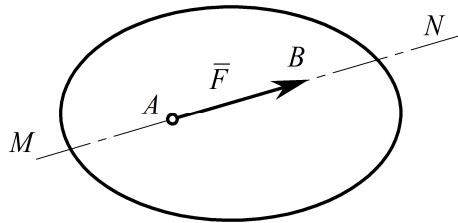


Рис. 1.1

У Міжнародній системі одиниць (СИ) одиницею вимірювання сили є ньютон (Н) або кілоньютон (кН). Один ньютон – це така величина сили, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м с^{-2} .

Зосереджені сили – це сили, що **прикладаються** до тіла у будь-якій окремій його **точці**. Сили, що діють **на всі точки** цієї частини поверхні або об'єму тіла, називаються **розподіленими**.

Поняття зосередженої сили є умовним: практично неможливо прикласти силу в одній точці. Зосереджені сили є, фактично, рівнодійними деяких систем розподілених сил. Наприклад, сила ваги твердого тіла прикладається у центрі ваги рівнодійною сил ваги окремих частинок тіла.

Система сил – це **сукупність декількох сил**, які діють на це тіло або матеріальну систему одночасно. Окремі сили системи сил – **складові** цієї системи.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які в разі заміни на таку саму іншу **не порушують** кінематичного **стану тіла**. Еквівалентність систем означає, що ці системи викликають однаковий кінематичний стан тіла. Якщо система сил еквівалентна нулю, то така система називається **зрівноваженою системою сил**.

Рівнодійна сила системи сил – це така сила, **дія якої еквівалентна** дії заданої **системи сил** $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.

$$\vec{R} \Leftrightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n).$$

Зрівноважувальна сила – це сила, яка за величиною **дорівнює** **рівнодійній силі**, розміщена з нею на одній прямій, але **протилежна за напрямом**.

1.1.3. Аксиоми статички

В основу статички покладено аксиоми, тобто, деякі твердження, що приймаються без доведення, тому що вони підтверджені багатовіковою практичною діяльністю, дослідями і спостереженнями. В аксіомах статички про сили відображено властивості сил, що діють на тверде тіло.

Перша аксіома (про дві сили)

Абсолютно тверде **тіло** перебуває в **рівновазі** під дією двох сил, якщо вектори цих сил **рівні за модулем** (числовим значенням), спрямовані на одній прямій у протилежних напрямках.

Це аксіома про дві сили, які є найпростішою системою зрівноваженої системи сил. На рис. 1.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , які мають однакові модулі $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, розміщені на одній прямій MN і мають протилежні напрямки. Точки прикладання сил можуть збігатися. Таким чином, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла. У разі деформованого твердого тіла вона не завжди справедлива.

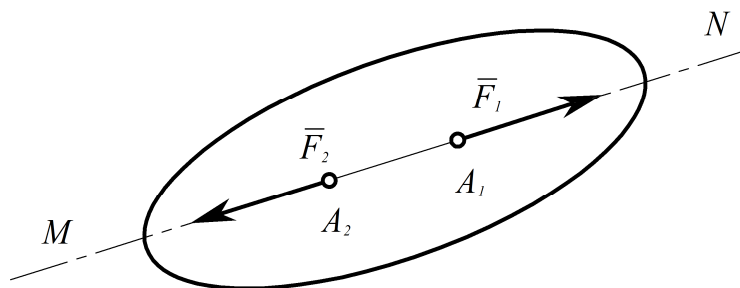


Рис. 1.2

Друга аксіома (про виключення сил).

Первісний стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил.

Систему зрівноважених сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) показано на рис. 1.2. Ця аксіома носить назву аксиоми виключення сил. Аксиома надає можливість побудови еквівалентних систем сил, вводячи поняття **векторного нуля** як простішої

системи двох рівних за величиною і протилежних за напрямом сил, якою користуються під час доведення теорем.

Наслідок

Дія сили на тіло не зміниться, якщо точку прикладання сили перенести в іншу довільну точку вздовж лінії дії сили в межах цього тіла.

Наслідок з двох перших аксіом інформує, що **вектор сили є ковзним вектором**, тобто точка його прикладання може бути перенесена в іншу довільну точку вздовж лінії дії сили без порушення рівноваги. Доведемо це твердження.

Припустимо, що на тіло (рис. 1.3) діє вектор сили \vec{F}_1 , який прикладений в точці A і має лінію дії MN . Прикладемо в довільній точці B на лінії дії MN дві рівні за модулем сили \vec{F}_2 і \vec{F}_3 , такі, що $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$, а $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1$. Згідно з першою аксіомою ці сили зрівноважені, а згідно з другою – їх можна приєднати, не змінюючи кінематичного стану тіла.

Але цю систему трьох сил можна розглядати по-іншому: як силу \vec{F}_2 , яка дорівнює силі \vec{F}_1 і перенесена з точки A в точку B , і зрівноважену систему двох сил (\vec{F}_1, \vec{F}_3) , яку можна відкинути. Наслідок доведений.

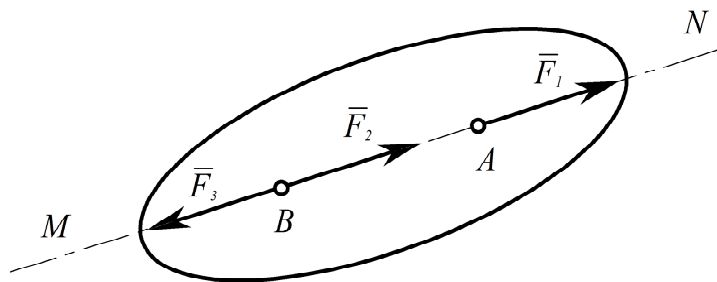


Рис. 1.3

Третя аксіома (про паралелограм сил).

*Рівнодійна двох непаралельних сил, прикладених до тіла в одній точці, визначається **діагоналлю паралелограма**, побудованого на цих силах як на сторонах і прикладена в точці їх перетину.*

Припустимо, що до тіла (рис. 1.4) у точці A прикладені дві непаралельні сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку A діагональ, яка і буде рівнодійною $\vec{R}_{1,2}$ цих сил.

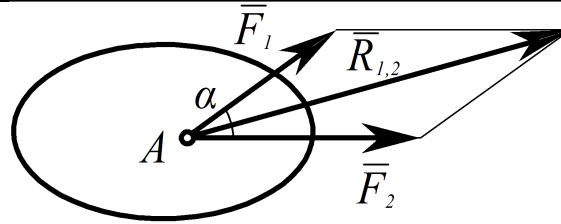


Рис. 1.4

Таким чином, третя аксіома статички дає можливість геометрично, векторно додати дві сили, що прикладені в одній точці, тобто, визначає модуль, точку прикладання і напрямок рівнодійної як векторної суми двох сил

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad (1.1)$$

Заміна двох сил однією рівнодійною силою за правилом паралелограма називають **векторним додаванням** сил.

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто, модуль рівнодійної, визначається за допомогою теореми косинусів

$$R_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

Пропонується самостійно визначити рівнодійну, якщо сили прикладено в одній точці і розміщено під прямим кутом, а також, якщо вони збігаються за напрямком або спрямовані у протилежні боки.

Більш зручним способом визначення модуля і напрямку рівнодійної сили відносно до прямокутних осей координат для кількості сил більше за дві є аналітичний метод проєкцій, який розглядається далі.

Четверта аксіома (про дію і протидію).

Ця аксіома носить назву аксіоми про рівність дії і протидії і є одним із основних законів механіки. Ньютон сформулював її так: «будь-якій силі дії є рівна, але протилежна сила протидії». У статистиці цю аксіому застосовують для твердих тіл, які контактують шляхом стикання або на відстані за допомогою силових полів.

|| **Сили взаємодії, з якими два тіла діють одне на одне, дорівнюють за модулем, спрямовані вздовж спільної прямої у протилежні сторони.**

Слід зазначити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, вони не утворюють зрівноважену систему сил, тому що вони прикладені до різних тіл або до різних точок одного і того самого тіла, що взаємодіють одна з одною. Під дією цих сил вільні тіла рухатимуться, віддаляючись чи наближаючись одне до одного.

П'ята аксіома (принцип затвердіння).

Якщо деформоване (нетверде) тіло перебуває у стані рівноваги під дією системи сил, то цей стан не порушиться, якщо, не змінюючи форми, розмірів і положення цього тіла у просторі, подати його у вигляді відповідного абсолютно твердого тіла.

Ця аксіома має назву принципу *затвердіння* і дає змогу розв'язувати задачі статички гнучких тіл (нитка, трос, пас, канат, ланцюг тощо) методами статички твердого тіла.

Із аксіоми випливає, що умови рівноваги твердого тіла є необхідними і для рівноваги деформованого тіла, але ці умови не достатні для рівноваги деформованого тіла.

Сформульовані у цьому параграфі аксіоми є тією основою, на якій будується вся статика сил, що прикладені до твердого тіла. Аксіоми статички характеризують властивості сил, прикладених до тіла. Але вони не враховують матеріальних властивостей тіла, пов'язаних з наявністю маси чи її розподілом, що суттєво впливає під час руху тіла. У повному обсязі згадане врахування міститься в законах динаміки.

1.1.4. Невільне тверде тіло. Механічна в'язь і реакція в'язі. Реакції основних типів в'язей

У теоретичній механіці тверді тіла і матеріальні системи поділяються на вільні і невідільні. **Тіло або матеріальна система вважаються вільними**, якщо вони мають можливість під дією прикладених сил рухатись у просторі в будь-якому напрямі, Це означає, що на рух тіла або системи не накладені обмеження, тобто, вони не контактують з іншими тілами або фізичними полями.

Тіло, свобода переміщення якого у просторі обмежується іншими тілами або умовами, вважається **невільним**.

Тіла, фізичні поля або умови, які обмежують рух цього тіла і зберігаються за будь-яких сил, прикладених до твердого тіла, називаються в'язями.

Якщо тіло невідільне, то вважають, що на нього накладені в'язі. **Силова, механічна дія в'язі на це тверде тіло має назву сили реакції в'язі** (в подальшому «реакція»). Це виходить з того, що ефект дії в'язі такий самий, як і дія сили, внаслідок чого дії в'язей можна замінити відповідними силами, які і називаються **реакціями в'язей**. Слід зауважити, що за законом про дію і протидію і тіло діє на в'язь із силою, яка дорівнює реакції, але їй протилежна.

Реакції в'язей за своєю природою відрізняються від інших сил, які

Частина перша

діють на тіла і які прийнято називати **активними**. Ця різниця полягає у тому, що реакція в'язі не завжди визначається самою в'яззю, її модуль, а іноді і напрямок залежить ще і від інших сил, що діють на систему.

Активні ж сили, діючи на систему у стані спокою, можуть надати їй той чи інший рух. Реакції в'язей цією властивістю не володіють, внаслідок чого їх називають **пасивними силами**.

Напрямок сили реакції в'язі збігається з тим напрямком, за яким в'язь перешкоджає переміщенню тіла (якщо таких напрямків декілька, то напрямок реакції визначається залежно від характеру активних сил). У загальному вигляді встановити напрям вектора реакції на підставі лише геометричних властивостей поверхонь тіл і опор неможливо. Тому потрібно розглядати деякі окремі випадки в'язей, що частіше зустрічаються на практиці і під час розв'язування задач. У статичі розглядаються найпростіші в'язі у формі різних твердих і гнучких тіл. Розглянемо основні типи в'язей як розрахункові моделі, які зустрічаються під час розв'язання задач механіки. Кожна з цих в'язей має свою назву, умовне графічне зображення і свої реакції.

1. **Ідеально гладенька поверхня** (рис. 1.5а) перешкоджає поступальному переміщенню тіла у середину поверхні за нормаллю до неї, на самій же поверхні тіло може ковзати. Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до поверхні в точці дотику, вздовж нормалі у бік від поверхні до тіла. **Гладенька поверхня накладає одну в'язь**: вона унеможливує рух за нормаллю до поверхні, тому реакція спрямована проти напрямку втраченого переміщення внаслідок накладання в'язі. Якщо гладенька поверхня сферична (рис. 1.5б), то реакція \bar{R}_A прямує крізь центри сфер O і O_1 вздовж нормалі n (перпендикулярно до дотичної τ).

2. **Точкова опора** (рис. 1.5в). Якщо гладенька площина вироджується у лінію або точку, то реакції в'язей \bar{R}_A і \bar{R}_B спрямовані вздовж перпендикуляра до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в цій точці.

3. **Шарнірно-нерухома опора** або нерухомий циліндричний шарнір (підшипник) (рис. 1.5г) перешкоджає переміщенню тіла у площині, що є перпендикулярною до осі шарніра. Реакція шарнірно-нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і заздалегідь невідома за напрямком.

Невідомий вектор реакції у разі аналітичного визначення уявляється двома складовими вздовж осей координат \bar{R}_x і \bar{R}_y . Зрозуміло, що ця опора накладає дві в'язі: перешкоджає вертикальному і горизонтальному переміщенням, а тому і потребує двох складових реакції у заданій площині.

4. **Шарнірно-рухома опора** або коток (рис. 1.5д).

Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до площини, якою рухається коток або перпендикулярно до площини встановлення шарніра.

5. **Жорстке закріплення** (глухе защемлення) перешкоджає

поступальному лінійному переміщенню за будь-яким напрямком і повороту тіла відносно будь-якої осі у загальному випадку.

Реакція цієї в'язі для плоскої системи (рис. 1.5е) уявляється двома складовими вектора сили \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} і реактивної пари сил з моментом M_R . Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: вона перешкоджає вертикальному і горизонтальному лінійним переміщенням і повороту навколо осі, перпендикулярній площині рисунка.

6. Ідеальний стрижень – це жорсткий однорідний невагомий тонкий стрижень, на кінцях якого встановлено точкові шарніри, розмірами яких можна знехтувати (рис. 1.5ж).

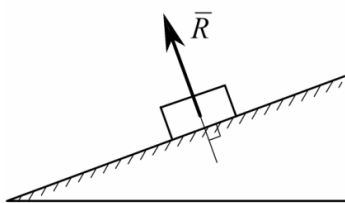
Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована вздовж прямої, що з'єднує центри кінцевих шарнірів стрижня і прикладена у центрі шарніра за напрямком: від вузлів (точок A і B), якщо стрижень розтягнутий, і до вузлів, якщо стрижень стиснутий.

7. Ідеальна нитка – це невагома нерозтяжна нитка, в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 1.5з).

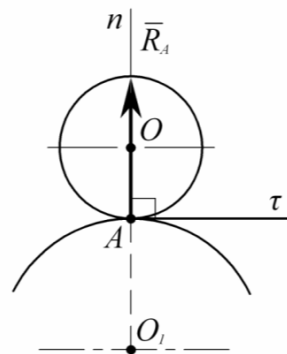
Ця в'язь є **однобічною** і працює тільки за умови розтягу.

Реакція цієї в'язі \bar{T} заважає поступальному переміщенню тіла від точки підвісу, тому вона спрямована вздовж нитки від тіла і прикладена у точці A закріплення нитки.

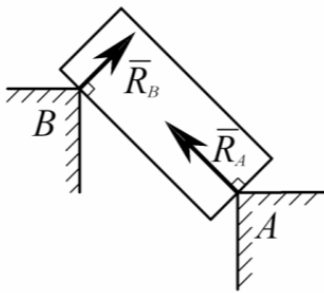
У пасовій передачі (рис. 1.5з) натяги в її гілках \bar{T}_1 і \bar{T}_2 є реакціями гнучкої в'язі.



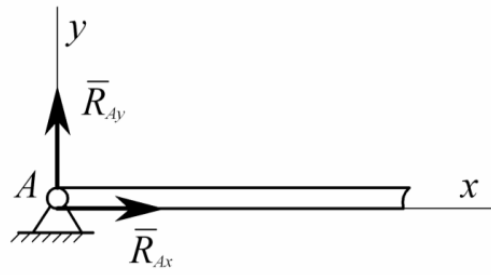
а



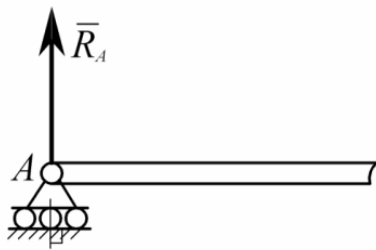
б



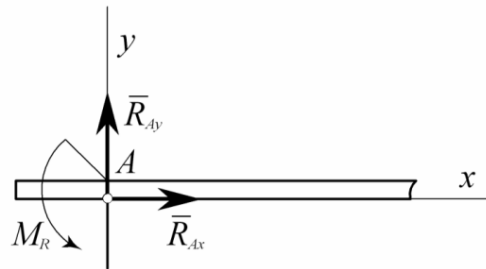
В



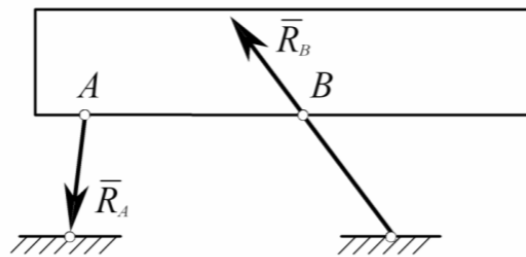
Г



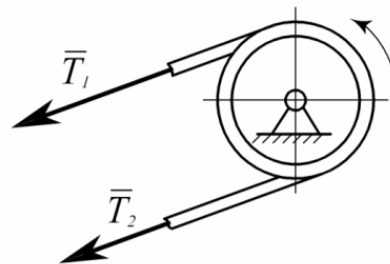
Д



е



Ж



3

Рис. 1.5

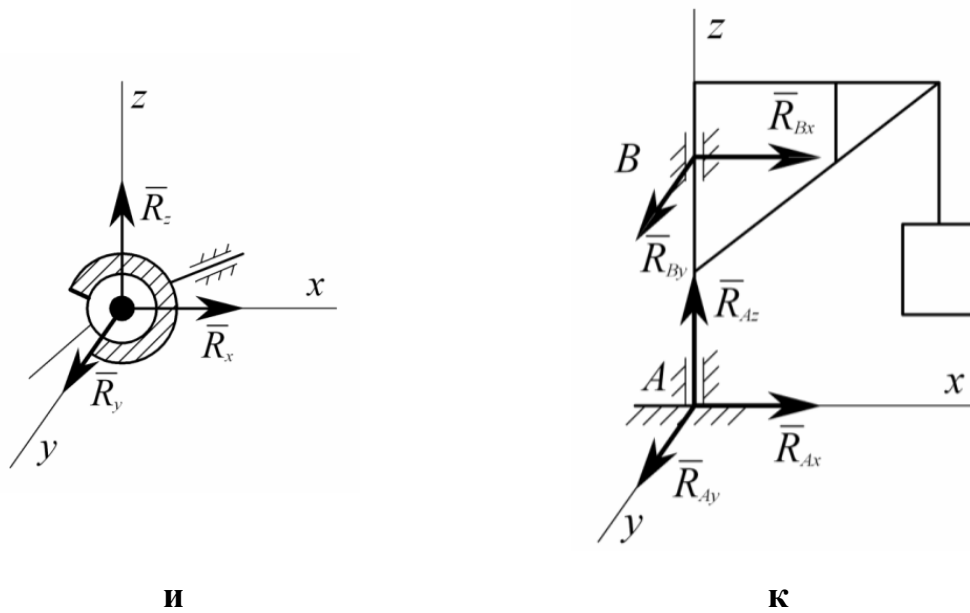


Рис. 1.5 (продовження)

8. **Просторовий сферичний шарнір** або його окремий випадок – **підп'ятник** (рис. 1.5и, к).

Ця в'язь забезпечує нерухомість центра сфери або опорного центра підп'ятника, тому у випадку ідеально гладких поверхонь вектори реакцій прикладені у згаданих центрах, але напрямок цих векторів невідомий.

Відповідні реакції цих в'язей зображуються трьома складовими $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$, спрямованими вздовж осей прямокутної просторової системи декартових координат x у z з початком у центрі сферичного шарніра або центрі підп'ятника.

9. **Криволінійний стрижень** (рис. 1.6). Наприклад, тіло зв'язано з опорою в точці A криволінійним стрижнем.

Конструкцію цієї невагомої в'язі, яка може бути криволінійною з двома зовнішніми точковими шарнірами на кінцях, можна розглядати як стрижень, напрямок реакції якого \vec{S} проходить вздовж прямої, що з'єднує точкові шарніри A і B .

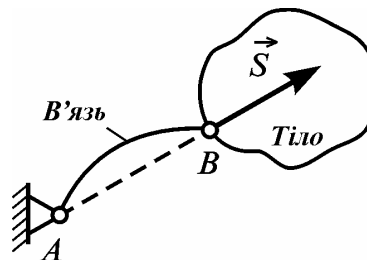


Рис. 1.6

10. **Просторове жорстке закріплення.** На відміну від плоскої

Частина перша

системи (рис. 1.5e) у випадку просторової задачі (рис. 1.7) вектор реакції жорсткого закріплення (защемлення) \vec{R}_A подають *трьома* складовими відносно просторової системи координат, а вектор-момент реактивної пари \vec{M}_p – *трьома* відповідними складовими на ті самі осі.

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A, \quad \vec{M}_p = \vec{M}_{px} + \vec{M}_{py} + \vec{M}_{pz}.$$

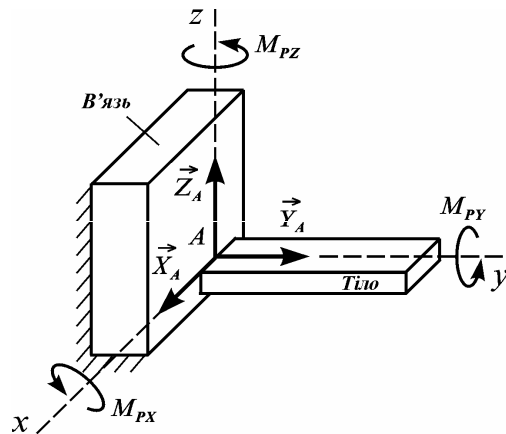


Рис. 1.7

Зауважимо, що ідеальною називають в'язь, лінія дії реакції якої відома (гладенька поверхня, невагомий мотузок і стрижень, коток тощо). У зв'язку з розгляданням поняття в'язей вводиться шоста і сьома аксіоми статyki, які носять назви аксіоми про звільнення від в'язей і аксіоми про накладення нових в'язей.

Шоста аксіома (про звільнення від в'язей).

Первісна рівновага невільного матеріального тіла не порушиться, якщо відкинути фізичні в'язі, накладені на тіло, і замінити їх дію силами реакцій в'язей.

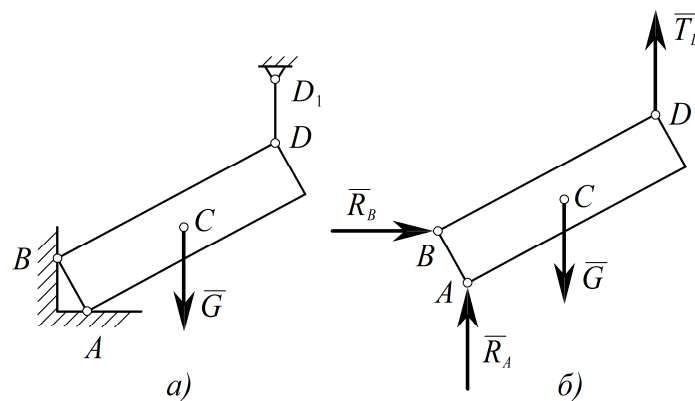


Рис. 1.8

Проілюструємо аксіому на прикладі (рис. 1.8a). Згідно з цією

аксіомою дане невільне тіло (наприклад, брус вагою \bar{G}), що перебуває під дією прикладеної до нього активної сили (сила ваги \bar{G} , яка прикладена в центрі ваги точці C) і накладених в'язей (горизонтальна площина в точці A , вертикальна стінка в точці B і вертикальний трос у точці D) можна розглядати як вільне, якщо відкинути накладені в'язі (опори, троси, тобто, фізичні конструкції) і прикласти реакції цих відкинутих в'язей, рисунок 1.8б (реакції опор \bar{R}_A, \bar{R}_B і натяг тросу \bar{T}), а потім вже застосовувати до тіла закони і методи теоретичної механіки.

Сьома аксіома (про накладання нових в'язей)

Рівновага невільного матеріального тіла не порушиться, якщо на нього накласти нові в'язі.

1.1.5. Класифікація систем сил. Метод перерізів

За характером розміщення всі системи сил, прикладені до одного тіла або системи тіл, можна поділити на плоскі і просторові системи сил. Плоска система сил відрізняється тим, що вектори всіх сил розміщені тільки в одній заданій площині. У просторовій системі сил вектори сил розміщуються як завгодно у просторі.

Крім того, кожна з цих систем сил може бути поділена на систему збіжних сил, систему паралельних сил і систему довільних сил. Зробимо такі визначення:

– **система збіжних сил** (пучок сил) на площині або у просторі, прикладена до твердого тіла, характеризується тим, що **лінії дії** усіх сил **перетинаються в одній точці** (центрі пучка);

– **система паралельних сил** на площині або у просторі: лінії дії всіх сил паралельні;

– **система довільних сил** на площині і система довільних сил у просторі: **лінії дії сил розміщені як завгодно** на площині або у просторі.

Отже, можна констатувати, що маємо **шість** різних **систем сил**, беручи до уваги як плоску, так і просторову системи сил, під дією яких тіло може перебувати у стані рівноваги або рухатись за певним законом.

За характером дії сил, незважаючи їх фізичне походження, у теоретичній механіці існує ще два способи класифікації сил.

Згідно з першим способом, розрізняють сили активні або задані і реакції в'язей.

Активними називають сили, які викликають як прискорення точок системи, так і реакції в'язей.

Другий спосіб полягає у поділі всіх сил на зовнішні і внутрішні сили щодо системи.

Зовнішніми називають сили, з якими точки, що входять до

Частина перша

матеріальної системи, взаємодіють з тілами, які системі не належать.

Внутрішніми називають сили взаємодії між точками однієї системи.

Наведені класифікації сил існують незалежно одна від одної. Так, наприклад, у невільній системі реакції в'язей є внутрішніми силами. Внутрішні сили взаємодії двох зарядів, якщо їх розглядати разом, – активні сили.

Внутрішні сили задовольняють третій закон І. Ньютона незалежно від стану матеріальної системи:

Взаємодія двох матеріальних точок, що входять до системи, завжди відбувається з однаковими за величиною і протилежно напрямленими силами, які мають спільну лінію дії.

Помилкою буде ототожнювати це з аксіомою про абсолютно тверде тіло, бо вона справджується лише для стану рівноваги одного абсолютно твердого тіла. Отже, **внутрішні сили утворюють систему сил, еквівалентну нулю.**

На підставі означень такі сили не можуть змінити кінематичний стан абсолютно твердого тіла, тому їх не можна визначити з рівнянь руху або рівноваги твердого тіла. Але визначення внутрішніх сил дуже важливе, особливо в механіці деформованих тіл. У цьому випадку застосовують метод перерізів, за допомогою якого задача визначення внутрішніх сил зводиться до визначення зовнішніх сил. Припустимо, що треба визначити внутрішні сили в шарнірі A , який з'єднує два тіла AB і AC , що знаходяться під дією зовнішніх сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$ (рис. 1.9а).

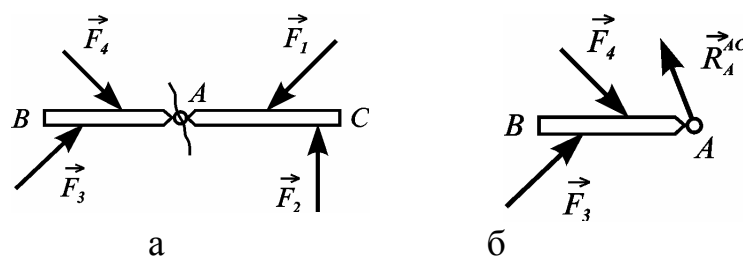


Рис. 1.9

Проведемо переріз крізь шарнір A і розглядатимемо, наприклад, тіло AC як в'язь відносно тіла BA . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, прикладемо в точці A силу реакції \vec{R}_A^{AC} відкинутого тіла AC як механічну дію відкинутого тіла на шарнір A .

Тепер внутрішня сила реакції згаданого шарніра (рис. 1.9а) стає зовнішньою силою відносно тіла BA (рис. 1.9б) і може бути визначена звичайними методами для даної системи сил (у цьому разі – це плоска

система довільних сил).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає теоретична механіка? Що таке механічний рух?
2. Що вивчає статика? Задачі статички.
3. У чому полягає суть понять матеріальна точка і абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Назвіть три параметри, що характеризують силу.
5. Що таке система сил? Які системи сил Ви знаєте?
6. Яка сила є рівнодієюю системи сил? Як формулюються аксіоми статички?
7. Якими є поняття про простір і час у класичній механіці?
8. Що таке матеріальна система?
9. За якими умовами сила може розглядатись як ковзний вектор?
10. Як формулюється теорема про паралелограм сил?
11. Як розуміти вільне і невільне матеріальні тіла?
12. Що таке механічні в'язі і які типи в'язей Ви знаєте?
13. Що таке реакції в'язей і як вони спрямовуються?
14. Які реакції в'язей утворює жорстке закріплення у площині?
15. Які реакції утворюють під'ятник і сферичний шарнір?
16. Які реакції в'язей утворює жорстке закріплення у просторі?
17. Як спрямувати силу реакції криволінійного стрижня?
18. Чим відрізняються внутрішні сили від зовнішніх і які властивості мають перші?
19. Що таке метод перетину і як внутрішні сили перетворити у зовнішні?
20. За якими силами відбувається взаємодія двох матеріальних точок?

1.2. Система збіжних сил. Визначення рівнодієюю.

Умови рівноваги тіла

1.2.1. Зведення системи збіжних сил до рівнодієюю.

Векторний спосіб додавання сил

Якщо вектори всіх сил, прикладені до твердого тіла, розміщені в одній площині або у просторі і лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву *системи збіжних сил* (пучок сил).

Для ілюстрації вищезгаданого покажемо на рис. 1.10 довільне тіло, до якого прикладений просторовий пучок системи збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$. При цьому лінії дії всіх сил перетинаються у центрі пучка точці А.

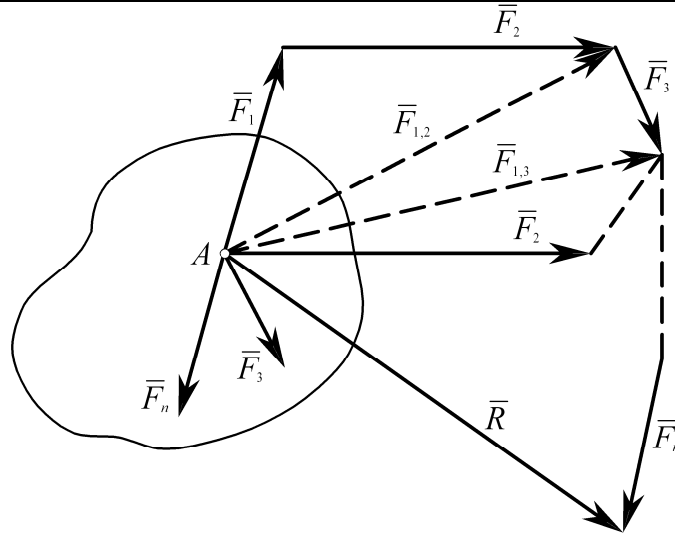


Рис. 1.10

Спробуємо провести еквівалентне перетворення просторової системи збіжних сил, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$, зображеної на рис. 1.10, у більш просту систему.

Візьмемо (умовно) дві перші сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 і на підставі третьої аксіоми статички про паралелограм сил знайдемо їх рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$, для чого на векторах цих сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , як на сторонах, побудуємо паралелограм¹, діагональ якого, прикладена у точці А, і є їхньою рівнодійною $\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Далі векторно додамо дві наступні сили $\vec{R}_{1,2}$ і \vec{F}_3 і на векторах цих сил, як на сторонах, побудуємо другий паралелограм, діагональ якого дорівнює

$$\vec{R}_{1,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Продовжуємо цей процес до останньої сили \vec{F}_n . Ще побудуємо паралелограм і остання діагональ буде рівнодійною \vec{R} системи заданих збіжних сил, оскільки під час перетворень системи використовувалися засоби, які не призводять до зміни кінематичного стану твердого тіла.

Якщо уважно придивитися до геометричної побудови трикутників, то можна побачити, що до кінця вектора сили \vec{F}_1

було приєднано вектор сили \vec{F}_2 (тобто в кінець вектора \vec{F}_1 перенесено паралельно вектор \vec{F}_2) і так далі. Зрозуміло, що тут не потрібні проміжні рівнодійні $\vec{R}_{1,2} \dots$

Так, на підставі третьої аксіоми можна прийти до **правила многокутника сил** або **силового многокутника**.

¹ Тут показаний не паралелограм, а його половина, тобто трикутник сил.

Отже, векторний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови *силового многокутника* для визначення рівнодійної.

Він будується шляхом паралельного перенесення у деякому масштабі векторів сил, де початок вектора наступної сили приєднується до кінця вектора попередньої сили.

Тоді вектор рівнодійної з'єднує початок вектора першої сили з кінцем вектора останньої сили (рис. 1.10), тобто, **вектор рівнодійної є замикальною стороною силового многокутника**. Підсумок процесу додавання пучка збіжних сил у векторній формі можна записати алгебраїчно

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n \quad (1.3)$$

Рівнодійну сил визначили як векторну суму сил, а дію системи збіжних тіл звели до дії однієї сили, рівнодійної, яку визначили геометричним або векторним додаванням сил.

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до сторін многокутника, але конфігурація силового многокутника буде іншою.

Для просторової системи збіжних сил силовий многокутник є **просторовою фігурою**, а для плоскої системи – **плоскою фігурою**.

Для плоскої системи рівнодійну можна визначити графічно шляхом побудови у вибраному для сил масштабі замикальної сторони силового многокутника.

Для просторової системи збіжних сил потрібно було б будувати силовий многокутник у просторі із жорстких стрижнів або проектувати його на прямокутний декартов тригранник.

Отже, система збіжних сил у загальному випадку зводиться до однієї сили – рівнодійної цієї системи сил, яка зображується замикальною стороною силового многокутника, побудованого на силах системи, і прикладена в центрі пучка.

1.2.2. Умова рівноваги системи збіжних сил у векторній формі

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила, то про рівновагу цього тіла, згідно з першою аксіомою, не може бути мови. Розглядаючи систему збіжних сил, зведену до рівнодійної, яка не дорівнює нулю, можна сказати, що і в цьому разі тіло не може бути у рівновазі.

Для рівноваги твердого тіла під дією системи збіжних сил, прикладеної до цього тіла, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи сил дорівнювала нулю.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = 0. \quad (1.4)$$

Отже, *рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, якщо силовий многокутник цієї системи буде замкненим*, тобто, якщо початок вектора першої сили збігається з кінцем вектора останньої сили (див. рис. 1.10: якщо рівнодійна дорівнює нулю, то кінець останнього вектора \vec{F}_n збігатиметься з точкою A , а замикальна сторона \vec{R} перетвориться в точку). Ця умова рівноваги називається векторною або графічною умовою рівноваги (у векторній або графічній формах).

Необхідність умови рівноваги впливає з того, що дана система збіжних сил еквівалентна одній силі – рівнодійній, проте, очевидно, що під дією однієї сили тверде тіло може перебувати у стані рівноваги тільки тоді, коли ця сила дорівнює нулю.

Достатність цієї умови рівноваги: оскільки система сил має рівнодійну, що дорівнює нулю, то діюча на тверде тіло система сил є зрівноваженою або еквівалентною нулю, тому вона не може змінити кінематичного стану цього тіла. Якщо тіло перебувало у стані рівноваги до моменту дії сил, то воно залишиться у цьому стані і під дією цієї системи сил.

1.2.3. Проекція сили на вісь і на площину

Уявимо силу \vec{P} , вектор якої довільно розміщений у площині креслення (рис. 1.11).

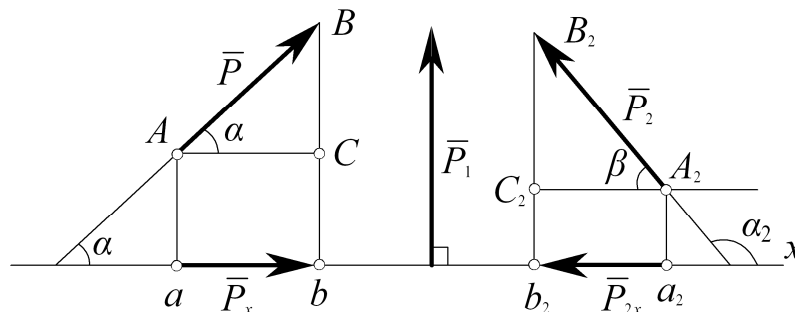


Рис. 1.11

Виберемо у цій площині вісь, наприклад вісь x , і спроектуємо вказану силу \vec{P} на цю вісь.

Позначимо спочатку кінці вектора сили \vec{P} літерами A, B і опустимо з них на вісь x перпендикуляри. Точки перетину перпендикулярів з віссю x (позначимо їх відповідними малими літерами a і b) утворили на осі x напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили \vec{P} на вісь x . За величиною цей відрізок, що можна побачити із трикутника ΔABC , дорівнює добутку модуля сили $|\vec{P}|$ на косинус кута, під яким вектор сили перетинає вісь:

$$P_x = (ab) = (AC) = (AB) \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos \alpha. \quad (1.5)$$

За знаком проекція сили на вісь додатна, якщо кут α (кут між вектором сили і віссю) є гострим. Цілком зрозуміло, якщо цей кут дорівнює 90° , то проекція сили \bar{P}_1 на вісь x дорівнюватиме нулю. Легко зрозуміти, якщо кут між вектором сили і віссю дорівнює нулю, то цей вектор проектується в натуральну величину.

Якщо кут α_2 буде тупий, то проекція сили \bar{P}_2 на вісь x матиме від'ємний знак. Значення проекції у такому випадку:

$$P_{2x} = (a_2b_2) = (A_2C_2) = P_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

Але практично більш зручно використовувати не тупий кут α_2 , а гострий доповняльний кут β між вектором сили \bar{P}_2 і напрямком осі x . Знак проекції легко при цьому визначається зі схеми

$$P_{2x} = -P_2 \cdot \cos \beta.$$

Отже, проекція сили на вісь – це спрямований відрізок на осі між перпендикулярами, опущеними з кінців вектора сили на задану вісь.

Проекція вектора сили на вісь – це скалярна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямком вектора сили і додатним напрямком осі.

Далі знайдемо проекцію вектора сили на площину і на осі координат.

Візьмемо силу \bar{F} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.12). Виберемо у просторі прямокутну систему декартових координат $Oxyz$, початок відліку якої (точка O) суміщений з точкою прикладення вектора сили \bar{F} .

Визначимо проекцію вектора сили \bar{F} на площину xOy . Для цього опустимо з точки A (кінець вектора сили) перпендикуляр на вказану площину, який перетне останню в точці a .

На заданій площині xOy утворено вектор \overline{Oa} , який і є проекцією \bar{F}_{xy} вектора сили на площину. За модулем ця проекція дорівнює:

$$F_{xy} = F \cos \alpha, \quad (1.6)$$

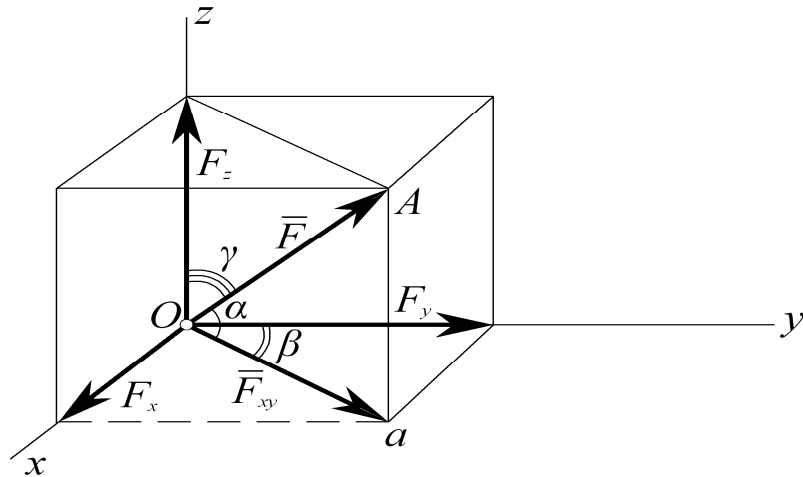


Рис. 1.12

де α – кут між напрямком вектора сили \vec{F} та площиною xOy .

Слід зазначити:

проекція вектора сили на площину є вектором, який розміщений між проекціями початку і кінця вектора сили на цю площину.

Спроектуємо вектор сили \vec{F} на координатні осі x і y за відомим правилом:

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos(90^\circ - \beta) = F \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (1.7)$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (1.8)$$

Аналізуючи вирази (1.7) і (1.8), можна помітити, що для здобуття проекції сили на координатну вісь необхідно провести подвійне проектування: спочатку знайти проекцію вектора сили на площину, в якій розміщені ці осі, а вже потім – на самі осі.

Що стосується третьої осі z , то є можливість спроектувати вектор сили \vec{F} на цю вісь безпосередньо за відомим правилом (1.5):

$$F_z = F \cdot \cos \gamma, \quad (1.9)$$

де γ – кут між вектором сили \vec{F} і віссю z .

1.2.4. Визначення сили за її проекціями

Припустимо, що маємо в площині рисунка прямокутну систему декартових координат Oxy , задані дві проекції сили – F_x і F_y (рис. 1.14). Треба за даними проекціями обчислити модуль вектора самої сили \vec{F}_{xy} , а також його напрямок.

На заданих проекціях, як на сторонах, будуємо прямокутник, діагональ якого, що проходить крізь точку перетину проекцій, і є шуканим

вектором сили \vec{F}_{xy} . Модуль вектора сили \vec{F}_{xy} можна визначити з виразу:

$$F_{xy} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (1.10)$$

Кути між вектором сили \vec{F}_{xy} і осями x, y можна визначити за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos \alpha = \cos (x, \wedge \vec{F}) = \frac{F_x}{F_{xy}}, \quad \cos \beta = \cos (y, \wedge \vec{F}) = \frac{F_y}{F_{xy}}. \quad (1.11)$$

Знаючи напрямні косинуси, є можливість знайти величини кутів за допомогою функції арккосинуса.

Аналогічно для просторової системи сил (рис. 1.14) можна побудувати паралелепіпед на проєкціях як на сторонах, а модуль сили \vec{F} визначити як діагональ цього паралелепіпеда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок вектора цієї сили визначається за напрямними косинусами його кутів з відповідними осями координат x, y, z :

$$\cos (x, \wedge \vec{F}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos (y, \wedge \vec{F}) = \frac{F_y}{PF}, \quad \cos (z, \wedge \vec{F}) = \frac{F_z}{F}.$$

Далі, за функціями арккосинусів визначають величини самих кутів.

1.2.5. Теорема про проєкцію рівнодійної сили на вісь

Маємо систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$, яка зведена до рівнодійної \vec{R} за допомогою силового багатокутника (рис. 1.13). Введемо на площині прямокутну систему декартових координат Oxy і спроектуємо на вісь x всі сили.

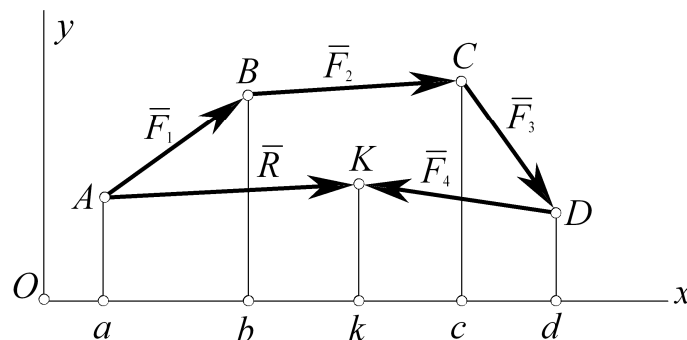


Рис. 1.13

Для цього позначимо кінці векторів всіх сил літерами A, B, C, D, K і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь x . Точки перетину

Частина перша

перпендикулярів з віссю, що позначені відповідними малими літерами a, b, c, d, k , утворили на осі x спрямовані відрізки, які і є проекціями всіх сил на цю вісь:

$$|ab| = F_{1x}; \quad |bc| = F_{2x}; \quad |cd| = F_{3x}; \quad |-dk| = F_{4x}. \quad (1.12)$$

Додамо алгебраїчно всі проекції і підрахуємо, чому ця сума дорівнює:

$$ab + bc + cd - dk = ak. \quad (1.13)$$

Але відрізок ak і є проекцією рівнодійної сили \bar{R} на вісь x . Цей підрахунок стосувався чотирьох сил, але, поширюючи цю суму на n сил, можна записати:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.14)$$

1.2.6. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил

Для можливості аналітичного додавання сил скористуємося теоремою векторної алгебри:

проекція підсумкового вектора або рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів складових сил на ту саму вісь.

На підставі теореми

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.15)$$

Аналогічно проекції рівнодійної сили на осі y і z дорівнюють:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad (1.16)$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (1.17)$$

Модуль рівнодійної:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Кути між вектором рівнодійної \bar{R} і осями координат x, y, z визначимо через функції напрямних косинусів кутів між відповідною віссю та рівнодійною:

$$\cos(x, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \hat{\bar{R}}) = \frac{R_z}{R}. \quad (1.18)$$

1.2.7. Умови рівноваги тіла під дією системи збіжних сил

Систему збіжних сил можна звести до однієї рівнодійної сили. Для

рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи дорівнювала нулю (вираз 1.4). А якщо рівнодійна сила дорівнює нулю, то і її проекції на осі x, y, z теж дорівнюють нулю. Оскільки проекції рівнодійної дорівнюють алгебраїчним суммам проекцій складових сил (вирази 1.14 – 1.17), то умови рівноваги просторової системи збіжних сил мають такий вигляд:

$$\left. R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \right\} \quad (1.19)$$

Для рівноваги твердого тіла, що перебуває під дією просторової системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на кожну із трьох координатних осей дорівнювали нулю.

У випадку плоскої системи збіжних сил одну із осей координат, частіше oz , вибирають перпендикулярною до площини дії сил. Тоді третя умова із системи умов (1.19) перетворюється у тотожність. Відкидаючи її, отримуємо умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил:

$$\left. R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \right\} \quad (1.20)$$

Для рівноваги твердого тіла під дією прикладеної до нього плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій цих сил на кожну із двох координатних осей, розміщених у цій площині, дорівнювали нулю.

1.2.8. Методика розв'язування задач статички. Приклади

Задачі статички, що потребують розв'язування, можуть бути одного з двох типів. У задачах першого типу відомі діючі на тіло активні сили і необхідно знайти, в якому положенні або за яких співвідношень між діючими силами задане тіло може перебувати у стані рівноваги. У задачах другого типу попередньо відомо, що задане тіло перебуває у стані рівноваги, а необхідно визначити, чому при цьому дорівнюють деякі діючі сили і реакції опор. Реакції в'язей завжди є величинами, попередньо невідомими у всіх задачах статички. Алгоритм розв'язування задач статички твердого тіла наступний.

1. З'ясувати, рівновагу якого твердого тіла або точки потрібно розглянути.

Для розв'язання задачі розглядається рівновага тіла, до якого прикладені задані і шукані сили. Якщо ж на тіло діє система збіжних сил, то необхідно визначити точку, в якій перетинаються лінії дії сил і реакцій. Якщо задані сили діють на одне тіло, а шукані сили – на друге або ці сили

Частина перша

діють одночасно на декілька тіл, то може бути необхідним розглянути послідовно рівновагу кожного тіла окремо.

2. Скласти розрахунково-силову схему.

Важливе значення має охайне креслення, навіть чернетка рисунка, що може допомогти швидше знайти правильний шлях розв'язування задачі і уникнути помилок під час складання умов рівноваги.

а) показати на схемі задані активні сили, що діють на тверде тіло;

з'ясувавши, рівновагу якого тіла потрібно розглянути, слід зобразити на рисунку всі діючі на задане тіло зовнішні сили, включаючи як задані, так і шукані сили;

б) показати на схемі сили реакцій в'язей, що обмежують рух твердого тіла;

відкинути за аксіомою про звільнення від в'язей задані фізичні опорні елементи, конструкції і замінити їхню дію реакціями в'язей згідно з рекомендаціями щодо основних типів в'язей (див. пп. 1.1.4). Напрямок стрілок невідомих реакцій задаємось довільно. Таким чином, до тіла або точки прикладатимуться задані активні сили і сили реакцій в'язей;

в) раціонально вибрати систему координат;

особливо це важливо для системи збіжних сил, прикладеної до твердого тіла. Для зручності початок координат розміщуємо в точці рівноваги. Бажано, щоб одна із осей координат збігалася з перпендикуляром до напрямку шуканої сили – в цьому разі одне з рівнянь рівноваги опиниться з одним невідомим, з якого легко визначити шукану величину.

3. Встановити, яка система сил за класифікацією діє на задане тверде тіло.

Це необхідно, щоб з'ясувати, якими умовами рівноваги тіла під дією заданих сил і реакцій в'язей необхідно користуватися, і вибрати відповідну систему умов рівноваги.

4. На підставі відповідної системи умов рівноваги скласти рівняння рівноваги твердого тіла.

Геометричні умови рівноваги слід застосовувати, якщо на тіло діє не більше трьох заданих і шуканих сил, розміщених на площині. У випадку рівноваги силовий трикутник, побудований з цих сил, має бути замкненим, з нього і визначають шукані сили.

Аналітичними умовами рівноваги можна користуватися за будь-якої кількості сил, що діють на тверде тіло. Корисно при цьому, особливо на початку вивчення матеріалу, попередньо обчислювати проєкції всіх сил і

заносити їх в окрему таблицю.

5. Розв'язати складені рівняння рівноваги, визначити шукані величини, провести перевірку і аналіз результатів.

Усі розрахунки під час розв'язання алгебраїчних рівнянь статички рекомендується проводити у загальному вигляді, отримуючи для шуканих величин формули, що дає можливість аналізу знайдених результатів.

Крім того, розв'язок у загальному вигляді дозволяє виявити зроблені помилки шляхом перевірки вимірності. Визначені аналітично шукані величин можуть бути перевірені на підставі геометричних умов рівноваги побудовою силового трикутника або многокутника.

Якщо одна із знайдених реакцій отримала знак «мінус», то це означає, що фактичний її напрямок є протилежним, ніж це показано на розрахунковій схемі.

Конкретні методичні вказівки для розв'язання задач надаються в кожному окремому випадку, адже будь-яка задача зберігає свою індивідуальну особливість.

Приклад 1.1

Невагомий ідеальний стрижень AB утримується в рівновазі нерозтяжним гнучким тросом BC .

До шарніра B стрижня на гнучкій нерозтяжній нитці підвішене тіло вагою G (рис.1.16).

Визначити натяг нитки BC і силу реакції стрижня AB , якщо кути і вага дорівнюють, відповідно:

$$\alpha = 45^\circ; \beta = 105^\circ; G = 500 \text{ Н}.$$

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вузла B , де збігаються вектори усіх сил (рис. 1.14). До вузла прикладено: сила натягу нитки, що рівна силі ваги \bar{G} , перенесена вздовж лінії дії від центра мас тіла до точки B , натяг троса \bar{T} і сила реакції стрижня \bar{S} . Таким чином, вузол B перебуває у рівновазі під дією трьох сил: \bar{G} , \bar{T} і \bar{S} , розміщених в одній площині і прикладених у центрі пучка точці B .

Величину зусиль \bar{S} і \bar{T} визначимо геометричним методом, скориставшись векторною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum \bar{F}_k = \bar{T} + \bar{G} + \bar{S} = 0.$$

Для цього з довільної точки a (рис. 1.15) відкладаємо в деякому масштабі відомий вектор \bar{G} , отримавши дві точки a і b , крізь які проводимо послідовно прямі, паралельні відомим лініям дії невідомих за

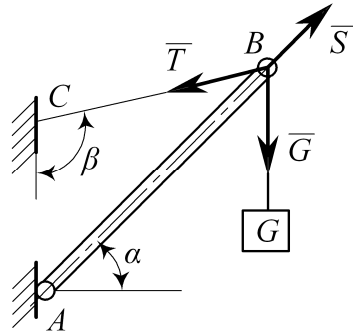


Рис. 1.14

модулем сил \bar{S} і \bar{T} .

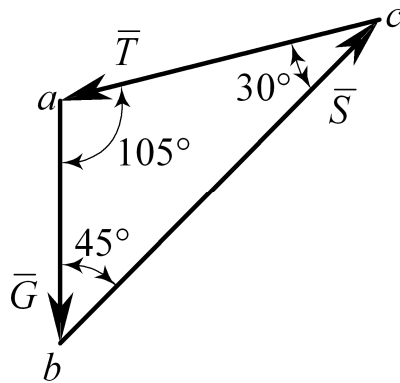


Рис. 1.15

На перетині останніх отримаємо точку c , з допомогою якої утворюється силувий трикутник abc . Сторони цього трикутника у вибраному масштабі уявляють собою модулі задіяних сил.

Знайти невідомі величини можна, якщо заміряти відповідні сторони силового трикутника і помножити їхню довжину на вибраний масштабний коефіцієнт, або за теоремою синусів:

$$\frac{G}{\sin 30^\circ} = \frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{S}{\sin 105^\circ}.$$

Звідси:

$$T = G \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,707}{0,5} = 707 \text{ Н};$$

$$S = G \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = G \frac{\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,954}{0,5} = 954 \text{ Н}.$$

Відповідь: $T = 707 \text{ Н}; S = 954 \text{ Н}.$

Приклад 1.2

Гнучкий трос з двома тілами на кінцях вагою F і \bar{Q}_1 перекинаний через блоки A і B (рис.1.16). В точці O збігання тросів прикріплено вантаж вагою $G=27,3\text{ Н}$. В умовах рівноваги системи нитка OA утворила кут 60° з горизонталлю, а нитка OB – кут 45° .

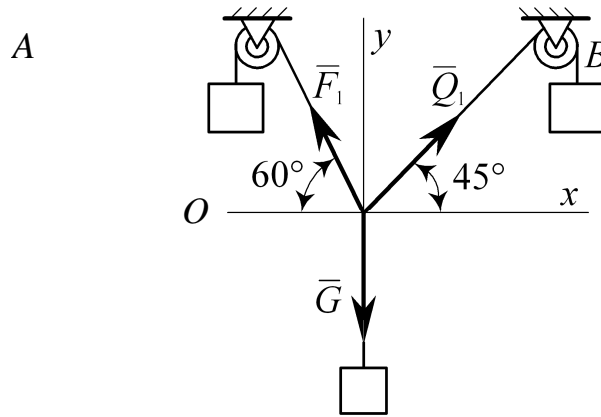


Рис. 1.16

Визначити вагу тіл F і Q . Силами тертя в блоках знехтувати.

Розв’язання

Спочатку з’ясуємо, рівновагу якої точки потрібно розглянути при розв’язуванні задачі. За умовою задачі потрібно визначити вагу тіл F і Q , прикладених до центрів мас тіл і спрямованих вертикально вниз. Кожне тіло натягує нитку з силою, яка дорівнює його вазі. Блоки змінюють напрямки ниток, а, відповідно, і напрями сил натягу. Сили натягу F_1 і \bar{Q}_1 за модулем дорівнюють вазі тіл F і Q , але спрямовані вздовж тросів OA і OB .

Оскільки прями OA і OB перетинаються в точці O , до якої можна прикласти і задану силу G , то під час розв’язання задачі треба розглядати рівновагу точки O .

Таким чином, на точку O (рис.1.16) діють: сила натягу \bar{F}_1 вітки нитки OA ; сили натягу \bar{Q}_1 вітки нитки OB ; вага тіла G .

Складемо рівняння рівноваги. Для цього оберемо систему координат Oxy з початком у точці O , спроектуємо сили на осі координат і складемо рівняння рівноваги.

Для суми проекцій на вісь Ox дістанемо:

$$\sum F_{kx} = Q_1 \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Знак проекції \bar{Q}_1 – додатний, оскільки вона спрямована за додатним

Частина перша

напрямом осі Ox . Знак проекції сили F_1 – від’ємний, оскільки вона спрямована за від’ємним напрямом осі Ox . Проекція сили \bar{G} на вісь Ox дорівнює нулю (вектор сили перпендикулярний до осі).

Сума проекцій усіх сил на вісь Oy дорівнює:

$$\sum F_{ky} = Q_1 \sin 45^\circ + F_1 \sin 60^\circ - G = 0.$$

Проекції сил \bar{F}_1 і \bar{Q}_1 мають додатні знаки, оскільки вони спрямовані за додатним напрямом осі Oy . Проекція сили \bar{G} має знак «мінус», оскільки спрямована за від’ємним напрямом осі.

З урахуванням чисельних значень тригонометричних функцій та величини заданої сили G рівняння набувають вигляду:

$$0,707Q_1 - 0,5F_1 = 0;$$

$$0,707Q_1 + 0,866F_1 - 27,3 = 0.$$

Визначивши з першого рівняння $F_1 = 1,41 Q_1$

і підставивши в друге, дістанемо: $Q_1 = 14,1 \text{ Н}; F_1 = 20 \text{ Н}$.

Приклад 1.3

Три невагомих стрижні AB , AC і AD , розміщені в різних площинах, закріплені шарнірно в точці A і за допомогою шарнірів B , C , D прикріплені до горизонтальної підставки (рис. 1.17). Площини трикутників ABC і AOD вертикальні і взаємно перпендикулярні. На вузол A паралельно OD діє сила $P=0,6kH$. Знайти зусилля в стрижнях, якщо $\angle ABO = \angle ACO = 45^\circ$; $\angle ADO = 60^\circ$.

Розв’язання

1. Виділимо тіло або точку, умови рівноваги якої дадуть можливість розв’язати задачу. Це точка A , до якої збігаються всі стрижні, зусилля в яких потрібно визначити. Отже, розглянемо рівновагу вузла A , користуючись аксіомою про звільнення від в’язей.

2. Аналізуємо сили, які прикладені до вузла A . На вузол A діє активна сила \bar{P} , а також три реакції стрижнів, які діють уздовж них, оскільки стрижні ідеальні. Припустимо, що всі стрижні розтягнуті, тому на рис. 1.19 їхні реакції спрямовані від вузла A . Задачі має три невідомі \bar{R}_B , \bar{R}_D , \bar{R}_C , для відшукування яких можна скласти три рівняння рівноваги. Таким чином, задача статично визначена.

Початок системи координат виберемо в точці O , додатні напрями осей позначено на рисунку.

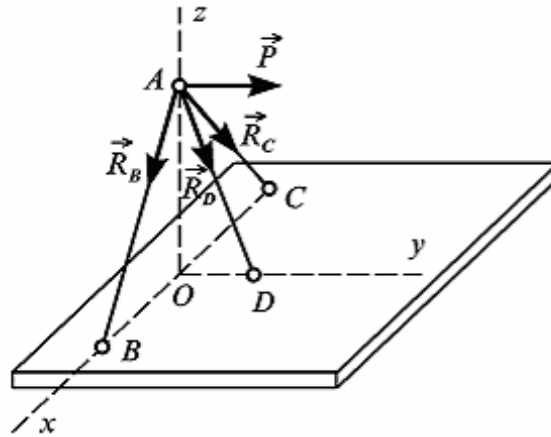


Рис. 1.17

3. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = P + R_D \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = -R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

На підставі першого рівняння робимо висновок, що $R_B = R_C$, з другого рівняння знаходимо R_D :

$$R_D = -\frac{P}{\cos 60^\circ} = -2P.$$

Від'ємний знак свідчить, що цей стрижень стиснутий, оскільки спочатку припускали, що він розтягнутий. Нарешті, з третього рівняння знайдемо:

$$R_B = R_C = -\frac{R_D \cdot \cos 30^\circ}{2 \cos 45^\circ}; \quad R_B = R_C = \frac{P \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = P \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Додатний знак цих реакцій вказує на те, що стрижні AB і AC розтягнуті.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
2. Для чого і яким чином будується силовий многокутник?
3. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній (векторній) формі?
4. Як формулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох

- непаралельних сил?
5. Як визначаються проекції сили на вісь і площину?
 6. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
 7. Як визначити силу за її проекціями?
 8. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
 9. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
 10. Яка методика розв'язання задач за теоремою про три сили?

1.3. Теорія моментів і пар сил на площині

1.3.1. Алгебраїчний момент сили відносно центра (точки)

Із практики відомо, що тіло під дією сили може не тільки переміщуватися, але і повертатися. Що ж створює цей обертальний ефект? Введемо важливе поняття механіки про **момент сили відносно центра** або точки, які називають центром моменту.

Якщо тіло під дією прикладеної сили обертається відносно центра, то обертальний ефект сили характеризується її моментом відносно цього центра. Під час розгляду плоскої системи сил, прикладених до твердого тіла, використовується поняття алгебраїчного моменту сили відносно центра.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.18), яке може повертатися відносно точки O (точніше навколо осі, що є перпендикулярною площині рисунка і перетинає точку O).

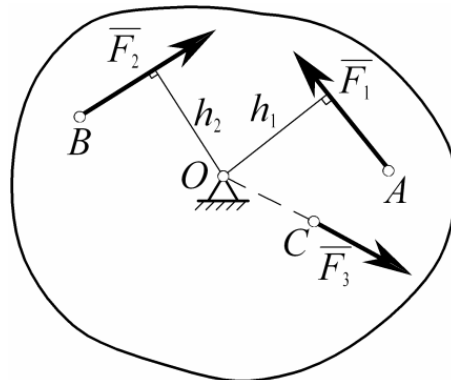


Рис. 1.18

Прикладемо в точках A , B , C тіла вектори сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 і визначимо спочатку, чи зможуть вони повертати тіло навколо точки O .

Як можна побачити з рисунка, сила \vec{F}_1 , прикладена у точці A , може повернути тіло навколо точки O проти ходу стрілки годинника. Сила \vec{F}_2 – за ходом стрілки годинника.

Власне, тут інтуїтивно виявляється здатність сили повертати тіло і створювати обертальний ефект. Проте сила \vec{F}_3 , якою б великою вона не була, не має можливості повернути тіло навколо точки O , оскільки лінія

дії сили \vec{F}_3 перетинає цю точку.

Таким чином, сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 створюють обертальний ефект (момент) відносно точки O , а сила \vec{F}_3 – ні. Із цього прикладу випливає висновок, що для рівноваги тіла поряд з силами необхідно розглядати і добутки цих сил на відстані ліній їхньої дії від опор.

Алгебраїчним моментом сили відносно центра (точки) називається взятий з відповідним знаком добуток модуля сили на плече.

Плече сили відносно центра – це найкоротша відстань між цим центром і лінією дії сили (перпендикуляр із центра на лінію дії сили).

У курсі теоретичної механіки алгебраїчний момент вважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно цієї точки проти ходу стрілки годинника і від’ємним – за ходом стрілки.

Алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно точки O позначається $m_o(\vec{F})$.

Покажемо на рис. 1.18 плечі h_1 і h_2 сил, які створюють моменти відносно точки o , і визначимо алгебраїчні величини моментів цих сил:

$$m_o(\vec{F}_1) = F_1 \cdot h_1, \quad m_o(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2, \quad m_o(\vec{F}_3) = F_3 \cdot 0 = 0.$$

Алгебраїчний момент сили – це добуток сили на лінійну величину – довжину плеча.

Звідси одиницею виміру моменту у системі SI є добуток ньютон на метр (Nm).

Із аналізу визначення алгебраїчного моменту сили відносно центра випливають його властивості.

1. Момент не залежить від перенесення в межах цього тіла точки прикладання вектора сили вздовж лінії дії сили, оскільки плече сили залишається при цьому незмінним.

2. Якщо лінія дії вектора сили перетинає центр моменту, то момент цієї сили відносно цього центра дорівнює нулю.

3. Сума алгебраїчних моментів відносно центра двох рівних за модулем, але протилежних за напрямом сил, що діють вздовж однієї прямої, дорівнює нулю.

1.3.2. Момент сили відносно центра як вектор

Під час розгляду просторової системи сил, прикладеної до твердого тіла, плідно використовується поняття векторного моменту сили відносно центра.

Розглянемо силу \vec{F} , вектор якої довільно розташований у просторі і прикладений в точці A (рис. 1.19).

Алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно центра O дорівнюватиме

$$m_o(\vec{F}) = Fh. \quad (1.21)$$

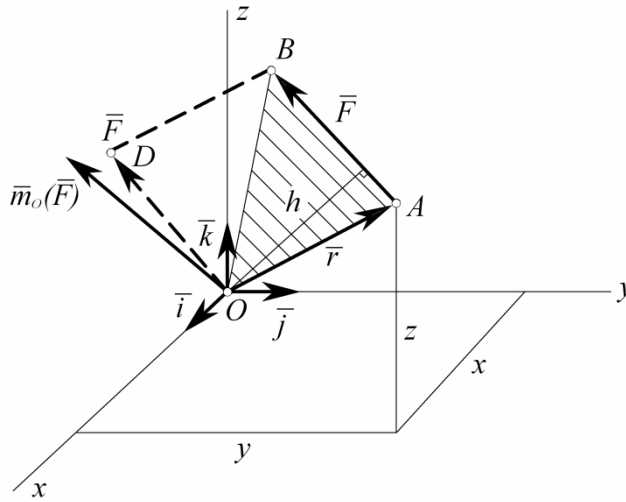


Рис. 1.19

Із трикутника AOB визначимо плече $h = r \cdot \sin(\vec{r} \wedge \vec{F})$. Тоді для виразу алгебраїчного моменту (1.21) отримаємо:

$$m_o(\vec{F}) = Fh = F \cdot r \cdot \sin(\vec{r} \wedge \vec{F}). \quad (1.22)$$

Позначимо літерами A і B кінці вектора сили \vec{F} і з'єднаємо їх з точкою O . Основою трикутника AOB є вектор сили \vec{F} , а одна із вершин розміщена в точці O .

Плече h є висотою трикутника AOB . Тоді алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно центра O є подвійною площею трикутника AOB , якщо розглядати його геометричну інтерпретацію:

$$m_o(\vec{F}) = 2S_{\Delta AOB}. \quad (1.23)$$

Далі проведемо крізь точку O прямокутну систему декартових координат $Oxyz$ з ортами \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Вважаємо, що відстань OA є радіусом-вектором \vec{r} точки A відносно центра O прикладання вектора сили \vec{F} .

Оскільки алгебраїчний момент сили \vec{F} відносно центра O , як визначено виразом (1.23), є площею двох трикутників AOB , то побудуємо рівновеликий їм паралелограм $OABD$. Легко побачити, що тепер в точці O прикладені два вектори \vec{r} і \vec{F} , на яких і побудовано паралелограм, площа якого (вираз 1.22) дорівнює модулю векторного добутку двох векторів $\vec{r} \times \vec{F}$.

Таким чином, векторний момент сили відносно центра $\vec{m}_o(\vec{F})$, що проведений перпендикулярно до площини паралелограма, є третім підсумковим вектором добутку двох векторів \vec{r} і \vec{F} :

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (1.24)$$

Остаточно сформулюємо визначення вектора-моменту сили.

Векторний момент сили $\bar{m}_o(\bar{F})$ відносно центра O є підсумковим вектором векторного добутку $\bar{r} \times \bar{F}$, прикладеним в цьому центрі і спрямованим перпендикулярно до площини трикутника OAB , утвореного вектором сили і центром моменту. Векторний момент напрямлений перпендикулярно площині у той бік, з якого можна побачити, що поворот тіла під дією заданої сили \bar{F} відносно центра O відбувається проти годинникової стрілки.

За модулем векторний момент дорівнює подвійній площі трикутника AOB , який утворюють кінці вектора сили \bar{F} і центр O . У підсумку можна зазначити, що векторний момент характеризується модулем, площиною дії і напрямком повороту.

Векторний момент сили відносно центра становить повну характеристику статичної дії цього моменту на тверде тіло, тому дії над моментами можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами.

Векторний момент сили $\bar{m}_o(\bar{F})$ відносно центра є зв'язаним вектором, тобто, закріпленим у центрі моменту, і за всіма трьома параметрами визначає обертальний ефект сили, прикладеної до твердого тіла: лінія дії векторного моменту визначає **площину дії моменту** (за перпендикуляром); спрямованість вектора (перпендикуляра) визначає **напрямок повороту** «за» чи «проти» годинникової стрілки; довжина вектора у певному масштабі визначає **модуль моменту**.

Визначимо аналітично проєкції на осі координат і модуль векторного моменту сили відносно центра. У прийнятій системі координат вектори \bar{r} і \bar{F} можна виразити через відповідні проєкції на осі координат:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (1.25)$$

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}, \quad (1.26)$$

де x, y, z – проєкції радіуса-вектора \bar{r} на осі координат; F_x, F_y, F_z – проєкції вектора сили \bar{F} на відповідні осі.

Як відомо із векторної алгебри, векторний добуток можна записати у вигляді визначника третього порядку, підставляючи проєкції радіуса-вектора и сили із виразів (1.25) і (1.26):

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ x, & y, & z \\ F_x, & F_y, & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

Розкривши визначник (1.27) за елементами першого рядка, отримуємо:

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}. \quad (1.28)$$

Коефіцієнти перед одиничними векторами у виразі (1.28) є проєкціями вектора-моменту сили відносно точки на осі координат x, y, z , тобто, алгебраїчними величинами і аналітичними виразами проєкцій:

$$m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x. \quad (1.29)$$

Якщо проєкції векторного моменту відомі, то його модуль неважко обчислити аналітично із виразу (1.29), визначивши корінь квадратний із суми квадратів проєкцій, а якщо потрібно, то і напрямні косинуси.

$$m_o(\bar{F}) = \sqrt{m_x^2(\bar{F}) + m_y^2(\bar{F}) + m_z^2(\bar{F})}; \quad (1.30)$$

$$\cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{i}) = \frac{m_x(\bar{F})}{m_o(\bar{F})}; \quad \cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{j}) = \frac{m_y(\bar{F})}{m_o(\bar{F})};$$

$$\cos(\bar{m}_o(\bar{F}), \wedge \bar{k}) = \frac{m_z(\bar{F})}{m_o(\bar{F})}. \quad (1.31)$$

Вирази (1.30) і (1.31) аналітично визначають модуль і напрямок векторного моменту сили, прикладеної до твердого тіла, відносно заданого центра.

1.3.3. Теорема Варіньйона про момент рівнодійної збіжних сил

Момент рівнодійної системи збіжних сил відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того самого центра.

Доведення. Припустимо, що до тіла в точці A прикладена система збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, зведена до рівнодійної сили \bar{R} (рис. 1.20). Оберемо довільний центр O і визначимо відносно нього моменти всіх сил. Починаємо з першої сили \bar{P}_1 . Знайдемо її момент відносно центра O . Спочатку з'єднаємо прямими лініями початок і кінець вектора сили \bar{P}_1 з точкою O .

Проведемо крізь точку O перпендикуляр до прямої OA , і вважаємо цю пряму віссю x (тобто задамо її напрямком).

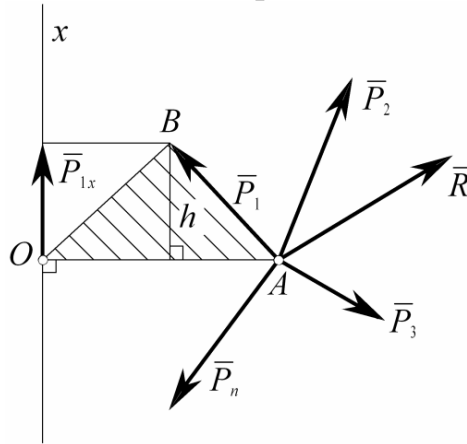


Рис. 1.20

Момент сили \bar{P}_1 відносно точки O є подвійною площею трикутника OAB :

$$m_o(\bar{P}_1) = 2S_{\Delta OAB}.$$

Визначимо площу цього трикутника. Як відомо, це є половина добутку основи (у нашому випадку це сторона OA) на висоту трикутника h . А висота у такому випадку дорівнює проекції вектора сили \bar{P}_1 на вісь x – P_{1x} .

Таким чином, момент сили \bar{P}_1 відносно точки O дорівнює добутку основи трикутника OA на проекцію сили на вісь x :

$$m_o(\bar{P}_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot P_{1x} = OA \cdot P_{1x}.$$

Аналогічно обчислимо моменти інших сил системи:

$$m_o(\bar{P}_2) = OA \cdot P_{2x}, \quad m_o(\bar{P}_3) = OA \cdot P_{3x}, \quad \dots, \quad m_o(\bar{P}_n) = OA \cdot P_{nx}.$$

Далі переходимо до рівнодійної \bar{R} системи сил і таким же чином визначимо її момент відносно точки O :

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x,$$

де R_x – проекція рівнодійної сили \bar{R} на вісь x .

Згідно з теоремою про проекцію рівнодійної сили на вісь (вираз 1.14), яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю вісь, можна записати:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x = OA (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx}).$$

Розкриваючи дужки, отримаємо:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot P_{1x} + OA \cdot P_{2x} + OA \cdot P_{3x} + \dots + OA \cdot P_{nx}$$

Права частина даного виразу містить моменти складових сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ відносно точки O . Остаточоно:

$$m_o(\bar{R}) = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.32)$$

Вираз (1.32) свідчить, що **момент рівнодійної** сили відносно будь-якого центра дійсно **дорівнює** алгебраїчній **сумі моментів складових** системи збіжних сил відносно того самого центра.

Теорема Варіньйона може бути застосована і для інших систем сил, що зводяться до рівнодійної.

1.3.4. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил

Якщо лінії дії системи сил паралельні, то такі сили носять назву системи паралельних сил. Додавання їх здійснюється на підставі відомих з курсу елементарної фізики положень. Система двох паралельних сил, спрямованих в один бік, має рівнодійну (рис. 1.21).

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік, за числовим значенням є арифметичною сумою модулів цих сил, паралельна лінії дії сил і спрямована в той самий бік.

$$R = P_1 + P_2$$

Точка прикладання рівнодійної сили ділить внутрішньо відрізок, що з'єднує точки прикладання сил, на частини, які є обернено пропорційними модулям цих сил.

Оскільки система двох сил зводиться до рівнодійної, застосуємо теорему Варіньйона, вираз (1.32), вибравши точку C за центр моментів:

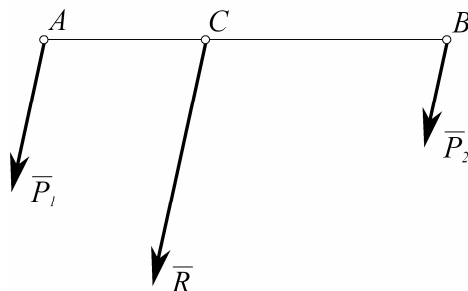


Рис. 1.21

$$m_c(R) = m_c(P_1) + m_c(P_2); \Rightarrow 0 = P_1 \cdot AC - P_2 \cdot BC; \Rightarrow \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC = BC \frac{P_2}{P_1}, \quad (1.34)$$

де \bar{P}_1 і \bar{P}_2 – вектори паралельних сил, що додаються;

A, B, C – точки прикладання паралельних сил і рівнодійної, відповідно.

AC – відстань від точки A до точки C , де прикладена рівнодійна двох паралельних сил, яку називають центром паралельних сил, спрямованих в один бік.

У виразі (1.33) момент рівнодійної відносно точки прикладання C дорівнює нулю, функції синусів рівновеликих кутів, за якими визначались плечі, скоротилися. Тому, під яким би кутом до лінії AB не були нахилені вектори сил, положення центра паралельних сил, де прикладається вектор рівнодійної, завжди залишається незмінним.

Для додавання двох антипаралельних сил (рис. 1.22), лінії дії яких паралельні, але їхні вектори спрямовані у протилежні боки, існує наступне правило.

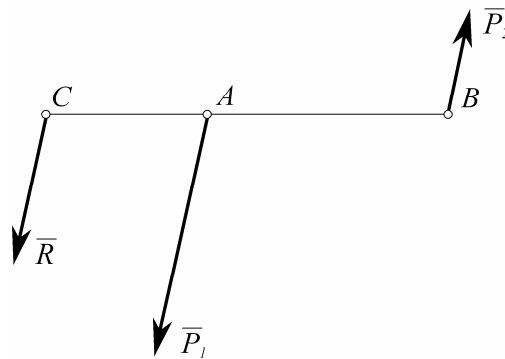


Рис. 1.22

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих у протилежні боки, дорівнює за числовим значенням різниці модулів цих сил, паралельна лінії дії сил і спрямована у бік більшої сили.

$$R = P_1 - P_2,$$

де \bar{P}_1 – найбільша із двох антипаралельних сил ($\bar{P}_1 > \bar{P}_2$).

Точка прикладання рівнодійної сили ділить зовнішньо відстань між точками прикладання заданих сил на відрізки, які є обернено пропорційними величинам цих сил, що впливає із аналогічного виразу (1.33).

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}; \quad AC = BC \frac{P_2}{P_1}; \quad (1.35)$$

де C – точка прикладання рівнодійної \bar{R} або центр антипаралельних

сил, що розміщується поза межами відрізка AB (рис. 1.22), у кінцевих точках якого прикладені задані антипаралельні сили.

1.3.5. Пара сил. Момент пари сил

Поряд з поняттям сили в механіці існує другий основний силовий фактор – пара сил, яку прикладають до твердого тіла, щоб примусити його до обертання.

Звернувшись до рис. 1.22, складемо суму моментів усіх сил відносно точки A за теоремою Варіньйона. Тоді отримаємо довжину плеча (важеля) AC , у точці C якого має бути прикладена рівнодійна \bar{R} :

$$AC \cdot R \cdot \sin \alpha = AB \cdot P_2 \cdot \sin \alpha \Rightarrow R = P_1 - P_2 \Rightarrow AC = AB \frac{P_2}{P_1 - P_2} \quad (1.36)$$

де α – кут між лінією AB і векторами паралельних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{R}$.

Чи мають рівнодійну ці антипаралельні сили, якщо $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$? Аналізуючи вираз (1.36), легко побачити, що за поступового зменшення рівнодійної або різниці між модулями антипаралельних сил, знаменник виразу наближається до нуля, а тому довжина плеча AC наближатиметься до нескінченності. Таким чином, рівнодійної двох рівних антипаралельних сил не існує, тому тут виникає новий силовий фактор – пара сил.

Пара сил, прикладена до твердого тіла, – це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил, що мають різні лінії дії.

З першої аксіоми про дві сили випливає, що тіло під дією системи сил, які створюють пару, не може перебувати у стані рівноваги. Крім того, пара не має рівнодійної, оскільки підсумковий вектор системи двох таких сил дорівнює нулю.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.23), до якого в точках A і B прикладені сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , такі, що: $F_1 = F_2$ і $\bar{F}_1 // \bar{F}_2$. Це означає, що до тіла прикладена пара сил (\bar{F}_1, \bar{F}_2) .

Площина, в якій розміщені сили пари, має назву площини дії пари. Пара сил характеризується моментом, що викликає поворот тіла парою у площині її дії, тобто, пара створює обертальний ефект.

Алгебраїчним моментом пари називається взятий з відповідним знаком добуток однієї із сил пари на плече пари. Плече пари h (рис. 1.23) – це найкоротша відстань (за перпендикуляром) між лініями дії сил, що становлять пару.

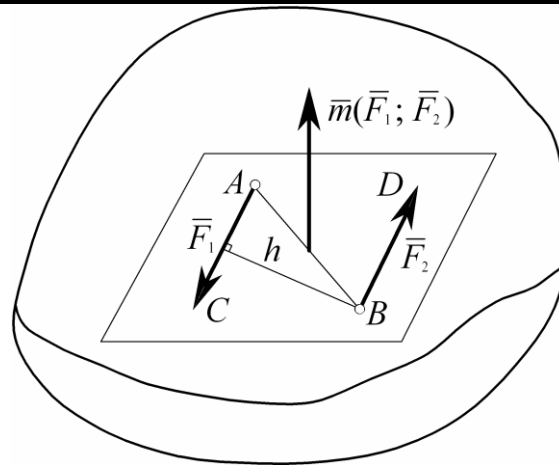


Рис. 1.23

Момент пари вважається додатним, якщо пара намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки і, навпаки, – від’ємним, якщо пара намагається повертати тіло за годинниковою стрілкою. Момент пари за модулем або алгебраїчний момент позначається так: $m(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$. Визначимо алгебраїчний момент пари сил, зображеної на рис. 1.23:

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = F_1 \cdot h = F_1 \cdot AB \cdot \sin(\bar{F}_1, \hat{AB}) = F_2 \cdot h. \quad (1.37)$$

Згідно з виразом (1.37), модуль моменту пари у геометричній інтерпретації дорівнює площі паралелограма $ACBD$ або подвійній площі трикутника ABC .

Одиницею виміру моменту пари сил, як і моменту сили відносно центра, є у системі СІ добуток ньютон на метр ($Нм$).

Момент пари сил можна уявити вектором. Цей вектор-момент, за аналогією з векторним моментом сили відносно центра, спрямовується перпендикулярно до площини дії пари у той бік, з якого здається, що поворот тіла або площини під дією пари відбувається проти ходу годинникової стрілки (правило свердлика). Векторний момент пари $m(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ показаний на рис. 1.23. На відміну від векторного моменту сили відносно центра, **векторний момент пари сил є вільним вектором**: він не має ні фіксованої точки прикладання, ні фіксованої лінії дії сил, що становлять пару (див. нижче).

Властивості пари сил

Оскільки система двох рівних антипаралельних сил не може бути зведена до рівнодійної, то, як наслідок, **пару сил неможливо зрівноважити однією силою**. Це ще раз нагадує про новий силовий

Частина перша

фактор, який становить пара. Це перша властивість пари сил.

Друга властивість пари сил: **сума проєкцій сил, що становлять пару, на будь-яку вісь дорівнює нулю** – це очевидно. Тому пара сил не може входити до рівнянь суми проєкцій сил на вісь, а входить тільки до рівнянь суми моментів сил відносно центра. Слід зазначити, що точки прикладання сил пари можна переміщувати вздовж ліній дії сил у межах цього тіла.

Векторним моментом пари називається момент будь-якої із сил, що створюють пару, відносно точки прикладання другої сили за виразом (1.24):

$$\bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \bar{m}_A(\bar{F}_2) = \bar{m}_B(\bar{F}_1) = \bar{A}\bar{B} \times \bar{F}_2 = \bar{B}\bar{A} \times \bar{F}_1, \quad (1.38)$$

де $\bar{A}\bar{B}$ – радіус-вектор точки прикладання сили \bar{F}_2 відносно точки A ;

$\bar{B}\bar{A}$ – радіус-вектор точки прикладання сили \bar{F}_1 відносно точки B .

Векторний момент пари становить повну характеристику статичної дії пари сили на тверде тіло, тому дії над парами можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами.

Модуль векторного моменту для виразу (1.38) з урахуванням виразу (1.37) дорівнює (рис. 1.23):

$$|\bar{A}\bar{B} \times \bar{F}_2| = AB \cdot F_2 \sin(\angle \bar{A}\bar{B}, \bar{F}_2) = F_2 \cdot h = F_1 \cdot h$$

Із виразу (1.38) можна побачити, що для визначення моменту пари вибирались точки A і B , але немає принципової різниці, якщо за центр моментів вибрати будь-яку іншу точку на площині або у просторі. Із цього положення випливає і третя властивість пари сил, яку можна вважати теоремою про суму моментів сил пари:

сума векторних моментів сил, що становлять пару, відносно довільної точки дорівнює векторному моменту цієї пари і від вибору положення точки не залежить.

Математично це твердження можна записати наступним чином для подібної пари сил (\bar{P}_1, \bar{P}_2) :

$$\bar{m}_O(\bar{P}_1) + \bar{m}_O(\bar{P}_2) = \bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2). \quad (1.39)$$

Доведемо, що це твердження має місце у дійсності, для чого звернемося до рис. 1.24 і визначимо ліву частину виразу (1.39):

$$\bar{m}_O(\bar{P}_1) + \bar{m}_O(\bar{P}_2) = \bar{r}_1 \times \bar{P}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{P}_2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{P}_2 = \bar{A}\bar{B} \times \bar{P}_2 = \bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2), \quad (1.40)$$

оскільки $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{A}\bar{B}$ і ця відстань не залежить від вибору точки O у просторі.

Ця теорема має практичне значення під час розв'язування задач: для будь-якої точки достатньо взяти момент пари сил, не обчислюючи суму

моментів кожної сили.

Якщо точка O як центр моменту обирається у площині дії пари, то справедлива не векторна, а алгебраїчна сума моментів сил:

$$m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) = m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = m_B(\bar{P}_1) + m_A(\bar{P}_2). \quad (1.41)$$

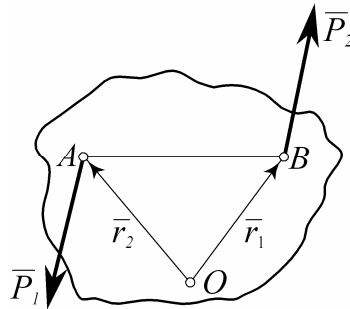


Рис. 1.24

Отже, вираз (1.41) свідчить про те, що алгебраїчний момент пари сил дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки, що розміщується на лінії дії другої сили цієї пари.

Теорема про еквівалентність пар сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил вважаються еквівалентними, якщо після заміни цих пар одна на одну механічний стан твердого тіла не порушиться. Пари сил, розміщені в одній площині, будуть еквівалентними, якщо вони мають однакові алгебраїчні моменти. Розглянемо теорему про еквівалентність пар сил на площині.

Не змінюючи дії на тверде тіло, пару сил можна замінити будь-якою іншою парою, що розміщена довільно в одній площині і має однаковий алгебраїчний момент.

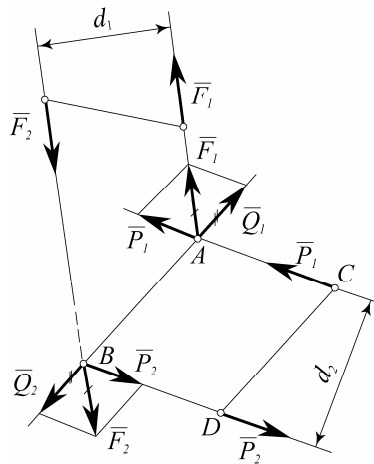


Рис. 1.25

Припустимо, що задана пара сил (\bar{F}_1, \bar{F}_2) (рис. 1.25), з плечем d_1 і алгебраїчним моментом $m_1 = F_1 \cdot d_1$ площина дії якої на тверде тіло збігається з площиною рисунка.

Розкладемо вектори заданої пари (\bar{F}_1, \bar{F}_2) на два напрямки: вздовж лінії, що з'єднує точки A і B , і вздовж ліній дії векторів другої пари (\bar{P}_1, \bar{P}_2) . Розкладання відбувається за аксіомою про паралелограм сил:

$$\bar{F}_1 = \bar{P}_1 + \bar{Q}_1; \quad \bar{F}_2 = \bar{P}_2 + \bar{Q}_2. \quad (1.42)$$

Як легко побачити з рис. 1.25, сили \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 на підставі першої аксіоми про рівновагу двох рівних сил зрівноважуються і можуть бути виключені, а точки прикладання векторів сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , що залишились, можна перенести в довільні точки C і D на площині. Щоб остаточно довести еквівалентність проведеного перетворення, залишається підтвердити, чи дорівнюють алгебраїчні моменти цих двох пар.

Із виразу (1.42) випливає, що сили \bar{F}_1, \bar{F}_2 є рівнодійними двох інших сил, тому застосуємо теорему Варіньйона, склавши суми моментів відносно точки B :

$$m_B(F) = m_B(P) + m_B(Q); \Rightarrow F \cdot d_1 = P \cdot d_2 + Q \cdot 0; \Rightarrow F \cdot d_1 = P \cdot d_2. \quad (1.43)$$

Вираз (1.43) переконливо доводить, що момент заданої пари дорівнює алгебраїчному моменту еквівалентно перетвореної пари:

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = F \cdot d_1 = m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = P \cdot d_2. \quad (1.44)$$

Отже, зроблено еквівалентне перетворення пари сил у площині: задану пару перенесли в інше місце на тілі, повернули на довільний кут, змінили модулі векторів сил і плечі пар сил, залишивши незмінним лише два головних параметри пар: алгебраїчний момент і площину дії.

Таким чином, пара сил, що діє на тверде тіло, становить новий самостійний елемент статички, новий силовий фактор, який поряд із силою є важливішим поняттям механіки. Основні властивості нового силового фактора і основні правила перетворення, яким підпорядкований цей фактор, встановлені доведеними теоремами про пари.

З доведених теорем випливають **умови еквівалентності пар сил**:

– не змінюючи дії на тіло, пару сил можна повертати на будь-який кут та переносити як завгодно в площині її дії в межах цього тіла;

– дія пари на тіло не зміниться, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площина дії залишалися незмінними;

– пара сил на площині вважається заданою, якщо заданий її

алгебраїчний момент і площина дії;

– якщо на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати.

Якщо всі пари цієї системи пар розміщені в одній площині, то момент підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k ; \quad (1.45)$$

– сума моментів сил, що становлять пару, відносно довільної точки не залежить від положення точки і дорівнює моменту пари.

– питання про те, який рух буде здійснювати тверде тіло під дією пари сил, належить до задач динаміки.

Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил на площині

Допустимо, що до тіла прикладена система пар сил з алгебраїчними моментами m_1, m_2, \dots, m_n і момент підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар M .

Тоді для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб момент рівнодійної пари дорівнював нулю. У такому разі і алгебраїчна сума моментів складових пар теж повинна дорівнювати нулю:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = 0. \quad (1.46)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладання?
2. Чому дорівнює рівнодійна двох антипаралельних сил? Де знаходиться точка її прикладання?
3. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
4. Як спрямований векторний момент сили відносно точки?
5. Що таке пара сил або просто пара?
6. Які властивості має пара сил?
7. Як визначити момент пари? Як спрямований векторний момент пари?
8. Як формулюється теорема про еквівалентність пар сил?
9. Як формулюється теорема Варіньйона?
10. Як вибираються точки прикладання векторних моментів пари сил і сили відносно центра?

1.4. Плоска система сил.

Зведення сил і умови рівноваги тіл

1.4.1. Система сил, довільно розміщених на площині.

Теорема про паралельне перенесення лінії дії сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла, довільно розміщені в одній площині, то така система сил є плоскою системою довільних сил. Розглянемо лему про паралельне перенесення лінії дії сили, прикладеної до тіла. Візьмемо довільне тіло, до якого в точці A прикладена сила \vec{P}_1 з лінією дії MN (рис. 1.26а). Виберемо на тілі другу точку B і проведемо крізь неї пряму, паралельну прямій MN . Прикладемо на цій прямій у точці B зрівноважену систему двох сил $\vec{P}_2 = -\vec{P}_3$, яка еквівалентна нулю, модулі ж усіх трьох сил виберемо однаковими: $P_1 = P_2 = P_3$. Тоді статичний стан твердого тіла на рис. 1.26а є еквівалентним стану тіла на рис. 1.26б. Як легко побачити з рис. 1.26б, сили \vec{P}_1 і \vec{P}_3 можна об'єднати у пару сил (\vec{P}_1, \vec{P}_3) , адже $P_1 = P_3$, $\vec{P}_1 \parallel \vec{P}_3$, і замінити моментом $\vec{m}(\vec{P}_1, \vec{P}_3)$ пари. Слід зазначити, що модуль моменту цієї пари дорівнює моменту цієї сили \vec{P}_1 відносно точки B :

$$m(\vec{P}_1, \vec{P}_3) = P_1 \cdot h = m_B(\vec{P}_1). \quad (1.47)$$

Отже, остаточно маємо силу \vec{P}_1 , яка перенесена паралельно в точку B (сили дорівнюють $\vec{P}_2 = \vec{P}_1$) і, так звану, «приєднану» пару (\vec{P}_1, \vec{P}_3) , момент якої дорівнює моменту сили заданої \vec{P}_1 , що переноситься, відносно точки переносу B (рис. 1.26в). Тому задана сила \vec{P}_1 , прикладена в точці A , еквівалентна рівній їй силі \vec{P}_2 , прикладеній у точці B , і парі сил (\vec{P}_1, \vec{P}_3) з моментом, який дорівнює моменту заданої сили відносно точки перенесення.

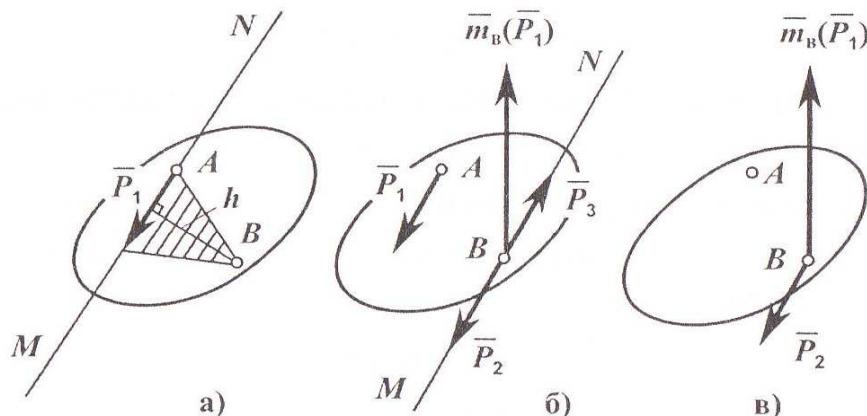


Рис. 1.26

Таким чином, теорему можна сформулювати так.

У разі **паралельного перенесення лінії дії** прикладеної до твердого тіла сили у довільну точку на тілі статичний стан тіла не зміниться, якщо при цьому додати, так звану, «приєднану» або **компенсаційну пару**, момент якої дорівнює моменту заданої сили відносно точки перенесення.

1.4.2. Зведення плоскої системи довільних сил до заданого центра. Основна теорема статички

Уявимо довільне тверде тіло, що знаходиться під дією системи сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$, лінії дії яких розміщені у площині рисунка і розташовані довільно (рис. 1.27а). Виберемо на тілі довільну точку O як центр зведення. Перенесемо у центр зведення всі сили, які діють на тіло, паралельно самій собі (якщо лінія дії сили перетинає точку O , то ця сила просто переноситься вздовж лінії дії у центр зведення).

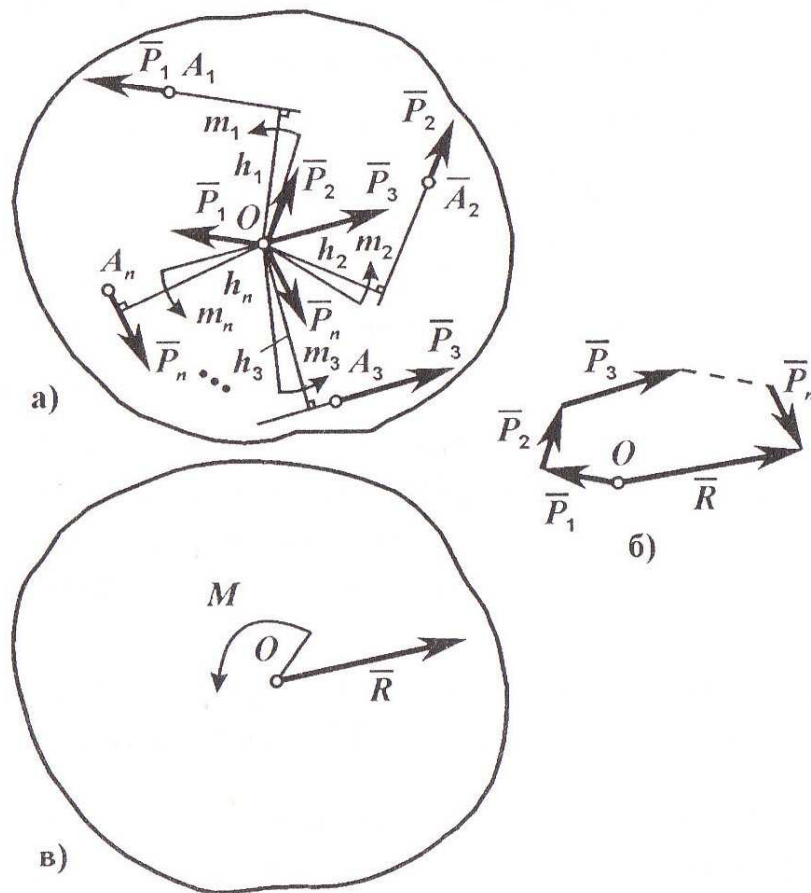


Рис. 1.27

Розпочнемо з сили \vec{P}_1 . Лінія дії сили переноситься паралельно самій собі у точку O , за нею відкладається сила, при цьому до тіла додається

Частина перша

момент «приєднаної» пари сил, який дорівнює моменту сили \bar{P}_1 відносно точки O :

$$m_1 = P_1 h_1 = m_o(\bar{P}_1). \quad (1.48)$$

Тепер маємо, згідно з лемою, силу \bar{P}_1 , яка прикладена до тіла у центрі зведення O , та «приєднану» до тіла пару сил з моментом m_1 . Подібне вчинимо і з рештою сил $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$. Всі вони переносяться паралельно самим собі у центр зведення O і при цьому до тіла додаються «приєднані» пари сил:

$$\begin{aligned} m_2 &= P_2 h_2 = m_o(\bar{P}_2), \\ m_3 &= P_3 h_3 = m_o(\bar{P}_3), \\ m_n &= P_n h_n = m_o(\bar{P}_n). \end{aligned} \quad (1.49)$$

У підсумку таких операцій до тіла в точці O прикладатиметься плоский пучок системи збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ і система «приєднаних» пар сил з моментами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.

Пучок збіжних сил у точці O можна замінити однією силою \bar{R} , яку називають головним вектором плоскої системи довільних сил. Для цього необхідно додати векторно систему збіжних сил, прикладених у центрі зведення o , будуючи силовий багатокутник (рис. 1.27б):

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.50)$$

Систему пар сил, яка тепер прикладена до тіла, також можна додати, отримавши головний момент плоскої системи довільних сил, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.51)$$

Таким чином, плоска система довільних сил може бути зведена до двох силових факторів: однієї сили \bar{R} – головного вектора системи – і однієї пари сил з моментом M – головного моменту системи (рис. 1.27в).

Головний вектор системи дорівнює геометричній сумі векторів складових сил, а головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів системи сил відносно центра зведення.

Головний вектор \bar{R} і головний момент M плоскої системи довільних сил мають деякі особливості.

Так, величина головного вектора \bar{R} не залежить від положення центра зведення, а величина головного моменту M залежить від зміни положення центра зведення.

Якщо ж головний вектор \bar{R} дорівнює нулю, то головний момент M буде незалежним від вибору центра зведення. Якщо ж головний момент M дорівнює нулю, то головний вектор \bar{R} буде рівнодієюю плоскою системи сил. Визначимо аналітично головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил.

Для обчислення головного вектора \bar{R} спочатку визначимо його проєкції на осі плоскої прямокутної системи декартових координат (відповідно до теореми про проєкцію рівнодієюї сили на вісь):

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}, \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

де P_{kx}, P_{ky} – проєкції k -ї сили системи на відповідні осі координат.

Визначивши проєкції головного вектора на осі координат, отримаємо модуль головного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.53)$$

Головний момент M визначається алгебраїчним додаванням моментів складових сил відносно центра зведення O :

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.54)$$

Розглянемо окремі випадки, які можуть мати місце під час зведення плоскої системи довільних сил до визначеного центра.

1. Головний вектор $\bar{R} = 0$, а головний момент $M \neq 0$. У цьому випадку величина головного моменту M не залежить від вибору центра зведення;

2. Головний момент $M = 0$, а головний вектор $\bar{R} \neq 0$. У такому випадку головний вектор \bar{R} є рівнодієюю силою системи сил.

1.4.3. Умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил

Визначимо умови рівноваги твердого тіла під дією плоскої системи довільних сил, за яких ця система сил буде зрівноваженою. Це одна із двох основних задач статички.

Як доведено, плоска система довільних сил завжди може бути зведена до однієї сили, яка має назву головного вектора системи, і однієї пари – головного моменту системи.

Частина перша

Тоді для рівноваги плоскої системи довільних сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор \bar{R} і головний момент M системи дорівнювали нулю.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} = \Sigma \bar{P}_k = 0, \\ M_o = \Sigma m_o(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Це означає, що кожний доданок під радикалом виразу (1.53) як сума проєкцій (1.52) має дорівнювати нулю. Звідси отримуємо аналітичні умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

Таким чином, для рівноваги твердого тіла, що перебуває під дією плоскої системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на дві осі координат і сума моментів всіх сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

Умови рівноваги у формі (1.56) є основною формою умов рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил, оскільки не накладають ніяких обмежень ні на розташування осей системи координат, ні на положення центра, відносно якого складаються моменти прикладених сил.

Існують дві інші додаткові форми умов рівноваги тіла для плоскої системи довільних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

На цю форму умов рівноваги (1.57) накладається обмеження: пряма, що може з'єднувати точки A і B , відносно яких визначаються суми моментів сил, не повинна бути перпендикулярною до осі, на яку проєктуються ці сили.

Необхідність умов рівноваги (1.57) очевидна: якщо будь-яка одна умова із системи умов не виконується, то рівноваги не буде.

Розглянемо достатність умов рівноваги. Якщо виконуються, наприклад, дві останні умови, то головний момент системи сил дорівнює нулю і така система може бути зведена до однієї еквівалентної сили – рівнодійної, лінія дії якої буде проходити крізь точки A і B . Проте, згідно з першою умовою має бути $R_x = 0$. Оскільки вісь x не перпендикулярна до прямої AB , то остання умова може бути виконана тільки тоді, якщо рівнодійна системи сил дорівнюватиме нулю, тобто коли тіло буде зрівноваженим. Третя форма умов рівноваги має такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

На цю форму умов рівноваги також накладається обмеження: точки A , B і C , відносно яких складаються суми моментів сил, не повинні бути розміщені на одній прямій.

Необхідність форми умов (1.58) очевидна, оскільки під час рівноваги алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільного центра дорівнює нулю. Достатність цих умов випливає з того, що, коли за одночасного виконання цих умов ця система сил не була б зрівноваженою, то вона мала б рівнодійну, лінія дії якої одночасно проходила б крізь точки A, B, C , що неможливо, тому що ці точки не розміщені на одній прямій. Отже, у разі виконання умов (1.58) тіло під дією плоскої системи довільних сил буде зрівноваженим.

1.4.4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи паралельних сил

Якщо лінії дії усіх сил паралельні, то завжди у площині можна так розташувати осі координат, що одна з них буде паралельною заданим силам, а друга – перпендикулярною. Тому, щоб тіло під дією плоскої системи паралельних сил перебувало у рівновазі, необхідно прирівняти до нуля алгебраїчну суму проекцій усіх сил на паралельну вісь і алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно довільної точки. У такому випадку система умов рівноваги (1.56) спрощується і матиме такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, яка паралельна силам¹, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки площини дорівнювали нулю.

Для системи паралельних сил на площині можна використовувати і такі умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок площини дорівнювали нулю.

Проте, для цих умов існує обмеження: лінія AB , якою можна з'єднати центри моментів, не повинна бути паралельною векторам сил.

Такі умови (1.60) найбільш придатні під час розрахунків двоопорних балок. Використовуючи ці умови, складають алгебраїчні суми моментів

усіх сил відносно точок A і B , у яких встановлені опори балки.

1.4.5. Приклади розв'язування задач для плоскої системи довільних сил

Приклад 1.4

Однорідна балка AB прямокутного перерізу вагою 400 Н у точці A закріплена шарнірно, а у точці O опирається на точкову опору (рис. 1.28). До другого кінця балки B підвішений вантаж вагою 200 Н . Довжина балки 4 м , точкова опора розміщена на відстані $\frac{3}{4}$ довжини балки від шарнірної опори. Кут нахилу балки до горизонту $\alpha = 30^\circ$. Визначити реакції опор балки.

Розв'язання

Складаємо розрахунково-силову схему задачі. Прикладемо до осі балки задані активні сили: силу ваги \bar{G} самої балки і силу ваги \bar{Q} вантажу. Сила ваги балки \bar{G} прикладена посередині балки у точці C (балка однорідна) і спрямована вертикально вниз. Сила ваги вантажу \bar{Q} прикладена в точці B балки і спрямована вертикально вниз.

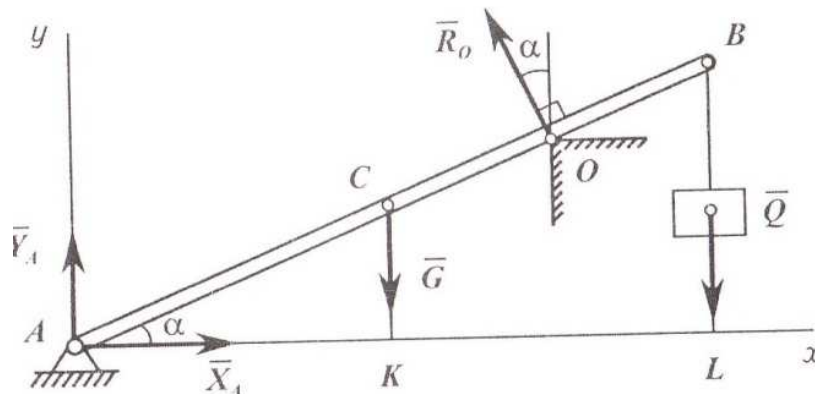


Рис. 1.28

Далі умовно звільняємо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в'язей.

У точці A розміщена шарнірно-нерухома опора, напрям її реакції невідомий, тому розкладаємо останню на дві складові \bar{X}_A і \bar{Y}_A , які спрямуємо вздовж відповідних осей координат. У точці O – точкова опора, яка дає одну реакцію \bar{R}_O , спрямовану перпендикулярно до балки.

Таким чином, балка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання цієї задачі використовуємо умови рівноваги (1.56). Оскільки осі координат x і y задані за умовою задачі, то складемо відповідні рівняння рівноваги:

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги,

то отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} X_A - 0,5R_o &= 0, \\ Y_A - 400 - 200 + 0,866R_o &= 0, \\ -400 \cdot 2 \cdot 0,866 + 3R_o - 200 \cdot 4 \cdot 0,866 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З третього рівняння обчислимо реакцію R_o :

$$R_o = \frac{692,8 + 692,8}{3} = 461,86 \text{ Н}$$

і підставимо її значення у перші два рівняння:

$$X_A = \frac{1}{2}R_o = 230,93 \text{ Н}; Y_A = 400 + 200 - 0,866 \cdot 461,86 = 160,04 \text{ Н}.$$

Оскільки визначені складові реакції, що прикладені в точці A , то векторним додаванням можна обчислити модуль повної реакції R_A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{230,93^2 + 160,04^2} = \sqrt{78941,5} = 280,97 \text{ Н}.$$

Приклад 1.5

Визначити реакції опори однорідної балки AB (рис. 1.29) прямокутного перерізу, один кінець якої A жорстко закріплений у стіні і яка перебуває під дією зосередженої сили $P = 4,0 \text{ кН}$, пари сил з моментом $m = 2,0 \text{ кНм}$ і рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$. Довжина балки AB дорівнює 5 м , рівномірно-розподілене навантаження діє на ділянці 3 м від точки A . Кут нахилу зосередженої сили \bar{P} до горизонту становить $\alpha = 30^\circ$, осі x і y показані на рис. 1.29.

Розв'язання

Складаємо розрахунково-силову схему. Покажемо всі сили, прикладені до балки AB .

Насамперед, це задані активні сили: сила \bar{P} , прикладена до кінця балки B і спрямована під кутом α до горизонту; рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою:

$$Q = q \cdot AC = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ кН}.$$

Сила \bar{Q} прикладена посередині ділянки AC і спрямована у той самий бік, що і саме навантаження – вертикально вниз.

Покажемо на силовій схемі пару сил, яка задається моментом m .

Далі умовно звільняємо балку від в'язі і замінюємо її відповідними реакціями.

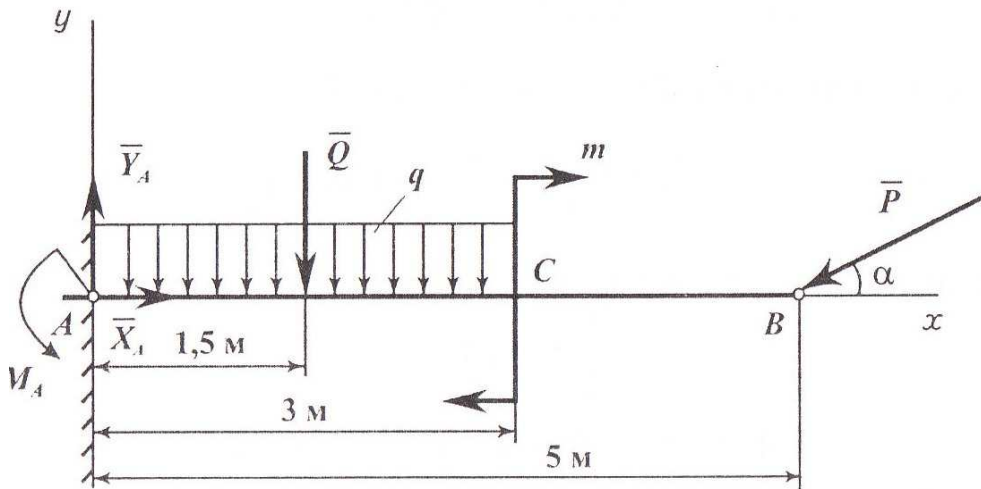


Рис. 1.29

У точці A маємо жорстке закріплення балки у стіні, а тому воно створює дві складові реакції: \bar{X}_A та \bar{Y}_A , розміщені вздовж відповідних осей координат, і реактивний момент M_A .

Напрямок цього невідомого моменту показано на силовій схемі довільно, наприклад, проти ходу стрілки годинника.

Якщо ж під час остаточного визначення моменту M_A отримаємо від'ємний знак, то це інформує про те, що дійсний напрямок моменту є протилежним.

Покажемо на силовій схемі лінійні параметри і осі прямокутної системи декартових координат.

Як легко побачити з побудованої розрахунково-силової схеми, балка перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи довільних сил.

Використовуємо умови рівноваги (1.56). На підставі цих умов складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} X_A - P \cos \alpha &= 0, & Y_A - Q - P \sin \alpha &= 0, \\ -Q \cdot \frac{AC}{2} - P \sin \alpha \cdot AB + M_A - m &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З першого рівняння $X_A = 4,0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ kH}$.

З другого рівняння $Y_A = 4,5 + 4,0 \cdot \frac{1}{2} = 6,50 \text{ kH}$.

З третього рівняння

$$M_A = 2,0 + 4,5 \frac{3}{2} + 4,0 \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,0 + 6,75 + 10,0 = 18,75 \text{ кНм.}$$

Модуль R_A повної реакції у точці A дорівнює:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(3,46)^2 + (6,5)^2} = \sqrt{54,22} = 7,36 \text{ кН.}$$

Приклад 1.6

Визначити реакції опор жорсткої конструкції, показаної на рис. 1.30.

$F = 10 \text{ кН}$; $M = 4 \text{ кНм}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $\alpha = 60^\circ$; $a = 3 \text{ м}$; $b = 4 \text{ м}$; $d = 5 \text{ м}$.

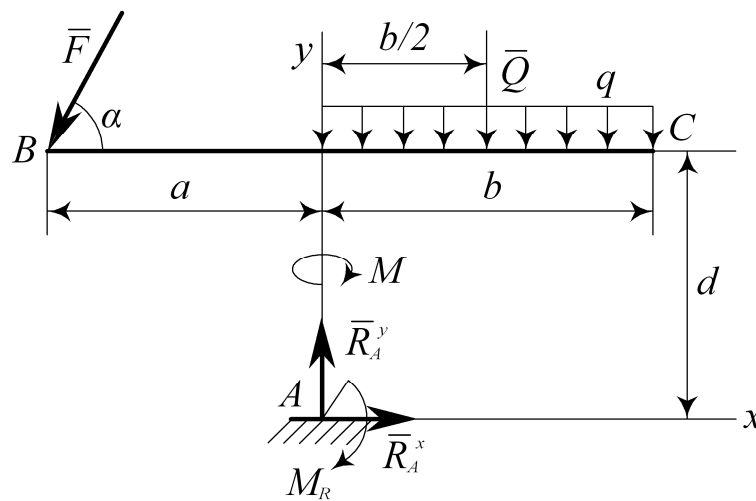


Рис. 1.30

Розв'язання

Складемо розрахунково-силову схему (рис. 1.30). Для цього спочатку зосередимо рівномірно-розподілене навантаження інтенсивністю $q = 2 \text{ кН/м}$, визначивши загальну силу $Q = q \cdot b = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}$ і приклавши її посередині ділянки довжиною b .

Далі покажемо реакції опори – це жорстке закріплення в точці A . Реакція цієї опори складається із двох складових \bar{R}_A^x і \bar{R}_A^y , а також реактивного моменту M_R , які і є шуканими невідомими. Виберемо систему координат xAy . Аналізуючи розрахункову схему (рис. 1.30), можна побачити, що жорсткий тавр ABC навантажений плоскою системою довільних сил. Умови рівноваги (1.56).

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - F \cos \alpha = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - F \sin \alpha - Q = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_R - M - Q \frac{b}{2} + F \cos \alpha \cdot d + F \sin \alpha \cdot a = 0. \quad (\text{в})$$

Із рівняння (а) шукаємо величину реакції R_{Ax} :

$$R_{Ax} = P \cos \alpha = 10 \cdot 10,5 = 5 \text{ kH.}$$

Із рівняння (б) шукаємо величину реакції R_{Ay} :

$$R_{Ay} = P \sin \alpha + Q = 10 \cdot 0,866 + 8 = 16,66 \text{ kH.}$$

Із рівняння (в) шукаємо величину реактивного моменту

$$\begin{aligned} M_R &= P \cos \alpha \cdot d + P \sin \alpha \cdot a - Q \cdot \frac{b}{a} - M = \\ &= 10 \cdot 0,5 \cdot 5 + 10 \cdot 0,866 - 8 \cdot \frac{4}{2} - 4 = 38,98 \text{ Нм.} \end{aligned}$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
2. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
3. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
4. В якому випадку плоска система довільних сил зводиться до однієї пари?
5. Чи залежить головний вектор від вибору центра зведення?
6. В якому випадку головний момент не залежить від вибору центра зведення?
7. Сформулюйте теорему Варіньйона про момент рівнодійної.
8. Які умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил?
9. З'ясуйте три форми умов рівноваги плоскої системи довільних сил?
10. Які обмеження накладені на другу і третю форми умов рівноваги для плоскої системи довільних сил?

1.5. Розрахунок системи із декількох тіл

1.5.1. Зосереджені сили і розподілені навантаження

У попередніх розділах розглядалися сили, які були представлені у вигляді зосередженого вектора, прикладеного до точки. Проте, у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Прикладами розподілених сил є сили тиску рідини або газу, сили ваги як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому, у теоретичній механіці

вводиться поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі і об'ємні. Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла, об'ємні – на кожний елемент об'єму тіла. Прикладом останніх сил є сила ваги.

Під час розв'язування задач розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодійною, тобто, зосередженою силою.

Введемо декілька загальних положень. Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю q , тобто, величиною сили, яка припадає на одиницю об'єму тіла, на одиницю площі або на одиницю довжини. В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах воно зображується у вигляді епюри елементарних сил, тобто, графіка інтенсивності навантаження, яке прикладене до лінійного елемента тіла.

У загальному випадку плоске розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає заданий закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (балки) (рис. 1.31).

Розглянемо рівномірно розподілене навантаження та навантаження, яке розподілене за лінійним законом.

1. Рівномірно розподілене навантаження (розподілене за законом прямокутника) зображується на схемах у вигляді прямокутника: висота – це інтенсивність навантаження \bar{q} , довжина – це довжина l ділянки тіла. Стрілки показують напрямок дії навантаження (рис. 1.32).

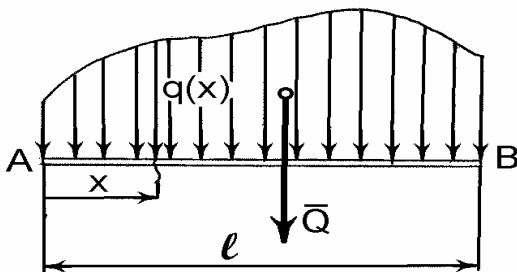


Рис. 1.31

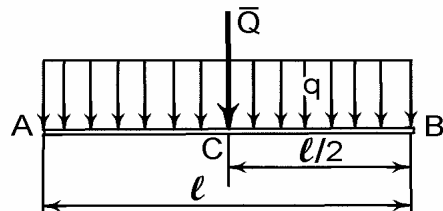


Рис. 1.32

Для того, щоб замінити це навантаження рівнодійною силою \bar{Q} , треба її визначити:

$$Q = ql, \tag{1.61}$$

де q – інтенсивність навантаження, H/m ; l – довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, m .

Точка C прикладання рівнодійної сили \bar{Q} розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє рівномірно-розподілене навантаження.

2. Навантаження, розподілене за лінійним законом, зображується трикутником (рис. 1.33).

Частина перша

У цьому випадку інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці l змінюється від 0 до максимального значення q_{\max} . Рівнодійна сила \bar{Q} від цього навантаження за величиною пропорційна площі трикутника:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l. \quad (1.62)$$

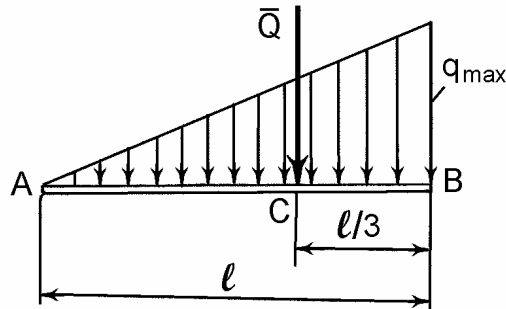


Рис. 1.33

Точка C прикладання рівнодійної \bar{Q} розміщена на відстані від центра площі трикутника (центра ваги): $AC = \frac{2}{3}l$ або $BC = \frac{1}{3}l$, а напрямок рівнодійної збігається з напрямком навантаження.

1.5.2. Статично визначені і статично невизначені задачі

Задача є статично визначеною, якщо для неї можна скласти таку кількість рівнянь у відповідності до умов рівноваги статички для матеріальної системи, яка не менша, ніж число невідомих.

Теоретична механіка розглядає тільки статично визначені матеріальні системи.

Із раніше наведених прикладів можна зробити з цього приводу такі висновки. Так, для тіла, навантаженого плоскою системою збіжних сил, можна скласти тільки два рівняння рівноваги, тому і невідомих повинно бути не більше двох.

Балка на двох опорах, навантажена паралельними силами в площині, буде статично визначеною, а на трьох – ні, адже рівнянь рівноваги, що можна скласти для цієї системи, тільки два.

Для плоскої системи довільних сил можливо визначити тільки три невідомих реакції у зв'язку з кількістю умов рівноваги для цієї системи, на підставі яких складаються рівняння рівноваги.

Причина невизначеності, тобто, недостатності рівнянь статички для визначення шуканих величин полягає у тому, що в статистиці твердого тіла розглядаються абсолютно тверді тіла, без врахування деформацій.

Якщо врахувати пружні властивості тіл, тобто, їхні деформації, то невизначені задачі можуть бути розв'язані. Але подібні задачі виходять за межі курсу статички.

Таким чином, задача є статично невизначеною, якщо кількість умов рівноваги системи менше, ніж число невідомих.

1.5.3. Рівновага системи із декількох твердих тіл

У попередніх задачах розглядалась рівновага одного твердого тіла під дією прикладених зовнішніх сил.

Системою тіл називається сукупність декількох тіл, які або спираються одне на одне, або з'єднані шарнірами, які не заважають можливості відносного руху тіл.

Зовнішні сили – це сили взаємодії тіл заданої системи з іншими тілами, які не входять до складу цієї системи.

Під час розрахунку системи декількох тіл потрібно розглядати рівновагу кожного тіла окремо, враховуючи сили їхньої взаємодії.

Сили взаємодії згідно з аксіомою про дію і протидію рівні за модулем і протилежні за напрямком.

Внутрішні сили системи – це сили взаємодії між окремими тілами, які входять до складу цієї системи. Внутрішні сили існують попарно, як дія і протидія. Більш детально – у наступному підрозділі.

1.5.4. Методика і приклад розв'язування задач на рівновагу системи тіл

Рівновагу системи тіл можна розглядати загалом під дією тільки зовнішніх сил. Але може так статись, що кількість рівнянь рівноваги буде меншою, ніж кількість невідомих. Тоді необхідно розглядати рівновагу окремих тіл системи, умовно розділяючи її по внутрішніх в'язях. До того ж, необхідно враховувати, що внутрішні сили реакцій розділених в'язей існують попарно, як сили дії та протидії.

Розглянемо приклади розв'язування задач на рівновагу системи тіл.

Приклад 1.7

На тришарнірну арку ABC (рис. 1.34) діє вертикальна сила $P = 10 \text{ kH}$. Вага кожної частини балки $Q_1 = Q_2 = 6 \text{ kH}$.

Визначити реакції шарнірів A, B, C арки, розміри якої дані на рисунку.

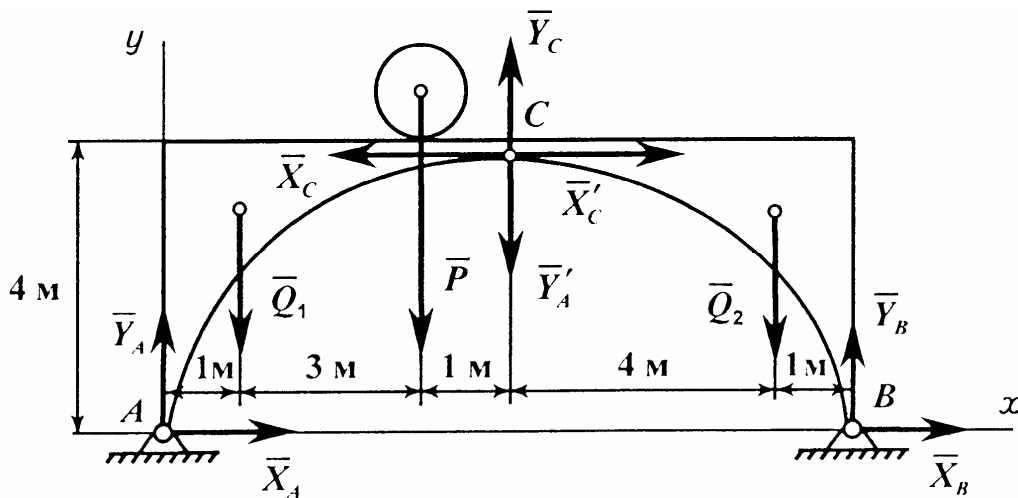


Рис. 1.34

Розв'язання

Як видно зі схеми, задана система тіл складається з двох піварок AC і BC , з'єднаних шарніром у точці C . Складемо розрахунково-силову схему, де покажемо задані активні сили $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}$ і реакції в'язей: у точках A і B (нерухомі шарнірні опори) – $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ і у точці C (шарнірне з'єднання) – $\bar{X}_C, \bar{X}'_C, \bar{Y}_C, \bar{Y}'_C$. Невідомі реакції у точці C є внутрішніми силами системи тіл, а тому $\bar{X}_C = -\bar{X}'_C$ і $\bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C$. Покажемо осі прямокутної системи декартових координат Ax, y . Умовно розділяємо

систему тіл на два окремих тіла по шарніру C . Дію відкинutoї частини замінюємо двома реакціями \bar{X}_C, \bar{Y}_C , які дорівнюють:

Тепер розглянемо окремо рівновагу кожного тіла, для чого складемо дві системи рівнянь рівноваги. Використаємо умови рівноваги (1.56).

Для першого тіла (ліва половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_A - X_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_A + Y_C - Q_1 - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Для другого тіла (права половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_B + X'_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_B - Y'_C - Q_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0; Q_2 \cdot 1 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 5 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Як видно з отриманих шести рівнянь рівноваги, в них містяться шість невідомих: $X_A, X_B, X_C, Y_A, Y_B, Y_C$.

Визначимо ці невідомі величини. З третього рівняння другої системи визначимо Y'_C :

$$Y'_C = \frac{4X'_C - Q_2}{5};$$

$$X_C = \frac{6 + 6 + 40}{8} = \frac{52}{8} = 6,5 \text{ kH};$$

$$Y'_C = \frac{4X_C - Q_2}{5} = \frac{4 \cdot 6,5 - 6,0}{5} = 4,0 \text{ kH}.$$

З першого рівняння першої системи маємо: $X_A = X_C = 6,5 \text{ kH}$.

А з першого рівняння другої системи дістаємо:

$$Y_A = Q_1 + P - Y_C = 6,0 + 10,0 - 4,0 = 12,0 \text{ kH}.$$

З другого рівняння другої системи:

$$Y_B = Y'_C + Q_2 = 4,0 + 6,0 = 10,0 \text{ kH}.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як замінити рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою?
2. Як замінити розподілене за лінійним законом навантаження зосередженою силою?
3. Що таке статично означені і статично неозначені задачі?
4. Які особливості має метод розв'язування задач на рівновагу системи тіл?
5. Як спрямувати внутрішні сили взаємодії між тілами системи?
6. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?
7. Що таке зосереджене та розподілене навантаження?
8. Які додаткові умови рівноваги паралельних сил Ви знаєте?
9. Як визначити реакцію у внутрішньому шарнірі системи тіл?
10. Яка основна умова рівноваги плоскої системи паралельних сил?

1.6. Розрахунок плоских ферм

1.6.1. Характеристика ферм і порядок розрахунку

Фермою називається геометрично незмінна жорстка конструкція, яка складається із прямолінійних стрижнів, сполучених між собою шарнірами.

Місце, де стрижні з'єднуються один з одним, носить назву **вузла ферми**. Зовнішнє навантаження прикладається до ферми тільки в її вузлах.

Допускається, що ферма складається із ідеальних стрижнів: тонких, однорідних, невагомих, на кінцях яких є шарніри, внаслідок чого ці стрижні працюють тільки на розтяг або на стиск. У підручнику розглядаються **плоскі ферми**, в яких осі всіх **стрижнів** і вектори зовнішніх **сил**, що навантажують вузли ферми, розміщуються **в одній площині**.

Слід зазначити, що конструктивно ферма складається із стрижнів, які утворюють жорсткі трикутники, а це означає, що в конструкції ферми немає зайвих стрижнів. Такі ферми будуть статично визначеними, якщо кількість стрижнів n і кількість вузлів m відповідають співвідношенню:

$$n = 2m - 3. \quad (1.63)$$

Розрахунок ферми зводиться до визначення реакцій зовнішніх опор і внутрішніх реакцій (зусиль) у стрижнях. Зусилля і реакція стрижня співвідносяться між собою як дія і протидія: вони рівні за модулем і протилежні за напрямком. Розглянемо просту плоску ферму (рис. 1.35).

Як можна побачити зі схеми – це плоска конструкція, що складається із 7 стрижнів, що з'єднуються у 5 вузлах. У вузлах I та V ферма має

зовнішні опори (у I вузлі – шарнірно-нерухома опора; у V – шарнірно-рухома опора), до II і до IV вузлів ферми прикладені зовнішні навантаження як зосереджені сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 ($P_1 = 30 \text{ kH}$; $P_2 = 10 \text{ kH}$).

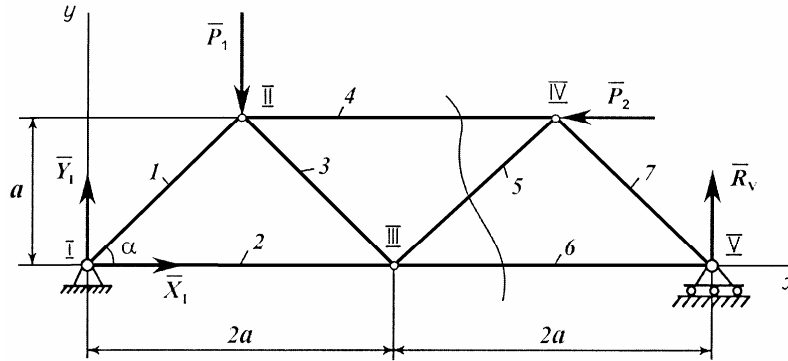


Рис. 1.35

Лінійні розміри ферми і система координат Ix у показані на схемі ферми ($\alpha = 45^\circ$).

Перший етап розрахунку ферми – це визначення її опорних реакцій. Для знаходження опорних реакцій ферму розглядають загалом як тверде тіло з прикладеними зовнішніми силами.

Тоді, умовно звільнюючи ферму від в'язей (опор) і замінюючи їх відповідними реакціями (у вузлі I це реакції \bar{X}_1, \bar{Y}_1 ; у вузлі V – \bar{R}_v), отримаємо плоску систему довільних сил, для якої можна використати умови рівноваги (1.56) і скласти систему рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; X_I - P_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; Y_I - P_1 + R_V = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_I(\bar{P}_k) &= 0; R_V \cdot 4a + P_2 \cdot a - P_1 \cdot a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

З першого рівняння системи обчислюємо невідому реакцію $X_I = P_2 = 10 \text{ kH}$. З останнього рівняння обчислюємо реакцію шарнірно-рухомої опори:

$$R_V = \frac{P_1 - P_2}{4} = \frac{30 - 10}{4} = 5 \text{ kH}.$$

Далі, з другого рівняння є можливість обчислити останню невідому величину:

$$Y_I = P_1 - R_V = 30 - 5 = 25 \text{ kH}.$$

Таким чином, обчислено шукані реакції опор ферми. Тепер необхідно визначити невідомі зусилля у стрижнях ферми.

Частина перша

Існує декілька способів визначення цих зусиль: графічні і аналітичні. Ми розглянемо два аналітичних методи: **метод вирізування вузлів** і **метод перетинів** (метод Риттера). Розглянемо послідовно ці методи.

1.6.2. Метод вирізування вузлів

Цей метод полягає в послідовному вирізуванні (уявно) вузлів ферми, починаючи з вузла, де збігаються **два стрижні** з невідомими внутрішніми зусиллями (реакціями). Таким чином, **кожний вузол – це плоска система збіжних сил**, для якої можна скласти два рівняння рівноваги і визначити дві реакції.

За правилом реакції стрижнів спрямовуються від вузлів. Якщо ж реакція стрижня отримає від'ємний знак, то це свідчить про те, що дійсний напрямок його реакції протилежний.

Визначимо цим методом зусилля у стрижнях ферми, поданої на рис. 1.35. **Спочатку вирізаємо вузол I, де збігаються тільки два стрижні** (рис. 1.36): кількість рівнянь рівноваги повинна відповідати кількості невідомих. Крім визначених реакцій опор \bar{X}_1 і \bar{Y}_1 до нього прикладаються невідомі реакції перетнутих стрижнів 1 і 2, які позначаються \bar{S}_1 та \bar{S}_2 і спрямовуються, за прийнятим правилом, від вузла.

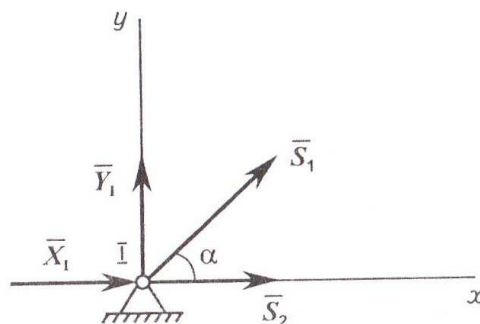


Рис. 1.36

Покажемо на схемі осі плоскої прямокутної системи декартових координат xly та кут α . Як видно зі схеми, вузол I перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил з двома невідомими зусиллями \bar{S}_1 і \bar{S}_2 .

Складемо для вузла I рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги для плоскої системи збіжних сил у вигляді (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_I + S_2 + S_1 \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad Y_I + S_1 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

З другого рівняння визначаємо:

$$S_1 = -\frac{Y_I}{\sin \alpha} = -\frac{25}{0,707} = -35,3 \text{ kH}.$$

Як легко побачити, стрижень 1 є стиснутим із зусиллям $35,3 \text{ kH}$, про що інформує знак «мінус». З першого рівняння визначимо величину другої невідомої реакції:

$$S_2 = -X_I - S_1 \sin \alpha = -10 - (-35,3 \cdot 0,707) = -10 + 25,00 = 15,00 \text{ kH}.$$

Отже, стрижень 2 перебуває у стані розтягу, що здійснюється із зусиллям $15,0 \text{ kH}$.

Далі можна вирізати тільки вузол II (рис. 1.37). У цьому вузлі зосереджені зовнішня сила \bar{P}_1 і реакції трьох стрижнів \bar{S}_1 , \bar{S}_3 і \bar{S}_4 . До того ж, невідомими є реакції тільки у двох стрижнях: 3 (\bar{S}_3) і 4 (\bar{S}_4).

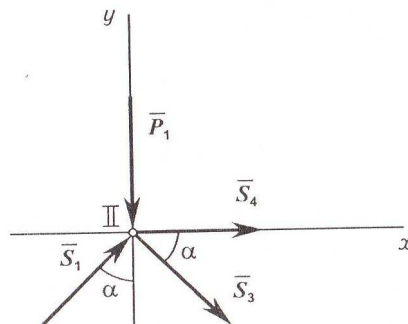


Рис. 1.37

Попередньо вважаємо, що стрижні 3 і 4 розтягнуті і їхні реакції \bar{S}_3 і \bar{S}_4 спрямуємо від вузла II.

Зусилля ж у стрижні 1 вже визначено раніше під час вирізання першого вузла і не тільки встановлено його значення, але й те, що він є стиснутим, а тому його реакція \bar{S}_1 буде спрямована до вузла II. Проведемо крізь вузол II осі координат і покажемо кути α .

Слід ще раз підкреслити, що в кожному вузлі повинно бути не більше двох невідомих, тому що для плоскої системи збіжних сил можна скласти тільки два рівняння рівноваги. Складемо для вузла II рівняння суми проєкцій на осі координат, використовуючи умови, аналогічні (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_4 + S_3 \cos \alpha + S_1 \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad -S_3 \sin \alpha + S_1 \cos \alpha - P_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

З другого рівняння визначаємо зусилля:

$$S_3 = \frac{S_1 \cos \alpha - P_1}{\sin \alpha} = \frac{35,3 \cdot 0,707 - 30}{0,707} = -\frac{5,00}{0,707} = -7,00 \text{ kH}.$$

Як легко побачити, стрижень 3 є стиснутим із зусиллям 7 kH . Напрямок реакції S_3 – до вузла II. З першого рівняння знаходимо:

$$\begin{aligned} S_4 = -S_1 \sin \alpha - S_3 \cos \alpha &= -35,30 \cdot 0,707 - (-7,00) 0,707 = \\ &= -25,00 + 5,0 = -20,00 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Таким чином, стрижень 4 теж стиснутий із зусиллям $20,00 \text{ kH}$. Далі вирізаємо вузол IV (рис. 1.38).

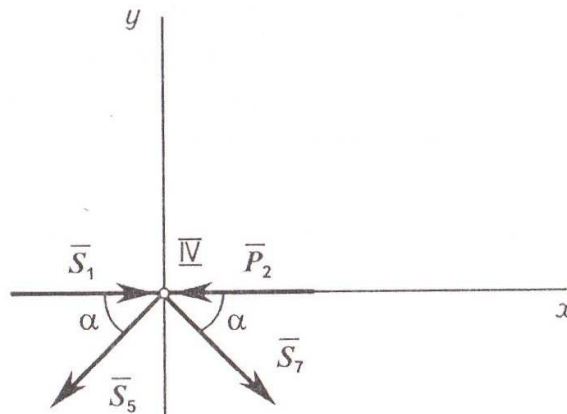


Рис. 1.38

Він перебуває в рівновазі під дією зовнішньої сили \bar{P}_2 і зусиль у стрижнях 4, 5 і 7. Зусилля у стрижні 4 визначено раніше і його напрямок – до вузла, а тому шуканими невідомими є тільки зусилля \bar{S}_5 і \bar{S}_7 .

Проведемо крізь вузол IV осі координат xu та покажемо кути α . Напрямки зусиль у стрижнях 5 і 7 – від вузла IV.

Складемо для вузла IV рівняння рівноваги, також використовуючи умови рівноваги (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_4 - P_2 - S_5 \cos \alpha + S_7 \cos \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad -S_5 \sin \alpha - S_7 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (1.67), для чого з другого рівняння виразимо зусилля S_5 через зусилля S_7 :

$$S_5 = -\frac{S_7 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -S_7.$$

Тепер підставимо значення S_5 у перше рівняння системи:

$$S_7 \cos \alpha - (-S_7) \cos \alpha - P_2 + S_4 = 0. \text{ Звідки}$$

$$S_7 = \frac{P_2 - S_4}{2 \cos \alpha} = \frac{10 - 20}{2 \cdot 0,707} = -7,00 \text{ kH}.$$

Стрижень 7 є стиснутим із зусиллям $7,00 \text{ kH}$. Тепер маємо можливість знайти зусилля $S_5 = -S_7 = 7,00 \text{ kH}$. Стрижень 5 розтягнутий.

Для остаточного визначення зусиль у стрижнях ферми, що розглядається, необхідно вирізати вузол V (рис. 1.29).

До вузла V прикладена реакція зовнішньої опори \bar{R}_V , відоме зусилля \bar{S}_7 , спрямоване до вузла, та невідоме зусилля \bar{S}_6 , яке слід направити від вузла. Складемо для вузла V рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.20):

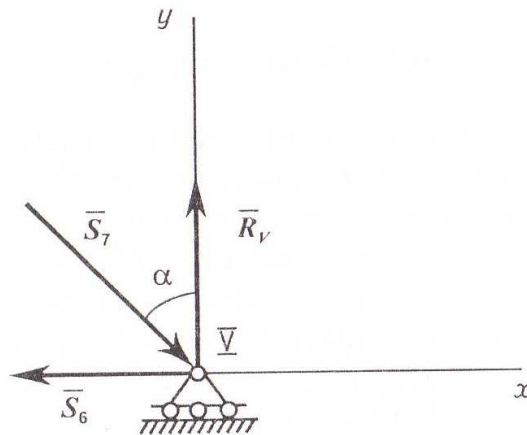


Рис. 1.39

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad S_7 \sin \alpha - S_6 = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad R_V - S_7 \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Як легко побачити, для визначення останнього невідомого зусилля S_6 достатньо розв'язати перше рівняння системи (1.68):

$$S_6 = S_7 \cos \alpha = 7,00 \cdot 0,707 = 5,00 \text{ kH}.$$

Стрижень 6 розтягнутий із зусиллям $5,0 \text{ kH}$.

Частина перша

Дані розрахунків заносимо у табл. 1.1. Знак обчисленого зусилля у стрижні визначає характер його навантаження. Якщо знак додатний («плюс»), то стрижень розтягнутий, а якщо від'ємний – то стиснутий.

Таблиця 1.1

№ стрижнів	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля в кН	– 35,30	+15,00	– 7,00	– 20,00	+7,00	+5,00	– 5,00

1.6.3. Метод Ріттера (метод перетину)

Розглянемо інший аналітичний метод визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми, метод Ріттера або метод перетину.

Цей метод має декілька переваг порівняно з розглянутим раніше методом вирізування вузлів. У цьому разі ставиться інша мета. Необхідно визначити реакції у стрижнях того перерізу ферми, який здається найбільш небезпечним. Тоді немає необхідності розглядати послідовно велику кількість вузлів, особливо, якщо ферма є складною. Крім того, у разі неточності розрахунку величини реакції у стрижнях, помилка в подальшому накопичуватиметься. Метод Ріттера позбавлений цих незручностей.

Особливості застосування цього *методу* полягають у тому, що умовно робиться *перетин усієї ферми*, при цьому в зоні перетину повинно бути **не більше, ніж три стрижні** з невідомими зусиллями. Потім розглядається рівновага однієї з частин ферми, а друга частина відкидається.

Дію стрижнів, які потрапили під перетин, замінюють їхніми реакціями. Попередньо вважається, що ці стрижні розтягнуті, тобто, їх зусилля спрямовуються від вузлів.

Опорні реакції ферми визначаються так само, як і під час застосування методу вирізування вузлів.

Визначимо зусилля у 4, 5 і 6 стрижнях ферми, зробивши перетин і розглядаючи рівновагу простої правої частини ферми (рис. 1.40).

Замість перерізаних стрижнів прикладаємо у вузлі IV зусилля \bar{S}_4 і \bar{S}_5 , а у вузлі V – зусилля \bar{S}_6 . Напрямки вказаних зусиль – від вузлів. До цієї частини ферми прикладена зовнішня сила \bar{P}_2 і реакція опори \bar{R}_V .

Покажемо осі прямокутної системи декартових координат Vx у і кути α .

Як можна побачити, ця частина ферми перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил, а тому можна скласти для неї рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.57).

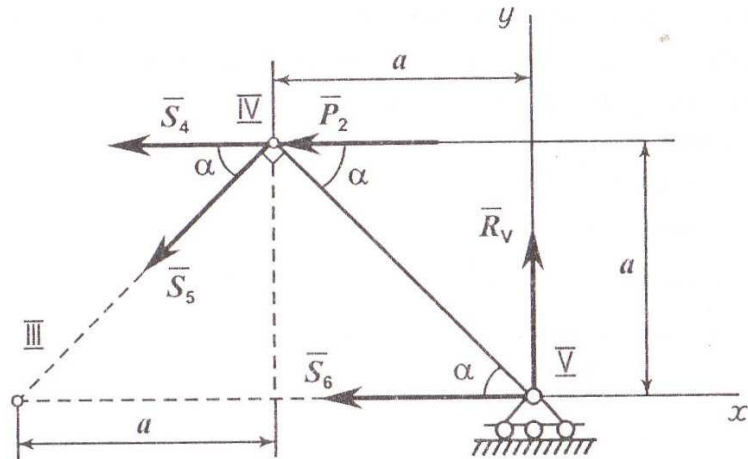


Рис. 1.40

Проте, тут доцільно застосувати *спосіб трьох моментних точок*.

Згідно з цим способом складаються рівняння рівноваги як суми моментів сил відносно тих точок, де перетинаються лінії дії двох векторів реакцій з невідомими зусиллями.

Тоді ці невідомі реакції в рівняння не входитимуть.

Перевага способу моментних точок полягає в тому, що отримані рівняння рівноваги будуть простими, з одним невідомим. У нашому випадку (рис. 1.40) такими точками будуть вузли III і IV.

Відносно цих точок складемо суми моментів сил. Проте, третьої моментної точки тут не існує, тому що вектори \bar{S}_4 і \bar{S}_6 не перетинаються (паралельні).

Перше рівняння є сумою проєкцій сил на вертикаль.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad R_v - S_5 \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_{III}(\bar{P}_k) = 0; \quad P_2 \cdot a + S_4 \cdot a = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_{IV}(\bar{P}_k) = 0; \quad R_v \cdot a - S_6 \cdot a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Обчислимо невідомі зусилля. З першого рівняння визначимо зусилля:

$$S_5 = \frac{R_v}{\sin \alpha} = \frac{5}{0,707} = 7,00 \text{ kH}..$$

З другого рівняння:

$$S_4 = \frac{-P_2 \cdot a}{a} = -P_2 = -20,00 \text{ kH}.$$

З останнього рівняння: $S_6 = R_V = 5,0 \text{ kH}$.

Таким чином, стрижень 4 працює на стиск із зусиллям $20,00 \text{ kH}$, дійсний напрямок зусилля S_4 є протилежним тому, що показано на схемі (рис. 1.40).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку конструкцію називають фермою?
2. Яка ферма є статично визначеною?
3. Що означає розрахувати ферму? Які припущення приймаються при цьому?
4. У чому полягає суть аналітичного методу вирізування вузлів?
5. У чому полягає метод перетину (метод Ріттера) під час розрахунків ферми?
6. Скільки стрижнів із невідомими зусиллями можуть бути в зоні перетину?
7. Відносно яких точок зручніше складати суми моментів сил частини ферми?
8. Чому метод перетину називають ще методом трьох моментів?
9. Який порядок розрахунку плоскої ферми?
10. Яка різниця між реакцією і зусиллям у стрижні?

1.7. тертя ковзання і тертя кочення

1.7.1. Рівновага тіла з урахуванням тертя.

Сили тертя ковзання

Дослід доводить, що при намаганні зсунути одне тіло по поверхні іншого у площині стикання тіл виникає **сила опору відносному ковзанню**.

Дослід переконує, що **тертя обумовлено** перш за все шорсткістю поверхонь контакту, що створює опір переміщенню, або **наявністю зчеплення** у притиснутих поверхонь.

Але вивчення складних фізико-механічних і хіміко-молекулярних проблем процесу тертя виходить за рамки курсу теоретичної механіки.

У цьому курсі теорією тертя ковзання користуються лише у зв'язку з визначенням реакцій в'язей реальних поверхонь у разі врахування сил тертя, якщо вони суттєво впливають на рух тіл.

Сила тертя ковзання – це **сила опору**, яка виникає під час руху одного тіла на поверхні іншого тіла і яка спрямована протилежно швидкості відносного руху тіла.

Розглянемо шорстку площину (рис. 1.41).

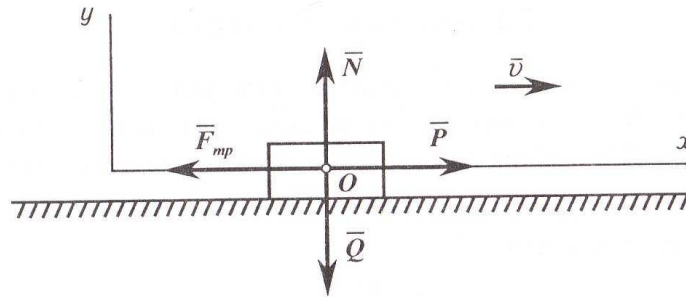


Рис. 1.41

На ній рівномірно рухається тіло вагою \bar{Q} під дією зовнішньої сили \bar{P} . Складемо розрахунково-силову схему, розглядаючи всі сили, які діють на це тіло.

Як відомо, опорна площина, яку умовно вважаємо як гладеньку площину, створює нормальну реакцію поверхні або **силу нормального тиску** \bar{N} , а в бік, що є протилежним напрямку дії сили \bar{P} , буде спрямована **сила тертя** $\bar{F}_{mp.}$, що виникає внаслідок контакту шорстких поверхонь тіл, вектор якої прикладений до точки O .

Покажемо осі координат x y . Оскільки тіло перебуває у стані рівноваги, то є можливість скласти рівняння рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил. Запишемо умови і рівняння рівноваги тіла:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; & P - F_{mp.} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; & N - Q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

З першого рівняння отримуємо $P = F_{mp.}$, а з другого рівняння – $N = Q$. Таким чином, сила \bar{P} зрівноважується силою тертя $\bar{F}_{mp.}$, а нормальний тиск тіла на площину \bar{N} дорівнює вазі тіла \bar{Q} .

Наближені закони тертя ковзання або тертя першого роду встановили французькі фізики Гільом Амонтон (1663–1705) і Шарль Кулон (1736–1806), за одним із цих законів сила тертя $F_{mp.}$ пропорційна силі нормального тиску N і змінюється від нуля до граничної (максимальної) величини в момент зрушення тіла з місця:

$$F_{mp.} = fN, \quad (1.71)$$

де f – безрозмірний коефіцієнт пропорційності.

Як було встановлено пізніше, коефіцієнт пропорційності f є статичним **коефіцієнтом тертя ковзання** за відносного спокою, а в

Частина перша

умовах руху величина динамічного коефіцієнта тертя ковзання трошки зменшується порівняно зі статичним.

Кулон вважав, що коефіцієнт тертя ковзання f не залежить від величини площі контакту тіл, швидкості руху тіл і інших факторів.

Проте, подальші дослідження показали, що коефіцієнт тертя ковзання, навпаки, залежить від багатьох факторів: від матеріалу тіл, стану поверхонь, що контактують, температури, вологості, якостей мастил тощо.

1.7.2. Кут і конус тертя ковзання

Розглянемо горизонтальну шорстку поверхню, на якій розташоване тіло (рис. 1.42).

Як і в попередньому випадку, покажемо сили, прикладені у точці O : \bar{N} – реакція поверхні або сила нормального тиску, \bar{F}_{mp} – сила тертя.

Додаючи векторно ці сили, отримаємо повну реакцію поверхні \bar{R} :

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{mp}. \quad (1.72)$$

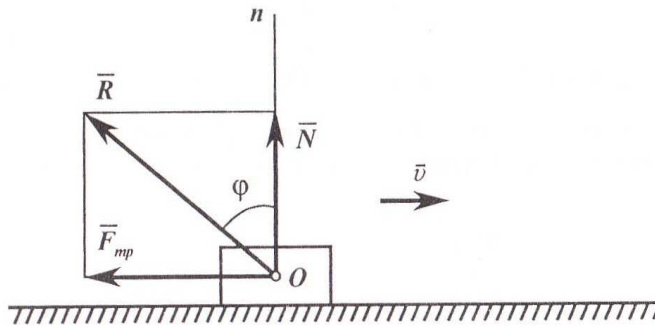


Рис. 1.42

Тепер проведемо крізь точку O , де прикладені сили, нормаль n і покажемо **кут тертя ковзання** φ , на який реакція \bar{R} відхилена від нормалі n .

Отже, кут тертя ковзання φ – це кут, який утворює рівнодійна \bar{R} нормального тиску \bar{N} і сили тертя \bar{F}_{mp} , тобто, повна реакція шорсткої поверхні \bar{R} з нормаллю n до поверхні в момент зрушення тіла з місця.

Визначимо кут тертя ковзання φ . Як легко побачити з рис. 1.42, його можна визначити так:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp.}}{N}. \quad (1.73)$$

Проте, з виразу (1.71) маємо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N}. \quad (1.74)$$

Якщо порівняти ліві частини виразів (1.73) і (1.74), то отримаємо:

$$f = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.75)$$

Таким чином, коефіцієнт тертя ковзання f дорівнює тангенсу кута тертя φ .

З цього випливає, що коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною. Визначити кут тертя можна також, якщо розглядати рівномірний рух тіла на похилій площині.

Нехай площина, на якій рухається тіло вагою \bar{G} (рис. 1.43), нахилена до горизонту під деяким кутом φ , таким, що рух тіла буде рівномірним.

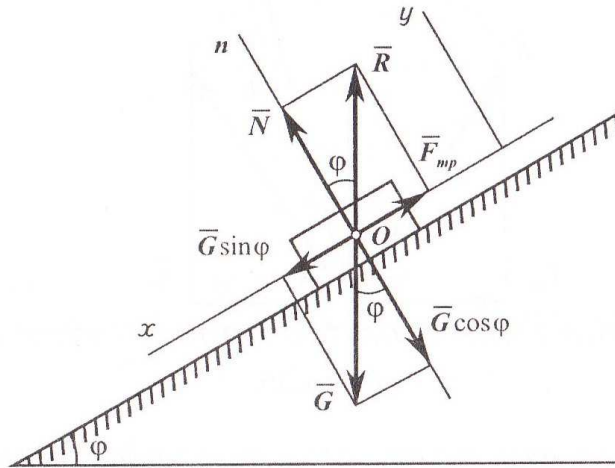


Рис. 1.43

Якщо показати осі координат x, y і вважати, що тіло перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи збіжних сил, то можна скласти систему двох рівнянь рівноваги (1.20):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad -F_{mp.} + G \sin \varphi = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - G \cos \varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

З першого рівняння отримаємо значення сили тертя:

$$F_{mp.} = G \sin \varphi, \quad (1.77)$$

а з другого рівняння отримаємо значення нормальної реакції похилої площини:

$$N = G \cos \varphi. \quad (1.78)$$

Частина перша

Далі, якщо підставити вирази (1.77) і (1.78) у вираз (1.74), то матимемо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N} = \frac{G \sin \varphi}{G \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.79)$$

Звідси легко побачити, що у такому випадку кут φ і є той кут, на який відхилена від нормалі \bar{n} повна реакція \bar{R} поверхні за векторного додавання векторів сил \bar{N} та $\bar{F}_{mp.}$. Цілком очевидно, якщо кут нахилу похилої площини до горизонту буде більшим, ніж φ , то тіло почне рухатись з деяким прискоренням.

Якщо поступово змінювати по колу напрямок горизонтальної рушійної сили \bar{P} , прикладеної до тіла, то внаслідок цього напрямки сили тертя $\bar{F}_{mp.}$ також будуть послідовно змінюватись за колом. Тоді рівнодійна \bar{R} повної реакції поверхні буде повертатись навколо вектора \bar{N} , утворюючи як твірна кругову конічну поверхню (рис. 1.44).

У разі одного повного оберту реакції \bar{R} навколо вектора \bar{N} утворюється круговий конус, кут якого при вершині дорівнює 2φ .

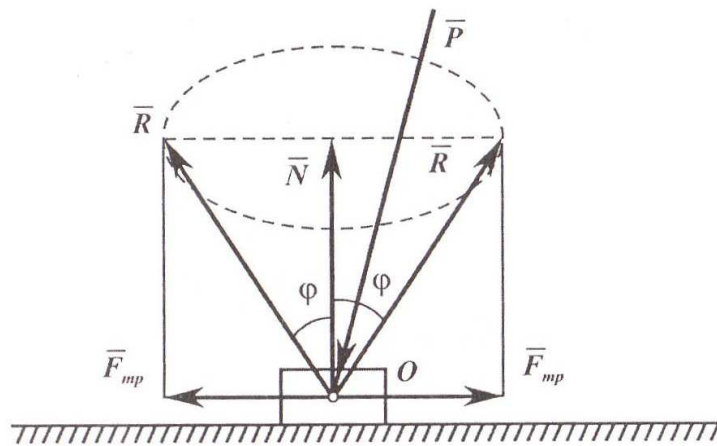


Рис. 1.44

Отже, конус тертя ковзання – це круговий конус, утворений реакцією шорсткої поверхні під час одного повного повороту рушійної сили, кут якого при вершині дорівнює подвійному куту тертя.

З поняття конуса тертя ковзання випливає таке правило: якщо вектор зовнішньої сили \bar{P} , прикладеної до тіла, розміщений всередині тіла конуса тертя, то, якою б великою за модулем ця сила не була, вона не зможе зрушити тіло з місця (рис. 1. 141). Це пов'язано з тим, що в разі збільшення зовнішньої сили \bar{P} нормальна реакція \bar{N} , тобто,

проекція зовнішньої сили на вертикаль, а з нею і сила тертя ковзання \bar{F}_{mp} , зростатиме швидше, ніж рушійна сила, яка є проекцією сили \bar{P} на горизонталь.

Для доведення цього правила позначимо кут між вектором сили \bar{P} і вертикаллю через α . Рух тіла під час дії сили \bar{P} буде неможливий, якщо

$$P \sin \alpha < F_{mp} \Rightarrow P \sin \alpha < f P \cos \alpha = \\ = \operatorname{tg} \varphi P \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \alpha < \varphi.$$

Аналіз останнього виразу вказує на те, що поки вектор зовнішньої сили, яка тисне на тіло, перебуває у створі конуса тертя, рух неможливий. На цьому принципі працюють, наприклад, клинові або стопорні механізми у верстатах.

1.7.3. Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло на похилій площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює α (рис. 1.45).

Вага тіла дорівнює \bar{Q} , до нього прикладена зовнішня сила \bar{P}_1 , яка викликає рівномірний рух тіла вгору зі швидкістю $v = \text{const}$.

Внаслідок рівномірного руху тіло перебуває у стані рівноваги, а тому можна використати рівняння статки.

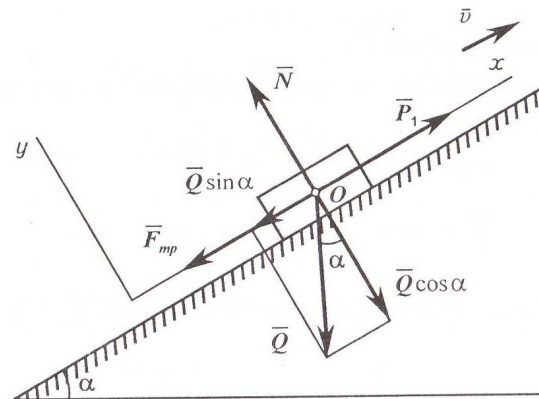


Рис. 1.45

Складемо розрахунково-силову схему. До тіла в точці O прикладена реакція поверхні \bar{N} (або сила нормального тиску), сила тертя \bar{F}_{mp} , напрямком якої протилежний напрямку руху тіла.

Складемо рівняння рівноваги (1.20), враховуючи, що тіло перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad P_1 - F_{mp.} - Q \sin \alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad N - Q \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

З другого рівняння знаходимо реакцію поверхні:

$$N = Q \cos \alpha, \quad (1.81)$$

а з першого рівняння:

$$P_1 = F_{mp.} + Q \sin \alpha. \quad (1.82)$$

Оскільки $F_{mp.} = fN$, то, враховуючи вираз (1.81), матимемо:

$$F_{mp.} = fQ \cos \alpha. \quad (1.83)$$

Підставимо вираз (1.84) у вираз (1.83):

$$P_1 = fQ \cos \alpha + Q \sin \alpha = Q (\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1.84)$$

1.7.4. Тертя кочення

Тертям кочення називається опір, який утворюється під час кочення одного тіла поверхнею іншого.

Уявимо коток радіусом R , що котиться (напрямок обертання показано стрілкою) на поверхні під дією рушійної сили \bar{P} , яка може бути прикладеною або до центра котка, або до його верхньої точки (рис. 1.46).

На поверхні коток утворює колію, з боку якої діють елементарні реакції. Епюру елементарних навантажень можна звести до зосередженої сили \bar{N} , яка буде віддалена від вертикальної осі котка на величину k в момент зрушення котка з місця (відстань AC). Ця **лінійна величина** k , яка має розмірність довжини, **називається коефіцієнтом тертя кочення** або плечем пари кочення (\bar{Q}, \bar{N}) .

Якщо коток рівномірно рухається, $v = const$, то сили, які до нього прикладені, зрівноважуються. Визначимо алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки A .

Розглянемо спочатку перший випадок, якщо рушійна сила \bar{P}_1 прикладена до центра котка, а рушійний момент $M_{руш.} = P_1 R$.

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; \quad Nk - P_1 R = 0. \quad (1.85)$$

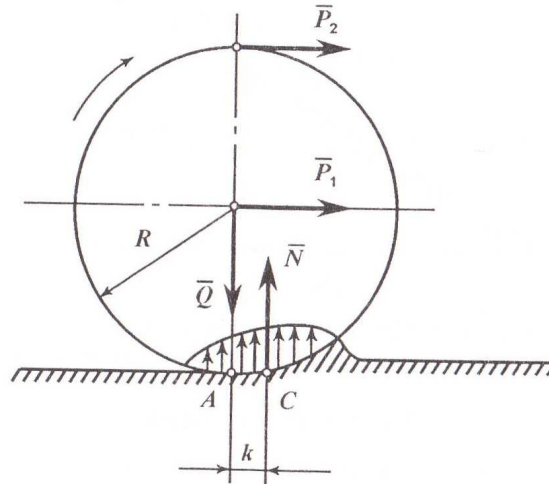


Рис. 1.144

Оскільки момент опору кочення $M_{on.} = Nk$, то

$$P_1 = \frac{k}{R} N = \frac{M_{on.}}{R}. \quad (1.86)$$

Порівнюючи формулу (1.86) і вираз закону Кулона (1.71), вважаючи, що сила тертя ковзання забезпечує чисте кочення без проковзування і дорівнює \bar{P}_1 , можна побачити, що $\frac{k}{R} \ll f$. Тому колесо і застосовується, що має таку велику перевагу у зменшенні сили під час переміщення.

Розглянемо далі другий випадок, коли сила \bar{P}_2 прикладена до верхньої точки котка. У цьому випадку рівняння рівноваги матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0; \\ Nk - P_2 \cdot 2R &= 0. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Звідки
$$P_2 = \frac{Nk}{2R} = \frac{M_{on.}}{2R}. \quad (1.88)$$

Якщо порівняти вирази (1.88) і (1.86), то можна побачити, що в другому випадку для зрушення котка з місця треба прикласти вдвічі менше зусилля, ніж у першому.

1.7.5. Тертя нитки і шорсткої циліндричної поверхні

Найбільш розповсюдженим типом передачі обертального руху є пасова передача, в якій рух від одного циліндричного шків (ведучого) передається до другого (веденого) за допомогою гнучкої в'язі, тобто, пасів різноманітних конструкцій: плоский, клиновий, зубчастий... На ведучому

Частина перша

валу, який примусово обертається і охоплюється гнучким тілом, виникають сили тертя, які і спричиняють передачу зусиль. На рис. 1.47 схематично показаний подібний ведучий шків радіуса R , який рівномірно обертається у напрямку кругової стрілки.

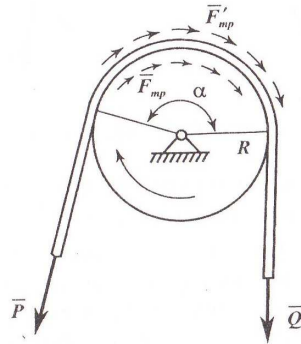


Рис. 1.47

При цьому кут обхвату шківa, що охоплюється пасом, дорівнює α . Позначимо зусилля, що створюються у гілках паса (нитки), через \bar{P} і \bar{Q} . Умовно можна показати сили тертя \bar{F}_{mp} , які виникають на циліндричній поверхні самого шківa і мають напрямок, протилежний напрямку його обертання, а на поверхні паса (нитки) – рівні за величиною, але протилежно спрямовані сили тертя паса (нитки) і шківa \bar{F}'_{mp} .

Розглянемо взаємодію ідеальної абсолютно гнучкої нерозтяжної нитки з циліндричною поверхнею шківa і знайдемо співвідношення між силами натягу \bar{P} і \bar{Q} за заданого кута α (радіан) обхвату шківa ниткою. Складемо розрахунково-силову схему розглядаючи шків, який рівномірно обертається, а нитка перебуває у відносному спокою.

Центр шківa позначимо літерою O , його радіус – R . Сили натягу \bar{P} і \bar{Q} прикладені відповідно в точках B і A нитки (там, де нитка сходиться зі шківa), а тому центральний кут AOB і є кутом обхвату α (рис. 1.48)

Розглянемо рівновагу елемента DE , приклавши до нього такі сили: \bar{T} – сила натягу, прикладена у точці E ; $(\bar{T} + d\bar{T})$ – сила натягу, прикладена у точці D , де $d\bar{T}$ – різниця натягів, обумовлена наявністю сил тертя. Далі поділимо кут $d\theta$ навпіл і проведемо крізь точку C (на дузі DE) осі прямокутної натуральної системи координат τ і n (дотичну і нормаль).

Крізь точку C проходить елементарна нормальна сила тиску нитки $d\bar{N}$. Оскільки елемент DE перебуває у рівновазі, то різниця натягів $d\bar{T}$ зрівноважується силою тертя шківa і нитки $d\bar{F}_m$, яка прикладена у точці C , розміщена на дотичній τ і дорівнює:

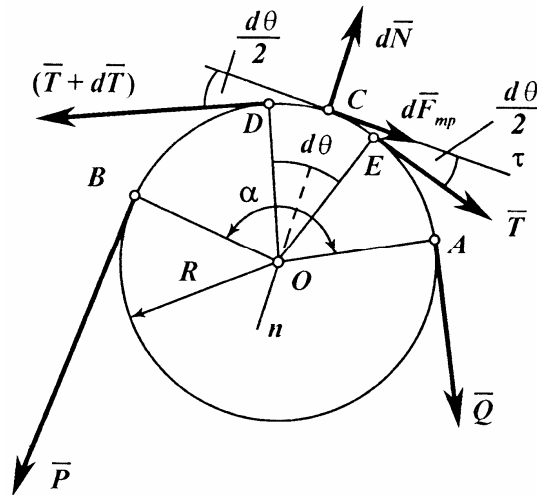


Рис. 1.48

$$dF_{m.} = f \cdot dN, \quad (1.89)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання.

Кути нахилу сил \bar{T} і $\bar{T} + d\bar{T}$ до осі τ дорівнюють $\frac{d\theta}{2}$.

Складемо рівняння рівноваги елемента DE під дією прикладених сил, для чого спроектуємо всі сили на осі τ і n :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\bar{P}_k)_\tau = 0, & \left\{ \begin{aligned} T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dF_{mp.} - (T + dT) \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0, \\ T \cdot \sin \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \cdot \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

З першого рівняння системи (1.90) знайдемо dT , для чого розкриємо дужки:

$$T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} + dF_{mp.} - T \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - dT \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0. \quad (1.91)$$

Враховуючи, що $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$, оскільки кут $d\theta$ дуже малий, а також на підставі виразу (1.89) з рівняння (1.91) маємо:

$$dT = f \cdot dN. \quad (1.92)$$

Перетворимо друге рівняння системи (1.90):

$$T \sin \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + dT \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0. \quad (1.93)$$

Частина перша

У виразі (1.93) доданок $dT \sin \frac{d\theta}{2}$ є величиною вищого порядку мализни, як добуток нескінченно малих, тому цим доданком можна знехтувати. Крім того, за малого кута $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ у підсумку отримаємо:

$$2T \cdot \frac{d\theta}{2} = dN, \quad (1.94)$$

$$\text{або } dN = T \cdot d\theta. \quad (1.95)$$

Підставимо отримане значення dN у вираз (1.93):

$$dT = Td\theta \cdot f. \quad (1.96)$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння (1.96), для чого відокремимо змінні величини:

$$\frac{dT}{T} = f \cdot d\theta. \quad (1.97)$$

Обчислимо визначені інтеграли від лівої і правої частин виразу (1.97). При цьому величина натягу \bar{T} змінюється від початкового значення Q до кінцевого P , а кут θ має початкове значення 0 і змінюється до кінцевого значення α . Отже, межі інтегрування визначені.

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f \int_0^\alpha d\theta.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння такий:

$$\ln T \Big|_Q^P = f\theta \Big|_0^\alpha \Rightarrow \ln P - \ln Q = f\alpha \Rightarrow \ln \frac{P}{Q} = f\alpha \Rightarrow \frac{P}{Q} = e^{f\alpha}.$$

Остаточно визначимо силу натягу P :

$$P = Q \cdot e^{f\alpha}. \quad (1.98)$$

Таким чином, з останнього виразу (1.100) можна з'ясувати, що зусилля P більше від зусилля Q у $e^{f\alpha}$ разів, воно залежить від коефіцієнта тертя f і кута обхвату α , а не залежить від радіуса шківів R . Цілком зрозуміло, що за відсутності тертя ($f = 0$) зусилля Q і P рівні. Вираз (1.98) носить назву формули Ейлера і дає можливість знайти найменшу силу Q , здатну зрівноважити силу P : $Q = Pe^{-f\alpha}$.

Наведемо приклад розрахунку зусиль у вітках пасової передачі, яку показано на рис. 1.49.

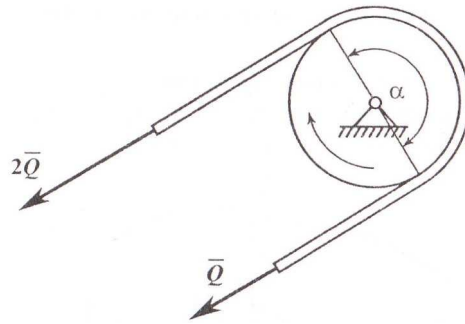


Рис. 1.49

З рисунка видно, що кут обхвату пасом ведучого шківa $\alpha = \pi$, коефіцієнт тертя гуми і сталі $f = 0,23$. Тоді:

$$e^{f\alpha} = 2,7^{0,23\pi} = 2. \Rightarrow P = 2Q.$$

Таким чином, натяг ведучої вітки пасової передачі вдвічі більший, ніж веденої.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають силою тертя, від яких факторів вона залежить, куди напрямлений її вектор?
2. Що таке коефіцієнт тертя ковзання, кут тертя, конус тертя?
3. Як експериментально визначити коефіцієнт тертя ковзання на похилій площині?
4. Чому дорівнюють максимальна і мінімальна сили тертя у випадку рівноваги тіла на похилій площині?
5. Що таке тертя кочення?
6. Чому дорівнює коефіцієнт тертя кочення?
7. Чому дорівнює момент опору під час кочення?
8. Яка залежність між силами веденої і збіжної віток паса?
9. Як гасять енергію корабля під час причалювання?

1.8. Просторова система сил. Момент сили відносно осі

1.8.1. Системи сил у просторі

Якщо лінії дії усіх сил, що прикладені до твердого тіла, розміщені будь-як у просторі, то така система сил має назву просторової. Але розташування сил у просторі може бути різним. Це може бути просторова система збіжних сил, паралельних сил і довільних сил.

Частина перша

Якщо розглянути тіло і вибрати прямокутну систему декартових координат $Oxyz$, то всі ці три випадки різних систем сил можна побачити на рис. 1.50:

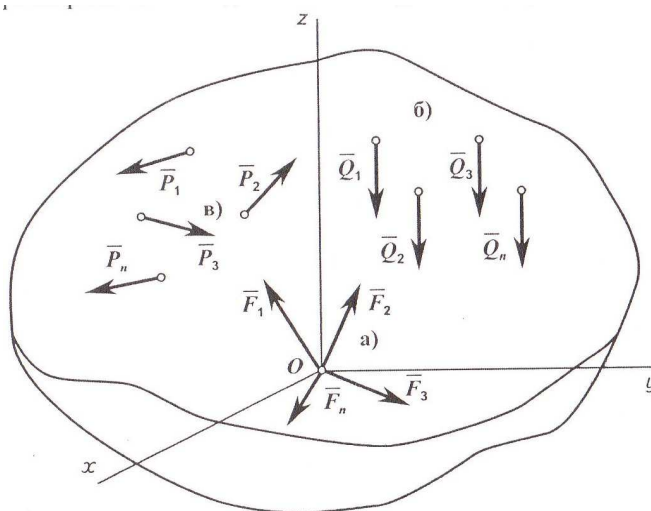


Рис. 1.50

1.8.2. Момент сили відносно осі

Розглянутий момент сили відносно центра (точки) характеризує обертальний ефект сили відносно точки.

Момент сили відносно осі характеризує обертальний ефект сили відносно осі. Якщо сила намагається повернути тіло навколо осі, то вона створює відповідний момент відносно цієї осі.

Визначимо момент відносно осі z від сили \vec{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.51).

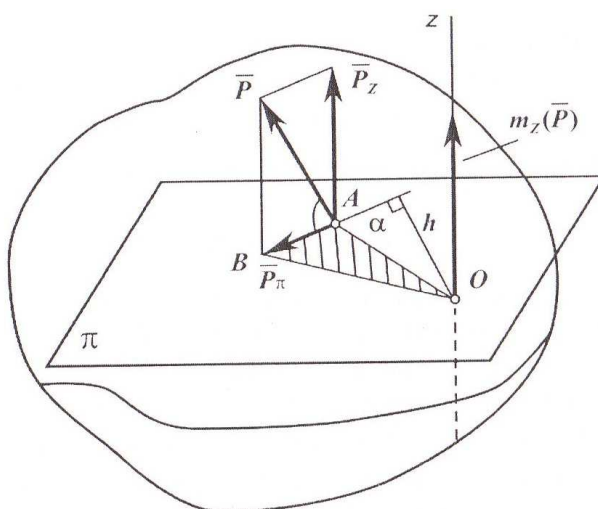


Рис. 1.51

Як можна побачити з рис. 1.51, складова \bar{P}_z не може повертати тіло відносно осі z , отже вона не створює моменту відносно цієї осі. Складова \bar{P}_π , навпаки, може повертати тіло навколо осі z з моментом:

$$m_z(\bar{P}) = m_z(\bar{P}_\pi). \quad (1.99)$$

Визначимо модуль моменту $m_z(\bar{P}_\pi)$. Проекція \bar{P}_π розташована у площині π і за величиною дорівнює:

$$P_\pi = P \cos \alpha, \quad (1.100)$$

де α – кут між вектором сили \bar{P} та площиною π .

Момент у площині π створюється відносно точки O , в якій перетинаються вісь z і площина π . Покажемо плече h , опускаючи перпендикуляр із точки O до лінії дії складової \bar{P}_π або до її продовження. Остаточно момент дорівнюватиме:

$$m_z(\bar{P}) = m_z(\bar{P}_\pi) = m_o(\bar{P}_\pi) = P_\pi h = P \cos \alpha \cdot h. \quad (1.101)$$

Знак моменту сили відносно осі визначається наступним чином: якщо, дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити, що поворот площини під дією проекції сили на цю площину відбувається проти напрямку годинникової стрілки, то момент сили відносно осі вважається додатним і навпаки.

Остаточно сформулюємо визначення моменту:

Моментом сили відносно осі називається взята з відповідним знаком скалярна величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Далі, у площині π з'єднаємо точку O з точками A і B . Утворено трикутник ΔOAB , у якого основою є сила \bar{P}_π , а вершина знаходиться в точці O .

Як уже відомо, момент проекції \bar{P}_π відносно точки O – це подвійна площа трикутника ΔOAB , а оскільки цей момент і є моментом сили \bar{P} відносно осі z , то

$$m_z(\bar{P}) = 2S\Delta OAB. \quad (1.102)$$

Відомо, що вектор моменту сили відносно точки розміщений перпендикулярно до площині трикутника і спрямований за правилом свердлика.

Частина перша

Тоді і алгебраїчну величину моменту сили відносно осі як напрямлений відрізок також можна розмістити перпендикулярно до площини трикутника, який утворено проекцією \bar{P}_π і точкою O .

Оскільки вказаний трикутник розташований у площині π , то спрямований відрізок моменту $m_z(P)$ буде знаходитись на осі z (див. рис. 1.51).

Розглянемо особливі умови, за яких момент сили відносно осі дорівнює нулю:

- **якщо сила паралельна осі** (у цьому випадку проекція сили на площину, перпендикулярну осі, дорівнюватиме нулю),
- **якщо лінія дії сили перетинає цю вісь** (тоді плече $h = 0$).

Звідси випливає, що якщо сила та вісь розміщені в одній площині, то момент сили відносно цієї осі дорівнюватиме нулю.

Якщо вектор сили не знаходиться з віссю в одній площині, але він перпендикулярний до осі, то момент цієї сили дорівнює добутку модуля сили на відстань між силою та віссю (з відповідним знаком).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка система сил є просторовою системою довільних сил?
2. Як знайти момент сили відносно осі?
3. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
4. Яка існує залежність між моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі, яка проходить крізь цю точку?
5. Що таке просторова система збіжних сил?
6. Що створює момент сили відносно осі?
7. Як спроектувати векторний момент сили відносно центра на координатні осі?
8. Сформулюйте методику визначення моменту сили відносно осі.

1.9. Просторова система пар сил. Головний вектор і головний момент системи сил

1.9.1. Пари сил у просторі

Як відомо, **пари сил** характеризуються трьома параметрами: **модулем**, що дорівнює добутку однієї із сил пари на плече пари, **площиною дії пари і напрямком повороту тіла** у цій площині. Для пар, розміщених в одній площині, остання є загальною для всіх пар, тому її, як окремий параметр,

не треба враховувати під час перетворень. Якщо розглядати пари, які розміщені в різних площинах, то для кожної з них необхідно визначати всі три параметри.

1.9.2. Теорема про перенесення пари у паралельну площину

Не змінюючи дії пари сил на тіло, можна переносити цю пару у паралельну площину.

Доведемо це. Припустимо, що існує тіло, до якого у площині π прикладена пара сил (\bar{P}_1, \bar{P}_2) (рис. 1.52).

При цьому $P_1 = P_2$ і $\bar{P}_1 \parallel \bar{P}_2$. Позначимо точки прикладання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 літерами A і B .

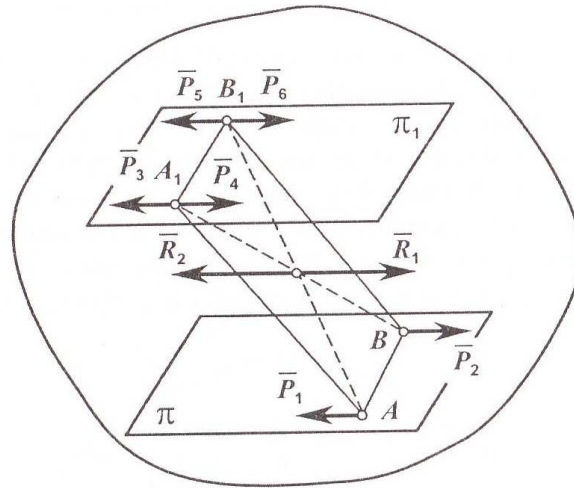


Рис. 1.52

Візьмемо на тілі іншу площину π_1 , яка є паралельною даній площині π . Відрізок AB перенесемо паралельно самому собі у площину π_1 у положення A_1B_1 . Прикладемо у точках A_1 і B_1 зрівноважені системи сил \bar{P}_3, \bar{P}_4 і \bar{P}_5, \bar{P}_6 , які в сумі еквівалентні нулю.

При цьому модулі всіх сил виберемо однаковими. З'єднаємо всі чотири точки і отримаємо паралелограм AA_1B_1B (оскільки $AB = A_1B_1$ і $AB \parallel A_1B_1$). Покажемо діагоналі цього паралелограма. Вони перетинаються в одній точці, яка поділяє кожну діагональ навпіл.

Об'єднаємо сили \bar{P}_2 і \bar{P}_4 , які прикладені на кінцях першої діагоналі і спрямовані в один бік. Оскільки вони паралельні і мають однаковий напрямок, то їх можна додати, отримавши рівнодійну, яка у такому разі буде прикладена саме посередині діагоналі.

$$R_1 = P_2 + P_4 = 2P.$$

Частина перша

Те саме зробимо з силами \overline{P}_1 і \overline{P}_5 , одержуючи рівнодійну \overline{R}_2 , яка буде прикладена посередині другої діагоналі і спрямована у той самий бік, що і ці сили, але матиме напрямок, протилежний напрямку першої рівнодійної \overline{R}_1 .

$$R_2 = P_1 + P_5 = 2P.$$

Отже, в точці перетину діагоналей паралелограма AA_1B_1B є дві сили \overline{R}_1 і \overline{R}_2 , які є зрівноваженою системою сил і які, за другою аксіомою, можна відкинути.

На рис. 1.52 залишились лише сили \overline{P}_3 і \overline{P}_6 , які є парою сил, перенесеною і прикладеною у площині π_1 .

Таким чином, пару сил $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ перенесено з площини π у паралельну площину π_1 . Теорему доведено.

1.9.3. Умови еквівалентності пар сил у просторі

Як відомо, момент пари сил є векторною величиною. Момент пари як вектор має напрямок, перпендикулярний площині, у якій розташована пара сил, і спрямований таким чином, що, дивлячись з кінця вектора, можна побачити поворот площини дії пари проти напрямку руху стрілки годинника. Також було встановлено, що пару сил можна пересувати і повертати у площині її дії, а також переносити у паралельну площину, оскільки момент пари сил є вектором вільним. Таким чином, момент пари сил як вектор або векторний момент пари можна переносити вздовж лінії його дії і пересувати паралельно самому собі. На підставі викладеного можна стверджувати, що пари сил у просторі є еквівалентними, якщо їхні векторні моменти рівні за модулем, паралельні і спрямовані в один бік.

1.9.4. Додавання просторової системи пар

Додати пари сил у просторі означає знайти таку рівнодійну пару, яка буде еквівалентною заданій системі пар (рис. 1.53).

А оскільки кожна пара сил характеризується її моментом як вектором, то момент еквівалентної пари сил повинен дорівнювати геометричній сумі векторних моментів складових пар сил.

Уявимо тіло, до якого прикладена система пар сил, довільно розташованих у просторі (рис. 1.53).

Позначимо вектори цих моментів через $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n$.

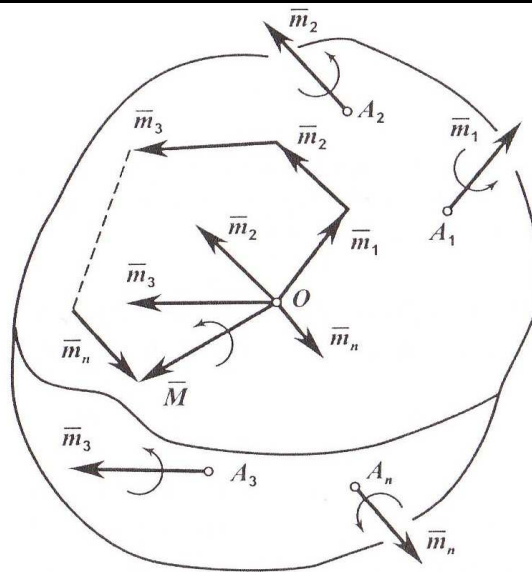


Рис. 1.53

Оскільки вектори-моменти пар сил є вільними векторами, то їх можна переносити паралельно самим собі у довільну точку. Якщо звести ці вектори до одного центра, то будемо мати систему векторних моментів, як систему збіжних векторів, яку можна геометрично додати.

Як відомо, додавання векторних моментів можна здійснювати за правилом геометричного додавання векторів різної фізичної природи (сила, швидкість, прискорення тощо) методом силового багатокутника. Векторну суму можна записати наступним чином:

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k . \quad (1.103)$$

Таким чином, векторний момент рівнодійної або підсумкової пари дорівнює геометричній сумі векторних моментів складових пар .

1.9.5. Умови рівноваги системи пар у просторі

Якщо на тіло діє система пар сил, довільно розташованих у просторі, то тіло буде у стані рівноваги тільки тоді, коли момент рівнодійної (еквівалентної) пари дорівнює нулю. А оскільки векторний момент рівнодійної пари визначається як геометрична сума моментів складових пар, то ця векторна сума теж повинна дорівнювати нулю. Подібна умова рівноваги запишеться так:

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = 0 . \quad (1.104)$$

Для рівноваги тіла, яке перебуває під дією довільної системи пар сил

Частина перша

у просторі, необхідно і достатньо, щоб векторна сума моментів складових пар дорівнювала нулю.

1.9.6. Зведення просторової системи довільних сил до центра. Головний вектор і головний момент системи

Уявимо тіло, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$, прикладених у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ (рис. 1.54).

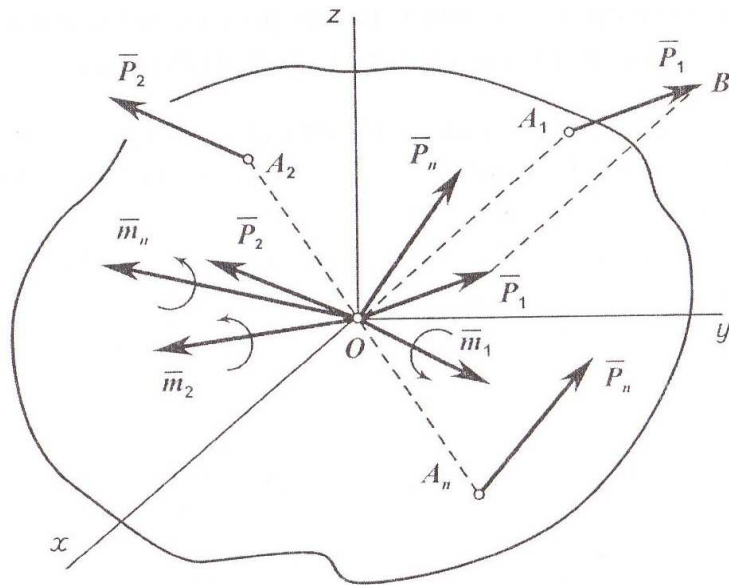


Рис. 1.54

Виберемо довільну точку O як центр зведення і побудуємо прямокутну систему декартових координат $Oxyz$.

Послідовно перенесемо сили паралельно самим собі у центр O (метод Пуансо). При цьому до тіла необхідно кожен раз додавати моменти «приєднаних» компенсаційних пар сил, які дорівнюють моментам заданих сил відносно центра перенесення O . Момент першої пари позначимо $\vec{m}_1 = \vec{m}_o(\vec{P}_1)$, він прикладений у точці O перпендикулярно до площини трикутника OA_1P_1 і спрямований за правилом свердлика. Теж саме зробимо і з іншими силами, прикладеними до тіла. У результаті цього перенесення у центрі зведення O отримаємо систему збіжних сил і систему моментів пар сил у вигляді векторів, тобто, систему векторних моментів.

Головний вектор \vec{R} дорівнює геометричній сумі векторів усіх сил, прикладених до тіла, а головний момент \vec{M} дорівнює векторній сумі усіх моментів сил відносно центра зведення. Систему збіжних сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$, перенесених і прикладених у центрі O , можна перетворити на підставі відомого методу векторних перетворень для системи збіжних сил і

замінити однією підсумковою силою \bar{R} , яка називається головним вектором просторової системи довільних сил.

Аналогічні перетворення проведемо і для системи векторних моментів приєднаних пар.

Вектори-моменти пар $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \dots, \bar{m}_n$, які теж прикладені у центрі O , також можна замінити однією парою з підсумковим моментом \bar{M} , який називається головним моментом просторової системи довільних сил.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k, \\ \bar{M} &= \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

Отже, будь-яка просторова система довільних сил, що діє на тіло, може бути зведена до однієї сили – головного вектора системи і однієї пари сил – головного моменту системи просторових сил.

У загальному випадку головний вектор \bar{R} не залежить від положення центра зведення O , а головний момент \bar{M} , навпаки, залежить від положення центра, тому що за іншого положення центра змінюються плечі «приєднаних» пар або рівні їм плечі заданих сил відносно центра зведення.

1.9.7. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи довільних сил

Визначимо аналітично головний вектор просторової системи довільних сил \bar{R} через його проєкції на осі просторової системи координат $Oxyz$. Позначимо ці проєкції літерами з відповідними індексами R_x, R_y, R_z . Проєкція головного вектора на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій складових сил на ту саму вісь:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} + \sum_{k=1}^n P_{ky}, \\ R_z &= P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + \dots + P_{nz} + \sum_{k=1}^n P_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.106)$$

Якщо відомі проєкції головного вектора R на осі координат, то можна визначити його величину як діагональ паралелепіпеда, а якщо потрібно, то і напрямні косинуси:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (1.107)$$

$$\cos(x, \wedge \bar{R}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(y, \wedge \bar{R}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(z, \wedge \bar{R}) = \frac{R_z}{R}.$$

Проекція головного моменту \bar{M} на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій моментів складових сил на ту саму вісь:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= [m_o(\bar{P}_1)]_x + [m_o(\bar{P}_2)]_x + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_x, \\ M_y &= [m_o(\bar{P}_1)]_y + [m_o(\bar{P}_2)]_y + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_y, \\ M_z &= [m_o(\bar{P}_1)]_z + [m_o(\bar{P}_2)]_z + \dots + [m_o(\bar{P}_n)]_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.108)$$

Але проекція моменту сили відносно точки на вісь, яка проходить крізь цю точку, дорівнює моменту сили відносно цієї осі:

$$\left. \begin{aligned} [m_o(\bar{P}_1)]_x &= m_x(\bar{P}_1), & [m_o(\bar{P}_2)]_x &= m_x(\bar{P}_2), & \dots, & [m_o(\bar{P}_n)]_x &= m_x(\bar{P}_n), \\ [m_o(\bar{P}_1)]_y &= m_y(\bar{P}_1), & [m_o(\bar{P}_2)]_y &= m_y(\bar{P}_2), & \dots, & [m_o(\bar{P}_n)]_y &= m_y(\bar{P}_n), \\ [m_o(\bar{P}_1)]_z &= m_z(\bar{P}_1), & [m_o(\bar{P}_2)]_z &= m_z(\bar{P}_2), & \dots, & [m_o(\bar{P}_n)]_z &= m_z(\bar{P}_n), \end{aligned} \right\}$$

З урахуванням останнього можна остаточно визначити проекції вектора головного моменту на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_x(\bar{P}_1) + m_x(\bar{P}_2) + m_x(\bar{P}_3) + \dots + m_x(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k), \\ M_y &= m_y(\bar{P}_1) + m_y(\bar{P}_2) + m_y(\bar{P}_3) + \dots + m_y(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k), \\ M_z &= m_z(\bar{P}_1) + m_z(\bar{P}_2) + m_z(\bar{P}_3) + \dots + m_z(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k). \end{aligned} \right\} \quad (1.109)$$

Якщо відомі проекції головного моменту \bar{M} на осі координат, то неважко визначити модуль головного векторного моменту:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.110)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як читається теорема про перенесення пари сил у паралельну площину?
2. Які умови еквівалентності пар у просторі?
3. Як додати пари, що довільно розташовані у просторі?
4. Яка умова рівноваги системи пар у просторі?
5. Чому дорівнює головний вектор та головний момент просторової системи сил?
6. Як обчислити аналітично головний вектор та головний момент

- просторової системи довільних сил?
7. До яких силових факторів можна звести просторову систему довільних сил?
 8. Про які окремі випадки зведення просторової системи довільних сил ви знаєте?
 9. Чи можна звести до рівнодійної просторову систему довільних сил?
 10. Що таке «динама» і як звести до неї будь-яку просторову систему довільних сил?

1.10. рівновага тіла під дією просторових систем сил

1.10.1. Умови рівноваги тіла у просторі

Оскільки будь-яку просторову систему довільних сил можна звести до двох силових факторів: однієї сили, головного вектора \bar{R} і однієї пари сил, головного моменту \bar{M} , які прикладені до тіла, то для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб головний вектор \bar{R} і головний момент \bar{M} системи сил одночасно дорівнювали нулю:

$$\bar{R} = 0, \bar{M} = 0. \quad (1.111)$$

Умова (1.119) справджується, якщо кожен доданок під радикалом у виразах (1.115) і (1.118) теж дорівнюватиме нулю:

$$\bar{R} = 0 \Rightarrow R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0;$$

$$\bar{M} = 0 \Rightarrow M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0.$$

Тоді на підставі виразів (1.111) умови рівноваги тіла під дією просторової системи довільних сил будуть мати такий вигляд:

$$\left. R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, R_y = \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, R_z = \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \right\} \quad (1.112)$$

$$\left. M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0, M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0. \right\} \quad (1.113)$$

На підставі цих умов складаються конкретні рівняння рівноваги тіла.

Отже, для рівноваги тіла, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій сил на кожну із трьох координатних осей і алгебраїчні суми моментів сил відносно цих же осей дорівнювали нулю.

1.10.2. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи паралельних сил

Якщо сили, що прикладені до тіла, розташовані у просторі, але лінії їх дії паралельні, то можна так вибрати систему координат, щоб одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна цим силам (рис. 1.55).

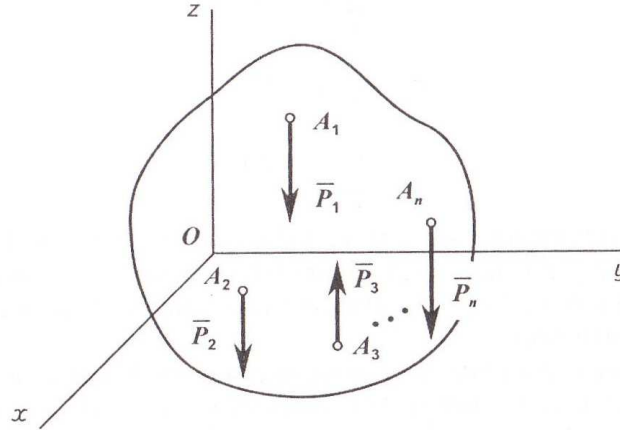


Рис. 1.55

Тоді дві інші осі (x, y) утворюють площину, яка буде перпендикулярною цим силам, тому проекції заданих сил на осі x і y дорівнюватимуть нулю. Як паралельні сили, задані сили не створюють моментів відносно осі z .

Отже, щодо загальної системи умов рівноваги (1.120), (1.121), то для просторової системи паралельних сил три умови рівноваги випадають, а залишаються три інші. Тоді для рівноваги просторової системи паралельних сил маємо наступні умови:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.114)$$

Таким чином, для рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи паралельних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій сил на вісь, яка паралельна силам, і алгебраїчні суми моментів відносно двох інших осей дорівнювали нулю.

1.10.3. Методика розв'язування задач і приклад для просторової системи довільних сил

Приклад 1.37

Горизонтальний вал трансмісії (рис. 1.56) несе два шківів C і D пасової передачі і може обертатися у підшипниках A і B . Радіуси шківів $r_C = 0,2 \text{ м}$, $r_D = 0,25 \text{ м}$.

Натяги гілок паса на шківі C – горизонтальні \bar{T}_1 і \bar{t}_1 , до того ж,

$$T_1 = 2t_1 = 490 \text{ Н.}$$

Натяги гілок паса на шківі D – \bar{T}_2 і \bar{t}_2 , до того ж, $T_2 = 2t_2$, із вертикаллю вони утворюють кут $\alpha = 30^\circ$.

Лінійні розміри вала $a = b = 0,5 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$. Система перебуває у стані рівноваги.

Визначити натяги гілок паса T_2, t_2 і реакції опорних підшипників A і B .

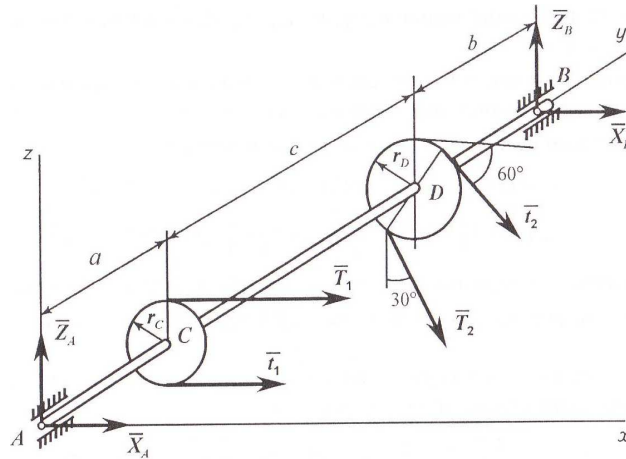


Рис. 1.56

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вала AB із шківками C і D . Звільнимо вал від в'язей, замінивши їх відповідними реакціями.

У підшипниках реакції розташовані у площині, перпендикулярній осі вала AB .

Таким чином, реакції підшипників A і B розташовані відповідно у площині xAz і у площині, що паралельна до неї і проходить крізь точку B .

Невідомий вектор кожної реакції підшипників у площині визначається двома проекціями на осі x і z , як це показано на рис. 1.56

Після зроблених операцій на схемі отримана просторова система довільних сил, що перебуває у стані рівноваги.

Запишемо на підставі умов рівноваги (1.112) і (1.113) відповідні рівняння рівноваги просторової системи довільних сил (а).

Частина перша

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; \quad X_A + X_B + t_1 + T_1 + t_2 \cos 60^\circ + T_2 \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; \quad Z_A + Z_B - t_2 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) &= 0; \quad -t_2 \cos 30^\circ (a+c) - T_2 \cos 30^\circ (a+c) + Z_B (a+b+c) = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) &= 0; \quad -t_1 r_C + T_1 r_C - T_2 r_D + t_2 r_D = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) &= 0; \quad -(t_1 + T_1)a - (T_2 + t_2) \cos 60^\circ (a+c) - X_B (a+b+c) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Як можна побачити із системи рівнянь (а), друге рівняння відсутнє, оскільки серед сил, прикладених до тіла, немає таких, які б могли бути спроектовані на вісь y (тобто всі сили лежать у площинах, перпендикулярних до осі y).

Проте, така система статично визначена, оскільки кількість невідомих величин (t_2, X_A, Z_A, X_B, Z_B) дорівнює кількості рівнянь рівноваги – 5.

Якщо підставити у цю систему рівнянь числові значення величин, що задані (враховуючи, що за умовою задачі $T_2 = 2t_2$) і розв'язати ці рівняння відносно невідомих, отримаємо відповіді:

$$\begin{aligned} t_2 &= 1962 \text{ Н}; T_2 = 3924 \text{ Н}; X_A = -6553,9 \text{ Н}; \\ Z_A &= 1275,3 \text{ Н}; X_B = -4046,7 \text{ Н}; Z_B = 3825,9 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Значення визначених величин X_A і X_B від'ємні, а це означає, що, фактично, ці реакції мають протилежний напрямок, ніж це показано на рис. 1.56.

Для остаточного визначення реакцій підшипників в опорах A і B необхідно додати векторно їхні складові:

$$\begin{aligned} R_A &= \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-6553,9)^2 + (1275,3)^2} = 6676,8 \text{ Н}; \\ R_B &= \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{(-4046,7)^2 + (3825,9)^2} = 5569,8 \text{ Н}. \end{aligned}$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які умови рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи довільних сил? Сформулюйте їх.
2. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи довільних сил?
3. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи

- паралельних сил?
4. Як читається теорема Варіньйона про момент рівнодійної сили відносно осі?
 5. Яка сила називається зрівноважувальною і чим вона відрізняється від рівнодійної?
 7. Які умови рівноваги паралельних сил у просторі?
 8. Надайте методику розв'язання задач для просторової системи довільних сил.
 9. Напишіть рівняння рівноваги для просторової системи збіжних сил.
 10. Сформулюйте умови рівноваги тіла, навантаженого системою довільних сил у просторі.
 11. Сформулюйте умови рівноваги тіла, навантаженого системою паралельних сил у просторі.

1.11. Центр паралельних сил і центр ваги

1.11.1. Центр паралельних сил

Допустимо, що до деякого тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних і однаково спрямованих векторів сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$ (рис. 1.57. Додамо векторно сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , визначивши їх рівнодійну $\vec{R}_{1,2}$:

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

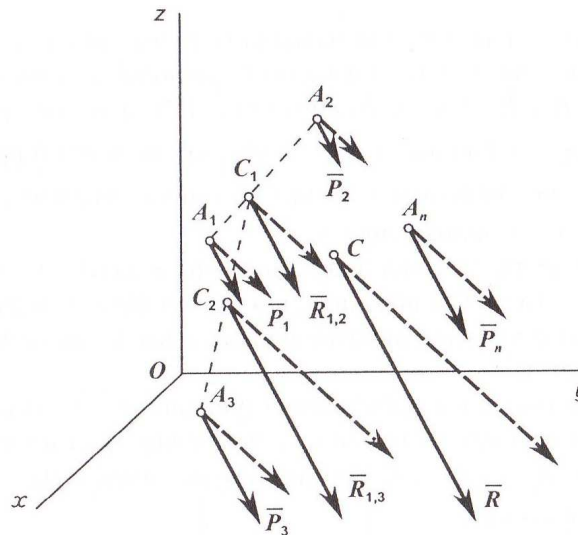


Рис. 1.57

Точка C_1 прикладання цієї рівнодійної $\vec{R}_{1,2}$ визначається за відомим правилом додавання двох паралельних сил, які мають однаковий напрям.

Частина перша

Оскільки вектори сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 прикладені у точках A_1 і A_2 , то, з'єднавши ці точки прямою, можна відшукати положення точки C_1 на цій прямій за відомим рівнянням або пропорцією:

$$P_1 \cdot A_1 C_1 = P_2 \cdot A_2 C_1. \quad (1.115)$$

Далі аналогічно додамо вектори сил $\bar{R}_{1,2}$ і \bar{P}_3 , отримуючи їх рівнодійну $\bar{R}_{1,3}$, яка є рівнодійною трьох сил:

$$\bar{R}_{1,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{P}_3 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3. \quad (1.116)$$

Точка C_2 прикладення цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,3}$ також визначається за вказаним вище правилом на прямій $C_1 A_3$.

Таким же чином поведимося з рештою сил, послідовно їх додаючи, і отримаємо рівнодійну \bar{R} системи паралельних сил. Вона буде прикладена в точці C , спрямована у той же бік, що і задані паралельні сили, величина її буде дорівнювати:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{k=1}^n P_k. \quad (1.117)$$

Повернемо вектори заданих сил навколо їх точок прикладання в один бік на один і той самий кут і знову знайдемо їх рівнодійну. Також починаємо з додавання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 .

Але, як бачимо з рис. 1.57, а також з рівняння (1.115), ні модуль рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$, ні положення точки її прикладання C_1 на прямій $A_1 A_2$, не зміняться.

Змінюється лише напрямок, який буде паралельним новому напрямку повернутих векторів.

І рівнодійна \bar{R} у такому випадку не змінює ні свого модуля, ні точки прикладання C . Змінюється лише напрямок її лінії дії.

Таким чином, точка прикладання рівнодійної \bar{R} системи паралельних сил завжди збігається з точкою C , положення якої відносно положень точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ завжди буде незмінним. Ця точка має назву центра паралельних сил.

Центр паралельних сил – це точка прикладання їх рівнодійної, яка не змінює свого положення під час повороту усіх векторів сил на однаковий кут в один і той самий бік.

1.11.2. Координати центра паралельних сил

Допустимо, що до тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних векторів сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, яка зведена до вектора рівнодійної сили \bar{R} , прикладеної у точці C (рис. 1.58). Виберемо прямокутну систему декартових координат $Oxyz$ так, щоб б одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна заданим силам. Знайдемо моменти усіх сил відносно осей координат x, y, z .

Позначимо у прийнятій системі відліку координати точок прикладання сил $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ і точки прикладання рівнодійної $\bar{R} - C(x_c, y_c, z_c)$.

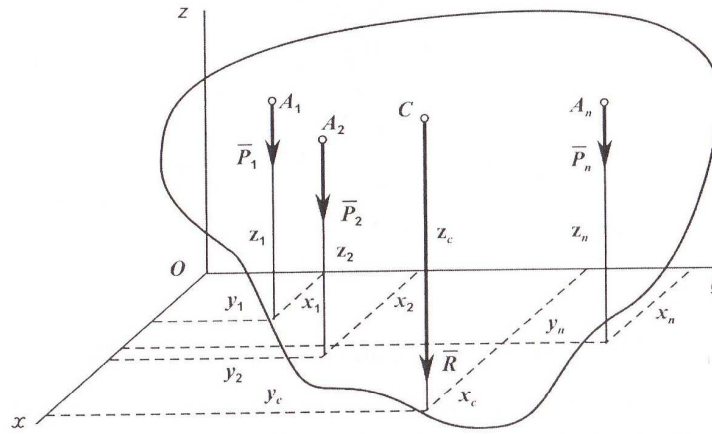


Рис. 1.58

Обчислимо спочатку моменти всіх сил відносно осі y . Оскільки $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k$, то за теоремою Варінійона для осі запишемо:

$$m_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k),$$

$$R \cdot x_c = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \dots + P_n \cdot x_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k. \quad (1.118)$$

Звідки координата центра ваги:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}. \quad (1.119)$$

Аналогічно визначимо моменти усіх сил відносно осі x :

$$-R \cdot y_c = -P_1 \cdot y_1 - P_2 \cdot y_2 - P_3 \cdot y_3 - \dots - P_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^n (-P_k \cdot y_k) \quad (1.120)$$

і друга координата
$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}. \quad (1.121)$$

Далі повернемо всі сили на один і той самий кут в один бік (наприклад, на 90° , перпендикулярно до площини yOz).

Положення точки C , як відомо, під час повороту усіх сил на однаковий кут, в один і той самий бік не змінюється. Тепер обчислимо моменти усіх сил відносно осі y :

$$R \cdot z_C = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \dots + P_n \cdot z_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k, \quad (1.122)$$

третя координата

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.123)$$

Таким чином, остаточно отримаємо формули для **координат центра паралельних сил**:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.124)$$

1.11.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії

На довільне тіло, яке розміщене поблизу поверхні землі, діє сила, що має вертикальний донизу напрямок і називається силою ваги (рис. 1.59).

Вважаємо радіус Землі достатньо великим (приблизно 6,4 тис. км). Тоді для тіл, розміри яких є малими порівняно з цим радіусом, вектори сили ваги окремих частинок малих тіл можна вважати паралельними, вони зберігають свою власну величину, незважаючи на будь-які повороти тіла.

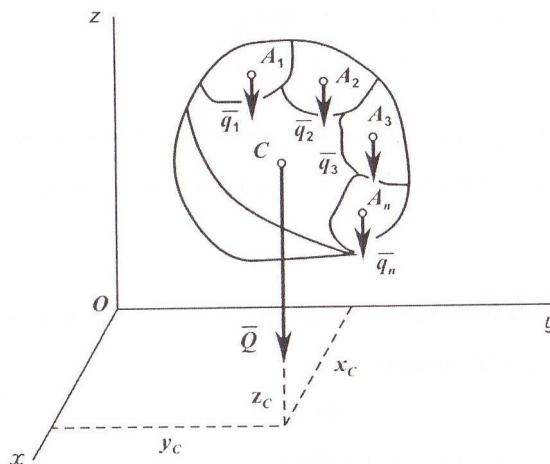


Рис. 1.59

Для визначення положення центра ваги умовно поділимо тіло на багато частинок.

Кожна частинка має свою силу ваги $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$. Як легко побачити, це є система паралельних сил, рівнодійну якої \bar{Q} можна визначити, використовуючи вираз (1.128):

$$\bar{Q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \dots + \bar{q}_n = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k. \quad (1.125)$$

За будь-якого повороту тіла сили \bar{q}_k залишаються прикладеними до тих самих точок і залишаються паралельними між собою. Змінюється лише напрямок цих сил відносно тіла. А тому рівнодійна \bar{Q} буде під час довільного повороту тіла прикладена у точці, яка є центром паралельних сил. Ця точка має назву центра ваги тіла.

Таким чином, **центр ваги тіла** – це геометрична точка, яка незмінно зв'язана з цим тілом, до якої прикладена сила ваги тіла і яка не змінює свого положення за довільного повороту тіла.

Визначимо **координати центра ваги** як центра паралельних сил $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$ на підставі виразів (1.124):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k y_k}{Q}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k z_k}{Q}; \quad (1.126)$$

де x_k, y_k і z_k – координати прикладання сили ваги частинок тіла \bar{q}_k .

Розглянемо об'єм. Якщо тіло однорідне, то вага кожної частини пропорційна її об'єму:

$$q_k = \gamma \cdot V_k, \quad (1.137)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); V_k – об'єм частинки тіла.

Вага усього тіла

$$Q = \gamma \cdot V, \quad (1.128)$$

де V – об'єм тіла; γ – питома вага тіла.

Тепер підставимо вирази (1.127) і (1.128) у вираз (1.126). До того ж питома вага γ , як загальний множник, скорочується.

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma (V_k x_k)}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{k=1}^n V_k x_k}{V} \quad (1.129)$$

Аналогічно поведимось і під час визначення двох інших координат. Тепер **розглянемо пластину** (рис. 1.60), товщина якої h відносно

Частина перша

мала, тоді координата центра її ваги $z_C = \frac{h}{2}$.

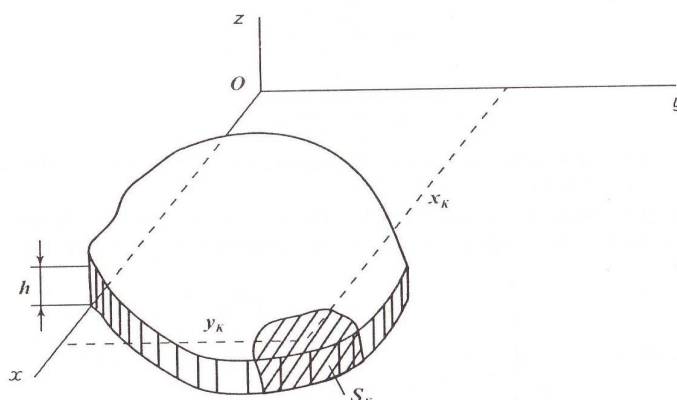


Рис. 1.60

Для визначення двох інших координат x_C, y_C використаємо вирази (1.126).

Пластину треба уявити у вигляді декількох частинок, які мають власну вагу. Далі вважаємо, що вага кожної частинки пластини

$$q_k = \gamma \cdot v_k = \gamma \cdot h \cdot s_k, \quad (1.130)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); h – товщина пластини; s_k – площа кожної частинки пластини. Вага всієї пластини

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot h \cdot S, \quad (1.131)$$

де S – площа пластини.

Тепер підставимо вирази (1.130) і (1.131) у перші два вирази (1.126). Зробимо це спочатку для координати x_C :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma h (s_k x_k)}{\gamma h \cdot S} = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}. \quad (1.132)$$

Аналогічно обчислимо значення і другої координати y_C .

Остаточно матимемо **координати центра ваги тонкої пластини:**

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S}. \quad (1.133)$$

Точка C , координати якої визначаються формулами (1.133), має назву центра ваги площі.

Далі визначимо координати центра ваги лінії (рис. 1.61). Це може бути, наприклад, дріт малого діаметра і постійного поперечного перерізу.

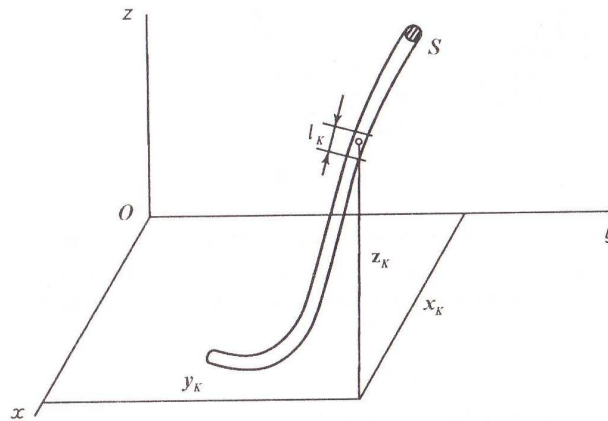


Рис. 1.61

Як і в попередніх випадках, спочатку визначимо вагу кожної частки лінії і вагу всієї лінії. Вага частки лінії

$$q_k = \gamma \cdot V_k = \gamma \cdot S \cdot l_k, \quad (1.134)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об’єму); S – площа поперечного перерізу лінії; l_k – довжина частки лінії.

Вага всієї лінії

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot S \cdot L, \quad (1.135)$$

де L – загальна довжина лінії.

Тепер підставимо значення виразів (1.134) і (1.135) у вираз (1.127) і визначимо спочатку координату x_C :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma S (l_k x_k)}{\gamma S \cdot L} = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}. \quad (1.136)$$

Таким же чином визначаємо дві інші координати центра ваги лінії.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають центром паралельних сил?
2. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
3. За якими формулами визначаються положення центра ваги тіла, об’єму, площі, лінії?
4. Що таке центр ваги тіла?
5. Як записати формули координат центра ваги тіла, об’єму, площі, лінії в інтегральній формі?

1.11.4. Способи визначення координат центра ваги тіла

У механіці знайшли застосування декілька способів визначення координат центра ваги тіл. Серед них розрізняють: метод симетрії, метод розбиття і доповнення, експериментальні способи. Розглянемо послідовно ці способи.

Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно у площині симетрії, на осі симетрії або в центрі симетрії.

Таким чином, центр ваги однорідних симетричних тіл, таких як кільця, прямокутні пластини, прямокутні паралелепіеди, кулі та інші тіла, які мають центр симетрії, розташований у геометричних центрах (центри симетрії) цих тіл.

Метод розбиття

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для кожної з яких положення центра ваги легко визначається, то координати центра ваги усього тіла можна визначити безпосередньо за формулами (1.126), (1.133), (1.36) і (1.137). Причому кількість доданків у чисельнику кожного із зазначених виразів дорівнюватиме кількості часток, на яке розбивається тіло.

Наведемо приклад визначення центра ваги тіла методом розбиття його на окремі тіла, центри ваги яких відомі.

Приклад 1.39

Визначити координати центра ваги однорідної пластини. Розміри в міліметрах задані на рис. 1.62.

Оберемо осі координат x і y . Потрібно розбити пластину на окремі прямокутні частинки.

Для кожного прямокутника проведемо діагоналі, точки перетину яких c_1 , c_2 і c_3 відповідають центрам ваги кожного прямокутника. У прийнятій системі координат неважко отримати значення координат цих точок (см): $c_1(-1, 1)$, $c_2(1, 5)$, $c_3(5, 9)$.

Площі кожного тіла дорівнюють, відповідно:

$$s_1 = 4 \text{ см}^2; s_2 = 20 \text{ см}^2; s_3 = 12 \text{ см}^2.$$

Площа всієї пластини $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2$.

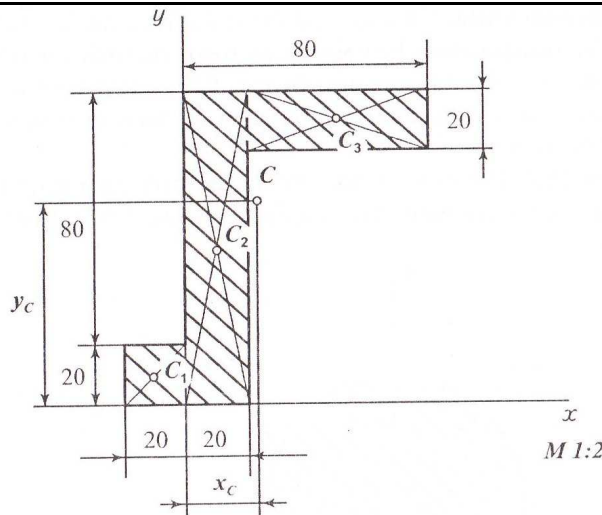


Рис. 1.62

Для визначення координат центра ваги заданої пластини використаємо вираз (1.144). Підставивши значення всіх відомих величин у рівняння, отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = 2,1 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S} = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = 5,9 \text{ см}.$$

За обчисленими значеннями координат центра ваги пластини можна позначити точку $c(2,1; 5,9)$ на рис. 1.52.

Отже, **центр ваги** пластини, як **геометрична точка**, розміщений в конкретному випадку за межами цієї пластини.

Метод доповнення

Спосіб, про який йдеться далі, є частковим випадком способу розбиття площі тіла. Він може застосовуватись до тіл, які мають вирізи, порожнини, причому для всього тіла без урахування вирізу або вирізаної частини тіла положення центра ваги відомо. Розглянемо приклад застосування такого методу.

Приклад 1.40

Визначити положення центра ваги круглої пластини радіусом R , яка має круговий отвір радіуса r (рис. 1.63). Відстань між точками C_1 і C_2 дорівнює a .

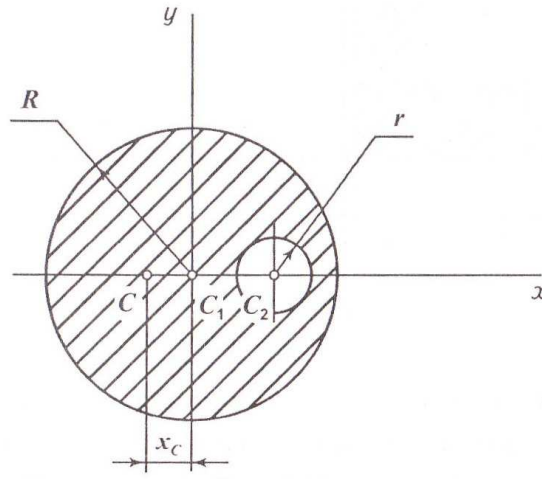


Рис. 1.63

Розв'язання

Як можна побачити з рисунка, центр ваги пластини міститься на осі симетрії пластини x , тобто на прямій, яка з'єднує точки C_1 і C_2 .

Таким чином, для визначення положення центра ваги цієї пластини необхідно обчислити тільки одну координату x_C , оскільки друга координата y_C дорівнює нулю. Покажемо осі координат x, y .

Прийmemo, що пластина складається з двох тіл – з повного круга (без урахування вирізу) і тіла, яке утворено вирізом, площа якого віднімається.

У прийнятій системі координати x для центрів вказаних тіл дорівнюватимуть: $x_1 = 0$; $x_2 = C_1C_2 = a$.

Площі тіл $s_1 = \pi R^2$; $s_2 = -\pi r^2$. Загальна площа всього тіла дорівнюватиме фізичній різниці між площами першого і другого тіл, а саме: $S = s_1 - s_2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Для визначення невідомої координати центра ваги заданої пластини використаємо перше рівняння виразу (1.134). Підставивши значення усіх відомих величин у це рівняння, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = \frac{-a \cdot \pi r^2}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{a r^2}{(R^2 - r^2)}.$$

Оскільки значення координати x_C від'ємне, а друга координата $y_C = 0$, то центр ваги пластини C розміщений на осі x зліва від точки C_1 .

1.11.5. Центри ваги деяких однорідних тіл

Визначимо далі координати центрів ваги деяких простих однорідних тіл.

Центр ваги дуги кола

Розглянемо дугу AB кола радіусом R , у якої центральний кут OAB дорівнює 2α (радіан) (рис. 1.64).

Покажемо осі координат x, y , початок яких розмістимо у точці O . Оскільки дуга має вісь симетрії Ox , то центр її ваги буде розміщений саме на цій осі ($y_C = 0$).

Залишається обчислити тільки координату x_C . Використаємо для обчислення цієї координати перше рівняння виразу (1.147), замінивши вагу Q на довжину лінії L :

$$x_C = \frac{1}{L} \int x dl. \quad (1.138)$$

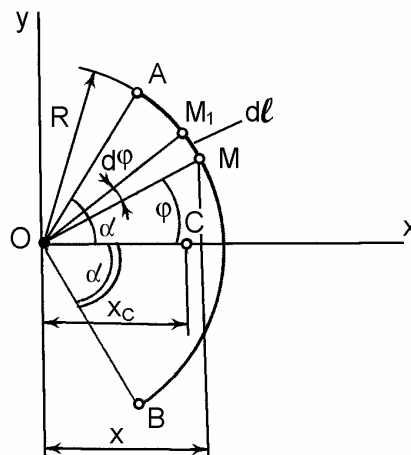


Рис. 1.64

Визначимо складові, які необхідно підставити у це рівняння. Для цього виділимо на дузі AB елемент MM_1 довжиною dl :

$$dl = R \cdot d\varphi. \quad (1.139)$$

Якщо кут φ визначає положення елемента MM_1 на дузі AB , то координата x цього елемента MM_1 дорівнюватиме:

$$x = R \cos \varphi. \quad (1.140)$$

Загальна довжина дуги AB

$$L = 2\alpha \cdot R. \quad (1.141)$$

Частина перша

Підставимо значення (1.140) і (1.141) у рівняння виразу (1.139). вважають, що інтеграл у чисельнику цього виразу має бути визначеним по всій довжині дуги:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{1}{L_A} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R}{2\alpha} \left\{ \sin \alpha - \left[\sin (-\alpha) \right] \right\} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.\end{aligned}$$

Таким чином, координата центра ваги дуги:

$$x_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.142)$$

Центр ваги трикутника

Уявимо довільний трикутник, вершини якого у прийнятій системі координат Ox відповідають точкам із координатами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ і $A_3(x_3, y_3)$ (рис. 1.65).

Якщо провести достатню кількість прямих, паралельних основі A_1A_3 , то вся площа трикутника складатиметься із смуг нескінченно малої ширини, тобто, ліній, центри ваги яких будуть розміщені посередині кожної смуги, а тому і центр ваги трикутника знаходитиметься на його медіані.

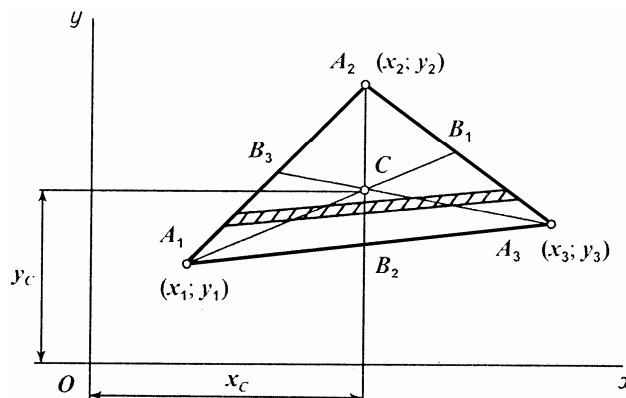


Рис. 1.65

А якщо провести лінії, паралельні іншій стороні трикутника, то і в цьому випадку центр ваги буде розміщений на відповідній медіані. Таким чином, цілком очевидно, що центр ваги трикутника C буде розташований у точці перетину його медіан.

Визначимо аналітично координати цієї точки. Із курсу аналітичної геометрії відомо, що точка перетину медіан трикутника у прийнятій системі координат визначається такими залежностями:

$$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad (1.143)$$

де x_1, x_2, \dots, y_3 – координати вершин трикутника.

Центр ваги сектора

Розглянемо коловий сектор OAB радіуса R , центральний кут якого дорівнює 2α (радіан) (рис. 1.66).

Центр ваги сектора розміщується на осі його симетрії, тобто на бісектрисі кута AOB .

Прийmemo її за вісь x і знайдемо на цій осі положення центра C .

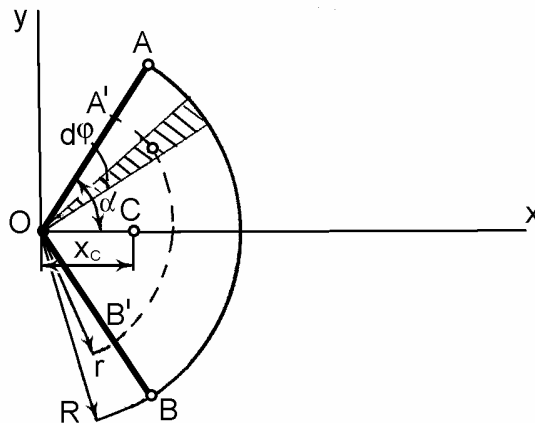


Рис. 1.66

Розіб'ємо площу сектора на нескінченно велику кількість елементарних секторів із центральними кутами $\Delta\varphi$. Розглядатимемо кожний сектор як трикутник з основою $R \cdot \Delta\varphi$ і висотою R .

Центр ваги кожного трикутника знаходиться на відстані $r = \frac{2}{3}R$ від центра сектора.

Таким чином, центри ваги всіх трикутників розташовані на дузі $A'B'$.

Отже, якщо спрямувати кут до нуля $\Delta\varphi \rightarrow 0$, то центри ваги утворять дугу $A'B'$, на якій розміщений центр ваги сектора, і тоді залишається тільки знайти центр ваги дуги $A'B'$.

Використаємо формулу, за якою визначається центр ваги дуги кола радіусом r :

$$x_C = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}, r = \frac{2}{3}R, x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.144)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які існують способи визначення координат центра ваги тіла?
2. Як визначити координати центра ваги дуги кола?
3. Як визначити координати центра ваги трикутника?
4. Як визначити координати центра ваги сектора?
5. Що таке метод симетрії і як ним користуються?
6. Що ви знаєте про методику застосування способу розбиття тіла на частки?
7. Як і в яких випадках використовують метод підвішування плоских тіл?
8. Як визначають координати центра ваги складних машин?
9. На перетині яких прямих ліній розміщений центр ваги трикутника?
10. Чому дорівнює відстань від центра ваги трикутника до вершини?

РОЗДІЛ II

КІНЕМАТИКА

2.1. Вступ. Кінематика матеріальної точки

2.1.1. Предмет кінематики

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають рух матеріальних об'єктів як моделей реальних тіл, як геометричних образів (матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, матеріальна система) з геометричної точки зору, без урахування причин, що викликають цей рух. Тобто, *вивчаються геометричні властивості механічного руху* незалежно від фізичних факторів, що спричиняють ці рухи. Такий підхід не потребує врахування інерційних і силових характеристик: маси і моменту інерції, сили і моменту сили.

Кінематика спирається на основні положення геометрії, які визначають просторові співвідношення, необхідні під час вивчення механічного руху. На відміну від геометрії тут береться до уваги ще і час руху, оскільки *механічний рух відбувається у просторі і часі* як об'єктивно реальних формах існування матерії. Отже, вивчаються залежності між просторово-часовими характеристиками механічного руху.

Рух є формою існування матеріального світу, а механічний рух, найпростіша форма руху матерії, – одним із наслідків взаємодії матеріальних тіл.

Під механічним рухом розуміють зміну положення тіл у просторі протягом часу по відношенню до іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Тільки на початку ХХ ст. створюється нова система просторово-часових відношень, яка базується на постулатах теорії відносності Лоренца, Пуанкаре, Ейнштейна і встановлює більш точний взаємозв'язок матеріальних об'єктів, що рухаються, з простором і часом.

Вперше чітко сформульовано ідею суто геометричного дослідження руху твердого тіла у творі Л. Ейлера «Теорія руху твердого тіла» (1775 р.). Дещо пізніше Г. Монж і Л. Карно вказують на необхідність виділити із механіки в окремий розділ вчення про геометричний рух у зв'язку з дослідженням кінематики машин. Цими ідеями скористувався А. Ампер, коли у праці «Дослід по філософії наук» (1834) запропонував термін «Кінематика», а вже в 1837 р. Ж. Понселе вперше створив курс кінематики і дванадцять років читав його у Паризькому університеті.

Згідно з основами класичної механіки, сформульованими І. Ньютоном, *простір*, в якому відбувається рух геометричних моделей у

Частина перша

формі перелічених матеріальних об'єктів, *вважається абсолютним*, метричні особливості його незалежні від руху матерії у різних точках і напрямках (*однорідність і ізотропність простору*).

За цими уявленнями простір і час, у якому відбувається рух, як би формально відокремлений від властивостей матерії. Метричні властивості цього простору повністю описуються системою аксіом Евкліда, де, наприклад, відстані між двома точками простору завжди визначено у вигляді довжини відрізка прямої.

Такий *простір* сприймається як *тривимірний*, тобто, у відповідній системі відліку *кожній точці* абсолютного простору відповідають *три координати*. Одиницею вимірювання простору у Міжнародній системі одиниць СІ є *метр (м)*.

Властивості *абсолютного часу* – *однорідність і універсальність*. Час однаково спливає у всіх точках простору, на всіх тілах. Вимір часу базується на відповідності між послідовними моментами часу і множиною дійсних чисел. Тому можна довільно вибрати початок відліку часу і вимірювати інтервали між окремими моментами часу. Одиницею вимірювання часу є *секунда (с)*.

За абсолютним простором і часом вводиться поняття *системи відліку*. Це сукупність системи координат, незмінно пов'язаної з деяким тілом відліку і пристроєм із періодичним процесом для вимірювання часу (годинник). Ця система може бути як рухомою, так і умовно нерухомою.

Хоча теорія відносності має інші уявлення про простір і час, ніж класична механіка, проте, для випадків звичайних рухів тривимірний евклідів простір і універсальний час є досить точним відображенням реального часу і простору.

У множині систем відліку, в яких можна вважати простір і час як абсолютні, вибираються так звані *інерціальні* системи відліку, в яких ізольована матеріальна точка може необмежено довго перебувати у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху під дією системи зрівноважених сил.

Якщо деяка система відліку є інерціальною із заданим ступенем точності, то можна вказати нескінченну кількість інерціальних систем відліку, які рухаються відносно вибраної системи поступально, рівномірно та прямолінійно.

Під час розв'язування задач небесної механіки, обчислення траєкторій супутників приймається *геліоцентрична система відліку* з початком у центрі мас Сонячної системи і осями координат, спрямованими на «нерухомі» зірки. У разі розв'язування багатьох технічних задач за інерціальну приймають *геоцентричну систему* відліку, яка пов'язана з центром Землі.

Рух тіла або закон руху тіла відносно вибраної системи відліку

вважається відомим, якщо можна визначити положення цього тіла відносно даної системи у будь-який момент часу. При цьому розрізняють момент часу і проміжок часу. **Проміжок часу** – це перебіг часу між двома фізичними явищами. **Момент часу** – це границя між двома суміжними проміжками часу.

Положення моделі відносно даної системи відліку визначається відповідними параметрами, а її **рух** – **кінематичними рівняннями**, що виражають зміну цих параметрів як функцій часу.

Основна задача кінематики полягає у тому, щоб за відомими кінематичними рівняннями руху, що визначають закон руху даного геометричного образу, **знайти кінематичні характеристики цього руху**: траєкторії різних точок, їхні лінійні швидкості і прискорення; кутові швидкості і кутові прискорення тіла.

Очевидно, що рух геометричного образу щодо прийнятої системи відліку буде відомим, якщо є відомим рух кожної точки цього образу відносно цієї самої системи відліку. Тому вивченню руху будь-якого геометричного образу передуює вивчення руху однієї його точки, зумовлюючи поділення кінематики на два розділи: кінематику точки і кінематику твердого тіла.

2.1.2. Основні положення кінематики точки

Обмежимося спочатку вивченням руху точки відносно нерухомої системи координат. **Законом руху** матеріальної точки називають спосіб її переходу з одного положення у просторі і часі в інше положення. Введемо поняття переміщення і руху точки.

Під **переміщенням точки** розуміють перехід із одного положення у просторі в друге за визначений елементарний проміжок часу. Тобто, переміщення точки повністю визначається початковим і кінцевим положеннями і елементарним проміжком часу Δt .

Під **рухом точки** розуміють перехід із одного (початкового) положення у просторі в друге (кінцеве) деяким способом у певній залежності від часу.

Залежність між положенням точки, що рухається у просторі, і часом визначає **рівняння руху точки**. Основними кінематичними характеристиками руху точки є її **положення, швидкість і прискорення**.

Основною задачею кінематики точки є встановлення способу задання руху точки по відношенню до вибраної системи відліку і, виходячи з цього, знаходження методів визначення її кінематичних характеристик.

Задати рух кінематично або задати закон руху точки означає вказати такий спосіб, який дає можливість визначити положення цієї точки

відносно даної системи відліку у будь-який момент часу.

2.1.3. Способи задання руху точки.

Векторний спосіб

У відповідності до основної задачі кінематики точки розглянемо способи задання руху точки у просторі: векторний, координатний і натуральний.

Векторний спосіб знайшов широке застосування у теоретичних дослідженнях.

Розглянемо суть цього способу.

Допустимо, що довільна матеріальна точка M рухається у просторі за деякою кривою AB , яку називають траєкторією (рис. 2.1).

Візьмемо у просторі довільну нерухому точку O і проведемо до рухомої точки M радіус-вектор \vec{r} , який однозначно визначає положення точки.

Під час руху точки M її радіус-вектор \vec{r} змінюється за величиною (модулем) та напрямком, тобто, кожному моменту часу відповідає свій радіус-вектор. Моменту часу t_1 відповідає радіус-вектор \vec{r}_1 точки M_1 .

Таким чином, якщо задається закон зміни радіуса-вектора \vec{r} рухомої точки M у функції часу, то вважається заданим закон руху матеріальної точки **векторним способом**:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

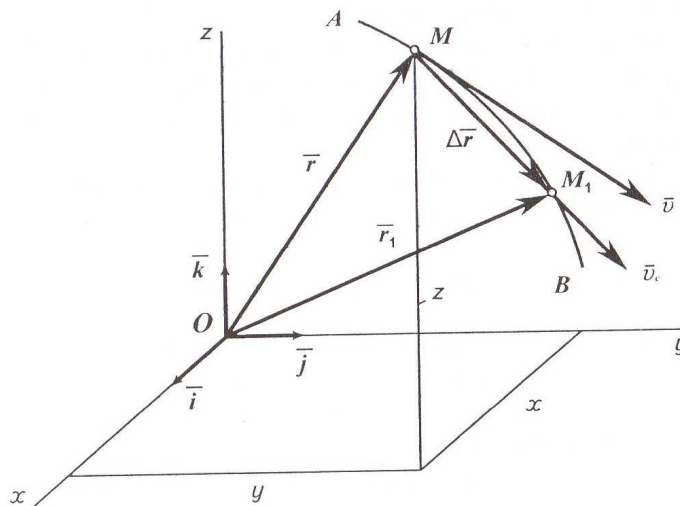


Рис. 2.1

Співвідношення (2.1) називається **кінематичним рівнянням руху** матеріальної точки у векторній формі і визначає положення точки у просторі в будь-який момент часу. Одночасно цей вираз можна розглядати

як *рівняння траєкторії* точки або *рівняння просторової кривої* у векторній формі. Функція $\vec{r}(t)$ повинна бути монотонною, неперервною і, принаймні, двічі диференційованою функцією часу.

Траєкторія точки і годограф векторної функції

Траєкторією точки називається геометричне місце положень точки під час руху в заданій системі відліку.

Введемо поняття годографа векторної функції $\vec{r}(t)$ (2.1) по скалярному аргументу t (час). Це крива, яка викреслюється кінцем радіуса-вектора \vec{r} у разі неперервного змінення аргументу t за умови, якщо початки цих векторів поєднані у фіксованій нерухомій точці O (рис. 2.1).

Тобто, годограф описують кінці векторів $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, які відповідають конкретним положенням точки M у процесі руху. Це стосується не тільки радіусів-векторів, а й векторів швидкостей, прискорень тощо. У такому разі годограф збігається з траєкторією точки AB . Щоб знайти рівняння годографа в параметричному вигляді, досить знайти проєкції радіуса-вектора \vec{r} на ортогональні осі координат $Oxyz$ (рис. 2.1), розклавши його за ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}. \quad (2.2)$$

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (2.3)$$

Рівності (2.3) є скалярними рівняннями годографа векторної функції $\vec{r}(t)$ в параметричній формі.

Як відомо із векторної алгебри, похідна $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ від векторної функції $\vec{r}(t)$ є вектором, напрямленим по дотичній до годографа. За фізичним змістом *похідна* векторної функції $\vec{r}(t)$ визначає змінення вектора \vec{r} за часом і напрямлена *по дотичній до годографа* цієї функції.

Швидкість точки

Швидкість точки – це фізична векторна величина, яка характеризує міру змінення з часом радіуса-вектора точки у просторі за модулем і напрямом.

Одиницею швидкості у Міжнародній системі одиниць СІ є $[м/с]$.

Частина перша

Для визначення цієї кінематичної характеристики розглянемо рух матеріальної точки M за довільною траєкторією (рис. 2.1).

За деякий елементарний проміжок часу Δt точка переміщується із положення M у положення M_1 , яке характеризується радіусом-вектором \vec{r}_1 . Для того, щоб визначити **переміщення** точки M за проміжок часу Δt , з'єднаємо точки M і M_1 прямою і отримаємо вектор $\Delta\vec{r}$, який є геометричною різницею між векторами \vec{r}_1 і \vec{r} . Тоді середня наближена швидкість точки M за елементарний проміжок часу Δt (згідно з визначенням):

$$\bar{v}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

За напрямком вектор середньої швидкості \bar{v}_c збігається з вектором $\Delta\vec{r}$, тобто він розміщений вздовж хорди MM_1 і спрямований у бік руху точки M , що відповідає зростанню часу t .

Якщо перейти до границі $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо дійсну швидкість точки M у будь-який момент часу t :

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.4)$$

*За векторного способу задання руху **швидкість** матеріальної точки дорівнює **першій похідній** від радіуса-вектора за часом у заданій системі відліку.*

Якщо наближати точку M_1 до M , коли $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо дійсний напрямок вектора швидкості \bar{v} точки – по дотичній до траєкторії (годографа) і спрямований у бік її руху.

Прискорення точки

*Прискорення точки в інерціальній системі відліку – це векторна величина, яка характеризує **міру змінення** модуля і напрямку **вектора швидкості** з часом у заданій системі відліку.*

Одиницею прискорення точки у системі СІ є 1 м/с^2 .

Визначимо прискорення матеріальної точки M . Розглянемо рух точки за довільною траєкторією AB (рис. 2.2).

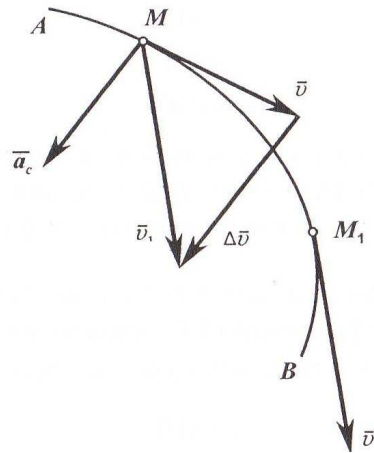


Рис. 2.2

У положенні M швидкість точки була \bar{v} , а у близькому положенні M_1 – \bar{v}_1 .

Знайдемо приріст швидкості за даний проміжок часу. Для цього перенесемо паралельно вектор швидкості \bar{v}_1 у положення M .

З'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 прямою і отримаємо вектор $\Delta\bar{v}$. Відношення приросту $\Delta\bar{v}$ до проміжку часу Δt є середнім прискоренням рухомої матеріальної точки M :

$$\bar{a}_c = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Для отримання дійсного прискорення матеріальної точки в даний момент часу необхідно розглянути нескінченно малий проміжок часу, а для виразу (2.5) здійснити перехід до границі $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (2.6)$$

Підставимо у вираз (2.6) значення швидкості точки (2.4)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \quad (2.7)$$

За векторного способу задання руху матеріальної точки прискорення дорівнює першій похідній від вектора швидкості за часом або другій похідній від радіуса-вектора рухомої точки у заданій системі відліку.

Оскільки прискорення дорівнює похідній за часом від швидкості, то вектор прискорення \bar{a} матеріальної точки спрямований по дотичній до графіка векторної функції $\bar{v}(t)$.

2.1.4. Координатний спосіб задання руху точки

Цей спосіб задання руху матеріальної точки широко використовують під час аналітичного розв'язування задач у технічних розрахунках.

Якщо вибрати у просторі нерухому ортогональну систему декартових координат $Oxyz$, то під час руху точки M всі три її координати будуть змінюватися з часом (рис. 2.1).

Необхідно задати координати як функції часу, однозначні, неперервні і, принаймні, двічі диференційовані:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Ці параметричні рівняння, в яких роль параметра відіграє скалярний аргумент часу t , є **кінематичними рівняннями руху** точки в ортогональній системі декартових координат (або **законом руху** точки у координатній формі) і визначають суть цього способу.

Одночасно ці рівняння визначають зміну з часом просторового положення точки і є рівняннями траєкторії точки у параметричній формі.

Для одержання рівняння траєкторії в явній формі треба виключити з цих рівнянь час t .

Слід зауважити, якщо рух матеріальної точки здійснюється в одній площині xOy , то рівняння (2.8) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Якщо матеріальна точка здійснює прямолінійний рух, то цей рух буде описаний одним рівнянням:

$$x = x(t).\tag{2.10}$$

Зв'язок між векторним і координатним способами має вигляд (2.2):

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}.$$

Крім декартової системи в механіці використовують сферичну, циліндричну, полярну і інші системи координат.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки за такого способу задання її руху.

Траєкторія точки

Рівняння (2.8) і (2.9) є рівняннями траєкторії матеріальної точки у

параметричній формі, де роль параметра відіграє час t .

Для знаходження **рівняння траєкторії** у координатній формі необхідно **виключити** з рівнянь руху **параметр часу t** . Це можна зробити декількома способами: підстановкою або піднесенням обох частин рівнянь до квадрату і почленним додаванням (якщо рівняння містять тригонометричні функції).

Наприклад, розв'язуючи останнє рівняння системи (2.8) відносно параметра часу t і підставляючи це співвідношення у два перші рівняння, дістанемо:

$$t = \varphi(z); \Rightarrow x = x[\varphi(z)]; \quad y = y[\varphi(z)]. \quad (2.11)$$

Останні два рівняння визначають траєкторію точки як лінію перетину двох циліндричних поверхонь, що проектують траєкторію на координатні площини xOz і yOz .

Приклад 2.1

Рух матеріальної точки здійснюється у площині xOy і заданий рівняннями:

$$x = 2t \text{ м}, \quad y = 12t^2 \text{ м}.$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки.

Розв'язання

Траєкторію руху матеріальної точки можна визначити одним із двох способів:

а) задати різні моменти часу і зобразити координати точки x, y на графіку;

б) виключити час t із заданих рівнянь руху.

Так, з першого рівняння визначаємо час $t = \frac{x}{2}$. і підставляємо у друге рівняння:

$$y = \frac{12x^2}{4} = 3x^2.$$

Таким чином, траєкторією руху точки є парабола з віссю симетрії Oy і з вершиною на початку координат.

Приклад 2.2

Рух матеріальної точки заданий рівняннями:

$$x = 3 \sin t \text{ см}, \quad y = 3 \cos t \text{ см}, \quad \text{де } t - \text{ в секундах.}$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки.

Розв'язання

Рівняння траєкторії руху можна визначити, якщо вилучити час t з

Частина перша

рівнянь руху.

Перетворимо рівняння руху матеріальної точки:

$$\sin t = \frac{x}{3}, \quad \cos t = \frac{y}{3}.$$

Піднесемо до квадрату і додамо почленно ліві і праві частини цих виразів:

$$1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2}, \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2.$$

Отже, траєкторією руху матеріальної точки є коло радіусом $R=3$ см з центром у початку координат.

Швидкість точки

Для визначення швидкості матеріальної точки за координатного способу задання скористаємось основними положеннями векторного способу.

З цією метою підставимо вираз (2.2) у вираз (2.4):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right]}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (2.12)$$

Розкладаючи вектор швидкості \bar{v} по ортах прийнятої ортогональної системи декартових координат $Oxyz$:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}, \quad (2.13)$$

і порівнюючи вирази (2.12) і (2.13), отримуємо:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (2.14)$$

Проекції вектора швидкості матеріальної точки на осі ортогональної системи декартових координат $Oxyz$ дорівнюють першим похідним від функцій відповідних координат за часом.

Модуль вектора швидкості \bar{v} матеріальної точки визначається геометричною сумою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.15)$$

Напрямок вектора швидкості \bar{v} визначається напрямними косинусами кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат. Напрямні косинуси – це проєкції ортів на відповідні осі координат.

$$\cos(\bar{i}, \bar{v}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\bar{j}, \bar{v}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\bar{k}, \bar{v}) = \frac{v_z}{v}. \quad (2.16)$$

Рівності (2.14), (2.15), (2.16) визначають вектор швидкості точки за координатним способом опису її руху.

Прискорення точки

Для визначення прискорення матеріальної точки за координатного способу поведимося аналогічно, як для швидкості руху. Значення радіуса-вектора \bar{r} (2.2) підставимо у вираз (2.7) і визначимо другу похідну за часом:

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 [x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}]}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}. \quad (2.17)$$

Вектор прискорення \bar{a} можна розкласти по ортах ортогональної системи координат $Oxyz$:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (2.18)$$

Якщо порівняти вирази (2.17) і (2.18), то можна написати такі співвідношення:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (2.19)$$

Проекції вектора прискорення матеріальної точки на осі ортогональної системи декартових координат $Oxyz$ дорівнюють другим похідним функцій відповідних координат рухомої точки або першим похідним проєкцій швидкостей за часом.

Модуль вектора прискорення матеріальної точки визначається геометричною сумою проєкцій:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.20)$$

Напрямок вектора прискорення \bar{a} визначається напрямними косинусами:

$$\cos(\hat{i}, \hat{a}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\hat{j}, \hat{a}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\hat{k}, \hat{a}) = \frac{a_z}{a}. \quad (2.21)$$

Таким чином, за координатного способу задання руху матеріальної точки вектор прискорення \hat{a} визначається за допомогою рівностей (2.19), (2.20) і (2.21).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає кінематика? Які незалежні змінні в кінематиці?
2. У чому полягають основні задачі кінематики?
3. Які існують способи задання руху точки?
4. Що таке закон руху матеріальної точки?
5. Яка залежність між радіусом-вектором точки і її координатами? Що таке годограф векторної функції?
6. Як спрямовується вектор швидкості точки?
7. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки за векторного способу задання руху?
8. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки за координатного способу задання руху?
9. Як визначити рівняння годографа?
10. Як визначити рівняння траєкторії точки за координатного способу?

2.1.5. Натуральний спосіб задання руху точки

Натуральний спосіб застосовують, коли попередньо відома траєкторія точки. Тоді положення точки у просторі визначиться заданням таких елементів (рис. 2.3):

– просторова або плоска крива AB , яка може бути задана рівнянням, графічно чи з вказівкою, наприклад: точка рухається вздовж кола радіусом R ;

– початок відліку O дугової координати s на траєкторії руху з вказівкою напрямів додатних (+) і від'ємних (–) значень. Крім того, приймають початковий момент відліку часу $t_0 = 0$;

– закон руху матеріальної точки вздовж траєкторії як функцію дугової координати від часу:

$$s = s(t). \quad (2.22)$$

Функція закону руху має бути однозначною, неперервною і, принаймні, двічі диференційованою.

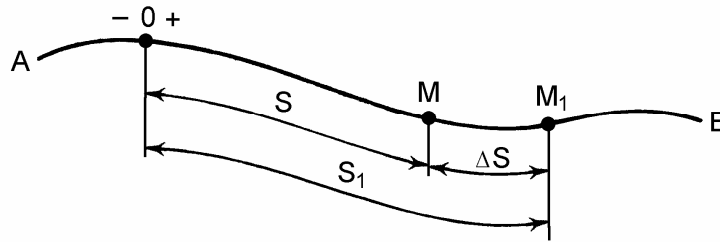


Рис. 2.3

Співвідношення (2.22) називається **кінематичним рівнянням** руху матеріальної точки **у натуральній формі** (або законом зміни дугової координати).

Дугова координата s у рівнянні (2.22) визначає положення точки на траєкторії точки.

Дугову координату не слід плутати з довжиною шляху, який проходить точка за певний проміжок часу: напрямок шляху може бути як у бік відліку додатних, так і у бік відліку від'ємних дугових координат. Шлях є монотонно зростаючою функцією часу.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки за натурального способу задання її руху.

Швидкість точки

Розглянемо схему руху матеріальної точки M (рис. 2.3). Положення точки M відповідає моменту часу t , а положення M_1 – моменту часу t_1 . Тоді елементарному проміжку часу $t_1 - t = \Delta t$ відповідає елементарна зміна дугової координати

$$s_1 - s = \Delta s.$$

Звідси можна визначити середню швидкість точки за елементарний проміжок часу Δt :

$$v_c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Дійсну швидкість точки в момент часу t можна визначити, якщо перейти до границі, коли елементарний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (2.23)$$

Модуль швидкості матеріальної точки за натурального способу задання її руху дорівнює **першій похідній** за часом від закону руху точки вздовж траєкторії.

Частина перша

Напрямок вектора швидкості – по дотичній до траєкторії матеріальної точки.

Похідна за часом визначає чисельну алгебраїчну величину швидкості: якщо модуль швидкості додатний ($v = \dot{s} > 0$), то вектор швидкості спрямований у додатному напрямі відліку дугової координати, а якщо $v = \dot{s} < 0$, то – протилежно.

Приклад 2.3

Закон руху матеріальної точки заданий рівнянням $s = 4t^2 + t$ м. Визначити переміщення і швидкість руху точки в момент часу $t_1 = 1$ с.

Розв'язання

Визначимо спочатку положення точки на траєкторії руху якщо $t_1 = 1$ с. Відлік часу почався з початком моменту руху $s(0) = 0$. Підставимо у рівняння руху значення заданого моменту часу:

$$s = 4 \cdot 1^2 + 1 = 5 \text{ м.}$$

Для визначення швидкості руху точки візьмемо похідну за часом від рівняння руху:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(4t^2 + t)}{dt} = 8t + 1 \Rightarrow v(1) = 8 \cdot 1 + 1 = 9 \text{ м/с.}$$

2.1.6. Зв'язок між координатним і натуральним способами

Для переходу від одного способу завдання руху матеріальної точки до іншого необхідно знайти залежності між основними параметрами цих рухів.

На підставі виразу (2.22) можна записати

$$ds = v \cdot dt \Rightarrow s = \int_0^t v dt. \quad (2.24)$$

Оскільки за координатного способу завдання руху матеріальної точки її швидкість визначається згідно з виразом (2.14):

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

то, підставляючи його у попередній вираз, остаточно знайдемо залежність між дуговою координатою і проекціями швидкості на декартові осі координат:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (2.25)$$

2.1.7. Натуральний тригранник і натуральні осі координат

Наведемо деякі відомості з диференціальної геометрії, які необхідні для подальшого визначення кінематичних характеристик руху матеріальної точки натуральним способом.

Побудуємо рухомий координатний базис $M\tau nb$ – натуральний тригранник. Припустимо, що крива AB є траєкторією точки M (рис. 2.4).

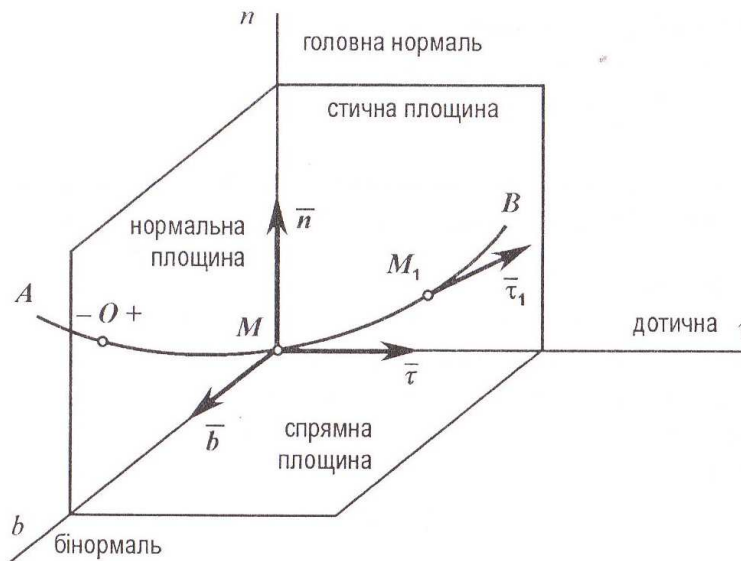


Рис. 2.4

Крізь довільну точку M і нескінченно наближену до неї точку M_1 проведемо дотичні до траєкторії. Орти, які відповідні цим дотичним, позначимо через $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$. Потім перенесемо вектор $\bar{\tau}_1$ паралельно самому собі у точку M і проведемо через вектори $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$ площину.

Граничне положення площини, проведеної крізь дотичні двох близьких точок, якщо проміжок часу прямує до нуля, а точка M_1 наближається до точки M , називається стичною площиною.

Крізь точку M проведемо площину, перпендикулярну до дотичної τ , яка називається **нормальною площиною**.

Лінія перетину нормальної і стичної площин визначає головну нормаль кривої.

Отже, **головна нормаль** – це єдина з нескінченної множини нормалей до кривої у точці M , яка розташована у стичній площині. Площина, що проходить через точку M перпендикулярно до головної нормалі, називається **спрямною**.

Частина перша

Лінія перетину спрямної і нормальної площин визначає бінормаль кривої.

Очевидно, що бінормаль перпендикулярна до головної нормалі.

Таким чином, у кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями, за якими можна провести **дотичну** у бік зростання дугової координати (орт $\bar{\tau}$), **головну нормаль** – у бік угнутості кривої (орт \bar{n}), **бінормаль** з відповідним ортом \bar{b} , спрямовану так, що орти $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} утворюють праву ортогональну трійку векторів.

*Ортогональна система координатних осей з ортами $\bar{\tau}$, \bar{n} і \bar{b} , з початком у рухомій точці M називається **натуральним координатним базисом** або натуральним рухомим тригранником $M\tau n b$.*

Зауважимо, що плоска крива розміщена у стичній площині, а головна нормаль є нормаллю до кривої у цій площині.

На відміну від інших систем відліку, натуральний трієдр рухається разом із точкою і змінює свою орієнтацію у просторі відповідно до характеру траєкторії.

2.1.8. Кривина кривої

Як можна побачити далі, прискорення точки у криволінійному русі залежить від кривини траєкторії, тому розглянемо цю характеристику кривої.

На рис. 2.5 зображена траєкторія AB точки і два близькі положення точок M і M_1 .

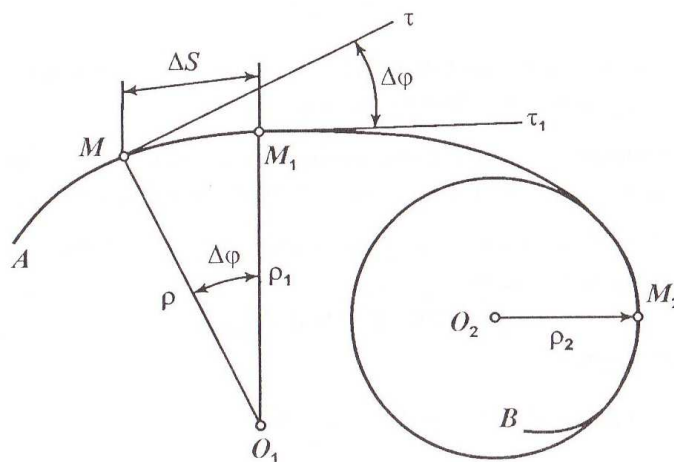


Рис. 2.5

Проведемо крізь точки M і M_1 дотичні τ і τ_1 . Елементарна відстань між цими точками вдовж траєкторії дорівнює Δs .

Кут $\Delta\varphi$ між дотичними у двох близьких точках називається кутом суміжності.

Кривиною кривої k у даній точці M називається границя відношення кута суміжності до дуги Δs , яка його стягує, якщо ця дуга прямує до нуля.

Відношення $\Delta\varphi$ до Δs є середньою кривиною:

$$k_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

а зведення k_c до границі дає дійсне значення кривини кривої:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (2.26)$$

Розглянемо коло радіусом R . Зробимо аналогічну геометричну побудову.

Виразимо Δs за відомою формулою $\Delta s = R \cdot \Delta\varphi$, або $ds = R \cdot d\varphi$ і підставимо у вираз (2.26):

$$k = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{R \cdot \Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} \Rightarrow k = \frac{1}{R}. \quad (2.27)$$

Коло є кривою сталої кривини, значення якої дорівнює оберненій величині радіуса.

Для визначення кривини довільної кривої в даній точці досить **підібрати коло кривини**, елемент дуги якого краще за все апроксимує ділянку кривої у даній точці.

Радіус кола кривини є радіусом кривини кривої, а центр кола – центром кривини.

На рис. 2.5 позначені такі геометричні характеристики кривої:

ρ_2 – радіус кривини кривої у точці M_2 ; O_2 – центр кривини;

$k_2 = \frac{1}{\rho_2}$ – кривина кривої у точці M_2 .

2.1.9. Прискорення точки в натуральних осях координат

В ортогональній системі декартових координат ми визначали прискорення точки у проєкціях на координатні осі x , y , z . В натуральних

Частина перша

осях координат визначимо проекції вектора прискорення на дотичну τ і головну нормаль n .

Але спочатку доведемо, що проекція вектора прискорення на бінормаль b дорівнює нулю. Для цього звернемося до рис. 2.6. Швидкості близьких точок M і M_1 – вектори \bar{v} і \bar{v}_1 напрямлені по дотичних $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$ у цих точках.

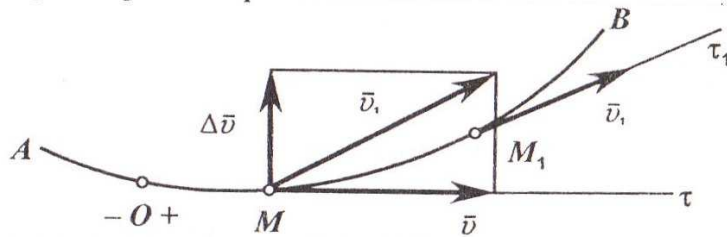


Рис. 2.6

Перенесемо паралельно вектор \bar{v}_1 у точку M і з'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 .

Побудувавши паралелограм, з'ясуємо, що вектор $\Delta\bar{v}$ як різниця векторів швидкостей, що формує вектор прискорення, розміщений у стичній площині.

Паралельно $\Delta\bar{v}$ спрямований і вектор середнього прискорення \bar{a}_c , а вектор дійсного прискорення \bar{a} в даний момент часу дорівнює границі:

$$\bar{a} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M_1 \rightarrow M}} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t},$$

і також буде розміщений у стичній площині. Це означає, що проекція вектора прискорення на бінормаль дорівнює нулю.

Знаючи, що вектор прискорення має тільки дотичну і нормальну складові, визначимо останні.

Для цього розглянемо схему, представлену рис. 2.7, де:

$M\tau$ – дотична до траєкторії; Mn – головна нормаль; Mb – бінормаль; C – центр кривини траєкторії; ρ – радіус кривини траєкторії.

Припустимо, що в момент часу t точка M має швидкість \bar{v} , а в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ швидкість буде \bar{v}_1 .

Тоді прискорення точки:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t}.$$

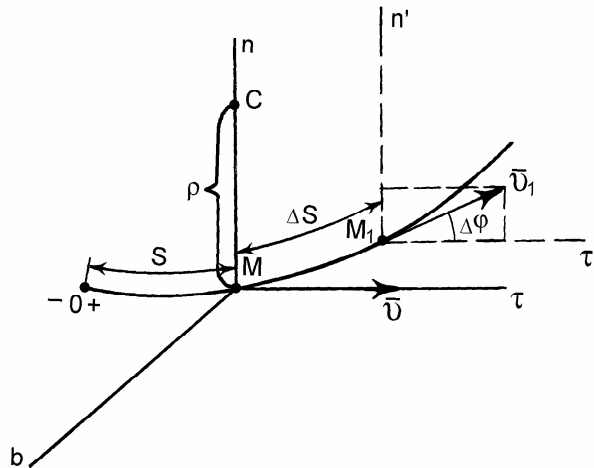


Рис. 2.7

Переходимо до проєкцій прискорення матеріальної точки на натуральні осі координат τ і n :

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1\tau} - v_{\tau}}{\Delta t}, \quad (2.28)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}. \quad (2.29)$$

Враховуючи, що проєкції векторів на паралельні осі однакові, проведемо через точку M_1 осі $M_1\tau'$ і M_1n' , паралельні відповідним осям $M\tau$ і Mn , і позначимо кут суміжності $\Delta\varphi$.

Знайдемо проєкції векторів \bar{v} і \bar{v}_1 на осі $M\tau$ і Mn :

$$v_{\tau} = v, \quad v_n = 0, \quad v_{1\tau} = v_1 \cos \Delta\varphi, \quad v_{1n} = v_1 \sin \Delta\varphi.$$

Підставимо значення проєкцій у вирази (2.28) і (2.29):

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad (2.30)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2.31)$$

Якщо проміжок часу Δt прямує до нуля, то

$$M_1 \rightarrow M, \quad \Delta\varphi \rightarrow 0, \quad \Delta s \rightarrow 0, \quad v_1 \rightarrow v, \quad \cos \Delta\varphi \rightarrow 1.$$

Тоді за рівнянням (2.30) дотичне прискорення дорівнює:

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (2.32)$$

Дотичне прискорення матеріальної точки характеризує змінення в одиницю часу вектора швидкості за величиною і дорівнює **першій похідній від функції швидкості** або другій похідній за часом від дугової координати.

Визначимо нормальне прискорення a_n . Перетворимо вираз для нормального прискорення (2.31), помноживши чисельник і знаменник на добуток $\Delta\varphi \cdot \Delta s$:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right). \quad (2.33)$$

Перепишемо вираз (2.33):

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Якщо $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{v_1 \rightarrow v} v_1 = v, \quad \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1,$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Підставимо значення цих границь у вираз для нормального прискорення:

$$a_n = v \cdot 1 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.34)$$

Нормальне (доцентрове) прискорення матеріальної точки характеризує змінення в одиницю часу вектора швидкості за напрямком і дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривини траєкторії у даній точці.

Вектор нормального прискорення $\bar{a}_n = a_n \cdot \bar{n}$ спрямований вздовж нормалі до центра кривини кривої в даній точці. За знаком нормальне прискорення a_n додатне, тому що містить у чисельнику вираз v^2 . Вектор дотичного прискорення $\bar{a}_{\tau} = a_{\tau} \cdot \bar{\tau}$ направлений по дотичній до кривої і за знаком може бути як додатним, так і від'ємним.

Модуль повного прискорення \bar{a} може бути визначений геометричною сумою \bar{a}_{τ} та \bar{a}_n . Він є діагоналлю прямокутника, побудованого на вказаних векторах, як на сторонах (рис. 2.8).

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (2.35)$$

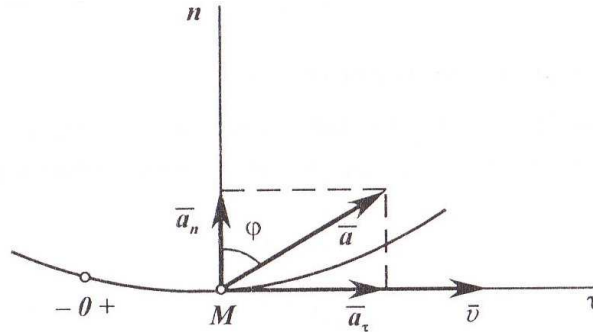


Рис. 2.8

Напрямок вектора прискорення визначається кутом φ між вектором \bar{a} і нормаллю n :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Вектор прискорення \bar{a} може бути розкладений по ортах натурального триєдра a_τ і a_n :

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n}, \quad (2.36)$$

$$\bar{a}_\tau = \bar{\tau} \cdot a_\tau, \quad \bar{a}_n = \bar{n} \cdot a_n, \quad \bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (2.37)$$

2.1.10. Окремі випадки руху матеріальної точки. Прямолінійний рух

Радіус кривини траєкторії, якою є пряма лінія, прямує до нескінченності: $\rho \rightarrow \infty$. Тому,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \Rightarrow a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Таким чином, в умовах прямолінійного руху вектор швидкості \bar{v} матеріальної точки змінюється лише чисельно, за модулем (нормальна проекція прискорення дорівнює нулю).

Дотичне прискорення a_τ характеризує зміну вектора швидкості за модулем.

А якщо цей рух є ще і рівномірним, $\bar{v} = \text{const}$, то прискорення матеріальної точки дорівнює нулю:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0, \quad a = 0.$$

Рівномірний криволінійний рух

У цьому випадку модуль швидкості сталий $v = const$, а радіус кривини траєкторії є кінцевою величиною $\rho \neq \infty$. Визначимо проєкції прискорення \bar{a} руху матеріальної точки на натуральні осі:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = a.$$

Таким чином, модуль повного прискорення \bar{a} матеріальної точки в цьому випадку дорівнює нормальному прискоренню a_n . Вектор нормального (в даному випадку повного) прискорення \bar{a} напрямлений вздовж нормалі \bar{n} до траєкторії. Оскільки прискорення \bar{a} з'являється тільки за рахунок зміни напрямку вектора швидкості \bar{v} , то звідси випливає наступна інформація:

Нормальне прискорення a_n характеризує змінення вектора швидкості за напрямом.

Рівнозмінний криволінійний рух

У цьому випадку рух точки криволінійний, але прискорення a_τ є сталою величиною. Цей випадок носить назву рівнозмінного руху.

Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного руху матеріальної точки. Оскільки $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, то звідси є можливість визначити швидкість руху точки:

$$dv = a_\tau dt.$$

Швидкість \bar{v} перебуває тут під знаком диференціала, а тому візьмемо визначений інтеграл:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_\tau dt \Rightarrow v - v_0 = a_\tau t \Rightarrow v = v_0 + a_\tau t. \quad (2.38)$$

Використаємо далі вираз: $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt$.

Замість v підставимо в останній вираз отримане значення (2.38):

$$ds = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Як і у попередньому випадку знайдемо переміщення s , взявши визначений інтеграл від лівої і правої частин виразу.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt, \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \quad (2.39)$$

Таким чином під час рівнозмінного руху матеріальної точки її швидкість і переміщення визначаються за допомогою знайдених виразів (2.38), (2.39).

Слід зауважити, що знак у правих частинах цих формул (перед a_τ) визначає характер рівнозмінного руху. Якщо знак додатний, то рух точки рівноприскорений, а якщо від'ємний, то – рівносповільнений.

Приклад 2.4

Палець кривошипу дизеля рухається відповідно до заданих параметрично рівнянь:

$$\begin{aligned} x &= b \sin \omega t, \\ y &= b \cos \omega t, \end{aligned}$$

де x і y – в метрах; t – в секундах; b і ω – сталі величини.

Визначити рівняння траєкторії, швидкість і прискорення пальця.

Розв'язання

Для визначення рівняння траєкторії пальця кривошипа треба виключити з заданих рівнянь руху параметр часу t . Спочатку визначимо із заданих рівнянь тригонометричні функції:

$$\sin \omega t = \frac{x}{b}, \quad \cos \omega t = \frac{y}{b}.$$

Оскільки тригонометричні функції є функціями одного аргументу, то піднесемо до квадрату ліві та праві частини цих виразів і почленно додамо. Ліва частина останнього виразу дорівнює одиниці, оскільки $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, тому:

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Таким чином, з останнього виразу легко побачити, що траєкторією пальця кривошипа є коло радіуса b з центром у початку координат.

Для визначення швидкості знайдемо спочатку проекції швидкості пальця на координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\omega \cdot \cos \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -b\omega \cdot \sin \omega t.$$

Частина перша

Модуль швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(b\omega \cdot \cos \omega t)^2 + (-b\omega \cdot \sin \omega t)^2} = b\omega.$$

З останнього виразу легко побачити, що палець рухається зі сталою швидкістю, яка дорівнює $b\omega$.

Знайдемо прискорення пальця кривошипну через проекції на осі координат. Для цього візьмемо другі похідні за часом від заданих координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -b\omega^2 \cdot \sin \omega t, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-b\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2 + (-b\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2} = b\omega^2.$$

Оскільки палець кривошипну рухається по колу, тобто, за криволінійною траєкторією руху сталого радіуса b , то його прискорення можна визначити за натуральним способом задання руху матеріальної точки. Дотичне прискорення пальця кривошипну буде дорівнювати нулю, оскільки швидкість $b\omega = \text{const}$:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(b\omega)}{dt} = 0.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(b\omega)^2}{b} = b\omega^2.$$

Оскільки дотичного прискорення немає, то повне прискорення дорівнює нормальному: $a = a_n = b\omega^2$.

Таким чином, величина прискорення пальця кривошипну, визначена різними способами, збігається.

Приклад 2.5

Точка на ободі барабана зернозбирального комбайна у період розгону рухається згідно з рівнянням $s = 0,1 \cdot t^3$ (s – в метрах, t – в секундах). Радіус барабана дорівнює $R = 0,5$ м. Визначити дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість дорівнює $v = 30$ м/с.

Розв'язання

Рівняння руху точки задане натуральним способом, а тому швидкість дорівнює:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1 \cdot t^3)}{dt} = 0,3 \cdot t^2.$$

За заданим значенням швидкості точки $v = 30$ м/с знайдемо момент часу. Підставимо значення цієї швидкості в отриманий вираз і знайдемо час t :

$$30 = 0,3 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

У функцію дотичного прискорення точки підставимо час:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0,3 \cdot t^2) = 0,6t, \quad a_\tau(10) = 0,6 \cdot 10 = 60 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,3 \cdot t^2)^2}{0,5} = \frac{30^2}{0,5} = 1800 \text{ м/с}^2.$$

Знак «плюс» перед дотичним прискоренням a_τ означає, що барабан зернозбирального комбайна перебуває у стані розгону, що відповідає умові задачі.

Приклад 2.6

Рух точки відбувається згідно з рівняннями в координатній формі:

$$x = A \cos kt; \quad y = A \sin kt; \quad z = Bt; \quad \text{де } x, y, z - \text{ у метрах, } t - \text{ у секундах.}$$

Визначити:

- швидкість точки; закон руху точки вздовж траєкторії;
- рівняння годографа швидкості; прискорення точки;
- радіус кривини траєкторії точки.

Розв'язання

Виберемо систему координат, як показано на рис. 2.9. M_0 – початкове положення точки на траєкторії.

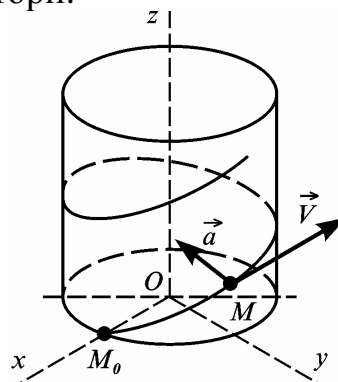


Рис. 2.9

Складові швидкості точки дорівнюють похідним від координат:

$$v_x = \dot{x} = -Ak \sin kt, \quad v_y = \dot{y} = Ak \cos kt, \quad v_z = \dot{z} = B.$$

Частина перша

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{A^2k^2 + B^2} = \text{const.}$$

Траєкторією точки є гвинтова лінія. Напрямок швидкості, тобто напрям дотичної до гвинтової лінії (рис. 2.9), визначаємо за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{v}, \hat{Ox}) = -\frac{Ak}{\sqrt{A^2k^2 + B^2}} \sin kt;$$

$$\cos(\vec{v}, \hat{Oy}) = \frac{Ak}{\sqrt{A^2k^2 + B^2}} \cos kt;$$

$$\cos(\vec{v}, \hat{Oz}) = \frac{B}{\sqrt{A^2k^2 + B^2}}.$$

Рівняння годографа швидкості знаходимо на підставі формул:

$$x_1 = v_x = -Ak \sin kt; \quad y_1 = v_y = Ak \cos kt; \quad z_1 = v_z = B.$$

Звідси $x_1^2 + y_1^2 = A^2k^2$; $z_1 = B$ – рівняння годографа швидкості (рис. 2.10).

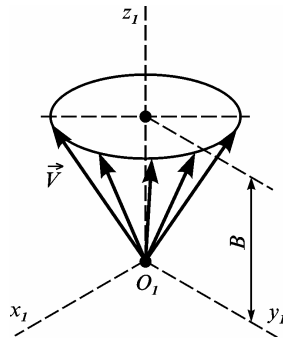


Рис. 2.10

Отже, годографом швидкості є коло радіуса Ak з центром у точці $z_1 = B$ на осі Oz_1 .

Знайдемо закон руху точки вздовж траєкторії $s = s(t)$:

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad ds = vt; \quad s = \sqrt{A^2k^2 + B^2}t + C.$$

Якщо $t = 0, s = 0$, то $C = 0$.

$$s = \sqrt{A^2k^2 + B^2}t.$$

Для визначення проєкцій, модуля та напрямку прискорення скористаємося наведеними вище формулами:

$$a_x = \ddot{x} = -Ak^2 \cos kt; \quad a_y = \ddot{y} = -Ak^2 \sin kt;$$

$$a_z = \ddot{z} = 0; \quad \Rightarrow a = Ak^2;$$

$$\begin{aligned}\cos(\vec{a}, \hat{Ox}) &= -\cos kt; \quad \cos(\vec{a}, \hat{Oy}) = -\sin kt; \\ \cos(\vec{a}, \hat{Oz}) &= 0.\end{aligned}$$

Вектор прискорення розміщений у горизонтальній площині і спрямований від точки M до осі Oz (рис. 2.9).

Радіус кривини точки знаходимо на підставі формули (2.34). Нормальне прискорення визначаємо через повне і тангенціальне за формулами (2.35) і (2.32):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Оскільки $v_\tau = const$ і $a_\tau = \dot{v}_\tau = 0$, то $a_n = a$. Знаходимо радіус кривини:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{A^2 k^2 + B^2}{Ak^2} = A + \frac{B^2}{Ak^2}.$$

Задачі для самостійного опрацювання

Задача 1. Рух точки відбувається за законом

$$x = \frac{1}{3}t^2 + 1; \quad y = \frac{2}{3}t^2.$$

Визначити швидкість v , прискорення точки a , радіус кривини траєкторії ρ і закон руху точки вздовж траєкторії s .

$$\text{Відповідь: } v = \frac{2\sqrt{5}}{3}t; \quad a = \frac{2\sqrt{5}}{3}; \quad \rho = \infty; \quad s = \frac{\sqrt{5}}{3}t^2.$$

Задача 2. У деякий момент часу повне прискорення точки дорівнює $2,6 \text{ м/с}^2$. Точка рухається по кривій з дотичним прискоренням $1,4 \text{ м/с}^2$.

Знайти для даного моменту часу нормальне прискорення точки.

$$\text{Відповідь: } a_n \approx 2,2 \text{ м/с}^2.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає зміст натурального способу визначення руху точки?
2. Що називають дуговою координатою?
3. Як знайти шлях, що його проходить точка?
4. Як знайти зв'язок між натуральним і координатним способом?
5. Визначте швидкість точки натуральним способом завдання руху?
6. Як знайти прискорення точки натуральним способом задання руху?
7. У чому полягає фізичний зміст тангенціального і нормального складових прискорення?
8. Які особливості має натуральний координатний базис?

9. Напишіть формулу рівномірного і рівнозмінного руху точки?
10. Які потрібні умови для задання руху точки натуральним способом?
11. З'ясуйте різницю між дуговою координатою і шляхом, пройденим точкою.

2.2. Кінематика твердого тіла

Переходимо до вивчення руху абсолютно твердого тіла. Якщо на тіло ніяких в'язей не накладено, то воно рухається вільно.

Закріпимо одну точку тіла (три в'язі), воно буде обертатись навколо цієї точки (три ступеня вільності).

Закріпимо дві точки (п'ять в'язей), тіло буде обертатись навколо нерухомої осі, маючи один ступінь вільності.

Закріпимо три точки і тіло опиниться нерухомим (шість в'язей).

Відповідно до згаданого в механіці розглядаються такі рухи твердого тіла: *поступальний, обертальний навколо нерухомої осі, плоско-паралельний або плоский, обертальний навколо нерухомої точки або сферичний, вільний і складний рухи.*

Основна задача кінематики твердого тіла полягає в установленні способу задання руху і вивченні кінематичних характеристик тіла загалом і окремих його точок.

Спосіб вважається встановленим, якщо визначено метод, що вказує положення довільної точки тіла в будь-який момент часу щодо вибраної системи координат.

Розглянемо спочатку найпростіші види руху: *поступальний і обертальний навколо нерухомої осі.*

2.2.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, за якого довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно її початковому положенню.

Приклади поступального руху твердого тіла: рух планки мотовила зернозбирального комбайна за прямолінійного руху останнього; рух клавіші соломотряса (шарнірного паралелограма O_1ABO_2 рис. 2.9а),

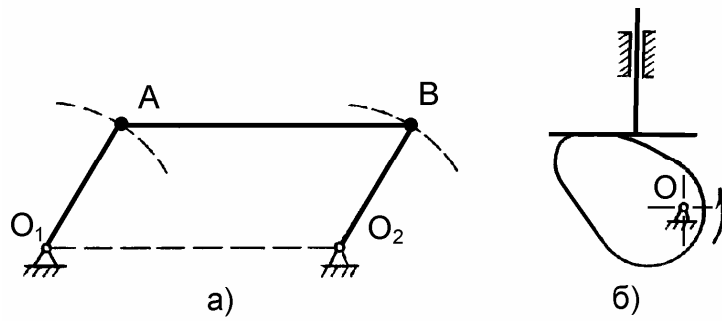


Рис. 2.11

яка здійснює коловий поступальний рух; рух штовхача кулач-кового механізму (рис. 2.11б), який здійснює зворотно-поступальний рух; рух педалі велосипеда відносно рами, поршня двигуна відносно циліндра, рух кузова автомобіля вздовж прямої дороги тощо.

З наведених прикладів легко побачити, що *траєкторією* точки тіла у разі поступального руху може бути як *пряма*, так і *крива* лінія.

Термін «поступальний рух» стосується тільки тіла, а не точки. Для дослідження поступального руху твердого тіла доведемо теорему:

Під час поступального руху тіла всі його точки рухаються конгруентними траєкторіями і мають у кожен момент часу однакові швидкості і прискорення.

Розглянемо в твердому тілі дві довільні точки A та B і визначимо їхні рухи векторним способом (рис. 2.12):

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t); \quad \vec{r}_B = \vec{r}_B(t). \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (2.40)$$

Функції $\vec{r}_A(t)$ і $\vec{r}_B(t)$ визначають векторним способом траєкторії точок A і B .

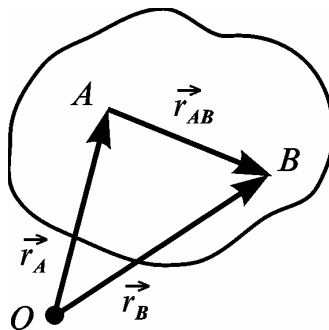


Рис. 2.12

Вектор \vec{r}_{AB} не змінюється з часом ні за величиною, ні за напрямом

Частина перша

(тверде тіло). Отже, із виразу (2.40) видно, що траєкторію точки B можна отримати з траєкторії точки A за допомогою паралельного переносу. Напрямок і величину переносу визначає сталий вектор \vec{r}_{AB} .

Оскільки вибір двох точок був довільний, то це означає, що всі **точки тіла рухаються конгруентними траєкторіями**.

Знайдемо похідну за часом t від виразу (2.40):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}.$$

Вектор $\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{cons}$, тому $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A$.

Диференціюючи останній вираз швидкості за часом t , дістанемо:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

Поступальний рух тіла цілком визначається рухом однієї довільної точки, оскільки всі точки тіла рухаються однаково.

Швидкість і прискорення, які є загальними для всіх точок тіла, називаються швидкістю і прискоренням поступального руху тіла, а рівняння руху будь-якої його точки є рівнянням руху тіла.

Внаслідок повної тотожності руху всіх точок тіла більшість задач із кінематики поступального руху розв'язуються методами кінематики матеріальної точки.

2.2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі.

Закон обертального руху

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі найбільш широко використовується в техніці.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, за якого пряма, проведена крізь дві довільні точки тіла, під час руху тіла залишається нерухомою. Ця пряма, що проходить крізь ці дві нерухомі точки, називається віссю обертання тіла.

Вісь обертання може знаходитись як всередині самого тіла, так і зовні його.

Для того, щоб здійснити обертальний рух твердого тіла, необхідно закріпити, наприклад, у підшипниках, дві точки цього тіла.

Визначення положення і закону обертального руху тіла

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі z . Проведемо крізь нерухому вісь обертання z дві півплощини, одна з яких π_1 є нерухомою, а друга півплощина π_2 незмінно поєднана з тілом і обертається разом із ним. (рис. 2.13).

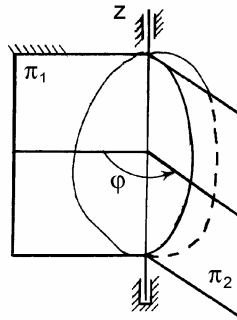


Рис. 2.13

Тоді **положення тіла** у будь-який момент часу t однозначно **визначається** двограним кутом φ між півплощинами π_1 і π_2 , який називається **кутом повороту** тіла φ .

Отже, положення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, визначається одним параметром, кутом повороту, тобто, тіло має один ступінь вільності.

Під час обертання тіла навколо нерухомої осі z кут повороту φ безперервно змінюється і є однозначною функцією часу:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.41)$$

Вираз (2.41) називається **законом обертального руху** тіла або кінематичним рівнянням обертання навколо нерухомої осі. Якщо маємо цю функцію, то положення тіла визначено однозначно. Тобто, кожному значенню параметра часу t відповідає лише одне значення кута повороту.

Напрямок відліку кута повороту вибирається так. Суміщаємо координатну вісь z з віссю обертання. Кут φ вважається **додатним** ($\varphi > 0$), якщо з додатного кінця осі z перехід рухомої площини π_2 від нерухомої π_1 відбувається **проти ходу годинникової стрілки** (для правої системи координат). І навпаки, від'ємний ($\varphi < 0$), якщо, – **за ходом** годинникової стрілки.

Кут повороту тіла вимірюється в радіанах. Відомо, що один оберт відповідає 2π рад. А тому зв'язок між кутом повороту φ в радіанах і числом обертів N такий:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Кутова швидкість і кутове прискорення обертового тіла

Кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Кутова швидкість

Кутова швидкість ω характеризує кінематичну міру змінення кута повороту тіла φ за одиницю часу. Якщо за деякий малий проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло здійснює поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то середня кутова швидкість ω_c тіла за цей проміжок часу дорівнює:

$$\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Для знаходження дійсної кутової швидкості тіла ω у будь-який момент часу t необхідно взяти границю, до якої наближається ω_c , якщо елементарний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.42)$$

Кутова швидкість тіла у будь-який момент часу дорівнює першій похідній за часом від кута його повороту і характеризує кінематичну міру змінення кута повороту в часі.

Знак кутової швидкості ω визначає напрямок обертання тіла і, у свою чергу, визначається знаком кута повороту φ .

Якщо $\omega > 0$, то тіло в даний момент часу обертається в додатному напрямі зростання кута повороту, тобто, проти ходу годинникової стрілки і – навпаки.

Якщо кутова швидкість є сталою величиною, то обертальний рух тіла рівномірний. Одиницею кутової швидкості ω є $\text{рад}/\text{с}$; $1/\text{с}$; с^{-1} .

Кутове прискорення

Введемо фізичну величину, що характеризує міру змінення кутової швидкості ω в часі.

Нехай за елементарний проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, тоді відношення $\Delta\omega$ до Δt уявляє

собою середнє кутове прискорення $\varepsilon_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Для знаходження дійсного кутового прискоренням тіла ε у будь-який момент часу t переходимо до границі, якщо Δt прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.43)$$

Кутове прискорення тіла у будь-який момент часу чисельно дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла і характеризує кінематичну міру змінення кутової швидкості в часі.

Одиницею кутового прискорення ε прийнятий радіан за секунду в квадраті: $\text{рад}/\text{с}^2$; с^{-2} .

Якщо модуль кутової швидкості $\omega > 0$, то тіло обертається в додатному напрямі відліку кута повороту.

Якщо кутова швидкість зростає з часом, то $\varepsilon > 0$ і обертальний рух тіла є прискореним, а якщо зменшується $\varepsilon < 0$, то – сповільненим.

Якщо під час обертання тіла кутове прискорення залишається весь час сталою величиною, то обертальний рух тіла є рівнозмінним (рівноприскореним або рівносповільненим).

Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі

Залежно від того, які кінематичні характеристики має тіло під час обертання навколо нерухомої осі, можливі деякі окремі випадки.

Рівномірне обертання

Якщо кутова швидкість тіла залишається сталою за весь період часу руху тіла, то таке обертання називається рівномірним ($\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$). Тоді кут повороту тіла визначається за формулою:

$$\varphi = \omega \cdot t \Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (2.44)$$

У техніці швидкість рівномірного обертання тіл найчастіше визначають **частотою обертання** n в обертах за хвилину: $\text{об}/\text{хв}$.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n. \quad (2.45)$$

Рівнозмінний обертальний рух

У цьому випадку кутове прискорення стало $\varepsilon = const$, тобто, кутова швидкість тіла ω за рівні проміжки часу змінюється на одну і ту ж величину.

Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного обертального руху. Оскільки $\varepsilon = const$, то згідно з (2.43)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon \cdot dt.$$

Для знаходження кутової швидкості ω використаємо визначений інтеграл в означених границях:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt.$$

Після інтегрування в означених границях отримаємо:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{2.46}$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість тіла.

Далі використаємо вираз (2.42)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt.$$

Підставимо (2.46) в останній вираз:

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt. \tag{2.47}$$

Як і у попередньому випадку, знайдемо кут повороту тіла φ :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt.$$

Після інтегрування в означених границях отримаємо:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{2.48}$$

де φ_0 – початковий кут повороту тіла.

Таким чином, під час рівнозмінного обертального руху твердого тіла кутова швидкість ω і кут повороту φ визначаються за формулами (2.46) і (2.48).

Слід зауважити, що знак у правих частинах цих формул (плюс чи мінус перед ε) інформує про рівноприскорене або рівносповільнене

обертання.

Приклад 2.7

Приводний вал силосорізки починає обертатись із стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon = 7,5 \text{ рад/с}^2$.

Визначити кутову швидкість вала у кінці 15 секунди, а також, скільки обертів зробить вал за ці 15 секунд.

Розв'язання

За умовою прикладу кутове прискорення вала є сталою додатною величиною, а тому його обертальний рух буде рівноприскореним. Для визначення кутової швидкості ω і кута повороту φ вала можна скористатись виразами (2.46) і (2.48).

Слід відразу зазначити: оскільки вал починає обертатись зі стану спокою, то його початкова кутова швидкість дорівнює нулю.

Початковий кут повороту дорівнює нулю, якщо суміщені початок відліку кута повороту з початком руху:

$$\omega_o = 0, \quad \varphi_o = 0.$$

Підставимо далі у вираз для кутової швидкості значення кутового прискорення ε і часу $t_1 = 15 \text{ с}$.

Тоді кутова швидкість ω після п'ятнадцятої секунди буде дорівнювати:

$$\omega = \varepsilon t_1 = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \text{ рад/с}.$$

Якщо підставити у вираз для кута повороту φ відомі величини, то отримаємо його значення за 15 секунд:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7,5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{ рад}.$$

Для знаходження загальної кількості обертів вала скористаємось таким виразом: $\varphi = N \cdot 2\pi$.

Звідси кількість обертів N вала за 15 с дорівнює:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} = 134 \text{ об.}$$

Розподіл лінійних швидкостей і прискорень точок обертового тіла

Крім загальних кінематичних характеристик тіла, що обертається навколо нерухомої осі, – кутової швидкості ω і кутового прискорення ε – визначимо *лінійні або колові швидкості* і *лінійні або колові прискорення точок тіла*.

Частина перша

З визначення обертального руху тіла випливає, що траєкторією довільної точки обертового тіла є накреслене точкою коло з радіусом, який дорівнює відстані до осі обертання тіла.

Площини кіл перпендикулярні до осі. Центри цих кіл знаходяться в точках перетину нерухомої осі обертання з указаними площинами. Радіуси даних кіл називають також радіусами обертання точок тіла.

Лінійна (колова) швидкість

Розглянемо тіло, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.14). Напрямок обертання показаний стрілкою. Виберемо в тілі будь-яку точку M , яка розміщується на відстані радіуса обертання R від осі z .

Точка M окреслює показане на рисунку коло радіусом R , площина якого перпендикулярна осі z обертання, а центр C розміщений на самій осі z .

За деякій проміжок часу dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, при цьому точка M здійснить уздовж своєї траєкторії переміщення в положення M_1 на величину:

$$ds = R d\varphi.$$

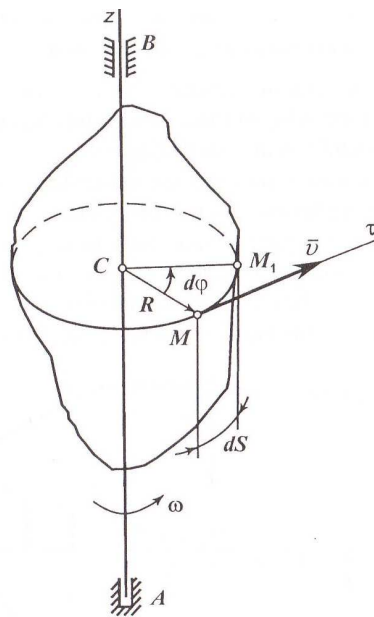


Рис. 2.14

Визначимо лінійну або колову швидкість точки M за відомим виразом (2.22):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R d\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

$$v = \omega R. \quad (2.49)$$

Лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.

Вектор лінійної швидкості \vec{v} напрямлений вздовж дотичної $\vec{\tau}$ до кола (перпендикулярно радіусу обертання), яке окреслюється точкою M під час руху, і спрямований у напрямку обертання.

Оскільки для всього тіла кутова швидкість ω у даний момент часу має одне і те ж саме значення, то лінійні швидкості точок тіла прямопропорційні їх відстаням до осі обертання.

Тому для діаметра KL картина розподілу швидкостей точок тіла має лінійний характер (рис. 2.15).

Як легко побачити, лінійна швидкість точки O , що розміщена на осі обертання, дорівнює нулю.

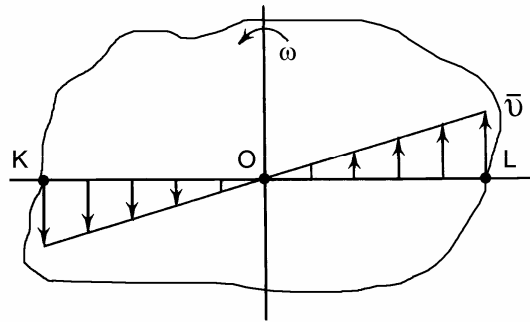


Рис. 2.15

Лінійне прискорення

Визначимо далі прискорення точки M , (рис. 2.14) за формулами (2.32) і (2.34).

У даному випадку радіус кривини кола $\rho = R$. Підставляючи вираз (2.49), матимемо формулу обертального або дотичного прискорення:

$$a_{\tau} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \quad (2.50)$$

і доцентрового або нормального прискорення:

$$a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2. \quad (2.51)$$

Дотичне прискорення \vec{a}_{ϕ} спрямоване за дотичною до траєкторії руху точки M у бік обертання, якщо рух тіла прискорений ($\varepsilon > 0$), і протилежно, якщо рух сповільнений ($\varepsilon < 0$).

Частина перша

Нормальне прискорення \bar{a}_n завжди додатне і спрямоване за нормаллю (радіусом) до центра кола, за яким рухається точка. Визначимо модуль повного прискорення \bar{a} точки M . Воно дорівнюватиме геометричній сумі складових дотичного \bar{a}_τ і нормального a_n прискорень:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + R^2 \omega^4} \Rightarrow a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.52)$$

Аналізуючи вираз (2.52), легко переконатися, що величина повного лінійного прискорення точки прямо пропорційна радіусу і не залежить від того, обертається тіло прискорено чи сповільнено. Визначимо напрямок вектора повного прискорення \bar{a} точки M тіла, що обертається з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 2.16).

Відхилення вектора повного прискорення \bar{a} від нормалі (радіуса) визначається кутом φ , який може бути обчислений за виразом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|R\varepsilon|}{R\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (2.53)$$

Як впливає з виразу (2.53), кут відхилення від нормалі вектора повного лінійного прискорення \bar{a} не залежить від радіуса обертання і в кожний даний момент часу однаковий для всіх точок тіла.

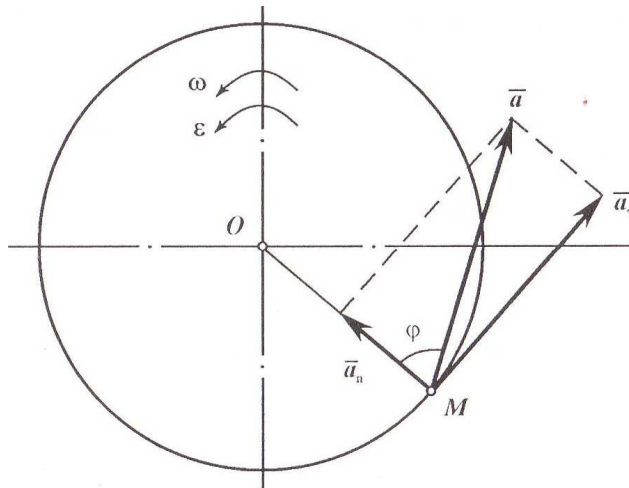


Рис. 2.16

Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла

Кутову швидкість ω і кутове прискорення ε обертового тіла зображують векторами.

Вектори кутових швидкості і прискорення обертового тіла

розміщуються на осі обертання і спрямовані так, що, дивлячись з додатного кінця осі, можна побачити поворот тіла у напрямку проти ходу годинникової стрілки.

Вказаний напрямок вважається додатним у правій системі координат і від'ємним – у лівій.

Зазначимо, що вектор кутового прискорення спрямований у той же бік, що і вектор кутової швидкості, якщо обертання прискорене, і навпаки.

Якщо розглядати різні випадки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, то напрямки векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ будуть такими, як це показано на рис. 2.17.

Вектори кутової швидкості $\vec{\omega}$ і кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ є **ковзними** векторами.

Вектор $\vec{\omega}$ напрямлений по нерухомій осі обертання, його годографом є пряма лінія.

Вектор $\vec{\varepsilon}$ як похідна від $\vec{\omega}$ повинний мати напрям по дотичній до годографа $\vec{\omega}$. Але годографом останнього є пряма, тому і вектор $\vec{\varepsilon}$ для обертового тіла з нерухомою віссю обертання напрямлений також вздовж осі обертання.

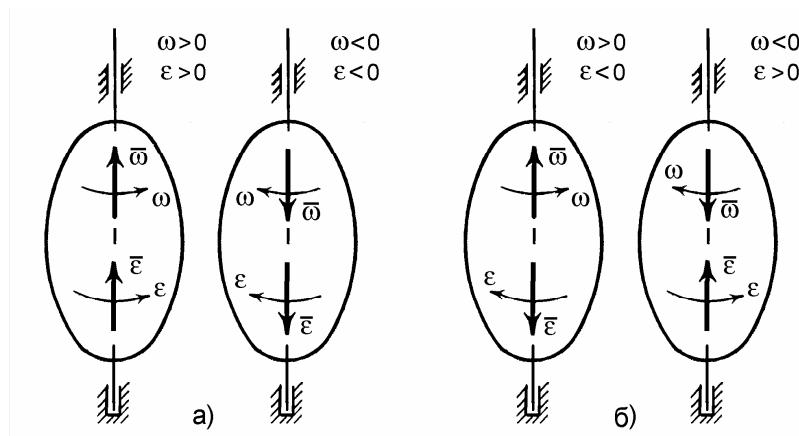


Рис. 2.17

Вектори кутової швидкості і кутового прискорення одночасно визначають наступні **три елементи**:

положення осі обертання даного тіла в нерухомій системі координат; **величини**, які характеризують значення швидкості і прискорення; **напрямок** обертання тіла.

Якщо позначити на рис. 2.17 вісь обертання z ортом \vec{k} , то вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ можна уявити: $\vec{\omega} = \vec{k} \cdot \omega$; $\vec{\varepsilon} = \vec{k} \cdot \varepsilon$; $\omega_z = \pm\omega$, а проєкції цих векторів на осі координат x, y із ортами \vec{i}, \vec{j} дорівнюватимуть нулю: $\omega_x = \omega_y = 0$.

**Векторний вираз лінійної швидкості точки обертового тіла.
Формула Ейлера**

Лінійну швидкість точки обертового тіла можна уявити у вигляді векторного добутку. Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі z у напрямку, показаному стрілкою (рис. 2.18).

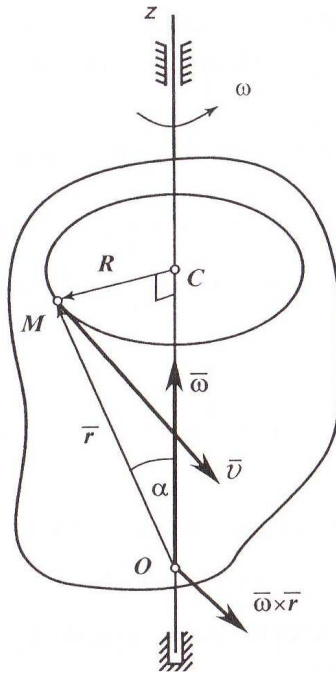


Рис. 2.18

Уявимо, що довільна точка M рухається по колу радіусом R . Виберемо на осі обертання z довільну точку відліку O і проведемо із цієї точки вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$, спрямовуючи його вгору (за визначенням), і радіус-вектор \vec{r} цієї точки M , який визначає її положення відносно точки відліку.

Покажемо, що лінійна швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла на радіус-вектор \vec{r} точки M .

Визначимо модуль лінійної швидкості v точки M :

$$v = \omega R, \quad R = r \sin \alpha \Rightarrow v = \omega \cdot r \sin \alpha, \quad (2.54)$$

де α – кут між векторами $\vec{\omega}$ і \vec{r} .

Вектор \vec{v} лінійної швидкості точки M спрямований по дотичній до кола, яке є траєкторією руху точки M , тобто перпендикулярний площині трикутника OMC .

Далі визначимо модуль векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha. \quad (2.55)$$

Напрямок векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$ також перпендикулярний площині трикутника OMC , що безпосередньо впливає з визначення векторного добутку двох векторів $\vec{\omega}$ і \vec{r} .

Із цього можна дійти висновку, що не тільки збігаються модулі лінійної швидкості і векторного добутку (формули (2.54), (2.55)), але і їх напрямки. Звідси:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.56)$$

Лінійна швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює **векторному добутку** двох векторів: **кутової швидкості** і **радіуса-вектора** цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Формула (2.56) надає можливість отримати картину розподілу швидкостей точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

З'ясуємо, чому ця формула інваріантна відносно довільності вибору точки відліку O на осі обертання.

Для цього звернемо увагу на модуль векторного добутку (2.55) і легко з'ясуємо, що результат коректує синус кута α між векторами: зі зміною положення точки відліку змінюється і сам кут і, відповідно, величина швидкості.

Визначимо лінійну швидкість точки M тіла, вісь обертання якого довільно розміщена у просторі відносно системи координат $Oxyz$ (рис. 2.19).

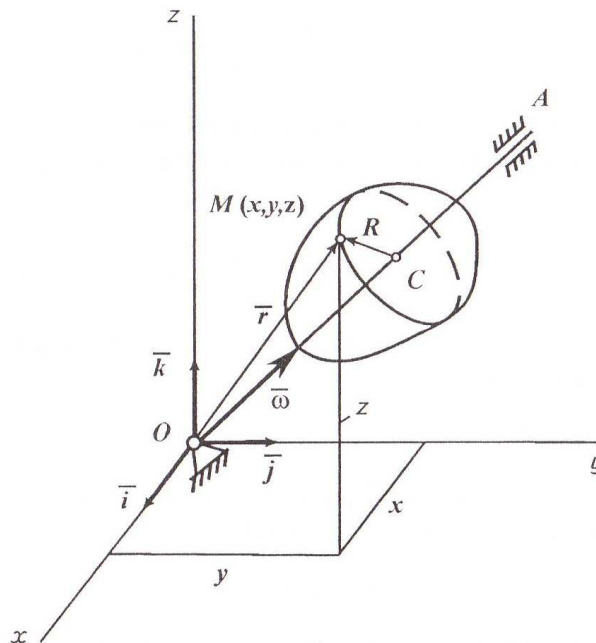


Рис. 2.19

Виразимо лінійну швидкість \vec{v} за допомогою визначника векторного

Частина перша

добутку:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \bar{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \bar{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \bar{k}. \quad (2.57)$$

Як відомо, вектор швидкості можна розкласти по ортах декартової системи координат:

$$\bar{v} = \bar{i} v_x + \bar{j} v_y + \bar{k} v_z.$$

Порівнюючи останні два вирази, легко переконатись, що проекції лінійної швидкості \bar{v} на осі координат дорівнюють:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Формули (2.57) як скалярні співвідношення одержані академіком Ейлером у 1765 році. Але і формула (2.58) теж носить назву формули Ейлера.

Для окремого випадку, якщо вісь обертання вертикальна (рис. 2.18):

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega.$$

Користуючись виразом (2.56), дістанемо результат, який свідчить про універсальність формули Ейлера:

$$v_x = -\omega y, v_y = \omega x, v_z = 0, v = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R.$$

Приклад 2.8

Закон обертання маховика двигуна у пусковий період визначається рівнянням $\varphi = \frac{t^3}{3}$, де t – в секундах, φ – в радіанах.

Визначити модуль і напрям прискорення точки, розміщеної на відстані 50 см від осі обертання, в момент, коли її швидкість $v_1 = 8$ м/с.

Розв'язання

Для визначення прискорення руху матеріальної точки можна використати вираз (2.52): $a = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Кутові швидкість і прискорення руху маховика двигуна визначимо, використавши вирази (2.42) і (2.43):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t^2, \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t.$$

Визначимо момент часу, в який потрібно визначити прискорення точки.

Для цього, на підставі виразу (2.49), визначимо кутову швидкість обертання маховика:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0,5} = 16 \text{ c}^{-1}.$$

Оскільки визначена раніше кутова швидкість $\omega = t^2$, то можемо визначити час:

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4 \text{ c}.$$

У формулу $\varepsilon = 2t$ підставимо час t_1 і отримаємо величину кутового прискорення у даний момент часу:

$$\varepsilon_1 = 2t_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ c}^{-2}.$$

Підставимо значення ω_1 і ε_1 у вираз для повного прискорення і матимемо шуканий результат:

$$a = 0,5\sqrt{8^2 + 16^4} = 128,0 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора \bar{a} визначимо згідно з виразом (2.53):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32}, \text{ звідки } \varphi = 1^\circ 48',$$

де φ – кут між радіусом обертання і вектором повного прискорення \bar{a} .

Передача обертального руху

Передача обертального руху здійснюється за допомогою зубчастих, пасових, ланцюгових передач, коліс тертя тощо. Простою передачею називають такий механізм, до складу якого входять тіла, що здійснюють тільки найпростіші рухи: поступальний або обертальний відносно нерухомої осі (рис. 2.20).

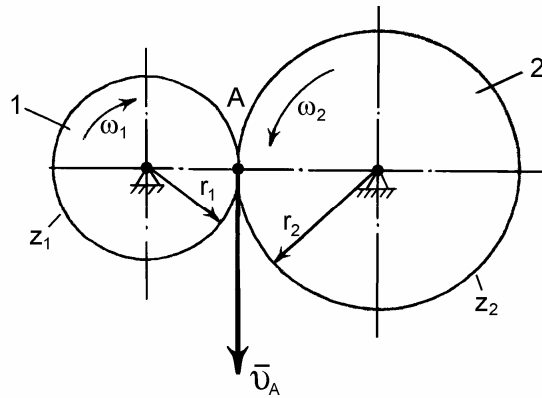


Рис. 2.20

Розглянемо передачу обертального руху за допомогою зубчастої передачі, яка складається з двох коліс, що обертаються навколо нерухомих осей.

Назвемо перше колесо (з меншим діаметром) ведучим (шестернею). Напрямок його обертання показано стрілкою. Воно має такі фізичні та кінематичні параметри: радіус – r_1 , кількість зубів – z_1 , кутова швидкість – ω_1 , частота обертання – n_1 .

Друге колесо, яке є веденим, має такі параметри: радіус – r_2 , кількість зубів – z_2 , кутова швидкість – ω_2 , частота обертання – n_2 . Напрямок обертання другого колеса також показано стрілкою.

Якщо передача обертального руху здійснюється без проковзування у місці контакту коліс, то лінійна швидкість точки контакту (точка A), яка належить одночасно двом колесам, має бути однаковою.

Лінійна швидкість точки A для першого колеса $v_A = \omega_1 \cdot r_1$, а лінійна швидкість точки A другого колеса $v_A = \omega_2 \cdot r_2$. Порівняємо обидва вирази для точки A :

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

Перетворимо останній вираз

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Якщо вважати, що передаточне відношення – це відношення кутових швидкостей $\frac{\omega_1}{\omega_2} = u$, то можна остаточно написати:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Передаточне відношення прямо пропорційне **відношенню кутових швидкостей** і частот обертання ведучого і веденого коліс. Воно обернено пропорційне величинам радіусів і кількості зубців

відповідних коліс.

Вказані основні положення про передачу обертального руху між двома колесами повністю придатні для визначення передаточного відношення для пасової або ланцюгової передач.

Методика і приклад розв'язування задач

Приклад 2.9

Два шківів I і II з'єднано нескінченним пасом (рис. 2.21). Радіуси шківів, відповідно $R_1 = 0,25$ м і $R_2 = 0,5$ м. Внутрішній радіус шківа II $r_2 = 0,2$ м.

Знайти швидкість v точок паса і кутові швидкості обох шківів, якщо рівняння руху тягара $x = 4t^2$ (x – в сантиметрах, t – в секундах).

Оскільки трос, на якому підвішений тягар III, є нерозтяжним, то швидкість точки M шківа II дорівнює швидкості тягара III.

З рівняння руху тягара ця швидкість:

$$v_M = \dot{x} = 8t \text{ см/с.}$$

Отже, кутова швидкість шківа II:

$$\omega_{II} = \frac{v_M}{r_2} = \frac{8t}{20} = 0,4t \text{ рад/с.}$$

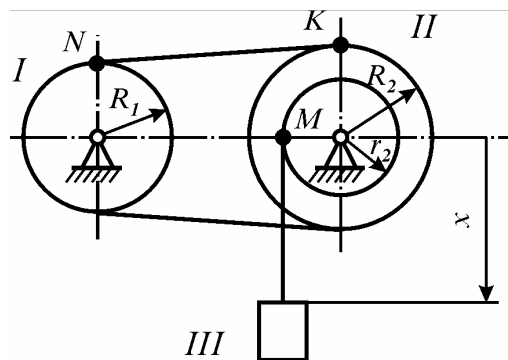


Рис. 2.21

Оскільки пас нерозтяжний і рухається без ковзання, то точки обводів шківів мають однакову швидкість $v_N = v_K = v$, тобто:

$$v = \omega_I R_1 = \omega_{II} R_2 = 0,4t \cdot 50 = 20t \text{ см/с,}$$

$$\frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \omega_I = \frac{\omega_{II} R_2}{R_1} = \frac{0,4t \cdot 0,5}{0,25} = 0,8t \text{ рад/с.}$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Надайте означення і приклади поступального руху тіла.
2. Чи можна звести кінематику поступального руху до кінематики точки?
3. Як визначити положення обертового тіла? Що таке закон обертання?
4. Означте кутові швидкості і кутові прискорення обертового тіла, назвіть їхні одиниці виміру. Визначте частоту обертання.
5. Назвіть формули рівнозмінного обертання тіла.
6. Як спрямовані вектори лінійних швидкостей та прискорень точок обертового тіла?
7. Що таке передаточне відношення пари зубчастих коліс?
8. Як спрямувати вектори кутових швидкості і прискорення?
9. Запишіть і проаналізуйте формулу Ейлера.
10. В яких одиницях вимірюється кут повороту тіла?

2.2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельний рух широко розповсюджений у техніці і його вивчення має велике значення. Багато механізмів, що зустрічаються на практиці, належать до, так званих, плоских механізмів.

Плоскопаралельним або плоским рухом твердого тіла називається такий рух, під час якого всі точки тіла рухаються паралельно деякій заданій нерухомій площині, яку називають напрямною або основою.

Розглянемо вказаний рух. Нехай всі точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, рухаються паралельно деякій нерухомій площині π (рис. 2.22).

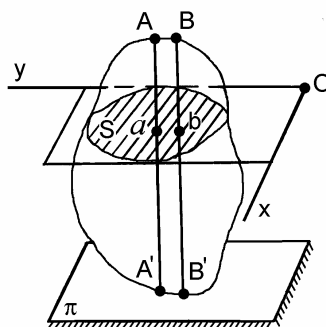


Рис. 2.22

Якщо перетнути тіло площиною xOy , яка паралельна нерухомій площині π , то у перерізі отримаємо плоску фігуру S . Фігура S під час

руху тіла довільно переміщується, залишаючись весь час у площині xOy .

У разі плоскопаралельного руху всі точки перпендикуляра до площини фігури AA' рухаються однаково, як і точка a перерізу, маючи однакові швидкості і прискорення, тому що цей перпендикуляр рухається поступально.

Якщо взяти на перерізі другу точку b та провести перпендикуляр BB' , то всі і його точки будуть мати однакові швидкості і прискорення. Але загалом швидкості і прискорення точок перпендикулярів є різними:

$$\bar{v}_A \neq \bar{v}_B \text{ і } \bar{a}_a \neq \bar{a}_b.$$

Якщо на перерізі тіла (фігура S) взяти велику кількість точок, то рух фігури перерізу S може повністю репрезентувати плоскопаралельний рух всього тіла. З вищенаведеного випливає, що для визначення плоскопаралельного руху твердого тіла достатньо знати рух плоскої фігури S , одержаної перетином тіла площиною xOy , паралельною заданій напрямній нерухомій площині π . Проте, рух плоскої фігури у площині визначається рухом відрізка прямої, проведеної на цій фігурі.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла, фактично, зводиться до розглядання руху відрізка прямої на площині.

Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи

Нехай плоска фігура S рухається у площині Oxy і за деякий малий проміжок часу переміщується із положення I у положення II (рис. 2.23).

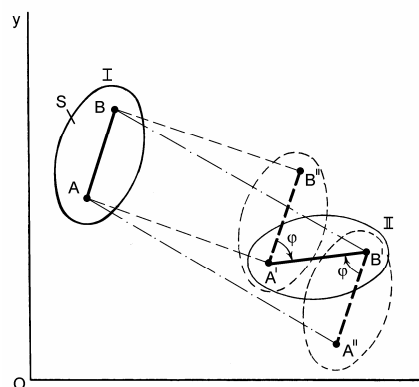


Рис. 2.23

Виберемо на фігурі S дві точки A і B і з'єднаємо їх прямою. Прослідкуємо за рухом відрізка AB .

Легко переконатися, що переміщення фігури S та незмінно

Частина перша

пов'язаного з нею відрізка AB можна вважати складеним із поступального і обертального рухів.

Дійсно, переміщення відрізка AB у положення $A'B'$ можна розглядати як поступальне переміщення у положення $A'B''$ і наступний поворот навколо точки A' , яку приймаємо за полюс, на деякий кут φ . Або як поступальне переміщення в положення $B'A'$ і наступний поворот на той же кут φ навколо точки B' , яку в цьому разі приймаємо за полюс.

Як видно з рис. 2.23, кут φ повороту фігури S навколо полюса A' дорівнює куту повороту навколо полюса B' . Однаковим буде і напрям повороту – за ходом годинникової стрілки.

Таким чином, кут повороту φ і напрям повороту фігури не залежать від вибору полюса. Слід зауважити, що такого ж самого кінцевого результату можна досягнути, якщо здійснити спочатку поворот тіла, а потім – поступальний рух.

*Переміщення фігури S в її площині із одного положення у друге, яке нескінченно близьке до першого, у границі можна замінити двома елементарними простими плоскими переміщеннями – **поступальним і обертальним**.*

Аналітичні дослідження плоскопаралельного руху тіла

Для визначення рівнянь плоскопаралельного руху твердого тіла розглянемо у площині руху фігури S ортогональну систему декартових координат Oxy , яка є нерухомою відносно цієї площини (рис. 2.24).

Візьмемо на фігурі S будь-яку точку A за полюс і за початок рухомої системи координат $Ax'y'$, яка жорстко зв'язана з фігурою S . Положення рухомої системи координат $Ax'y'$, як і усієї плоскої фігури S , буде визначатися положенням полюса A і кутом повороту φ осі x' щодо нерухомої осі x .

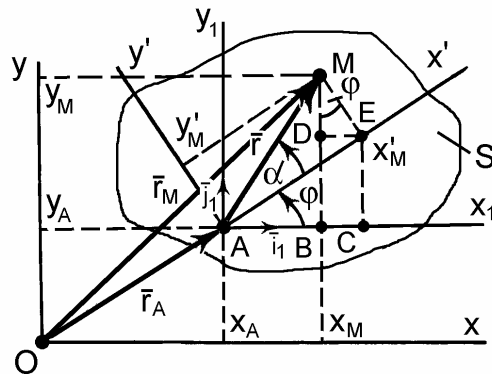


Рис. 2.24

Протягом часу координати полюса A і кут повороту тіла φ змінюються як однозначні функції часу, тому їх можна описати системою рівнянь:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (2.59)$$

Ці рівняння є рівняннями руху плоскої фігури або кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху тіла.

Якщо координати полюса A і кут повороту φ відомі у будь-який момент часу, то можна визначити і положення будь-якої довільної точки M тіла у площині її руху.

Якщо з'єднати точку M з полюсом A радіусом-вектором \bar{r} , то у рухомій системі координат $Ax'y'$ її координати будуть x'_M і y'_M , а кут нахилу α визначатиме нахил радіуса-вектора \bar{r} до осі x' . Як можна побачити з рис. 2.24, координати x_M і y_M точки M у нерухомій системі координат Ox у дорівнюють:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + r \cos(\alpha + \varphi), \\ y_M &= y_A + r \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Враховуючи, що

$$r = \frac{x'_M}{\cos \alpha}, \quad r = \frac{y'_M}{\sin \alpha}$$

і підставляючи у вираз (2.60) ці величини, а також тригонометричні функції суми двох кутів, матимемо:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \sin \varphi, \\ y_M &= y_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \sin \varphi + \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Після відповідних скорочень остаточно маємо:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + x'_M \cos \varphi - y'_M \sin \varphi, \\ y_M &= y_A + x'_M \sin \varphi + y'_M \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Рівняння (2.61) і є кінематичними рівняннями руху довільної точки тіла (фігури) у її площині.

Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Для визначення швидкостей довільної точки M фігури, що здійснює плоскопаралельний рух, введемо ортогональну систему координат Ax_1y_1 , яка рухається поступально відносно нерухомої системи координат (рис. 2.24).

Від центра O у нерухомій системі координат Oxy покажемо радіус-вектори: полюса $A - \bar{r}_A$ і точки $M - \bar{r}_M$. Радіус-вектор точки M відносно полюса A позначимо через \bar{r} .

Під час плоскопаралельного руху фігури зберігається векторна рівність:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}.$$

Диференціюємо за часом цю рівність

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

У цьому виразі:

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \bar{v}_M; \quad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A.$$

Доданок $\frac{d\bar{r}}{dt}$ є швидкістю точки M відносно рухомої системи координат Ax_1y_1 , яку позначимо: $\bar{v}_{MA} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Рух фігури тіла відносно системи координат Ax_1y_1 є поворотом фігури навколо осі Az_1 , спрямованої перпендикулярно площині креслення (на рис. 2.26 не показана).

Таким чином, швидкість \bar{v}_{MA} є відносною швидкістю точки M під час обертання тіла навколо осі Az_1 , для визначення якої можна скористатись формулою Ейлера (2.54):

$$\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість фігури відносно точки A , яку прийняли за полюс і яка, як відомо, не залежить від вибору полюса.

Тоді вираз для швидкості точки у плоскому русі приймає вигляд:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{2.62}$$

Швидкість довільної точки M плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса A і відносної швидкості точки M під час обертання фігури навколо полюса A .

Перший доданок у виразі (2.62) визначає поступальну швидкість фігури разом із полюсом, другий доданок – відносну швидкість точки в обертальному русі фігури навколо полюса.

Оскільки, $\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \overline{AM}$, то модуль швидкості дорівнює $v_{MA} = \omega \cdot AM$, а вектор $\bar{\omega}$ перпендикулярний площині креслення.

Вектор \bar{v}_{MA} перпендикулярний AM : $\bar{v}_{MA} \perp \overline{AM} \perp \bar{r}$ і спрямований у бік обертання фігури S .

Якщо необхідно визначити швидкість іншої точки, наприклад, точки B , то вираз (2.62) запишемо так:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

На рис. 2.25 показано графічне розв'язання останнього векторного рівняння для визначення прискорення точки B .

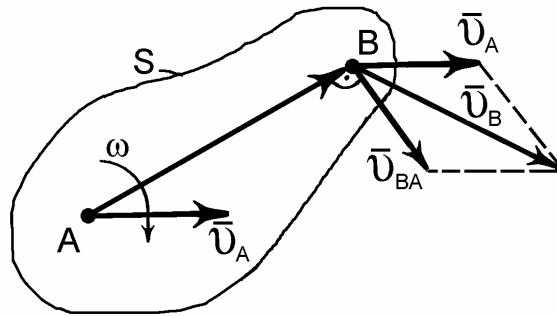


Рис. 2.25

Визначення прискорень точок плоскої фігури

Для визначення прискорення довільної точки M плоскої фігури S візьмемо похідну за часом від векторного виразу (2.62):

$$\frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right).$$

Аналізуємо цей вираз, де:

$$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \bar{a}_A \text{ – прискорення полюса } A; \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\epsilon} \text{ – кутове прискорення в}$$

обертальному русі фігури S відносно полюса A ;

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} \text{ – відносна швидкість точки } M \text{ в обертальному русі}$$

Частина перша

фігури навколо полюса A .

Отже, вираз для прискорення точки M перепишемо так:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad (2.63)$$

де $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_{MA}^\tau$ – обертальне прискорення точки M відносно полюса A ;

$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_{MA}^n$ – доцентрове прискорення точки M відносно полюса A .

Повне відносне прискорення (рис. 2.26): $\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n$.

За модулем складові останнього виразу дорівнюють:

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM, \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM.$$

Модуль повного відносного прискорення точки M навколо полюса A :

$$a_{MA} = AM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.64)$$

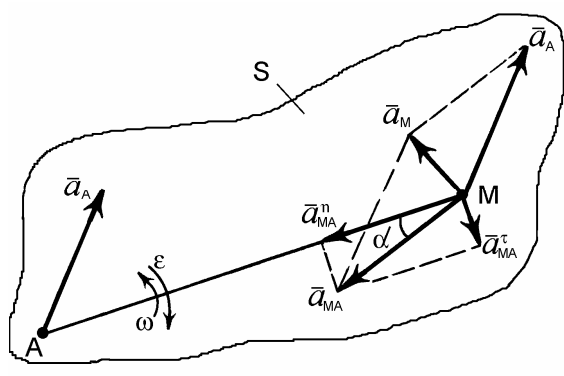


Рис. 2.26

Остаточно, прискорення довільної точки M плоскої фігури S , що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n. \quad (2.65)$$

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса і відносного прискорення цієї точки у обертальному русі точки разом із фігурою навколо полюса. Останнє складається із двох доданків.

Напрямки векторів зазначених складових прискорення:

– обертальне прискорення \bar{a}_{MA}^τ розміщене перпендикулярно до прямій AM і спрямоване у бік кутового прискорення ε , тобто, у бік напрямку відносної швидкості розглядуваної точки,

– доцентрове прискорення \bar{a}_{MA}^n розміщене на прямій AM і спрямоване

у бік полюса A ,

– вектор повного прискорення \bar{a}_{MA} складає з прямою AM кут α (рис. 2.26), тангенс якого визначається так :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Оскільки величини ω і ε належать до всієї фігури S , то кут α для всіх точок фігури той самий. Відкладається кут завжди за напрямком кутової швидкості ω .

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означте плоскопаралельний рух тіла, наведіть приклади з техніки.
2. На які два прості рухи розкладається плоскопаралельний рух?
3. Чи залежить обертальна частина плоскопаралельного руху від вибору полюса?
4. Які кінематичні рівняння плоскопаралельного руху тіла знаєте?
5. Як визначити швидкості і прискорення точок тіла, яке рухається плоскопаралельно?

Миттєвий центр швидкостей

У разі плоскопаралельного руху тіла може існувати одна точка плоскої фігури, що розташована на самій фігурі або на її уявному продовженні, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Доведемо це.

Розглянемо фігуру S , яка здійснює плоско-паралельний рух (рис. 2.27).

Покажемо на тілі дві точки A і B та з'єднаємо їх прямою. За деякий елементарний проміжок часу Δt фігура переміститься у нове положення, а пряма AB займе положення A_1B_1 . Траєкторії руху точок A і B покажемо пунктирними лініями.

Оскільки положення відрізка прямої AB є нескінченно близьким до положення A_1B_1 , то хорди AA_1 і BB_1 прямують до дотичних, уздовж яких і розташовані вектори швидкостей точок A і B цієї фігури \bar{v}_A і \bar{v}_B . Поставивши перпендикуляри до векторів швидкостей \bar{v}_A і \bar{v}_B , отримаємо точку їх перетину P . Ця точка і буде миттєвим центром швидкостей (МЦШ). Швидкість точки P за такого руху тіла дорівнює нулю і тверде тіло в даний момент часу обертається навколо цієї точки.

Частина перша

Вибравши точку A за полюс, дістанемо для швидкості точки P :

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = 0 \Rightarrow \bar{v}_A = -\bar{v}_{PA};$$

$$v_A = \omega \cdot PA \Rightarrow PA = \frac{v_A}{\omega}.$$

Таким чином, із останнього виразу випливає, що МЦШ розміщений на перпендикулярі, проведеному з початку вектора швидкості точки A на відстані AP .

Для знаходження миттєвого центра швидкостей необхідно знати напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури. Для отримання картини швидкостей плоскої фігури в заданий момент часу потрібно знати швидкість однієї точки і напрямок вектора швидкості іншої точки фігури.

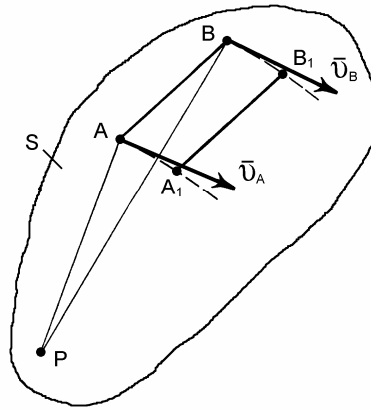


Рис. 2.27

Миттєвим центром швидкостей називається **точка рухомої плоскої фігури, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю** ($\bar{v}_P = 0$).

Отже, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей і швидкість однієї з точок фігури, то можна визначати величину і напрямок швидкості будь-якої іншої точки плоскої фігури.

Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

Розглянемо окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей (рис. 2.28).

1. Миттєвий центр швидкостей фігури розміщений на перпендикулярі, який проведено до напрямку вектора швидкості деякої точки фігури (рис. 2.28а).

2. Миттєвий центр швидкостей фігури знаходиться в точці перетину двох перпендикулярів, які поставлені з двох точок фігури до напрямків векторів швидкостей цих точок (рис. 2.28б).

3. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні (рис. 2.28в), а самі точки не розміщені на одному терпен-дикулярі до напрямків їх швидкостей, то обертання в цей момент відсутнє і фігура здійснює «миттєво-поступальний» рух, а швидкості усіх точок фігури в цей момент рівні. Це є ознакою миттєво-поступального руху тіла.

Зазначимо, миттєво-поступальний і «дійсно» поступальний рухи мають відмінності. Під час поступального руху має місце рівність швидкостей і прискорень усіх точок тіла на кінцевому проміжку часу. У разі миттєво-поступального руху рівними є лише швидкості точок тіла і тільки в заданий час, тобто лише в цю мить.

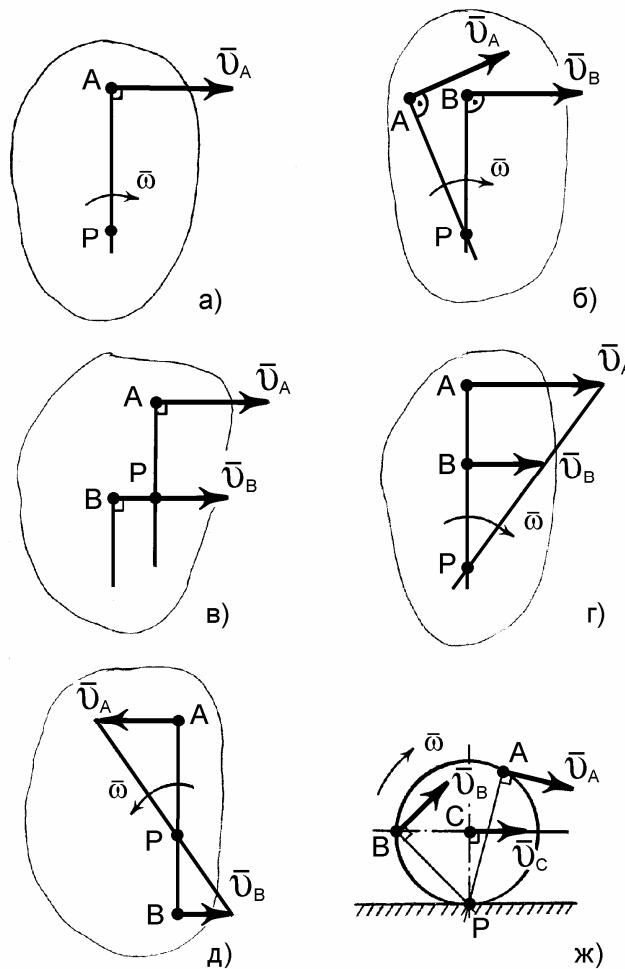


Рис. 2.28

4. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані у один і той самий бік (рис. 2.28г) і відкладені у певному масштабі, точки розміщені на одному терпен-дикулярі до напрямків їх

Частина перша

швидкостей, а модулі швидкостей не однакові, то миттєвий центр швидкостей розміщується у точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

Тоді, як бачимо з рис. 2.28г, можна записати:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{v_A}{v_B}.$$

5. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані в різні боки (рис. 2.28д) і відкладені в певному масштабі, точки розміщені на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей (модулі швидкостей можуть бути однакові, або різні), то миттєвий центр швидкостей також (як в п. 4) розміщений в точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

6. У разі кочення фігури (наприклад, колеса) без проковзування по деякій нерухомій лінії миттєвим центром швидкостей є точка контакту фігури з цією лінією (рис. 2.28ж), а швидкості всіх точок будуть обертальними навколо точки дотику P : $v_A \perp PA$; $v_B \perp PB$; $v_C \perp PC$.

Кутова швидкість фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню модуля швидкості будь-якої точки фігури до відстаней до миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP}.$$

Визначення швидкостей точок фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей

Розглянемо деякі практичні випадки визначення швидкостей точок фігури, що здійснює плоскопаралельний рух. Вибираючи миттєвий центр швидкостей за полюс і маючи на увазі, що швидкість його в даний момент часу дорівнює нулю, можна для будь-яких точок A і B цієї фігури скласти такі співвідношення:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP} = \bar{v}_{AP}, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}.$$

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює обертальній, коловій швидкості цієї точки відносно миттєвого центра швидкостей.

Якщо це так, то легко знайти модуль і напрям швидкості кожної точки фігури (якщо відомі положення МЦШ і кутова швидкість фігури):

$$v_A = \omega \cdot AP, \quad v_B = \omega \cdot BP,$$

звідки можна записати таке співвідношення:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}.$$

Модулі швидкостей різних точок фігури в кожний момент часу пропорційні їх відстаням до миттєвого центра швидкостей.

Напрямки векторів швидкостей різних точок фігури перпендикулярні прямим, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей, і спрямовані у бік обертання фігури (рис. 2.28ж).

Таким чином, швидкості різних точок плоскої фігури в будь-який момент часу розподіляються так, як би фігура обертається в цей момент часу навколо миттєвого центра швидкостей.

Це обертання відбувається навколо так званої осі обертання, яка проходить через миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до площини, в якій цей рух відбувається.

Зазначимо, що під час руху тіла положення миттєвого центра швидкостей змінюється в кожний момент.

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей, віднесене до рухомої або нерухомої системи координат, називають рухомою або нерухомою центроїдою.

Таким чином, нерухома центроїда – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на нерухомій площині Oxy (рис. 2.24), а рухома – це траєкторія миттєвого центра швидкостей на рухомій площині $Ax'y'$.

Наприклад, нерухомою центроїдою для колеса (рис. 2.28ж), яке котиться без ковзання горизонтально, є сама нерухома горизонтальна пряма, а рухомою центроїдою – коло, зв'язане з рухомою системою координат. У кожний момент часу рухома і нерухома центроїди мають загальну точку дотику – миттєвий центр швидкостей P .

Таку геометричну інтерпретацію плоско-паралельного руху надає теорема Пуансо:

Під час руху плоскої фігури рухома центроїда котиться нерухомою без ковзання.

Приклад 2.12

Розглянемо застосування теореми про розподіл прискорень у тілі під час плоскопаралельного руху.

У механізмі, зображеному на рис. 2.29, кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо нерухомої осі O і приводить до руху колесо II, що котиться без ковзання по поверхні колеса I. Радіуси коліс однакові. Знайти прискорення точки N колеса II.

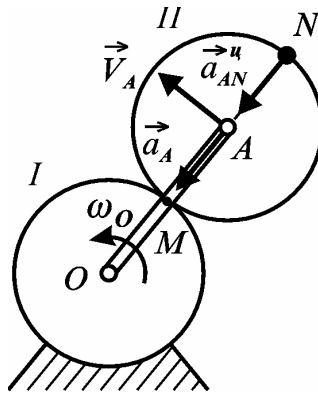


Рис. 2.29

Розв'язання

Згідно з теоремою, прискорення довільної точки плоскої фігури складається з прискорення полюса і прискорення обертального руху точки навколо полюса.

Полюс слід вибирати в точці, прискорення якої відоме, або його легко визначити з умови задачі.

Такою точкою є точка A , швидкість якої є сталою: $v_A = \omega_0 \cdot OA$.

Тому прискорення точки A дорівнює тільки нормальному прискоренню і напрямлене від точки A до центра O кривошипа OA :

$$a_A = 2\omega_0^2 r.$$

Щоб знайти прискорення \vec{a}_{AN} , згадаємо, що:

$$\vec{a}_{AN} = \vec{a}_{AN}^{ob} + \vec{a}_{AN}^y,$$

$$\text{де } a_{AN}^{ob} = \varepsilon \cdot AN; a_{AN}^y = \omega^2 AN.$$

Тут ω і ε – миттєва кутова швидкість і миттєве кутове прискорення колеса II, які треба визначити.

З умови кочення без ковзання випливає, що швидкість точки M колеса II дорівнює нулю, тому вона є миттєвим центром швидкостей колеса II.

Тоді миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \frac{v_A}{AM} = \frac{v_A}{r} = 2\omega_0 = const$$

і миттєве кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Отже, $a_{AN}^{об} = 0$; $a_{AN}^u = \omega^2 \cdot AN = 4\omega_0^2 \cdot r$.

Таким чином, прискорення точки N складається з двох векторів \vec{a}_A і \vec{a}_{AN}^u , напрямлених уздовж спільної прямої в один бік. Додаючи їх, маємо:

$$a_N = 6\omega_0^2 r.$$

Вектор \vec{a}_N напрямлений уздовж прямої NA від точки N до точки A .

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який рух тіла називають плоскопаралельним?
2. У якій точці слід вибирати полюс?
3. Чи залежать від вибору полюса характеристики поступального руху, обертального руху?
4. Чому дорівнює швидкість довільної точки тіла під час плоскопаралельного руху?
5. Що називають миттєвим центром швидкостей? Доведіть його існування.
6. Яке співвідношення існує між швидкостями точок тіла, якщо відоме положення миттєвого центра швидкостей?
7. Чому дорівнює прискорення точки тіла під час плоскопаралельного руху?
8. Які властивості має прискорення обертального руху точки навколо полюса?
9. Які способи для визначення положення миттєвого центра швидкостей ви знаєте?
10. Наведіть приклади плоскопаралельного руху тіл із техніки.

РОЗДІЛ III ДИНАМІКА

3.1. Динаміка Матеріальної Точки

3.1.1. Вступ. Задачі динаміки.

Динаміка вільної матеріальної точки

Пізнання законів руху тіл людством було дуже повільним і не завжди вдалим. Навіть великий Аристотель (IV ст. до н.е.) вважав, що тіло раптово припинить рух, якщо перестане діяти сила. Правильно сформульовані закони руху тіл, що відбуваються в природі, були відкриті внаслідок тривалих спостережень.

Основи динаміки розроблені у XVI-XVII ст., коли практика суспільного виробництва поставила перед людиною низку важливих проблем у військовій справі, судноплаванні, виробництві товарів тощо.

Відкриття М. Коперніком (XVI ст.) геліоцентричної системи світу, а Й. Кеплером (XVII ст.) – законів руху планет, відіграло найважливішу роль у розвитку динаміки.

Леонардо да Вінчі, Г. Галілей, Р. Декарт, Х. Гюйгенс (XVI-XVII ст.) – з цими іменами пов'язаний підготовчий період становлення динаміки. Л. да Вінчі досліджував рух тіла по похилій площині, тертя, питання теорії механізмів, ввів поняття моменту сили.

Галілей Г. експериментально довів закон падіння тіл у порожнині, досліджував рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, встановив закон пропорційності між вагою і масою тіла, сформулював принцип відносності класичної механіки.

Декарт Р. ввів поняття про кількість руху як міру механічного руху, відкрив закон збереження кількості руху, його ідеї виявилися плідними для подальшого розвитку динаміки.

Гюйгенс Х. досліджував фізичний маятник, вперше почав використовувати вирази осьового моменту інерції тіла і кінетичної енергії.

Засновником динаміки є І. Ньютон (XVII ст.). Він систематизував і узагальнив дослідження, пов'язані з динамікою, і показав шляхи її подальшого розвитку. Ньютон вперше сформулював основні закони динаміки, ввів поняття маси і узагальнив поняття сили. Він відкрив закон всесвітнього тяжіння як основу сучасної механіки і фізики. Систематичне викладення класичної механіки подано Ньютоном у творі «Математичні засади натуральної філософії» (1687 р.).

Вперше аналітично виклав динаміку Л. Ейлер (XVIII ст.), дійсний член Санкт-Петербурзької Академії наук. Він довів важливу теорему динаміки про зміну кінетичного моменту, створив теорію моментів інерції,

механіку суцільних середовищ, теорію стійкості, ввів поняття потенціального силового поля.

У цей же час М.В. Ломоносов відкрив загальний закон природи – закон збереження матерії і руху. На базі цього закону всі закони збереження механіки і фізики є конкретними проявами закону Ломоносова, який є природничо-науковою основою матеріалізму.

Подальший розвиток динаміки пов'язаний з працями Ж. Лагранжа, Л. Пуансо, С.В. Ковалевської, О.М. Ляпунова, М.Є. Жуковського, С.О. Чаплигіна, О.М. Крилова та ін.

Механіка тіл змінної маси заснована І.В. Мещерським. Цей розділ механіки став основою теорії реактивного руху і міжпланетних польотів К.Е. Ціолковського, подальший розвиток і практичне втілення її – у працях творця ракетної і космічної техніки С.П. Корольова.

У другій половині ХХ ст. з'явився новий напрям науки – робототехніка, науковою базою якого стала теоретична механіка. Особливістю робототехніки є те, що вона синтезує й об'єднує такі науки, як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. В Україні бурхливий розвиток отримала механіка суцільного середовища: теорія пружності і пластичності, гідроаеродинаміка. Дослідження вітчизняних учених Г.М. Савіна, О.М. Кільчевського, О.М. Гузя, В.Т. Грінченка є провідними у світовій науці.

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху моделей матеріальних об'єктів: точок, твердого тіла і матеріальної системи під дією прикладених сил з урахуванням властивостей мас.

Основою теоретичної механіки є декілька гіпотез, пов'язаних з уявленнями про простір і час, поняттями інерціальності системи відліку, поняттями сили і маси, а також систематизовані спостереження за звичайними рухами тіл макросвіту: закони Галілея – Ньютона.

Динаміка досліджує загальні властивості механічного руху як теорію достатньо повільних переміщень одних макроскопічних тіл відносно інших, поєднуючи особливості кінематичних властивостей руху з властивостями сил, які спричиняють цей рух, як внутрішній зв'язок між зовнішніми факторами (силами) і геометричними характеристиками рухів.

Теоретична або класична механіка є науковою основою, на якій побудована теорія відносності, механіка великих швидкостей, пов'язана з іншими просторово-часовими уявленнями про світ.

У динаміці розглядають дві основні задачі. Перша або пряма задача полягає у тому, щоб за заданими масою і законом руху тіла визначити силу або рівнодійну системи сил, під дією якої цей рух відбувається.

Друга або обернена задача динаміки – за заданими силами, прикладеними до тіла, масою і початковими умовами руху визначити закон руху, який цими обставинами обумовлюється.

Динаміку поділяють на динаміку матеріальної точки, динаміку твердого тіла і динаміку матеріальної системи.

Закони динаміки матеріальної точки

Основою динаміки є закони, сформульовані І. Ньютоном для матеріальної точки у творі «Математичні засади натуральної філософії». За уявленнями класичної механіки час і простір, де відбувається рух, вважаються об'єктивною реальністю, але абсолютними і однорідними. Абсолютність простору допускає незалежність механічного руху від властивостей простору в різних його точках і в різних напрямках, тобто, його однорідність і ізотропність. Це геометричний тривимірний Евклідов простір.

У класичній механіці допускається існування такого годинника, тривалість періоду якого не змінюється під час довільних переміщень тіл. Цей постулат еквівалентний твердженню про те, що величина цього часового проміжку відносно різних систем відліку, які рухаються довільно, однакова.

Згідно з уявленнями про час можна встановити одночасність двох подій на різних об'єктах незалежно від швидкості їхнього руху відносно Землі, що характеризує абсолютність часу. Однорідність часу передбачає довільний вибір початку відліку і вимір інтервалів між окремими моментами часу.

Незалежність властивостей абсолютних простору і часу від руху матеріальних об'єктів пов'язана з гіпотезою про миттєву передачу взаємодії між тілами через деякий порожній простір. За сучасними уявленнями миттєвих взаємодій в макросвіті не існує, вони здійснюються за допомогою силових полів, які є одним із різновидів матерії.

Можна вважати, що взаємодія передається з кінцевою швидкістю – зі швидкістю світла, а сукупність тіл і полів є єдиною матеріальною субстанцією. Під впливом взаємодії тіла можуть змінювати своє відносне розташування, тобто, переміщуватись у просторі. До того ж зміна відносного розташування характеризується тривалістю, яка виражається деякою функцією часу.

Простір і час – суть загальні форми існування матеріальних об'єктів. Створення теорії відносності підтвердило правильність такого уявлення. На думку Ейнштейна, «якщо б зникла матерія, то зникли б і простір, і час».

Таким чином, класична механіка вивчає такі переміщення тіл у просторі і часі, при яких процес передачі взаємодії тіл можна вважати

практично миттєвим, а самі процеси, які при цьому відбуваються у фізичних полях, можна не розглядати.

Таке уявлення про простір і час дає можливість ввести відносну систему відліку як сукупність системи координат, жорстко пов'язаної з тілом відліку, і відмітника часу (годинника), встановленого на цьому тілі. При цьому система відліку має бути такою, в якій ізольована матеріальна точка може безмежно довго перебувати у стані спокою чи рівномірного і прямолінійного руху – це інерціальна галілеєва система відліку.

З достатнім ступенем точності за нерухому інерціальну систему можна вибрати геліоцентричну систему відліку Коперника з початком у центрі мас Сонячної системи і ортогональними осями координат, спрямованими до «нерухомих» зірок. Називати останніх нерухомими правомірно, тому що, приміром, річне кутове зміщення більшості зірок становить приблизно $0,01''$. Тому, систему відліку Сонце–зірки приймають за тверде тіло для порівняно довгих проміжків часу.

Не слід думати, що неправильне розуміння Ньютоном абсолютного простору призводить до хибності його законів. Для умов Землі і «нешвидких» рухів вони досить точно відображають реальну земну картину.

Перший закон Галілея-Ньютона, закон інерції

Існує система відліку, де ізольована матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.

Закон інерції – один із фундаментальних законів природи. Він встановлює нерозривний зв'язок між матерією і рухом, характеризує намагання тіл зберегти той механічний рух, який тіло набуло раніше. Останнє називається властивістю інертності, що в перекладі з латинської означає «лінощі», «рутинність».

Отже, з цього закону випливає, що самовільно матеріальна точка не може змінити стан свого руху чи спокою. Тобто, рух матеріальної точки змінюється тільки в результаті її взаємодії з іншими тілами. Якщо рух відхиляється від рівномірного і прямолінійного, виникає прискорення відносно інерціальної системи відліку.

Відмінність від нуля абсолютного прискорення матеріальної точки свідчить про вплив інших тіл з певною інтенсивністю і спрямованістю, що характеризується в класичній механіці поняттям сили.

Кількісне співвідношення між силою і кінематичними параметрами, що характеризують взаємодію матеріальної точки з іншими матеріальними об'єктами, визначає другий закон Ньютона або основний закон динаміки.

Основний закон динаміки

|| *Прискорення вільної матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і напрямлене вздовж вектора сили.*

Якщо силу або рівнодійну декількох сил, прикладених до точки, позначити літерою \vec{F} , прискорення – літерою \vec{a} , масу матеріальної точки – m і вважати останню згідно з уявленнями класичної механіки сталою, то закон матиме вираз:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (3.1)$$

де сила \vec{F} може бути рівнодійною.

Співвідношення (3.1), яке встановлює зв'язок між силою, масою і прискоренням, є найважливішим у класичній механіці і називається *основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки* у векторній формі.

Наведемо коротку характеристику сили і маси.

Векторно-кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл називається силою.

За сучасними уявленнями основу механічних взаємодій становлять гравітаційні і електромагнітні сили – сили ваги, сили пружності, сили тертя, сили опору середовища.

За проявом сили можуть давати статичний і динамічний ефект. Перший викликає деформацію тіла, другий – зміну швидкостей точок тіла, тобто, прискорення.

Наприклад, ефект від сили ваги тіла, яке вільно рухається у повітрі чи вакуумі – зміна величини і напрямку вектора початкової швидкості і, як наслідок, зміна траєкторії від прямої до параболи.

Другий закон динаміки надає кількісні співвідношення між чинниками під час механічної взаємодії тіл, тому він є основою цього фундаментального узагальнення класичної механіки.

З іншого боку, якщо сили в розділі «Статика» розглядались сталими за величиною і напрямком, то «Динаміка», як правило, оперує зі змінними силами, які, взагалі, є функціями часу, відстані (координат) і швидкості:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}).$$

Але природа багатьох сил допускає, що вони можуть бути функціями від окремих кінематичних параметрів. Наприклад, сила гравітаційної взаємодії на підставі закону всесвітнього тяжіння визначається так:

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

де m_1 і m_2 – маси тіл; \mathcal{U} – гравітаційна стала, $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ – відносна відстань (\bar{r}_1 і \bar{r}_2 – радіуси-вектори мас в інерціальній системі відліку).

За описанням руху тіла в середовищі (повітря, рідина) сила опору, як встановлено експериментально, є функцією від швидкості:

$$\bar{F}_{on} = -\alpha \bar{v},$$

де α – коефіцієнт в'язкого тертя, який залежить від форми тіла і властивостей середовища.

Якщо швидкість збільшується, то сила опору може стати пропорційною квадрату, а то і кубу швидкості.

***Масою** матеріальної точки називається **фізична величина**, яка є **мірою інертних і гравітаційних властивостей тіла**, що моделює **точка**.*

Під інертними властивостями розуміють опір тіла у відповідь на зміну вектора швидкості, під гравітаційними – взаємне притягання тіла залежно від положення відносно земної поверхні. Тому не можна вважати масу коефіцієнтом пропорційності між силою і прискоренням (3.1), а визначати її методами, які відображають вище згадані властивості.

Перший метод пов'язаний з гравітаційними властивостями матерії і ґрунтується на законі всесвітнього тяжіння. Встановлено, що відношення ваги тіла до прискорення вільного падіння у порожнині у всіх точках земної кулі є сталою величиною. Це відношення визначає вагому масу

$$m_G = \frac{G}{g}, \tag{3.2}$$

де G – вага тіла; g – прискорення вільного падіння у вакуумі.

Із формули (3.2) випливає, що маси тіл і їх вага пропорційні. Тому можна одну з мас взяти за еталон одиниці маси і визначати інші маси зважуванням на терезах. Цей метод називається статичним.

Другий, динамічний метод, пов'язаний з інертними властивостями тіл. Якщо одна й та сама сила діє на тіла з різною масою, то вона викликає різні прискорення. Тоді з виразу (3.1) випливає

$$m_1 \cdot \bar{a}_1 = m_2 \cdot \bar{a}_2 \Rightarrow m_1 = m_2 \frac{a_2}{a_1}.$$

Якщо вибрати одну із цих мас за еталон, то за останнього виразу можна визначити іншу інертну масу.

Дослідами Б. Бесселя встановлено тотожність гравітаційної і інертної маси з точністю до десятого порядку мализни. Цей закон природи

Частина перша

називається принципом еквівалентності, він покладений в основу загальної теорії відносності. Оскільки прискорення g , що входить до формули (3.2), змінюється в різних місцях земної поверхні, то буде різною і вага деякого тіла, тоді як його маса залишається незмінною.

Таким чином, поняття маси зосереджує в собі дві найзагальніші властивості фізичних тіл, які беруть до уваги в теоретичній механіці.

Перша – властивість інертності (про це йдеться в другому законі механіки).

Друга – гравітаційна властивість. Указані характеристики тіл у теоретичній механіці відображають внутрішні матеріальні властивості фізичних тіл.

Існує більш загальне формулювання другого закону Ньютона.

Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює вектору прикладеної до точки сили.

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}, \quad (3.3)$$

де $m\bar{v}$ – кількість руху матеріальної точки як добуток маси на вектор швидкості.

Якщо маса не залежить від часу, то (3.3) можна спростити:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}.$$

Слід відмітити, що закон інерції можна одержати з другого закону (3.3), якщо система відліку інерціальна: $\bar{F} = 0$; $m = const$. Тоді $\bar{v} = const$: і швидкість зберігається протягом всього часу руху.

Основний закон динаміки у формі (3.1) дозволяє вибрати і основні одиниці механічних величин – довжину, масу і час.

Одиницею маси в Міжнародній системі одиниць СІ слугує *кілограм* (kg), як маса еталона.

Одиницею довжини слугує *метр* (m), **оддиницею часу** – *секунда* (s).

Одиниця сили є похідною одиницею. Один ньютон (N) є такою силою, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м/с^2 у напрямку вектора сили.

Таким чином, одиниці маси, довжини, сили і часу повинні визначатись з урахуванням основного закону динаміки, тому що ці категорії пов'язані між собою функціонально. Три з них – маса, довжина і час – в офіційній системі СІ є незалежними, для них існують еталони. Одиниця сили виводиться із основних одиниць за допомогою основного закону динаміки..

Третій закон Ньютона, принцип рівності дії і протидії

Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла. Коротко – дія дорівнює протидії.

При цьому слід враховувати: фізична взаємодія двох тіл, наслідком якої є механічний рух, хоча і викликає дві рівні за величиною і протилежні за напрямком сили, що діють по одній прямій, але вони не зрівноважуються, тому що дія і протидія прикладені до різних тіл.

Якщо, наприклад, буксирний катер тягне канатом баржу, то і баржа тягне назад катер з рівною силою. В цьому неважко переконатися, якщо з'єднати катер і баржу канатом через два динамометри, закріплені на катері і баржі. Показники на двох динамометрах будуть завжди однакові, навіть під час руху з прискоренням. Чому ж система рухається у напрямку сили тяги катера? Тому, що катер відштовхується від води за допомогою лопатей гребного гвинта. Тут також сили, які прикладені з боку води на лопаті гвинта і з боку гвинта на воду, завжди однакові і протилежні за напрямом. Останні також не зрівноважуються, тому що прикладені до різних тіл.

Третій закон Ньютона виконується і в неінерціальній системі відліку, тому що він не містить кінематичних характеристик матеріальних об'єктів.

Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції)

Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.

Із цього визначення можна зробити висновок, що кожна із сил надає точці прискорення, яке незалежне від дії інших сил. Цей закон впливає з аксіоми про паралелограм сил і справджується, якщо діючи на точку сили не залежать від її прискорення.

На підставі виразу (3.1)

$$m\bar{a}_1 = \bar{F}_1; m\bar{a}_2 = \bar{F}_2; \dots; m\bar{a}_n = \bar{F}_n.$$

Додамо ці вирази

$$m(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \bar{F}; \Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}, \quad (3.4)$$

де \bar{a} – векторна сума прискорень від дії кожної сили окремо;

$\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ – рівнодійна прикладених сил.

Частина перша

Отже, рух матеріальної точки під дією системи сил буде таким самим, як і під дією однієї сили, рівнодійної, що дорівнює їх векторній сумі.

Закони Ньютона є лише першим наближенням до дійсності, але добре узгоджуються з нею при «малих» швидкостях, навіть якщо властивості матеріальних об'єктів вважаються незалежними від властивостей простору і часу. Кількісні відхилення законів сучасної механіки від законів класичної виявляються тільки під час руху поблизу великих мас типу Сонця, де викривляється простір, або при величезних швидкостях, близьких до швидкості світла.

Насправді ж, простір і час є атрибутами рухомої матерії. Проте, у межах своєї компетентності теоретична механіка має велике значення при дослідженні механічних процесів, що зустрічаються на практиці. «Земна» класична механіка є фундаментом для теоретичних і практичних висновків сучасної науки й техніки. Закони Ньютона мають і велике методологічне значення. Дійсно, перший закон Ньютона постулює в динаміці принцип незнищеності матерії і руху. Другий закон встановлює пропорційність між силою і прискоренням, дає змогу розв'язувати конкретні задачі механіки, збагачує поняття сили. Третій закон Ньютона дозволяє глибше розкрити суть поняття сили, двобічної дії і протидії як взаємодії між двома матеріальними об'єктами, створюючи перехід до дослідження матеріальної системи.

Таким чином, сила як матеріальна категорія має джерелами фізичні тіла, між якими відбувається взаємодія, наслідком якої є перенесення механічного руху з одного тіла на інші тіла або перетворення енергії в рух.

Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

З розділу «Кінематика» відомо три способи задання руху матеріальної точки: векторний, координатний і натуральний. Відповідно до цього мають місце і форми складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. В основу цих рівнянь покладено основний закон динаміки (3.1).

1. Диференціальне рівняння у векторній формі

Оскільки в цьому разі прискорення матеріальної точки $\bar{a} = \ddot{\bar{r}}$, то диференціальне рівняння руху матиме такий вигляд:

$$m \ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}). \quad (3.5)$$

Диференціальне рівняння (3.5) є *основним рівнянням динаміки точки у векторній формі*.

2. Диференціальні рівняння у координатній формі

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначається у проєкціях на відповідні осі прямокутної системи декартових координат

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Проектуючи ліву і праву частини основного закону динаміки (16.1) на відповідні осі координат, отримуємо шукані рівняння

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}, \quad (3.6)$$

де $\sum_{k=1}^n F_{kx}$, $\sum_{k=1}^n F_{ky}$, $\sum_{k=1}^n F_{kz}$ – алгебраїчні суми проєкцій сил на осі x , y і z .

Рівності (3.6) мають шостий порядок і є *основними диференціальними рівняннями точки в координатній формі*.

3. Диференціальні рівняння у натуральній формі

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначаються у проєкціях на дотичну $\bar{\tau}$, нормаль \bar{n} і дорівнюють:

$$a^\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a^n = \frac{v^2}{\rho},$$

де v – швидкість матеріальної точки; ρ – радіус кривини траєкторії, по якій рухається точка.

Проекція прискорення точки на бінормаль відсутня $a^b = 0$. Проектуючи ліву і праву частини (3.1) на осі натурального тригранника, дістанемо

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^n F_k^\tau; \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_k^n, \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_k^b, \quad (3.7)$$

де останнє рівняння в проєкції на бінормаль є рівнянням статички.

Рівності (3.7) є *диференціальними рівняннями руху точки в натуральній формі*.

Як видно з виразу (3.1), вектор рівнодійної сили колінеарний вектору прискорення і розміщений у стичній площині траєкторії, тобто, її проєкція

Частина перша

на біномаль дорівнює нулю. Про це інформує третє рівняння системи (3.7).

Рівнянню (3.5) надають перевагу при доведеннях теорем. Рівняння (3.6) застосовують як для розв'язування задач, так і для теоретичних досліджень.

Рівняння (3.7) застосовують, як правило, якщо задана траєкторія руху точки, тобто, під час дослідження невільної матеріальної точки.

Дві задачі динаміки матеріальної точки

Розглянемо основні задачі динаміки матеріальної точки. Оскільки основний закон динаміки точки (3.1) і диференціальні рівняння руху (3.5), (3.6), (3.7) мають у лівій частині прискорення – кінематичну характеристику руху, а у правій частині – векторну суму сил, які діють на точку, або суму проекцій – силову характеристику руху, то, залежно від того, яка характеристика руху потребує визначення, формулюються дві основні задачі динаміки матеріальної точки.

Перша задача динаміки точки

За заданими масою матеріальної точки і кінематичним законом її руху визначити рівнодійну силу, яка спричиняє цей рух.

У цьому випадку розв'язання задачі зводиться до диференціювання кінематичних рівнянь руху матеріальної точки. Тому ця задача називається диференціальною.

Який би спосіб не застосовували, треба знайти проекції сили на осі, які дорівнюють добутку маси на проекцію відповідного прискорення.

Схема розв'язування першої задачі динаміки матеріальної точки проста. Розглянемо алгоритм її розв'язання на прикладі.

Приклад 3.1

Матеріальна точка рухається згідно з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt - ct^2, \end{cases}$$

де x, y – в метрах, t – в секундах, a, b, c – сталі величини.

Визначити рівнодійну силу, яка діє на цю матеріальну точку.

Розв'язання

Знайдемо проекції швидкості на координатні осі x, y як першу похідну за часом від координат

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a; \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = b - 2ct.$$

Знайдемо проекції прискорення матеріальної точки на осі координат як другу похідну за часом від координат

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = -2c.$$

Тоді проекції рівнодійної сили на координатні осі дорівнюють (3.6):

$$F_x = ma_x = 0, \quad F_y = ma_y = -2mc.$$

Рівнодійна сила, що діє на матеріальну точку

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2mc.$$

Ця сила діє паралельно осі Oy , тому що $F_x = 0$, і спрямована у бік від'ємних значень даної осі, адже $F_y = -2mc$.

Друга задача динаміки точки

Згідно із заданими силами, які діють на матеріальну точку певної маси, і початковими умовами руху (координати і проекції швидкості в деякий початковий момент часу) визначити закон руху точки.

Друга або обернена задача динаміки матеріальної точки розв'язується методом інтегрування диференціальних рівнянь руху: треба здійснити перехід від проекцій прискорень, які введені в диференціальних рівняннях, до координат у функції часу. Тому друга задача динаміки називається інтегральною. При цьому повинні бути задані початкові умови руху матеріальної точки: координати і проекції швидкості точки у початковий момент часу. Останні мають конкретний вплив на остаточний результат.

Таким чином, під час розв'язування другої задачі динаміки *відомі сили, які діють на точку певної маси, координати і проекції швидкостей у певний початковий момент часу. Необхідно знайти кінематичні рівняння руху точки* (закон руху).

Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (3.6) або (3.7). Визначивши проекції сил на осі координат F_x, F_y, F_z і підставивши їх в праву частину рівнянь, двічі інтегруємо систему.

Частина перша

Розв'язком цієї системи рівнянь є функції координат від часу і шість сталих інтегрування C_1, C_2, \dots, C_6 :

$$x = x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad y = y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \quad z = z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \quad (3.8)$$

Для визначення сталих інтегрування підставимо початкові умови – координати і проекції швидкостей в деякий початковий момент часу t_0

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; & z(t_0) &= z_0; \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0; & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0; & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Остаточний розв'язок

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вирази (3.10) називають загальним розв'язком диференці-альних рівнянь руху точки.

Розглядаючи рух точки у натуральній формі для розв'язання оберненої задачі, застосовують диференціальні рівняння (3.7). Початковими умовами руху в цьому випадку будуть значення дугової координати $s(t_0)$ і початкова швидкість $v(t_0) = \dot{s}_0$.

Інтегрування диференціальних рівнянь руху вільної точки

Інтегрування диференціальних рівнянь у значній мірі залежить від виду функції сили, проекції якої підставляють у праві частини рівнянь. У загальному випадку сила є функцією одночасно трьох кінематичних параметрів: часу, переміщення і швидкості $\bar{F} = \bar{F}(t, s, v)$. Інтегрування в цьому випадку є складною задачею.

Проте, в техніці і природі часто зустрічаються сили, які залежать тільки від одного кінематичного параметра. Так, сили, що мають місце при дослідженні роботи різного роду механізмів і машин, явно залежать від часу.

До позиційних сил, що залежать від положення точки (переміщення), належать сили пружності, які виникають у пружних тілах при їх деформації, а також сили притягання або відштовхування, що виникають при взаємодії тіл, які є наслідком гравітаційних або електромагнітних сил.

Сили, що залежать від швидкості, зустрічаються при дослідженні руху тіл у в'язкому середовищі (рідкому, газоподібному).

Алгоритм розв'язання другої задачі динаміки

1. Складання розрахункової схеми і диференціального рівняння руху точки:

а) вибрати початок відліку, поєднуючи його з початком руху, і провести координатну вісь, як правило, у бік руху, а в умовах рівноваги початок відліку зручно вибрати у положенні статичної рівноваги;

б) зобразити точку, що рухається, у довільному положенні, але так, щоб було $v > 0$. Останнє є суттєвим, якщо серед сил є такі, що залежать від швидкості. Показати всі діючі на точку сили;

в) підрахувати суму проєкцій всіх сил на координатну вісь і підставити цю суму в праву частину диференціального рівняння. При цьому всі змінні сили виразити через ті кінематичні параметри t, \bar{r}, \bar{v} , від яких вони залежать.

2. Інтегрування диференціального рівняння руху:

Інтегрування відбувається методами вищої математики і залежить від вигляду правої частини рівняння, тобто, від формул прикладених сил. У випадку, коли сила залежить тільки від одного параметра: часу, переміщення або швидкості, то рівняння прямолінійного руху можна інтегрувати методом відокремлення змінних. Якщо при цьому необхідно визначити тільки функцію швидкості від часу, то для цього обмежуються одним інтегруванням рівняння.

3. Визначення довільних сталих інтегрування

Для визначення довільних сталих інтегрування потрібно використати початкові умови: координати і проєкції швидкостей в деякий час або на початку руху t_0 . Сталі інтегрування визначаються безпосередньо після кожного інтегрування.

Якщо у заданого диференціального рівняння змінні величини можна відокремити, то іноді використовуються визначені інтеграли у відповідних границях.

4. Знаходження шуканих величин і аналіз одержаних результатів.

Для створення можливостей аналізу отриманого розв'язку методом підрахунку розмірності необхідно проводити розв'язування задачі у загальному вигляді, а числові дані підставляти тільки в остаточний результат.

Надамо приклади розв'язування другої задачі динаміки у випадках, якщо сили змінюються в залежності від часу, переміщення і швидкості.

Прямолінійний рух точки

Припустимо, що матеріальна точка рухається прямолінійно, тоді вісь x треба направити у бік руху точки, крім того

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow F_y = 0; F_z = 0.$$

Рушійна сила повинна бути спрямована вздовж осі $F_x = F$. Проте, ця умова прямолінійності руху точки є необхідною, але недостатньою. Потрібно, щоб і початкова швидкість була спрямована вздовж осі $v_0 = v(t_0) = v_{0x}$.

1. Рух точки під дією сили, яка змінюється з часом

Приклад 3.2

Трактор вагою G під час розгону із стану спокою рухається прямолінійно по горизонталі і його сила тяги збільшується пропорційно часу $F = kt$, де t – час у секундах; k – сталий коефіцієнт пропорційності.

Визначити закон руху трактора під час розгону $x = x(t)$.

Розв'язання

Трактор рухається поступально, тому приймаємо модель точки. Направимо вісь x у напрямку руху, а початок відліку помістимо в нерухому точку, де трактор перебував на початку руху, коли $t_0 = 0$, тоді початкова координата $x(t_0) = x_0 = 0$ і початкова швидкість $v(t_0) = v_0 = 0$.

Запишемо диференціальне рівняння (3.6) в проекції на вісь x

$$m = \frac{G}{g}; \quad m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{dv_x}{dt} = F_x = kt. \quad (a)$$

Відокремимо змінні у виразі (а), для чого помножимо на dt ліву і праву частини рівняння і інтегруємо

$$\int dv_x = \frac{k}{m} \int t dt + C_1 \Rightarrow v_x = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1. \quad (б)$$

Підставимо у вираз (б) $v_x = \frac{dx}{dt}$, знову відокремимо змінні і інтегруємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 \Rightarrow \int dx = \frac{k}{m} \int \frac{t^2}{2} dt + C_1 \int dt + C_2.$$

Після другого інтегрування

$$x = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \quad (в)$$

Для визначення сталих інтегрування в рівняння (б) і (в) підставимо початкові умови: якщо $t = t_0 = 0$, то $v(t_0) = v_{0x} = 0$.

Розв'язуючи алгебраїчні рівняння, дістанемо $C_1 = 0; C_2 = 0$.

Остаточно закон руху :

$$x = \frac{kg}{6G} t^3 (м).$$

2. Рух точки під дією сили, пропорційної швидкості

Приклад 3.3

Тіло M вагою \bar{G} падає вниз без початкової швидкості із точки O , яку оберемо за початок координат (рис. 3.1).

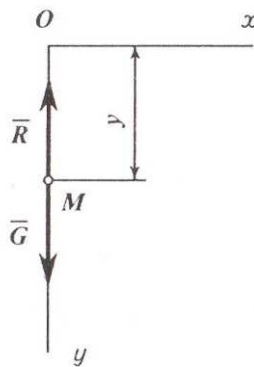


Рис. 3.1

Розв'язання

Припустимо, що задане тіло мале для земних умов, тому приймаємо його за точку. Складемо диференціальне рівняння руху тіла під дією сили ваги \bar{G} і сили опору повітря \bar{R} в проекції на вісь y (3.6)

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{y} = G_y - R_y = mg - \alpha v. \quad (а)$$

Знизимо порядок рівняння (а), переходячи до $\dot{y} = \frac{dv}{dt}$, і позначимо

$$\frac{\alpha}{m} = k; \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow dv = (g - kv)dt. .$$

Відокремимо змінні $\frac{dv}{g - kv} = dt$.

Частина перша

Введемо нову змінну $u = g - kv \Rightarrow du = -kdv \Rightarrow dv = -\frac{du}{k}$ і отримаємо

рівняння $\frac{du}{u} = -kdt$. Інтегруємо

$$\ln u = -kt + C_1 \Rightarrow \ln(g - kv) = -kt + C_1. \quad (\text{б})$$

Із рівняння (б) визначимо значення C_1 , підставивши початкові умови: якщо $t = t_0 = 0$, то

$$v(t_0) = v_0 = 0 \Rightarrow \ln(g - k \cdot 0) = -k \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln g.$$

Підставимо значення C_1 в рівняння

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g \Rightarrow \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt. \quad (\text{в})$$

Потенціюємо вираз (в) і визначаємо швидкість

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (\text{г})$$

Із аналізу виразу (г) видно, якщо $t \rightarrow \infty$, $e^{-kt} \rightarrow 0$, $v \rightarrow \frac{g}{k}$, то швидкість стає максимальною і сталою $v_{\max} = \frac{g}{k}$, а рух – рівномірним.

Представимо рівняння (г) у вигляді

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \Rightarrow dy = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt. \quad (\text{д})$$

Інтегруємо рівняння (д)

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2. \quad (\text{е})$$

Для визначення C_2 підставимо у вираз (е) початкові умови

$$t = t_0 = 0; y = y_0 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{g}{k^2} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Підставимо знайдене значення C_2 у вираз (е) і отримаємо закон руху

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

3. Рух точки під дією сили, яка залежить від переміщення

Приклад 3.4

Матеріальна точка M масою m рухається вздовж осі x під дією сили, пропорційної відстані $F = kmx$, де $k = 4$. На початку руху, якщо $t = t_0 = 0$, то координата і швидкість $x_0 = 5$ м; $v_0 = 2$ м/с.

Визначити закон руху точки $x = x(t)$.

Розв'язання

Складаємо диференціальне рівняння руху в проекції на вісь x (3.6)

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{x} = F_x = kmx.$$

Після скорочень маємо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} - 4x = 0. \tag{а}$$

Рівняння (а) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x = Ae^{ut}. \tag{б}$$

Взявши першу \dot{x} і другу \ddot{x} похідні за часом від виразу (б), підставимо їх у рівність (а) і отримаємо характеристичне рівняння

$$u^2 - 4 = 0,$$

корені якого $u_1 = 2$; $u_2 = -2$.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (а)

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \tag{г}$$

Для визначення двох сталих інтегрування C_1 і C_2 треба друге рівняння, яке отримаємо, взявши похідну за часом від виразу (г)

$$v = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \tag{д}$$

Підставивши у вирази (г) і (д) початкові умови, дістанемо алгебраїчні рівняння, з яких і визначимо сталі інтегрування

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2; \\ 2 = 2C_1 - 2C_2. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3; C_2 = 2.$$

Шуканий закон або рівняння руху точки

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t} \text{ (м)}.$$

Криволінійний рух точки

Приклад 3.5

Розглянемо рух важкої матеріальної точки, наприклад, каменя, який кинули під кутом α до горизонту в площині xOy з початковою швидкістю v_0 і на який діє тільки сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ (рис. 3.2).

Визначити рівняння руху $x(t)$, $y(t)$, рівняння траєкторії $y = f(x)$, час польоту t_1 , дальність польоту L і висоту польоту h .

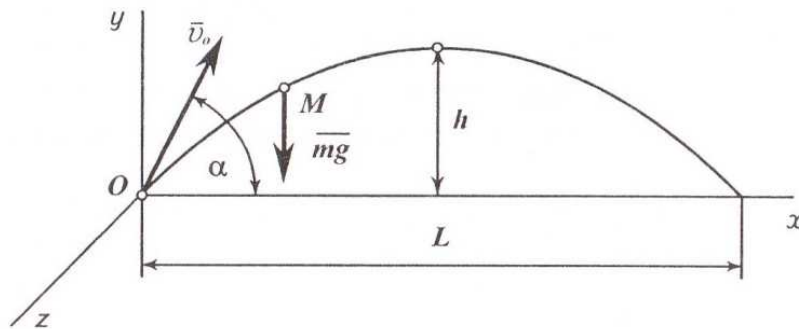


Рис. 3.2

Розв'язання

Користуючись розрахунковою схемою (рис. 3.2), складемо два диференціальні рівняння руху точки (3.6) в проєкціях на дві координатні осі

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0; \\ m\ddot{y} = -mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \quad (\text{a})$$

Початкові умови при $t = 0$:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad v_{0x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha; \quad v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Інтегруємо диференціальні рівняння (а) і дістанемо закон зміни проєкцій швидкостей

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2. \end{cases} \quad (\text{б})$$

Далі інтегруємо рівняння (б) і отримаємо рівняння руху

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_3; \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \end{cases} \quad (\text{в})$$

Підставляючи початкові умови, визначаємо із рівнянь (б) і (в) сталі інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4

$$\begin{aligned} C_3 &= 0; & C_1 &= v_0 \cos \alpha; \\ C_4 &= 0; & C_2 &= v_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Підставимо сталі інтегрування у вирази (б), (в) і остаточно визначимо закон зміни швидкостей і закон руху точки

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha; \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) \cdot t; \\ y = (v_0 \sin \alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (\Gamma)$$

Для визначення рівняння траєкторії руху точки $y = f(x)$ виключимо параметр t з останніх рівнянь руху (Г)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{(v_0 \sin \alpha) x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}; \\ y = tg \alpha \cdot x - \frac{g(1 + tg^2 \alpha)}{2v_0^2} x^2. \end{cases} \quad (\Delta)$$

Отримане рівняння (д) траєкторії руху $y = f(x)$ відповідає параболі.

Визначаємо із виразу (Г) час польоту t_1 в момент падіння точки на землю, коли $y = 0$

$$y = 0; \Rightarrow (v_0 \sin \alpha) t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0; \Rightarrow v_0 \sin \alpha = \frac{gt_1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Дальність польоту $L = x(t_1)$ визначимо із виразу (Г)

$$L = x(t_1) = (v_0 \cos \alpha) t_1 = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальна висота польоту $h = y(t_2)$ визначиться в момент

половини шляху і часу польоту $t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$;

$$h = y_{\max} = (v_0 \sin \alpha) t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g(v_0^2 \sin^2 \alpha)}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

3.1.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Рух невільної матеріальної точки у просторі обмежений певними умовами або тілами, які називаються в'язями.

В'язі примушують точку рухатись по деякій поверхні або по лінії, яка є наслідком перетину двох поверхонь.

Вивчаючи рух невільної точки, використовують аксіому про звільнення від в'язей. Вона дозволяє вважати точку вільною, якщо умовно відкинути фізичні в'язі і замінити їхню дію реакціями цих в'язей.

Диференціальне рівняння у векторній формі для невільної матеріальної точки має такий вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (3.11)$$

де \bar{F} – рівнодійна активних сил;

\bar{R} – рівнодійна сил реакцій в'язей.

Спроектуємо ліву і праву частини виразу (3.11) на осі прямокутної системи декартових координат x, y, z і осі натуральної системи координат τ, n, b

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + R_x, & m \frac{dv}{dt} &= F_\tau + R_\tau, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + R_y, & m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + R_z, & 0 &= F_b + R_b. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рівності (3.12) є диференціальними рівняннями руху невільної матеріальної точки в прямокутних декартових (ліворуч) і натуральних осях координат (праворуч).

Під час розв'язання задачі невільної матеріальної точки зустрічаються певні складності. Якщо взяти рівняння (3.12) в декартових координатах, то система містить три невідомих проекції в'язі, як функції часу. Тому треба скласти три додаткові рівняння, які б враховували відповідні рівняння в'язей і їхні властивості.

3.1.3. Принцип д'Аламбера для невільної матеріальної точки

Закони Ньютона стосуються руху вільної матеріальної точки. На невільну точку накладені обмеження у вигляді умов в'язі, які реалізуються за допомогою сил реакцій. Аксіома про звільнення від в'язей дає

можливість звести будь-яку невільну точку до вільної, якщо включити до числа активних сил і реакції відповідних в'язей.

Тому метод, який базується на принципі д'Аламбера, що розглядається у даному параграфі, еквівалентний основному закону динаміки і аксіомі про звільнення від в'язей. Згаданий метод ефективно використовується для розв'язування першої задачі динаміки невільної матеріальної точки, коли заданий закон її руху, а треба визначити шукану силу або силу реакції в'язі, яка обмежує рух точки в певному напрямі.

Припустимо, що невільна матеріальна точка M рухається за заданою траєкторією (рис. 3.3) під дією рівнодійної активних сил

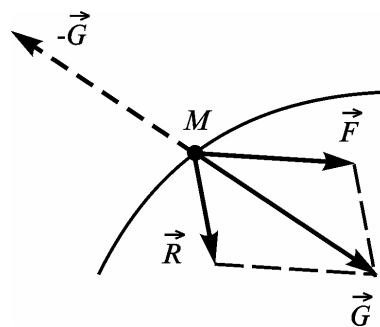


Рис. 3.3

\bar{F} і рівнодійної реакцій в'язей \bar{R} . На підставі аксіоми про паралелограм сил векторна сума сил \bar{F} і \bar{R} дорівнює \bar{G} .

Запишемо у векторній формі диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R} = \bar{G}. \quad (3.13)$$

Перепишемо рівняння (3.13)

$$\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0. \quad (3.14)$$

Силу $(-m\bar{a})$ називають *силою інерції точки* і позначають

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \quad (3.15)$$

Оскільки векторна сума сил дорівнює нулю, то, на перший погляд, точка перебуває у стані рівноваги.

Але згадана рівновага є умовною, тому що сили \bar{F} і \bar{R} прикладені до точки M , а сила $(-m\bar{a})$, яка дорівнює $(-\bar{G})$, до цієї точки не прикладена.

Силою інерції матеріальної точки називають **вектор $\bar{\Phi}$** , який дорівнює за модулем **добутку маси точки на її прискорення** і спрямований протилежно вектору прискорення \bar{a} .

Частина перша

Сила інерції є головним вектором сил протидії, прикладених до зовнішніх тіл, одні з яких є джерелами активних сил, інші – в'язями, тому в природі існують реально тільки її складові, прикладені до різних тіл.

Лише тоді, коли точка взаємодіє з одним тілом, головний вектор сил інерції фізично існує у вигляді однієї сили.

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.16)$$

Рівність (3.16) є математичним відображенням принципу д'Аламбера. Сформулюємо цей принцип для матеріальної точки.

Активні сили і реакції в'язей, прикладені до точки, умовно зрівноважуються прикладеною до точки силою інерції.

Якщо рух точки заданий координатним способом, то сила інерції

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -(m\ddot{x} \cdot \bar{i} + m\ddot{y} \cdot \bar{j} + m\ddot{z} \cdot \bar{k}), \quad (3.17)$$

де \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} – проекції прискорення точки на відповідні осі координат. Проекції сили інерції на осі і повна сила інерції визначаються:

$$\Phi_x = -m\ddot{x}; \quad \Phi_y = -m\ddot{y}; \quad \Phi_z = -m\ddot{z}; \quad \Phi = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}.$$

Якщо рух точки заданий натуральним способом, то сила інерції

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -\left(m \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + m \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n} \right), \quad (3.18)$$

де $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – дотична складова прискорення; $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ – нормальна складова прискорення; ρ – радіус кривини траєкторії точки.

$$\text{Або} \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_n; \quad \bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau; \quad \bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n,$$

де $\bar{\Phi}_\tau$ – тангенціальна (дотична) складова сили інерції точки;

$\bar{\Phi}_n$ – нормальна складова сили інерції точки або відцентрова сила.

Припустимо, що точка M масою m розміщена на обертовому тілі і рухається разом з тілом на відстані r від осі O (рис. 3.4).

Тоді сила інерції точки визначається так:

$\Phi_\tau = ma_\tau = mr\varepsilon$ – тангенціальна складова сили інерції точки M ;

$\Phi_n = ma_n = m\omega^2 r$ – нормальна або відцентрова складова сили інерції.

Модуль повної сили інерції матеріальної точки

$$\Phi = \sqrt{\Phi_\tau^2 + \Phi_n^2} = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

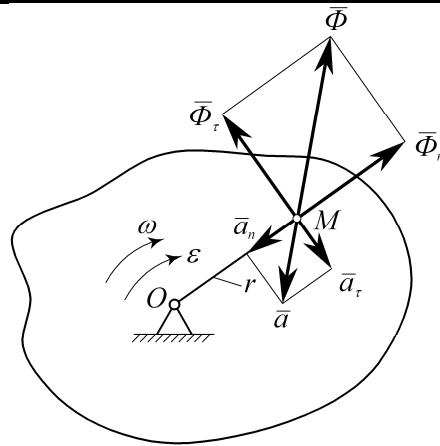


Рис. 3.4

Рівність (3.16) не є умовою рівноваги цих сил, оскільки вони прикладені до різних тіл: активна сила і реакція в'язі прикладена до матеріальної точки або тіла, а сила інерції – до тіл, що зумовлюють прискорення точки відносно абсолютної системи координат.

Сила інерції матеріальної точки вважається фіктивною, тому що до самої точки вона не прикладена, а може бути прикладена до тих тіл, які надають точці прискорення або до в'язі, яка обмежує її рух. К тому ж, насправді, точка не перебуває в рівновазі, а має прискорення.

Принцип д'Аламбера є формально-математичним методом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статички, проте, він дає математично точні і прості співвідношення для ефективного розв'язання першої задачі динаміки.

Векторному рівнянню (3.16) відповідають три рівняння в проєкціях

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0, F_y + R_y + \Phi_y = 0, F_z + R_z + \Phi_z = 0. \quad (3.19)$$

Значення принципу д'Аламбера полягає в тому, що він дає змогу скласти рівняння руху невіЛЬНОї точки у формі рівнянь рівноваги.

Зрозуміло, що принцип д'Аламбера не дає можливості подолати складнощі при розв'язанні другої задачі динаміки, пов'язані з інтегруванням диференціальних рівнянь руху.

Приклад 3.6

Платформа з вантажем масою m опускається вниз з прискоренням \bar{a} (рис. 3.5). Визначити реакцію платформи \bar{N} .

Розв'язання

Оскільки рух платформи є поступальним, то він ідентичний руху точки. Покажемо на схемі активну силу ваги \bar{G} , реакцію платформи \bar{N} і силу інерції $\bar{\Phi}$.

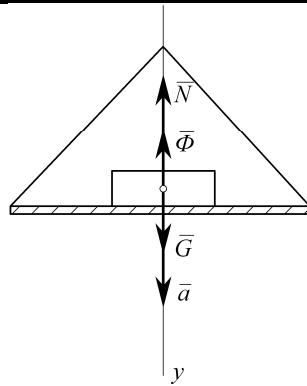


Рис. 3.5

$|\bar{\Phi}| = ma$ – сила інерції вантажу, $G = mg$ – вага вантажу.

Прикладемо умовно до вантажу силу інерції і запишемо рівняння рівноваги як суму проєкцій сил на вісь y :

$$\sum F_{ky} = 0; \Rightarrow G - \Phi - N = 0.$$

Звідси реакція платформи

$$N = G - \Phi = mg - ma = m(g - a) = G(1 - a/g).$$

Якщо прискорення вантажу дорівнює прискоренню вільного падіння ($a = g$), то реакція платформи $N = 0$ (умова невагомості).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає динаміка, які її основні задачі?
2. Сформулюйте основні закони динаміки.
3. Напишіть диференціальні рівняння руху точки в координатній і натуральній формах.
4. Напишіть диференціальні рівняння руху невіЛЬНОЇ матеріальної точки.
5. Як формулюється і розв'язується перша задача динаміки?
6. Як формулюється і розв'язується друга задача динаміки?
7. Що таке початкові умови руху точки?
8. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь руху?
9. Якими способами зручніше розв'язувати задачі механіки?
10. Чому перша задача динаміки називається диференціальною, а друга – інтегральною?
11. Визначте поняття сили інерції.
12. Як виражається сила інерції точки в декартових і натуральних осях?
13. Як формулюється принцип д'Аламбера для матеріальної точки?

14. Якою є умова невагомості тіла?

3.1.4. Коливання матеріальної точки

Коливальний рух – це рух, при якому деякі параметри цього руху періодично змінюються і повторюються.

Якщо параметри коливального руху змінюється за законом синуса або косинуса, то такий рух називається *гармонічним коливальним рухом*.

Наука про коливання складає основу ряду областей фізики і техніки. Коливання, які розглядаються у різних галузях, відрізняються за фізичною суттю (механіка, радіотехніка, акустика тощо), але основні закони цих коливань залишаються ідентичними.

Тому вивчення і дослідження механічних коливань є важливим не тільки для вдосконалення техніки, але й для багатьох інших галузей.

Кінематика гармонічних коливань

Якщо точка M рухається вздовж кола радіусом R рівномірно (рис. 3.6), то радіус точки OM обертається рівномірно навколо осі O з кутовою швидкістю ω за законом $\varphi = \alpha + \omega t$. Точка M_0 є початковим положенням на траєкторії, яке визначається кутом α .

Точка M_1 , що є проекцією точки M на вісь x , рухається за законом

$$x = OM_1 = OM \cos(\omega t + \alpha) = R \cos(\omega t + \alpha). \quad (3.20)$$

Аналогічно, точка M_2 , проекція точки M на вісь y , здійснює такий закон руху

$$y = OM_2 = OM \sin(\omega t + \alpha) = R \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.21)$$

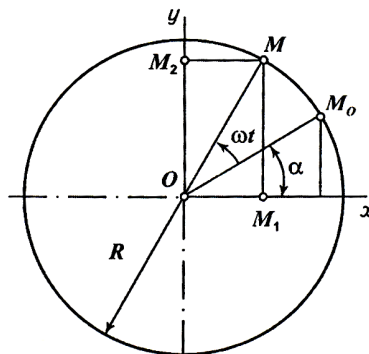


Рис. 3.6

Точку M відносно точок M_1 і M_2 називають допоміжною.

Частина перша

Таким чином, якщо допоміжна точка M рухається рівномірно вздовж кола радіусом R , то її проекції на координатні осі x і y здійснюють *гармонічні коливання* згідно з функціями синуса або косинуса.

Величина R , що стоїть множителем перед функціями синуса або косинуса, називається *амплітудою коливань*.

Амплітудою називається максимальне відхилення точок M_1 і M_2 від точки O , як середнього положення або положення рівноваги.

Величина ω для точок M_1 і M_2 є *коловою або циклічною частотою*, це кутова швидкість радіуса допоміжної точки M .

Колова частота вимірюється в $[рад/с], [с^{-1}]$

Фазою коливань в радіанах називається вираз $(\omega t + \alpha)$, де α є початковою фазою коливань, коли час $t = 0$.

Повне коливання точок M_1 і M_2 відбудеться тоді, коли кожна з точок двічі пройде через те ж саме положення, а допоміжна точка M здійснить один повний оберт.

Найменший проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання, а точка буде мати ту ж саму координату, називається періодом коливань T (с).

$$\text{Очевидно, що } \omega \cdot T = 2\pi; \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}; \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.22)$$

Кількість коливань за одиницю часу (за одну секунду) називається *частотою коливань* і вимірюється в герцах [Гц].

$$f = \frac{1}{T}; \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Гц}]. \quad (3.23)$$

Класифікація коливань

Коливальний рух матеріальної точки відбувається за умови, якщо на точку M , що відхиляється від положення спокою або рівноваги (точка O), діє сила \vec{F} , яка намагається повернути точку в попереднє положення рівноваги. Така сила називається *поновлювальною* (рис. 3.7).

Практично важливими є випадки, коли поновлювальна сила, пропорційна величині відхилення, є лінійною функцією переміщення (деформації)

$$P = c \cdot OM,$$

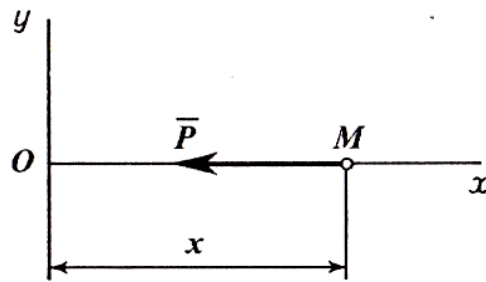


Рис. 3.7

де c – коефіцієнт пропорційності,

OM – переміщення точки або деформація пружного елемента.

Прикладом такої сили є сила пружності пружини, шини, деформованого тіла.

Коефіцієнт пропорційності у цьому разі називають **лінійним коефіцієнтом жорсткості, який чисельно дорівнює силі, що припадає на одиницю переміщення** (деформації пружини). Одиницею вимірювання коефіцієнта жорсткості у системі одиниць SI є H/m .

Коливання можуть відбуватись і під дією сил, підпорядкованих іншим законам.

На основі енергетичного балансу прямолінійні коливання матеріальної точки поділяються на чотири основні типи.

1. **Вільні коливання** під дією поновлювальної сили;
2. **Вільні згасаючі коливання** під дією поновлювальної сили і сили опору, пропорційної першому степеню швидкості;
3. **Змушені коливання без опору** під дією поновлювальної сили і збурювальної сили;
4. **Змушені коливання з опором** під дією поновлювальної сили, сили опору і збурювальної сили.

Динаміка коливань. Вільні коливання матеріальної точки

Вільні коливання точки відбуваються під дією поновлювальної сили, яка є лінійною функцією переміщення точки від положення рівноваги і завжди спрямована в напрямку до положення рівноваги, де б точка в даний момент часу не знаходилась.

Розглянемо динаміку прямолінійних вільних коливань на прикладі коливання вантажу на пружині вздовж осі x , яку спрямуємо вниз у бік руху тіла (рис. 3.8). Довжина пружини у недеформованому стані l_0 .

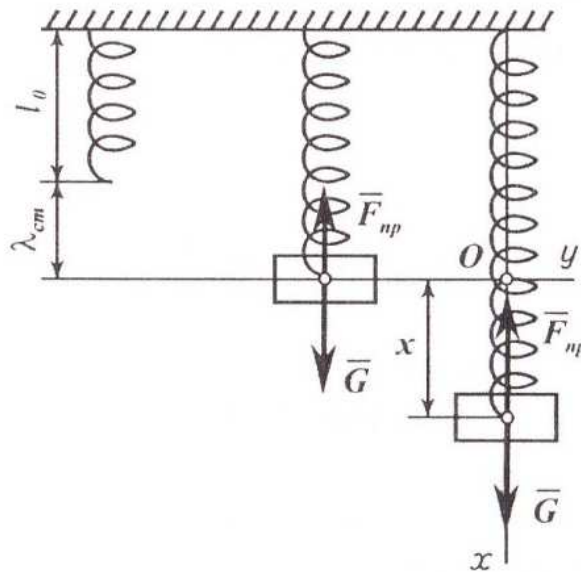


Рис. 3.8

Поволі відпустимо вантаж, він опиниться в положенні статичної рівноваги. Відношення ваги вантажу до статичної деформації λ_{cm} , якщо система пружина – вантаж перебуває у стані рівноваги є **коефіцієнтом жорсткості пружини** c [Н / м].

$$c = G / \lambda_{cm}; \Rightarrow G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

У стані рівноваги сила пружності дорівнює силі ваги

$$F_{np} = G = c \cdot \lambda_{cm}.$$

Коливання вантажу масою m відбувається навколо положення статичної рівноваги O , який називається **центром коливань**. Якщо вантаж відхилився від цього положення, то на нього крім сили ваги діють і дві складові сили пружності пружини, статична і динамічна

$$F_{np} = c(\lambda_{cm} + x) = c\lambda_{cm} + cx.$$

Складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь x

$$m\ddot{x} = G - F_{np}; \Rightarrow m\ddot{x} = c \cdot \lambda_{cm} - c(\lambda_{cm} + x); \Rightarrow m\ddot{x} = -c \cdot x,$$

де $(c \cdot x)$ – поновлювальна сила, яка є рівнодієюною сили ваги і сили пружності в статичному положенні. **Стала сила** G , як неважко побачити, не змінює характеру коливань, а лише **зміщує центр** цих **коливань** у бік дії сили на величину статичної деформації λ_{cm} .

$$\text{Тоді: } \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \text{ Позначимо } \frac{c}{m} = k^2; \Rightarrow k = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ і, остаточно,}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (3.24)$$

Рівність (3.24) є диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (3.24) шукаємо у вигляді $x = e^{nt}$ і для визначення n складаємо характеристичне рівняння, підставляючи розв'язок і його другу похідну в рівняння

$$n^2 + k^2 = 0; \Rightarrow n_{1,2} = \pm ik, \text{ де } i = \sqrt{-1} \text{ – уявна одиниця.}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.24)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (3.25)$$

Довільні сталі інтегрування C_1 і C_2 розв'язку (3.25) знаходимо за допомогою початкових умов

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0. \end{cases}$$

Оскільки невідомих сталих інтегрування дві, то знайдемо друге рівняння, взявши похідну $v = \dot{x}(t)$ від виразу (3.25)

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (3.26)$$

У рівняння (3.25) і (3.26) підставимо початкові умови x_0 і v_0 , якщо $t_0 = 0$

$$\left. \begin{cases} x_0 = C_1 \\ C_2 k = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \frac{v_0}{k} \end{cases} \right\}. \quad (3.27)$$

Значення довільних сталих (3.27) підставимо у рівність (3.25)

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (3.28)$$

Вираз (3.28) є загальним розв'язком диференціального рівняння (3.24), законом вільних коливань. Його можна подати у вигляді однієї гармоніки шляхом підстановки

$$x_0 = A \sin \alpha; \quad \frac{v_0}{k} = A \cos \alpha. \quad (3.29)$$

Частина перша

Враховуючи підстановку (3.29), розв'язок (3.28) запишеться

$$\begin{aligned}x &= A \sin \alpha \cdot \cos kt + A \cos \alpha \cdot \sin kt. \\x &= A \sin(kt + \alpha).\end{aligned}\quad (3.30)$$

Сталі коефіцієнти A і α знаходимо з рівнянь (3.29), якщо ліві і праві частини спочатку піднести до квадрату

$$x_0^2 = A^2 \sin^2 \alpha; \quad \frac{v_0^2}{k} = A^2 \cos^2 \alpha, \quad (3.31)$$

а потім почленно додати

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}. \quad (3.32)$$

Якщо у виразах (3.29) перше рівняння поділити на друге, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0}. \quad (3.33)$$

Закон руху (3.30) інформує, що точка здійснює гармонічні коливання, амплітуда яких (3.32) і початкова фаза (3.33) залежать лише від початкових умов і важливої характеристики системи – колової або циклічної частоти вільних коливань $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ [c^{-1}].

Період вільних коливань

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (3.34)$$

Період вільних коливань можна знайти за наближеною формулою через таке еквівалентне перетворення

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\sqrt{\frac{\pi^2 G \cdot \lambda_{cm}}{g \cdot G}} = 2\sqrt{\lambda_{cm}}. \quad (3.35)$$

Необхідно зазначити, що вільні гармонічні коливання в дійсності не існують, тому що завжди є реальний опір, завдяки чому згасання коливань неминуче. Отже, вільні коливання – це теоретична модель. Проте, при згасанні зменшується лише амплітуда коливань, а частота коливань залишається незмінною.

Тому частота вільних коливань є «динамічною індивідуальністю» системи і залежить тільки від характеристик самої системи в цілому.

Для простих коливальних систем частота залежить тільки від співвідношення маси і жорсткості пружних елементів. Це загальна закономірність. Якщо підвищуємо масу, то знижується власна частота, підвищуємо жорсткість – збільшується. А для періоду коливань – навпаки (3.34).

Вільні коливання мають фундаментальне значення. Знаючи характеристики вільних коливань, можна передбачити поведінку механічної системи під дією різних збурювальних факторів.

Для розв’язання задач на вільні коливання матеріальної точки можна запропонувати такий **алгоритм**.

1. Зобразити матеріальну точку у довільному положенні та показати сили, що діють на дану точку.
2. Вибрати початок відліку у центрі коливань і спрямувати вісь у бік руху точки.
3. Записати початкові умови руху точки.
4. Скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на вибрану вісь.
5. Інтегрувати диференціальне рівняння руху двічі.
6. Визначити довільні сталі інтегрування за допомогою початкових умов.
7. Записати остаточний закон коливального руху матеріальної точки.

Приклад 3.8

Вантаж масою $m = 2 \text{ кг}$ падає з висоти $h = 40 \text{ см}$ на середину твердої квадратної плити, закріпленої на чотирьох симетрично розміщених пружинах (рис. 3.9). Коефіцієнт жорсткості пружини $c_1 = 2 \text{ Н / см}$.

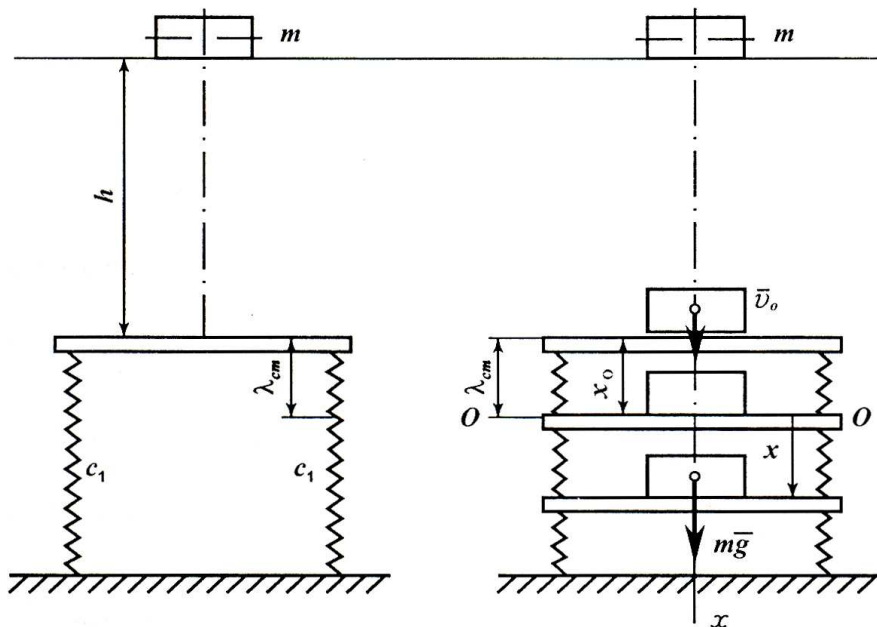


Рис. 3.9

Частина перша

Розв'язання

Спрямуємо вісь x вертикально вниз, початок осі помістимо в точку статичної рівноваги, де деформація пружини дорівнює статичній деформації λ_{cm} . Зведений коефіцієнт жорсткості пружин, з'єднаних паралельно $c = 4c_1 = 800 \text{ Н/м}$.

Початкова швидкість вантажу в момент торкання пластини визначається

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.4} = 2.8 \text{ м/с}.$$

Отже, початкові умови руху вантажу на пружинах

$$x_0 = -\lambda_{cm} = -\frac{mg}{c} = -\frac{2 \cdot 9.8}{800} = -0.0245 \text{ м},$$
$$\dot{x}_0 = v_0 = 2.8 \text{ м/с}.$$

Вантаж здійснює вільні коливання з коловою частотою

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{800}{2}} = 20 \frac{1}{\text{с}}.$$

Закон руху вільних коливань (3.30)

$$x = A \sin(kt + \alpha),$$

де A – амплітуда коливань, яку визначимо з виразу (3.32)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = \sqrt{(0.0245)^2 + \frac{2.8^2}{20^2}} = 0.142 \text{ м};$$

де α – початкова фаза коливань (3.33)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \cdot k}{v_0} = \frac{(-0.0245) \cdot 20}{2.8} = -0.175 \Rightarrow \alpha = -0.1754 \text{ рад}.$$

Остаточний закон коливального руху вантажу

$$x = 0.142 \sin(20t - 0.1754) \text{ м}.$$

Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянуті вище вільні коливання матеріальної точки в реальних умовах поступово згасають, оскільки на коливання впливає опір середовища. Розглянемо випадок коливання точки, коли сила опору пропорційна першому степеню швидкості (рис. 3.10).

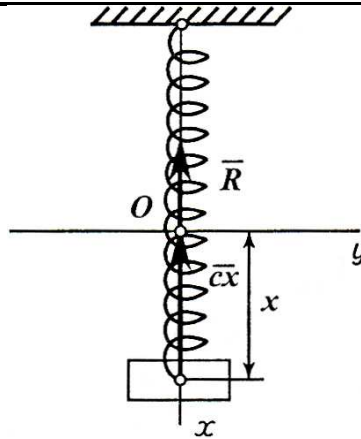


Рис 3.10

$$\bar{R} = -\mu \bar{v},$$

де μ – коефіцієнт пропорційності.

Знак «мінус» інформує, що вектори сили і швидкості спрямовані протилежно.

На точку масою m під час її руху діють поновлювальна сила $-cx$ (рівнодійна сили ваги і сили пружності пружини), де x – відхилення точки від положення статичної рівноваги O , початку системи координат, і сила опору \bar{R} .

$$\bar{R} = -\mu \bar{v}; \quad R_x = -\mu \dot{x}. \quad (3.36)$$

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}; \Rightarrow m\ddot{x} + \mu \dot{x} + cx = 0. \quad (3.37)$$

Рівняння (3.37) поділимо на масу m і введемо позначення

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0; \quad \frac{\mu}{m} = 2n; n = \frac{\mu}{2m}; \quad \frac{c}{m} = k^2; k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

де n – **коефіцієнт згасання**;

k – циклічна частота вільних коливань.

Зазначимо, що коефіцієнт згасання n і циклічна частота k мають однакову розмірність, тому їх можна порівнювати.

Остаточно отримаємо **диференціальне рівняння згасаючих коливань**

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \quad (3.38)$$

Рівняння (3.38) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0. \quad (3.39)$$

Корені характеристичного рівняння (3.39)

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (3.40)$$

Розв'язок рівняння має різний вигляд у залежності від співвідношення коефіцієнтів n і k .

Якщо корені рівняння (3.39) є дійсними і різними чи дійсними і рівними $n^2 - k^2 \geq 0; \Rightarrow n \geq k$, тобто, якщо опір більший порівняно з відновлювальною силою, то відбувається аперіодичний рух за законом

якщо $n > k \Rightarrow x = C_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - k^2})t} + C_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - k^2})t}; \quad (3.41)$

якщо $n = k \Rightarrow x = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}. \quad (3.42)$

Оскільки вираз e^{-nt} є експоненціальною функцією, яка монотонно зменшується до нуля, то матеріальна точка під час коливань поступово наближатиметься до стану рівноваги, де $x = 0$.

Наближений графік аперіодичного руху наведений на рис. 3.14. Крива 1 відповідає початковій швидкості $v_{x0} > 0$, крива 2 – $v_{x0} < 0$.

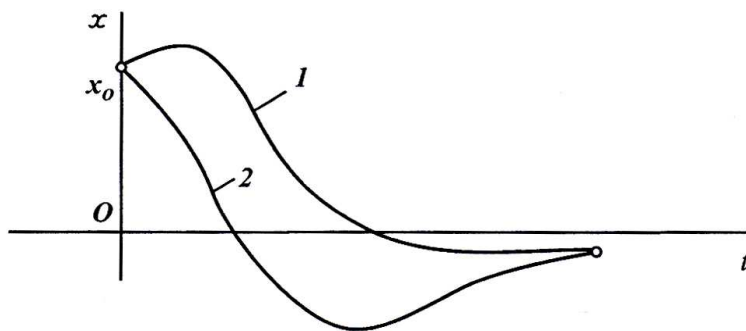


Рис 3.11

Якщо опір малий порівняно з поновлювальною силою $k > n$, то корені характеристичного рівняння (3.50) комплексні

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.43)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.38) має вигляд

$$x = e^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (3.44)$$

Довільні сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо із початкових умов. Оскільки сталі інтегрування дві, то потрібне друге рівняння, яке знайдемо як похідну за часом від виразу (3.44)

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -ne^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \\ & + e^{-nt} \left(-C_1 \sqrt{k^2 - n^2} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Підставимо початкові умови: $x(t_0) = x_0$ і $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0$, якщо $t_0 = 0$, в рівняння (3.44) і (3.45) і визначимо сталі інтегрування

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_0 + nC_1}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (3.46)$$

Підставивши значення C_1 і C_2 у рівняння (3.44), остаточно отримаємо **закон згасаючих коливань**

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \quad (3.47)$$

Переміщенню x у виразі (3.47) можна надати іншого вигляду, якщо ввести підстановки і зробити перетворення

$$x_0 = B \sin \beta; \quad \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = B \cos \beta. \quad (3.48)$$

Тоді $x = e^{-nt} \left(B \sin \beta \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + B \cos \beta \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right);$

або $x = B e^{-nt} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2} t + \beta \right). \quad (3.49)$

Величини B і β визначаються з рівнянь (3.48). Обидва рівняння треба піднести до квадрату і додати

$$x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2} = B^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta); \Rightarrow B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}. \quad (3.50)$$

Якщо поділити перше рівняння на друге в системі (3.48), то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}. \quad (3.51)$$

Частина перша

Рух точки, що відповідає рівнянню (3.49), має коливальний характер, тому що координата x періодично змінює свій знак завдяки синусу. Коливання, що відбуваються за цим законом, називаються **згасаючими коливаннями**. Амплітуда Be^{-nt} завдяки множнику e^{-nt} з плином часу зменшується, наближаючись до нуля.

Оскільки $-1 \leq \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta) \leq 1$, то координати x згасаючих коливань розміщуються між двома симетричними відносно осі абсцис кривими, що відповідають рівнянню $x = \pm Be^{-nt}$, і називаються **амплітудними кривими**. Між ними розміщується графік згасаючих коливань, показаний на рис. 3.12.

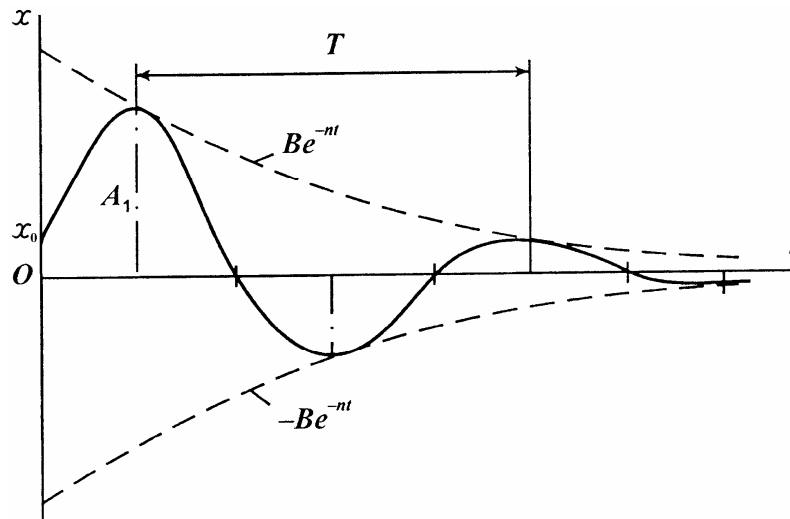


Рис. 3.12

Проміжок часу T , який дорівнює періоду функції $\sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta)$, називають **періодом згасаючих коливань**

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad (3.52)$$

де $\sqrt{k^2 - n^2}$ – **колова частота** згасаючих коливань;
 β – **початкова фаза** коливань.

Для характеристики процесу згасання вводять поняття **декременту згасаючих коливань** як відношення однієї з амплітуд до попередньої. Декремент коливань є знаменником геометричної прогресії, константою коливального процесу.

$$q = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{Be^{-n\left(\tau + \frac{T}{2}\right)}}{Be^{-n\tau}} = e^{-\frac{nT}{2}}; \Rightarrow q^{-1} = e^{\frac{nT}{2}}. \quad (3.53)$$

Логарифмічний декремент згасаючих коливань є модулем натурального логарифма

$$\ln|q^{-1}| = \frac{nT}{2}. \quad (3.54)$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке фаза коливань, колова частота, період коливань?
2. Як визначається колова частота вільних коливань, від яких параметрів вона залежить?
3. Напишіть закон вільних коливань.
4. Що таке аперіодичні коливання?
5. Чому дорівнює частота згасаючих коливань?
6. За якою функцією зменшуються амплітуди згасаючих коливань?
7. Що таке декремент згасаючих коливань, логарифмічний декремент?
8. Який вигляд мають диференціальні рівняння вільних і згасаючих коливань?
9. Від яких факторів залежить циклічна частота і період вільних коливань?
10. Від яких факторів залежить амплітуда і початкова фаза вільних коливань?

Змушені коливання матеріальної точки без урахування опору

На матеріальну точку (рис. 3.13), крім поновлювальної сили $F = -cx$ (рівнодійна сили ваги і статичної складової сили пружності), може діяти сила, яка періодично змінюється і називається **збурювальною силою**.

Проекція сили співпадає з напрямком руху і змушує матеріальну точку до коливань

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta),,$$

де Q_0 – амплітудне значення збурювальної сили, H ;

p – колова частота збурювальної сили, $рад/с$;

$pt + \delta$ – фаза збурювальної сили, $рад$; δ – початкова фаза.

Сила Q є збурювальною гармонічною силою. **Колівання, які виникають під дією збурювальної сили, називаються змушеними.**

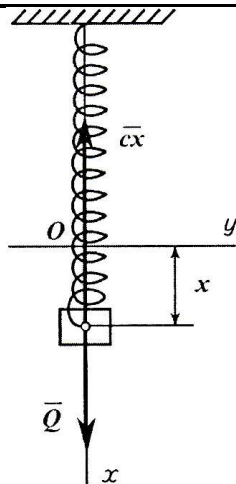


Рис. 3.13

Запишемо диференціальне рівняння зазначеного руху точки згідно розрахункової схеми (рис. 3.13)

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt + \delta), \quad (3.55)$$

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x + \frac{Q_0}{m}\sin(pt + \delta).$$

$$\text{Позначимо: } \left. \begin{aligned} \frac{c}{m} = k^2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \frac{Q_0}{m} = h_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Тоді *диференціальне рівняння змушених коливань точки без опору* набуває вигляду:

$$\ddot{x} + k^2x = h_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.57)$$

Вираз (3.57) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох частин:

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.58)$$

де x_1 – загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$\ddot{x} + k^2x = 0;$$

x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.57).

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (3.30):

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha),$$

де A – амплітуда вільних коливань, $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$ (3.32), яка залежить

від початкових умов;

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0} \text{ – початкова фаза (3.33).}$$

Частинний розв’язок рівняння (3.57) шукаємо у вигляді

$$x_2 = C \sin(pt + \delta). \quad (3.59)$$

Для підстановки розв’язку в рівняння (3.57) визначимо похідні від виразу (3.59) за часом

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= Cp \cos(pt + \delta), \\ \ddot{x}_2 &= -Cp^2 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Підставимо значення виразів (3.59), (3.60) в рівняння (3.57)

$$\begin{aligned} -Cp^2 \sin(pt + \delta) + k^2 C \sin(pt + \delta) &= h_0 \sin(pt + \delta), \\ C(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) &= h_0 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Порівняємо коефіцієнти при синусах зліва і справа у виразі (3.61), (вони повинні бути однакові) і визначимо динамічну амплітуду C

$$C(k^2 - p^2) = h_0 \Rightarrow C = \frac{h_0}{k^2 - p^2}. \quad (3.62)$$

Частинний розв’язок отримаємо, підставивши визначену амплітуду C у рівняння (3.59):

$$x_2 = \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (3.63)$$

Загальний розв’язок рівняння (3.57) має вигляд

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (3.64)$$

Другий доданок розв’язку або друга гармоніка в рівнянні (3.64) характеризує змушені коливання, колова частота яких дорівнює коловій частоті збурювальної сили.

Амплітуда змушених коливань може бути представлена

$$C = \frac{h_0}{k^2 - p^2} = \frac{\frac{h_0}{k^2}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0 m}{mc}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\frac{Q_0}{c}}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm}}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \quad (3.65)$$

де $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$ – деформація пружного елемента під дією амплітудного значення сили Q_0 , яка прикладається статично.

Визначимо відношення динамічної амплітуди до статичної.

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}, \text{ якщо } p < k \text{ (низькочастотні коливання)}, \quad (3.66)$$

$$\eta = \frac{C}{\lambda_{cm}} = \frac{1}{\frac{p^2}{k^2} - 1}, \text{ якщо } p > k \text{ (високочастотні коливання)}, \quad (3.67)$$

де η – коефіцієнт динамічності.

Коефіцієнт динамічності η констатує, у скільки разів амплітуда змушених коливань C більша, ніж статична деформація пружного елемента λ_{cm} під дією амплітудного значення Q_0 збурювальної сили.

Графік залежності коефіцієнта динамічності від співвідношення частот збурювальної сили і вільних коливань показаний на рис. 3.14.

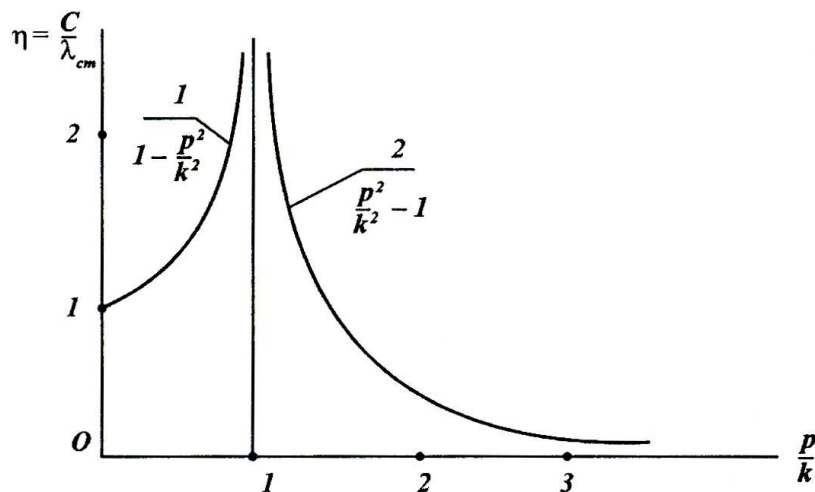


Рис. 3.14

Якщо $p = k \Rightarrow \frac{p}{k} = 1$, як можна побачити з рис. 3.18, коефіцієнт динамічності необмежено зростає (крива 1), що видно і із виразу (3.66). Тут має місце, так званий, механічний резонанс, при якому амплітуди

змушених коливань теоретично необмежено зростають.

У зарезонансному режимі, коли $p > k$ згідно виразу (3.67), крива 2 коефіцієнта динамічності знижується асимптотично із нескінченності до координатної осі $\frac{p}{k}$.

Явище механічного резонансу

Характер коливань різко змінюється, якщо колова частота збурювальної сили збігається з коловою частотою вільних коливань.

У механіці це явище називають механічним резонансом. Амплітуди змушених коливань з плином часу необмежено зростають і можуть досягати недопустимо великих, небезпечних для механічної системи значень.

Запишемо диференціальне рівняння резонансних коливань, замінюючи в правій частині виразу (3.57) p на k , оскільки вони збігаються у цих обставинах

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 \sin(k t + \delta). \quad (3.68)$$

Розв'язок однорідного рівняння (без правої частини) не відрізняється від розв'язку для вільних коливань (3.30):

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha).$$

Частинний розв'язок рівняння (3.68) x_2 шукаємо у формі, яка є лінійно незалежною від x_1 :

$$x_2 = Ct \cos(kt + \delta). \quad (3.69)$$

Для підстановки частинного розв'язку в диференціальне рівняння резонансних коливань знайдемо другу похідну за часом

$$\ddot{x}_2 = -Ck \sin(kt + \delta) - Ck \sin(kt + \delta) + Ck^2 t \cos(kt + \delta).$$

Підставимо \ddot{x}_2 і x_2 у диференціальне рівняння і після скорочень маємо:

$$-2Ck \sin(kt + \delta) = h_0 \sin(kt + \delta) \Rightarrow C = -\frac{h_0}{2k}.$$

Загальний розв'язок, що характеризує закон руху точки під час резонансу:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(kt + \alpha) - \frac{h_0}{2k} t \cos(kt + \delta). \quad (3.70)$$

Перетворимо вираз загального розв'язку, переходячи у другому доданку до синуса з відповідним зсувом фази

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h_0}{2k} t \sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}). \quad (3.71)$$

Аналіз закону свідчить, що рух точки за виразом (3.82) – це накладання вільних і змушених коливань. Перша гармоніка у формулі резонансних коливань характеризує вільні коливання, друга – змушені коливання, амплітуда яких дорівнює $\frac{h_0}{2k} t$. Остання зростає пропорційно часу і при $t \rightarrow \infty$ необмежено збільшується. Графік змінення **амплітуди змушених коливань** показано на рис. 3.15, де амплітудні прямі (пунктирні лінії із початку координат) відповідають рівнянням $x = \pm \frac{h_0}{2k} t$.

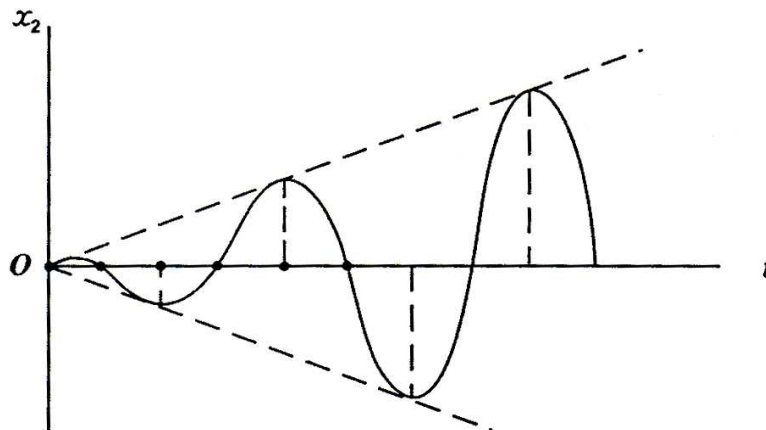


Рис. 3.15

Крім того, із загального розв'язку можна побачити, що під час резонансу фаза коливань синуса відстає на величину кута $\frac{\pi}{2}$ порівняно з фазою коливань збудовувальної сили Q .

У реальних конструкціях через різного роду тертя і нелінійні фактори амплітуда змушених коливань зростає повільніше, ніж за теоретичною моделлю, але, незаперечно, вона може досягати небезпечних величин.

Змушені коливання точки з урахуванням в'язкого тертя

Розглянемо коливання точки (рис. 3.16), на яку діють такі задані сили:

$F = -cx$ – поновлювальна сила,

$\bar{R} = -\mu\dot{v}$ – сила опору, пропорційна швидкості, $Q = Q_0 \sin(pt + \delta)$ –

збурювальна гармонічна сила.

Проекція сили опору на координатну вісь $R_x = -\mu \dot{x}$.

За таких умов диференціальне рівняння коливального руху точки

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.72)$$

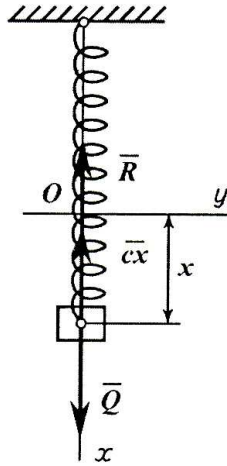


Рис. 3.16

Поділимо рівняння (3.72) на масу точки і введемо позначення

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{Q_0}{m}\sin(pt + \delta); \quad (3.73)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{m} &= k^2; & k &= \sqrt{\frac{c}{m}}; \\ \frac{\mu}{m} &= 2n; & n &= \frac{\mu}{2m}; & \frac{Q_0}{m} &= h_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

З урахуванням виразу (3.74) вихідне диференціальне рівняння точки набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.75)$$

Частина перша

Вираз (3.75) є диференціальним рівнянням змушених коливань точки при наявності сил опору. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок складається із двох доданків

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.76)$$

де x_1 – загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0.$$

Якщо $k > n$, розв'язок x_1 набуває вигляду:

$$x_1 = Be^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta); \quad (3.77)$$

де

$$B = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}.$$

Але гармоніка x_1 досить швидко згасає, нею, як правило, нехтують. Доданок x_2 – це частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3.75).

Розв'язок x_2 шукаємо у вигляді

$$x_2 = D \sin(pt + \delta - \gamma). \quad (3.78)$$

Для підстановки x_2 у рівняння (3.75) знайдемо похідні за часом

$$\dot{x}_2 = Dp \cos(pt + \delta - \gamma), \quad (3.79)$$

$$\ddot{x}_2 = -Dp^2 \sin(pt + \delta - \gamma). \quad (3.80)$$

Значення виразів (3.78), (3.79) і (3.80) підставимо в рівняння (3.75)

$$\begin{aligned} & -Dp^2 \sin(pt + \delta - \gamma) + 2nDp \cos(pt + \delta - \gamma) + \\ & + k^2D \sin(pt + \delta - \gamma) = h_0 \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} h_0 \sin(pt + \delta) &= h_0 \sin((pt + \delta - \gamma) + \gamma) = h_0 \sin(pt + \delta - \gamma) \cos \gamma + \\ &+ h_0 \cos(pt + \delta - \gamma) \sin \gamma. \end{aligned}$$

Підставимо цей вираз, тоді рівняння (3.81) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & (D(k^2 - p^2) - h_0 \cos \gamma) \sin(pt + \delta - \gamma) + \\ & + (2nDp - h_0 \sin \gamma) \cos(pt + \delta - \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Для того, щоб вираз (3.82) був тотожністю, необхідно, щоб коефіцієнти при синусі і косинусі були однакові. Звідки

$$\left. \begin{aligned} D(k^2 - p^2) &= h_0 \cos \gamma, \\ 2Dnp &= h_0 \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Якщо друге рівняння системи (3.83) поділити почленно на перше, то отримаємо величину кута γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (3.84)$$

Якщо обидва рівняння (3.83) піднести до квадрату і потім почленно додати, то отримаємо вираз для визначення амплітуди D :

$$D^2 \left[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 \right] = h_0^2, \quad (3.85)$$

звідки

$$D = \frac{h_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{\frac{h_0}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}. \quad (3.86)$$

Якщо зробити перетворення, підставивши значення величин $\frac{h_0}{k^2} = \frac{Q_0 \cdot m}{m \cdot c} = \frac{Q_0}{c} = \lambda_{cm}$, остання величина є деформацією пружного елемента під дією амплітудного значення сили H , то отримаємо **амплітуду змушених коливань точки з опором:**

$$D = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{k^4}}}, \quad (3.87)$$

і тоді змушені коливання будуть відбуватися за законом:

$$x = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 p^2}{k^4}}} \sin(pt + \delta - \gamma), \quad (3.88)$$

де $\lambda_{cm} = \frac{Q_0}{c}$; c – коефіцієнт жорсткості пружного елемента,

p – колова частота збурювальної сили, $k^2 = \frac{c}{m}$; m – маса вантажу, k

– колова частота вільних коливань, $n = \frac{\mu}{2m}$, μ – коефіцієнт пропорційності

у виразі сили опору, n – коефіцієнт згасання, $\frac{n}{k} = h$ – коефіцієнт

демпфірування, $\gamma = \arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}$ – кут зсуву за фазою.

Проведемо аналіз амплітуди змущених коливань (3.87).

1. Якщо частота збурювальної сили значно менша, ніж частота вільних коливань $p \ll k$, то амплітуда змущених коливань наблизатиметься до статичного значення $D \rightarrow \lambda_{cm}$, тобто, коливання відбуваються з амплітудою, яка дорівнює статичній деформації пружного елемента.

2. Якщо частота збурювальної сили значно більша, ніж частота вільних коливань $p \gg k$, то амплітуда дорівнюватиме:

$$D \rightarrow \frac{\lambda_{cm}}{\frac{p^2}{k^2}} = \frac{\lambda_{cm} \cdot k^2}{p^2} = \frac{Q_0 \cdot c}{c \cdot m \cdot p^2} = \frac{Q_0}{p^2} = \frac{h_0}{p^2}.$$

З останнього виразу випливає, що величину амплітуди D можна отримати будь-якою малою.

Це важливий випадок для практики.

3. Якщо частота збурювальної сили дорівнює частоті вільних коливань $p = k$, то амплітуда D може досягати максимальних значень.

Настає явище механічного резонансу. Максимум амплітуди залежить від коефіцієнта демпфірування $h = \frac{n}{k}$.

Незначне збільшення коефіцієнта демпфірування різко змінює характер коливального процесу.

На рис 3.21 показаний графік змінення коефіцієнта динамічності η (вісь ординат) у функції відношення частот p/k (вісь абсцис) за різних значень коефіцієнта демпфірування $h = \frac{n}{k}$.

Графік називається амплітудно-частотною характеристикою коливальної системи.

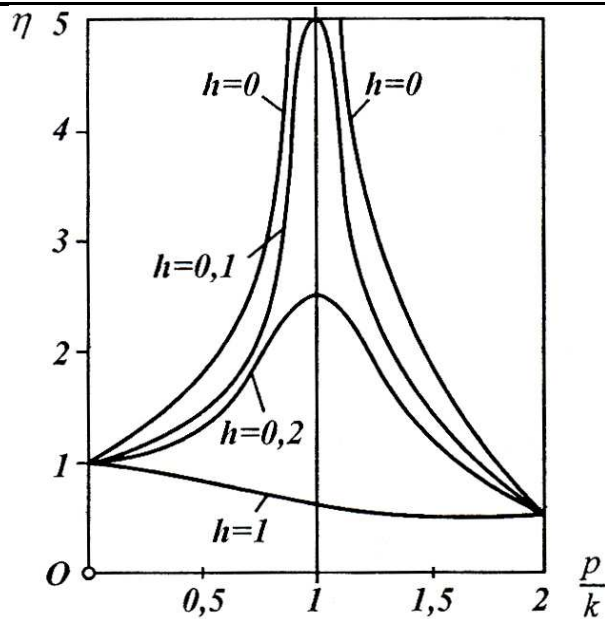


Рис. 3.17

Загальні властивості змушених коливань

1. Амплітуда змушених коливань не залежить від початкових умов.
2. Змушені коливання і при наявності сил опору не згасають.
3. Частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили і від характеристик системи не залежить.
4. Навіть за великих значень збурювальної сили технічними засобами можна досягти такої оптимальної конструкції, що змушені коливання будуть досить малими, якщо частота збурювальної сили значно відрізнятиметься від частоти вільних (власних) коливань.
5. Навіть за малих значень збурювальної сили можна отримати інтенсивні змушені коливання, якщо опір малий, а частота збурювальної сили наблизатиметься до частоти вільних коливань (механічний резонанс).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим відрізняються диференціальні рівняння вільних коливань і змушених коливань без опору?
2. Скільки доданків має закон змушених коливань? Проаналізуйте їх.
3. Що таке коефіцієнт динамічності і як він визначається?
4. Які умови виникнення механічного резонансу і як змінюється амплітуда коливань під час резонансу?
5. Які доданки входять до диференціального рівняння змушених

Частина перша

- коливань з опором? Зробіть аналіз цих доданків.
6. Під дією яких сил матеріальна точка може здійснювати коливання?
 7. Які тіла можуть бути джерелами поновлюючої сили?
 8. Які характеристики коливань матеріальної точки не залежать від початкових умов, а які залежать?
 9. Як називається точка, що визначається статичною рівновагою?
 10. В якому вигляді шукають частинний розв'язок змушених коливань у випадку резонансу?
 11. Із яких трьох видів коливань складається закон змушених коливань з опором?
 12. Як впливає лінійний опір на амплітуду, фазу, частоту і період змушених коливань?
 13. З'ясуйте явище резонансу і відповідний закон руху у цьому випадку?
 14. Для дослідження яких коливань слугує коефіцієнт динамічності? Що він встановлює?
 15. Перелічити загальні властивості змушених коливань матеріальної точки, які відрізняють їх від вільних коливань?

3.2. Матеріальна система. Геометрія мас

Механічна *система матеріальних точок* (далі матеріальна система) – це така *сукупність* взаємодіючих матеріальних *точок, положення і рух яких взаємозв'язано* і взаємозумовлено. Класичним прикладом матеріальної системи є сонячна система. Сюди ж можна віднести будь-який механізм, машину, споруду тощо.

Визначимо таку динамічну характеристику матеріальної системи як маса і розглянемо питання про розподіл маси матеріальної системи або твердого тіла як окремого випадку системи, тобто, геометрію мас.

3.2.1. Маса і центр мас матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається із n матеріальних точок, маси яких $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Положення кожної точки системи відносно фіксованої у просторі точки O визначається її радіусом-вектором $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$.

Маса матеріальної системи дорівнює арифметичній сумі мас окремих точок, які входять до складу системи.

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k . \quad (3.89)$$

Центр мас матеріальної системи, як перша характеристика розподілу мас, визначається відповідно до положення центра ваги тіла.

Центр мас системи (центр інерції) є геометричною точкою, радіус-вектор якої обчислюється за виразом

$$\bar{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k , \quad (3.90)$$

де \bar{r}_k – радіус-вектор k -ї точки системи.

Якщо з центром мас пов'язати прямокутну систему декартових координат $Oxyz$, то, проектуючи вираз (3.90) на осі цієї координатної системи, дістанемо координати центра мас матеріальної системи

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k ; y_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k y_k ; z_c = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k z_k . \quad (3.91)$$

де $x_k, y_k, z_k; m_k$ – координати і маси точок матеріальної системи.

В однорідному гравітаційному полі Землі центр мас матеріальної

Частина перша

системи збігається з центром ваги, але між ними є глибокі фізичні відмінності: поняття центра мас є більш широке. Це поняття дає змогу у ряді випадків звести задачу про рух матеріальної системи до задачі про рух однієї точки – центра мас. Крім того, положення центра мас залежать тільки від розподілу маси і не залежать від вибору системи координат і закону її руху.

Урахування деяких особливостей розподілу мас системи полегшує визначення положення центра мас (за аналогією до центра ваги). Наприклад, якщо матеріальна система має площину симетрії, то центр мас розміщений в цій площині. Якщо система має дві площини симетрії, то центр мас розміщений на лінії перетину цих площин. Якщо система має три площини симетрії, то центр мас перебуває в точці перетину цих площин.

3.2.2. Моменти інерції матеріальної системи (тіла)

Положення центра мас системи або тіла недостатньо повно характеризує розподіл мас по об'єму. Наприклад, якщо маси точок системи змістити на однакову відстань від центра мас, то положення центра мас не зміниться, але на обертальний рух тіла відносно центра мас це суттєво вплине. Тому в механіці введена ще одна характеристика розподілу мас – момент інерції. Поняття моменту інерції належить до найважливіших понять механіки.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі z називається добуток маси точки на квадрат її відстані r_z до осі

$$I_z = mr_z^2.$$

Моментом інерції системи матеріальних точок відносно осі називають суму добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней до цієї осі.

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_{kz}^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.92)$$

Момент інерції тіла відносно осі – це фізична величина, що характеризує міру інертності тіла при обертальному русі навколо цієї осі. У разі обертання тіла навколо нерухомої точки момент інерції визначається відносно миттєвої осі, яка проходить через цю нерухому точку. Одиницею моменту інерції в Міжнародній системі SI є $[кг \cdot м^2]$.

Для твердого тіла момент інерції визначається інтегралом, поширеним на всю масу

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (3.93)$$

Розрізняють моменти інерції *осьові* або *аксіальні*, *полярні*, *відцентрові*.

Покажемо, як визначити осьові і полярний моменти інерції суми точкових мас тіла відносно осей координат і початку координат (рис. 3.18).

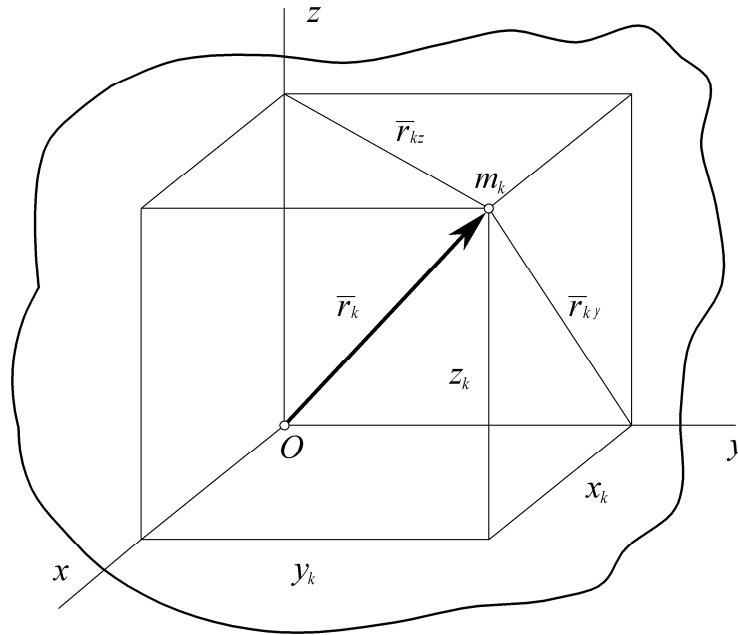


Рис. 3.18

Якщо відомі координати окремих точок тіла, то осьові моменти інерції тіла можна обчислювати за формулами:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_k r_{kz}^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2), \\ I_y &= \sum m_k r_{ky}^2 = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \\ I_x &= \sum m_k r_{kx}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2). \end{aligned} \quad (3.94)$$

де r_k – радіус-вектор k -ї точки (рис 3.18), який визначається

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2.$$

Додамо три осьові моменти інерції (3.94)

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2\sum m_k r_k^2 = 2I_0.$$

Отже, сума осьових моментів інерції дорівнює подвоєному

Частина перша

полярному моменту інерції I_0 , який визначається, як сума добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней до полюса O .

$$I_0 = \sum m_k r_k^2, \quad (3.95)$$

Осьові і полярні моменти інерції тіл і систем є додатними величинами.

3.2.3. Радіус інерції тіла

Для обчислення моментів інерції користуються у ряді випадків поняттям радіуса інерції.

Радіусом інерції називають таку відстань від осі, на якій треба розмістити масу тіла, щоб добуток квадрату цієї відстані на масу визначав осьовий момент інерції тіла.

$$I_z = m \cdot \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \quad (3.96)$$

де m – маса тіла.

Геометрично радіус інерції тіла відносно певної осі можна інтерпретувати як радіус умовного нескінченно тонкого колового циліндра з рівномірно розподіленою масою по бічній поверхні, момент інерції якого дорівнює моменту інерції тіла відносно цієї осі.

3.2.4. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей

Припустимо, що відомо положення центра мас тіла C , з яким пов'язана центральна прямокутна система декартових координат $Cx_1y_1z_1$ (рис. 3.19).

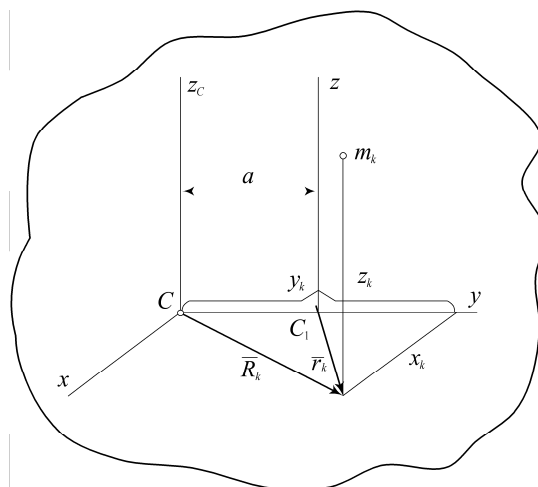


Рис. 3.19

Визначимо, чому дорівнює момент інерції тіла I_z відносно осі z , яка паралельна заданій центральній осі z_c і розміщена на відстані a від неї.

Сформулюємо теорему Гюйгенса – Штейнера.

Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла відносно центральної паралельної осі і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

Для доведення розглянемо довільну точку m_k з координатами x_k, y_k, z_k відносно центральної прямокутної системи декартових координат $Sxyz$. Відстані точки до вертикальних паралельних осей z_c і z дорівнюють відповідно R_k і r_k .

Визначимо шуканий момент інерції тіла відносно паралельної осі z як суму добутків мас на квадрати їх відстаней до цієї осі

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum m_k [(y_k - a)^2 + x_k^2] = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2) + a^2 \sum m_k - 2a \sum m_k y_k.$$

Проаналізуємо доданки цієї формули.

$$\sum m_k (y_k^2 + x_k^2) = \sum m_k R_k^2 = I_{z_c} - \text{момент інерції тіла відносно осі } z_c.$$

$$\sum m_k = m - \text{маса тіла,}$$

$\sum m_k y_k = m \cdot y_c = 0$, оскільки координата центра мас відносно центральної осі дорівнює нулю $y_c = 0$. Звідки остаточно

$$I_z = I_{z_c} + m \cdot a^2. \quad (3.97)$$

Із аналізу виразу (3.97) видно, що центральна вісь z_c є віссю найменшого моменту інерції серед усіх паралельних осей.

3.2.5. Приклади обчислювання моментів інерції тіл простої форми

1. Однорідний тонкий стрижень масою m обертається навколо осі z , яка проходить через кінець стрижня (рис. 3.20).

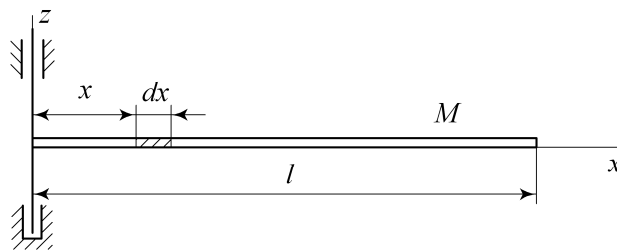


Рис. 3.20

Частина перша

Визначимо момент інерції стрижня як суцільного тіла

$$I_z = \int dm \cdot r^2, \quad r = x;$$

$dm = \mu \cdot dx$ – елементарна маса тонкого стрижня (лінії),

де $\mu = \frac{m}{l}$ – маса одиниці довжини стрижня. Тоді осьовий момент інерції стрижня

$$I_z = \int_0^l dm \cdot x^2 = \int_0^l \mu dx \cdot x^2 = \mu \int_0^l x^2 dx = \frac{\mu x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{m \cdot l^3}{l \cdot 3} = \frac{m \cdot l^2}{3} \quad (3.98)$$

а) Однорідний стрижень обертається відносно центральної осі z_c (рис. 3.21).

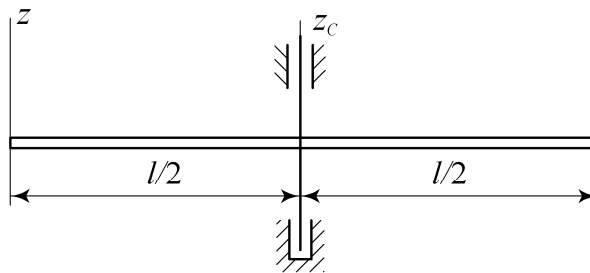


Рис. 3.21

Згідно з теоремою Гюйгенса–Штейнера $I_z = I_{z_c} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$, звідки

$$I_{z_c} = I_z - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}. \quad (3.99)$$

2. Однорідне тонке кільце радіуса R або тонка циліндрична труба, маховик. Вісь z перпендикулярна площині кільця.

Усі точки кільця розміщені на однаковій відстані R від осі z , тому момент інерції кільця дорівнює $I_z = mR^2$.

Для двох інших взаємно-перпендикулярних осей x і y момент інерції вдвічі менше.

3. Кругла однорідна пластина або однорідний циліндр радіуса R (рис. 3.22).

Визначимо одиничну масу площі круга $\mu = \frac{m}{\pi R^2}$, тоді елементарна маса пластини $dm = \mu \cdot ds = \mu \cdot 2\pi r \cdot dr$.

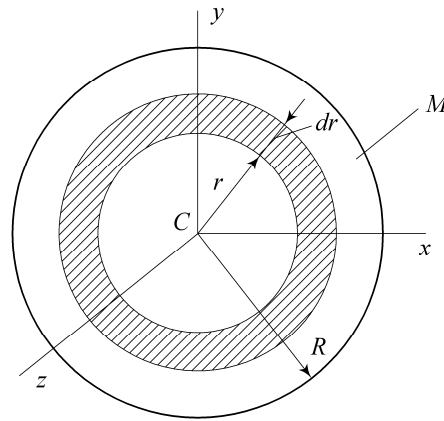


Рис. 3.22

Визначимо момент інерції тіла відносно осі z :

$$I_z = \int_0^R dm \cdot r^2 = \int_0^R \mu \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = 2\pi\mu \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu\pi R^4}{2} = \frac{m\pi R^4}{2\pi R^2} = \frac{mR^2}{2};$$

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2; \quad (3.100)$$

для двох інших осей: $I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2$.

4. Прямий коловий однорідний конус масою m і радіусом основи R

$$I_z = 0.3mR^2,$$

де z – вісь, яка проходить крізь вершину і центр кола основи.

5. Однорідна куля радіуса R . $I_z = I_x = I_y = 0.4mR^2$.

3.2.6. Відцентрові моменти інерції

Осьові моменти інерції не повністю характеризують розподіл маси по об'єму тіла або системи. Для характеристики асиметричного розподілу мас в механіці введені, так звані, відцентрові моменти інерції

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad I_{xz} = \sum m_k y_k z_k; \quad I_{yz} = \sum m_k x_k z_k. \quad (3.101)$$

Для суцільного тіла знак суми замінюється інтегралом

$$I_{xy} = \int_{(m)} dm \cdot x \cdot y.$$

Відцентровий момент інерції дорівнює сумі добутків мас точок на їхні відстані до двох координатних осей.

Частина перша

Величини відцентрових моментів інерції залежать від напрямку координатних осей і вибору початку координат. Тому, говорячи про відцентровий момент у даній точці, розуміють, що початок координат збігається з цією точкою.

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від'ємний знак.

3.2.7. Момент інерції тіла відносно довільної осі, що перетинає задану точку

Знайдемо залежність між моментами інерції матеріальної системи (тіла) відносно довільної осі, що перетинає дану точку, і моментами інерції відносно координатних осей

Припустимо, що напрямок довільної осі N заданий кутами α, β, γ з відповідними осями координат x, y, z (рис. 3.23).

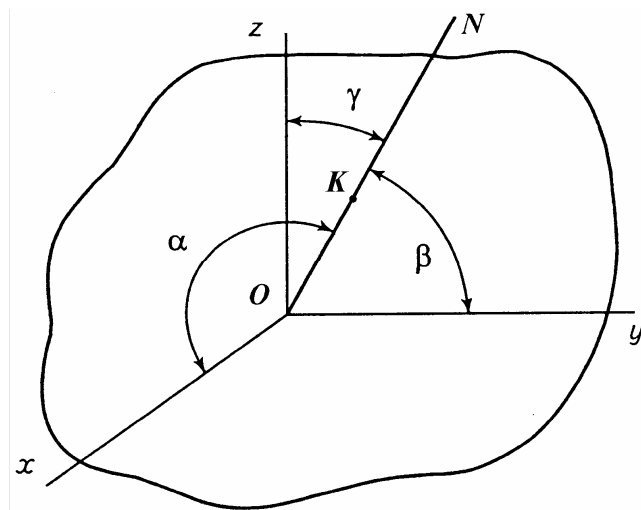


Рис. 3.23

Відомі також осьові і відцентрові моменти інерції тіла $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$.

Тоді залежність між моментом інерції тіла (матеріальної системи) відносно довільної осі ON , що проходить через початок координат, і моментами інерції відносно координатних осей Ox, Oy, Oz має такий вигляд [1]:

$$I_N = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma. \quad (3.102)$$

Візьмемо на осі ON точку K , таку, що $OK = d = \frac{1}{\sqrt{I_N}}$. Помножимо

обидві частини виразу (3.113) на d^2 і, взявши до уваги, що координати x, y, z точки K задовольняють рівностям

$$x = d \cos \alpha; \quad y = d \cos \beta; \quad z = d \cos \gamma;$$

дістанемо рівняння поверхні другого порядку

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{xz} xz = 1, \quad (3.103)$$

на якій рухається точка K , кінець відрізка OK , навколо нерухомого центра O початку координат, окреслюючи згадану поверхню, якщо змінюється напрям осі ON . Указана множина точок (3.103) є поверхнею еліпсоїда, який називається **еліпсоїдом інерції**. Осі симетрії еліпсоїда називаються **головними осями інерції** для тієї точки тіла, в якій побудовано еліпсоїд.

Якщо взяти іншу точку тіла, то напрями головних осей змінюються. А якщо осі координат збігаються з осями симетрії еліпсоїда, то рівняння поверхні (3.103) набуває канонічної форми

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

тобто, **відцентрові моменти інерції тіла відносно головних осей інерції дорівнюють нулю**.

Як наслідок, за відомому еліпсоїду інерції можна визначити момент інерції відносно будь-якої осі, що проходить крізь точку O . А якщо відомі головні осі інерції, то спрощуються рівняння руху твердого тіла, як це видно на прикладі спрощення формули (3.102) для моменту інерції відносно осі

$$I_N = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.$$

Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то вісь, перпендикулярна до цієї площини, є головною віссю інерції для точки перетину її з площиною.

Якщо однорідне тіло має вісь симетрії Oz , то в тілі завжди знайдуться точки з симетричними координатами за один і другий бік від осі

$$\begin{cases} x_k; & y_k; & z_k; \\ -x_k; & -y_k; & z_k. \end{cases}$$

Асиметрія відносно осі Oz в цих обставинах відсутня і відцентрові моменти інерції тіла, що характеризують асиметрію, дорівнюють нулю

$$\begin{cases} \sum m_k x_k z_k = 0 \\ \sum m_k y_k z_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{xz} = 0 \\ I_{yz} = 0. \end{cases}$$

Вісь Oz , для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, називається **головною віссю інерції** тіла.

Таким чином, якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то вона є головною віссю інерції. Якщо всі три відцентрові моменти інерції тіла дорівнюють нулю, то кожна з координатних осей є головною віссю інерції цього тіла для точки O початку координат.

Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції називаються головними моментами інерції.

Через довільну точку будь-якого однорідного тіла завжди можна провести хоча б одну систему трьох взаємно-перпендикулярних осей, які будуть осями симетрії і для яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тоді кожна з цих осей буде головною віссю інерції тіла.

Довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла, називається **центральною віссю**.

Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є **головною центральною віссю інерції**.

Момент інерції тіла відносно головної центральної осі інерції називається головним центральним моментом інерції.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які моменти інерції тіла вам відомі?
2. В яких одиницях вимірюється момент інерції тіла і що він характеризує?
3. Що таке радіус інерції тіла?
4. Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера для паралельних осей.
5. Як обчислити моменти інерції стрижня, суцільного і порожнистого циліндра, кулі, конуса?
6. Що таке відцентрові моменти інерції тіла і як вони характеризують розподіл маси тіла?
7. Як визначити момент інерції тіла відносно довільної осі?
8. Які осі в тілі є головними центральними осями інерції?
9. Що таке еліпсоїд інерції і яка його формула?
10. Чи змінюється положення головних осей інерції тіла за переходу від однієї точки тіла до іншої?

3.3. Рух центра мас матеріальної системи

3.3.1. Класифікація сил і їхні властивості

Сили, що прикладені до точок матеріальної системи, виконують дві суттєво різні функції, а тому поділяються на дві категорії: а) *сили внутрішні* і *зовнішні*; б) *сили активні* і *сили реакцій в'язей*.

Внутрішні сили – це сили взаємодії між точками самої матеріальної системи. Внутрішні сили позначаються \bar{F}_k^{in} . Вони мають такі властивості:

– внутрішні сили діють на матеріальну систему попарно як дія і протидія ($\bar{F}_1^{in} = -\bar{F}_2^{in}$);

– векторна сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} = 0; \quad (3.104)$$

– векторна сума моментів внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума моментів сил відносно довільної осі дорівнюють нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}) = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k^{in}) = 0. \quad (3.105)$$

Указані властивості внутрішніх сил (3.104), (3.105) отримані на основі третього закону механіки про дію і протидію. Але ці умови рівноваги можна розглядати як достатні, якщо внутрішні сили прикладені до абсолютно твердого тіла.

Зовнішні сили – це сили взаємодії між матеріальними точками системи і фізичними тілами, які не належать до цієї матеріальної системи.

Зовнішні сили позначаються \bar{F}_k^e . Розглянута класифікація сил застосовується, як правило, для вільної матеріальної системи.

Активні сили називають ще заданими силами. **Реакції в'язей** – це сили, з якими в'язі діють на систему матеріальних точок. Сили реакцій є невідомими і залежать від закону руху системи. Ця класифікація застосовується для невільної матеріальної системи, а реакції в'язей вводяться на основі аксіоми про звільнення від в'язей. За допомогою цієї аксіоми невільна матеріальна система перетворюється у вільну. Слід наголосити, що дана класифікація сил є відносною. Розглянутим у статті методом перерізів внутрішню силу можна перетворити у зовнішню. А

внутрішня сила двигуна автомобіля стає рушійною, провокуючи появу зовнішньої сили тертя між ведучими колесами і дорогою.

3.3.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи

Розглянемо вільну матеріальну систему, яка складається із n матеріальних точок з масами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$; положення кожної точки системи відносно якого-небудь центра визначається її радіусом-вектором $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$; до кожної точки системи прикладено, відповідно, рівнодійна внутрішніх сил $\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \bar{F}_3^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ і рівнодійна зовнішніх сил $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \bar{F}_3^e, \dots, \bar{F}_n^e$.

Для кожної точки матеріальної системи можна скласти диференціальне рівняння:

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{in} + \bar{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.106)$$

Система n рівнянь (3.106) і є *системою диференціальних рівнянь руху матеріальної системи у векторній формі*.

У проєкціях на осі прямокутної системи декартових координат x, y, z системі (3.106) відповідають $3n$ наступних диференціальних рівнянь.

$$\begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= F_{kx}^{in} + F_{kx}^e; \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= F_{ky}^{in} + F_{ky}^e; \quad k = 1, 2, \dots, n. \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= F_{kz}^{in} + F_{kz}^e. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Рівності (3.107) є системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, за інтегруванням якої отримаємо $3n$ довільних сталих, які треба визначати з початкових умов руху. Математичні складності пов'язані і з рядом інших обставин. Подолати ці обставини допомагають загальні теореми динаміки, які починаємо розглядати.

3.3.3. Теорема про рух центра мас матеріальної системи

Про характер руху матеріальної системи іноді можна мати уяву, спостерігаючи за рухом центра мас матеріальної системи.

Приміром, важливо дослідити, чи є прямолінійною траєкторія руху

центра мас такої сільськогосподарської машини як культиватор, щоб зробити висновок, яку ширину захисної зони можна взяти під час обробітку міжрядь просапних культур і не допустити їхнього пошкодження, а також у підсумку дослідження запропонувати заходи, які б дозволили удосконалити характеристики руху машин у цьому технологічному процесі.

Розглянемо теорему про рух центра мас системи. Для матеріальної системи із n матеріальних точок запишемо диференціальні рівняння у формі (3.106) і підсумуємо їх по всіх точках системи

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.108)$$

Згідно з наведеними властивостями внутрішніх сил (3.104), перший доданок у правій частині рівняння (3.108) зникає

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.109)$$

Із виразу (3.101) можна записати:

$$m \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k. \quad (3.110)$$

Візьмемо двічі похідну за часом від лівої і правої частин виразу (3.110)

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}. \quad (3.111)$$

З отриманого виразу (3.111) випливає, що його права частина збігається з лівою частиною виразу (3.109), тому

$$m \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow m \bar{a}_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.112)$$

На підставі аналізу математичного виразу (3.112) сформулюємо теорему про рух центра мас матеріальної системи.

Добуток маси матеріальної системи, зведеної до центра мас, на прискорення її центра мас дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на дану матеріальну систему.

Можна надати інше, як би фізичне формулювання закону.

Центр мас матеріальної системи рухається як вільна матеріальна

точка, в якій зосереджена маса всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил.

Рівнянню (3.112) відповідають три рівняння у проекціях на декартові осі координат

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e; \quad m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e; \quad m \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum F_{kz}^e. \quad (3.113)$$

З теореми випливає, що рух центра мас системи залежить тільки від зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему, внутрішні сили не змінюють положення і швидкості центра мас.

Проте, внутрішні сили можуть здійснювати непрямий вплив на рух центра мас, але через зовнішні сили.

Наприклад, в автомобілі внутрішні сили, що розвиває двигун, впливають на рух центра мас автомобіля лише через сили тертя коліс із дорогою, а якщо тертя мале (лід), то рух може і не відбутися (машина буксує).

Зазначимо, що пари сил, прикладені до системи, не можуть змінити характер руху центра мас, бо головний вектор пар сил дорівнює нулю.

Пари сил можуть спричинити обертання системи навколо центра мас.

3.3.4. Закон збереження руху центра мас

У деяких випадках головний вектор зовнішніх сил може дорівнювати нулю, а тому із виразу (3.112)

$$\frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \frac{d\bar{v}_c}{dt} = 0.$$

Звідси швидкість центра мас є сталою величиною

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \text{const}.$$

На цій основі сформулюємо закон збереження руху центра мас матеріальної системи.

Якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, то центр мас системи рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває у спокої.

Може статися, що проекція головного вектора зовнішніх сил лише на одну вісь, наприклад, вісь x дорівнює нулю.

Тоді за виразом (3.113)

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0; \Rightarrow \frac{dx_c}{dt} = v_{cx} = const.$$

Якщо одна із проєкцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю, то проєкція швидкості центра мас на цю вісь зберігає свою величину.

Цей висновок впливає безпосередньо з рівнянь (3.113). Крім того, необхідно зазначити, що коли швидкість центра мас або проєкція швидкості на вісь на початку руху дорівнювала нулю, то за законом зберігається незмінним положення центра мас (радіус-вектор або координата).

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{r}_c = const; v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = 0 \Rightarrow x_c = const.$$

У цьому випадку закон збереження руху центра мас дозволяє по переміщенню однієї частини системи знайти переміщення другої її частини.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке центр мас і як визначаються його координати?
2. Які властивості внутрішніх сил ви знаєте?
3. Запишіть диференціальне рівняння руху матеріальної системи у векторній і координатній формах.
4. Напишіть алгебраїчний вираз і сформулюйте теорему про рух центра мас матеріальної системи.
5. Чи можуть внутрішні сили змінити положення центра мас?
6. Надайте формулювання закону збереження центра мас матеріальної системи.
7. Чи зберігається положення центра мас системи, якщо одне із тіл системи переміщується під дією внутрішніх сил на деяку відстань?
8. Чому дорівнює головний вектор і головний момент внутрішніх сил матеріальної системи?
9. Порівняйте два формулювання закону руху центра мас матеріальної системи.
10. Наведіть приклад, коли внутрішні сили спонукають до руху?

3.4. Основні (загальні) теореми динаміки

Вирішення другої основної задачі динаміки матеріальної системи зводиться до складання і розв'язування диференціальних рівнянь руху з урахуванням початкових умов. Інтегралі рівнянь руху надають вичерпну інформацію про рух системи.

Проте, загальний розв'язок для матеріальної системи, крім окремих випадків, знайти не вдається.

Задача про два тіла, що рухаються під дією гравітаційних сил, є дуже складною для загального випадку. Класична задача про три тіла в загальному вигляді не вирішена.

Для невідомої матеріальної системи треба одночасно розв'язувати дві задачі: визначення руху системи і визначення реакцій в'язей.

Проте, існує багато задач динаміки, розв'язання яких не потребує повної інформації про властивості досліджуваного руху системи, які містяться у диференціальних рівняннях.

Це задачі, пов'язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи або з визначенням руху центра мас і основних мір механічного руху системи: головного вектора кількості руху, головного моменту кількості руху, кінетичної енергії.

До ефективних методів розв'язування таких задач належать основні теореми динаміки, що встановлюють співвідношення між мірами механічного руху і мірами дії сил: імпульс сили, робота сили.

Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух.

Основні теореми динаміки дозволяють уникнути складних операцій інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і матеріальної системи, що значно спрощує розв'язання ряду задач динаміки.

Розглянемо послідовно теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і системи, моменту кількості руху, кінетичної енергії.

3.4.1. Міри механічного руху і міри дії сил

До основних мір руху належать кількість руху, момент кількості руху і кінетична енергія. До мір дії сил належать імпульс сили і робота сили.

Із диференціальних рівнянь руху впливають співвідношення між зміною протягом часу сумарних мір руху системи і мір дії сил – основні теореми динаміки, які називають загальними інтегралами диференціальних рівнянь руху. Міри руху є основою для встановлення загальних теорем

динаміки.

Цікава дискусія точилася у XVII-XVIII століттях між прихильниками Р.Декарта і Г.Лейбніца про те, яка із мір механічного руху – кількість руху або кінетична енергія (жива сила, як її тоді називали) – визначає динамічні властивості тіл. Дискусія закінчилась безрезультатно. Тільки у XIX ст. вчені прийшли до висновку, що обидві міри руху одночасно існують в кожному тілі.

Декартова міра, кількість руху як перша міра руху, характеризує здатність механічного руху тіла переходити до другого тіла у формі самого ж механічного руху. Друга міра руху, кінетична енергія, характеризує здатність механічного руху тіла перетворюватись в еквівалентну кількість потенціальної, теплової та інших видів енергії. Тільки релятивістська механіка (XX ст.) об'єднала ці дві міри руху в одну – тензор енергії (імпульс).

3.4.2. Кількість руху матеріальної точки і матеріальної системи

Однією з найважливіших динамічних характеристик руху матеріальної точки і матеріальної системи є *перша міра механічного руху – кількість руху*.

Кількість руху матеріальної точки є векторною функцією і дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості.

$$\bar{q} = m\bar{v}. \quad (3.114)$$

Напрямок вектора кількості руху \bar{q} збігається з напрямком вектора швидкості \bar{v} . Одиницею кількості руху є [кг м/с].

Головний вектор кількостей руху матеріальних точок або кількість руху матеріальної системи є вектором, який дорівнює векторній сумі кількостей руху точок системи

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k. \quad (3.115)$$

Вектор кількості руху системи визначається і через швидкість центра мас. Запишемо вираз (3.89) інакше $m \cdot \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$ і візьмемо похідну за

часом від лівої і правої частин $m \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}$.

Оскільки $\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c$, а $\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k$, то

$$m\bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \bar{Q}; \Rightarrow \bar{Q} = m\bar{v}_c. \quad (3.116)$$

Головний вектор кількості руху матеріальної системи дорівнює добутку маси m системи на вектор швидкості її центра мас.

Проекції кількості руху матеріальної системи на осі прямокутної системи декартових координат

$$Q_x = \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = m v_{cx}, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = m v_{cy}, \quad Q_z = \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = m v_{cz}. \quad (3.117)$$

Звідси головний вектор кількості руху матеріальної системи і його напрямні косинуси

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2};$$

$$\cos(\hat{\bar{Q}}, x) = \frac{Q_x}{Q}; \quad \cos(\hat{\bar{Q}}, y) = \frac{Q_y}{Q}; \quad \cos(\hat{\bar{Q}}, z) = \frac{Q_z}{Q}.$$

3.4.3. Імпульс сили

Ефект дії сили залежить не тільки від її величини, а й від тривалості дії. Для характеристики дії сили на тіло за певний проміжок часу вводиться поняття елементарного імпульсу сили і імпульсу сили за кінцевий проміжок часу.

Елементарний імпульс \bar{dS} сили \bar{F} – це векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії.

$$\bar{dS} = \bar{F} \cdot dt. \quad (3.118)$$

Напрямок елементарного імпульсу сили збігається з напрямком вектора сили. Одиницею імпульсу сили у Міжнародній системі одиниць СІ є $[H \cdot c]$. Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює інтегралу від елементарного імпульсу сили

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{dS} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt. \quad (3.119)$$

Для обчислення імпульсу сили використовують його проекції на відповідні осі координат.

$$S_x = \int_0^{t_1} dS_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} dS_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} dS_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \quad (3.120)$$

Повний імпульс

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

У випадку, якщо сила є сталою величиною, то імпульс сили

$$\bar{S} = \bar{F}t. \quad (3.121)$$

3.4.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Запишемо основний закон динаміки матеріальної точки у формі

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (3.122)$$

Перетворимо вираз (3.122)

$$d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot dt. \quad (3.123)$$

Рівність (3.123) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі.

Диференціал кількості руху матеріальної точки дорівнює векторній сумі елементарних імпульсів сил, що діють на дану точку.

Інтегруємо почленно ліву і праву частини виразу (3.123) в заданих границях

$$\int_{v_0}^{v_1} d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt. \quad (3.124)$$

Права частина виразу (3.124) є сумою імпульсів сил за кінцевий проміжок часу

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k. \quad (3.125)$$

Зміна кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів сил, які діють на точку за цей самий проміжок часу.

Вираз (3.125) у проєкціях на осі ортогональної системи декартових

Частина перша

координат x, y, z

$$\left. \begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}; & mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}; & mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum_{k=1}^n S_{kz} \end{aligned} \right\} \quad (3.126)$$

Приклад 3.12

Автомобіль масою $m = 1000$ кг рухається вздовж прямої горизонтальної дороги зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с.

Далі протягом 10 с сила тяги двигуна автомобіля збільшується на 150 Н за кожну секунду. Визначити швидкість автомобіля v_1 після десятої секунди розгону.

Розв'язання

Вважаємо рух автомобіля поступальним. Тоді його можна прийняти за матеріальну точку.

На підставі виразу (3.126) запишемо

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx} = S. \quad (a)$$

Оскільки рух по прямій, то можна позбавитись індексів

$$v_{1x} = v_1; \quad v_{0x} = v_0; \quad S_x = S; \quad \Rightarrow mv_1 - mv_0 = S.. \quad (б)$$

Визначимо імпульс сили тяги двигуна за виразом (3.119)

$$F = 150t; \quad S = \int_0^{t_1} F dt;$$

$$S = \int_0^{t_1} 150t dt = 150 \int_0^{10} t dt = 150 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{10} = \frac{150 \cdot 10^2}{2} = 7500 \text{ (Нс)}.$$

Із виразу (б)
$$v_1 = \frac{S + mv_0}{m} = \frac{7500 + 1000 \cdot 5}{1000} = 12,5 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v_1 = 12,5$ м/с.

3.4.5. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи

Для матеріальної системи, яка складається з n матеріальних точок, на підставі теореми про рух її центра мас можна записати:

$$m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \frac{d(m\bar{v}_c)}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.127)$$

де $m\bar{v}_C = \bar{Q}$ – кількість руху матеріальної системи.

Формула (3.127) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної системи у диференціальній формі.

Похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної системи дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну систему.

Перепишемо вираз (3.127)

$$d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt. \quad (3.128)$$

Інтегруємо почленно ліву та праву частини виразу (3.128) в границях від Q_0 до Q_1 і від 0 до t_1

$$\int_{Q_0}^{Q_1} d\bar{Q} = \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt \Rightarrow \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e. \quad (3.129)$$

Зміна вектора кількості руху матеріальної системи за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.

Рівність (3.129) виражає теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі.

Проектуємо вираз (3.129) на осі x, y, z нерухомої прямокутної інерціальної системи координат і отримуємо скалярні рівняння

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \quad (3.130)$$

3.4.6. Закон збереження кількості руху матеріальної системи

Якщо в процесі руху матеріальної системи імпульс головного вектора зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то із виразу (3.127)

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{Q} = \text{const}; \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = 0; \Rightarrow \bar{Q}_1 = \bar{Q}_0. \quad (3.131)$$

Якщо імпульс головного вектора зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається незмінною.

Частина перша

Аналогічно і відносно проєкцій головного імпульсу на якусь нерухому вісь координат. Якщо $\sum_{k=1}^n \bar{S}_{kx}^e = 0$, то $Q_{1x} - Q_{0x} = 0; \Rightarrow Q_{1x} = Q_{0x}$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка її розмірність?
2. Які міри руху існують в тілі, що рухається?
3. Як визначити імпульс змінної і сталої сил?
4. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки і системи.
5. Напишіть теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі.
6. Сформулюйте закон збереження кількості руху матеріальної системи.
7. Які задачі розв'язуються за допомогою загальних теорем динаміки?
8. Які міри дії сил мають місце під час руху тіла?
9. В якій системі координат справджуються закони збереження кількості руху точки і системи?
10. У чому суть дискусії між ученими 17-18 ст. про міри руху?

3.5. Теорема про зміну моменту кількості руху точки і кінетичного моменту системи

3.5.1. Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі

Поняття моменту відносно центра і осі можуть бути застосовані до будь-яких векторів, зокрема, до вектора сили в статиці або до вектора кількості руху матеріальної точки в динаміці.

Моментом кількості руху $(m\bar{v})$ матеріальної точки відносно центра O є вектор \bar{l}_O , який перпендикулярний до площини OAB , яку утворює вектор $(m\bar{v})$ і центр O , і спрямований у той бік, звідки здається, що вектор $(m\bar{v})$ намагається повернути цю площину відносно центра O проти ходу годинникової стрілки (рис. 3.25).

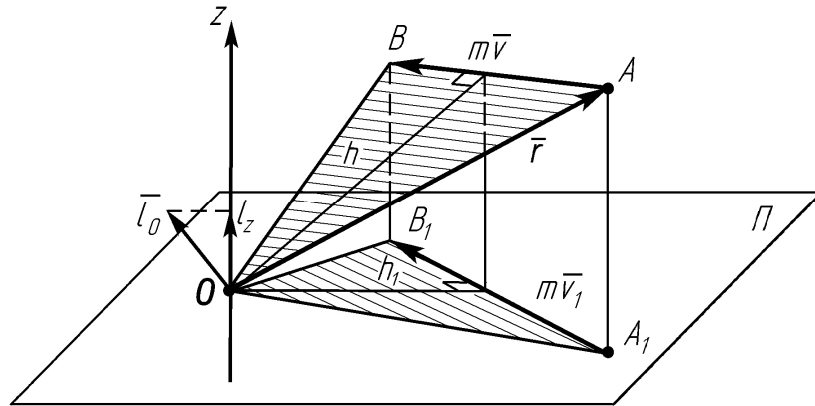


Рис. 3.25

Модуль моменту кількості руху точки відносно центра O дорівнює добутку модуля кількості руху точки на плече h – найкоротшу відстань від центра моменту до прямої лінії, на який розміщений вектор $(m\vec{v})$:

$$l_0 = mv \cdot h = 2S\Delta OAB. \quad (3.132)$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра O може бути записаний у вигляді векторного добутку радіуса-вектора \vec{r} рухомої точки A відносно центра O на вектор кількості руху точки

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (3.133)$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно осі z дорівнює моменту проекції $m\vec{v}_1$ кількості руху точки на площину Π , перпендикулярну до осі z , відносно точки O перетину осі z площиною.

$$l_z = m_z(m\vec{v}) = \pm n p_{\Pi}(m\vec{v}) \cdot h_1 = mv_1 \cdot h_1 = 2S\Delta OA_1B_1. \quad (3.134)$$

Момент кількості руху відносно центра як векторний добуток може бути виражений через визначник

$$\begin{aligned} \vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(ymv_z - zmv_y) + \vec{j}(zmv_x - xmv_z) + \vec{k}(xmv_y - ymv_x). \end{aligned}$$

Розкладемо вектор \vec{l}_0 за ортами ортогональної системи координат:

$$\vec{l}_0 = \vec{i}l_x + \vec{j}l_y + \vec{k}l_z.$$

Порівнюючи останні два вирази, можна записати:

$$l_x = ymv_z - zmv_y; \quad l_y = zmv_x - xmv_z; \quad l_z = xmv_y - ymv_x,$$

де x, y, z – координати точки A прикладання вектора кількості руху;
 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти координатних осей; mv_x, mv_y, mv_z – проекції вектора $m\bar{v}$ на осі координат.

Одиницею моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі координат є $[кг \cdot м^2 / с]$.

3.5.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і закон його збереження

Припустимо, що рух точки M вздовж траєкторії відбувається зі швидкістю \bar{v} і прискоренням \bar{a} під дією сили \bar{P} (рис. 3.26).

Тоді момент кількості руху точки і момент сили \bar{P} відносно центра O дорівнюють відповідно:

$$\bar{l}_o = \bar{m}_o(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}, \quad \bar{M}_o = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P},$$

де \bar{r} і $(m\bar{v})$ – змінні вектори;

\bar{r} – радіус-вектор точки M відносно центра O ;

\bar{P} – сила, що прискорює точку.

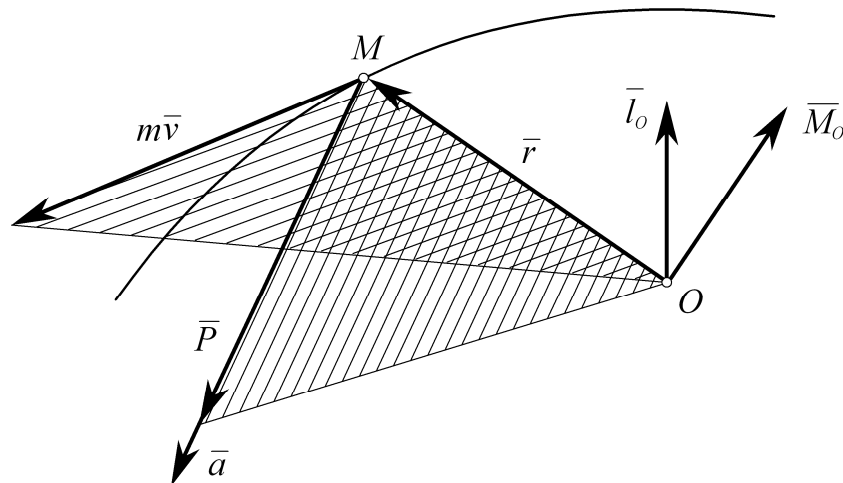


Рис. 3.26

Візьмемо похідну за часом від вектора моменту кількості руху матеріальної точки

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times (m\bar{v}) + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt}.$$

Але перший доданок $\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0$, оскільки вектори векторного добутку паралельні. Перетворимо другий доданок

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{P},$$

де \bar{P} – рівнодійна сила, що діє на точку. У підсумку другий доданок

$$\bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{M}_o.$$

Остаточно матимемо:

$$\frac{d\bar{l}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{m}_o(m\bar{v})) = \bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{M}_o \Rightarrow \frac{d\bar{l}_o}{dt} = \bar{m}_o(\bar{P}). \quad (3.135)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно довільного центра O дорівнює моменту рівнодійної сили відносно того самого центра.

Проектуємо вираз (3.135) на осі системи декартових координат

$$\frac{dl_z}{dt} = m_z(P); \quad \frac{dl_x}{dt} = m_x(P); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(P). \quad (3.136)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якої нерухомої координатної осі дорівнює моменту рівнодійної сили відносно цієї ж осі.

Під час руху матеріальної точки може статися, що права частина рівняння (3.136) дорівнює нулю:

$$\bar{m}_o(\bar{P}) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{l}_o}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{l}_o = \bar{m}_o(m\bar{v}) = const.$$

Якщо момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно даного центра залишається незмінним.

Наприклад, під час руху планет сонячної системи під дією центральної сили притягання момент останньої відносно центра Сонця дорівнює нулю. Тому момент кількості руху планет завжди перпендикулярний площині екліптики і є незмінним за модулем.

Частина перша

За аналогією цей закон стосується і моменту кількості руху відносно будь-якої осі (3.136)

$$l_z = m_z(m\bar{v}) = const.$$

3.5.3. Кінетичний момент системи відносно центра і осі

Розглянутий матеріал про момент кількості матеріальної точки поширимо на систему матеріальних точок, вводячи поняття кінетичного моменту системи.

Кінетичним моментом матеріальної системи відносно будь-якого центра O є вектор \bar{L}_o , який дорівнює векторній сумі моментів кількості руху точок системи \bar{l}_{ok} відносно цього самого центра

$$\bar{L}_o = \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o(m_k \bar{v}_k) = \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k). \quad (3.137)$$

де \bar{l}_{ok} – момент кількості руху k -ї точки системи;

$m_k \bar{v}_k$ – кількість руху k -ї точки; \bar{r}_k – радіус-вектор, що з'єднує k -ю точку системи з нерухомим центром. Кінетичним або головним моментом кількості руху матеріальної системи відносно будь-якої осі Oz є алгебраїчна сума моментів l_{zk} кількості руху точок системи відносно осі

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum m_z(m_k \bar{v}_k).$$

3.5.4. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ (рис. 3.27).

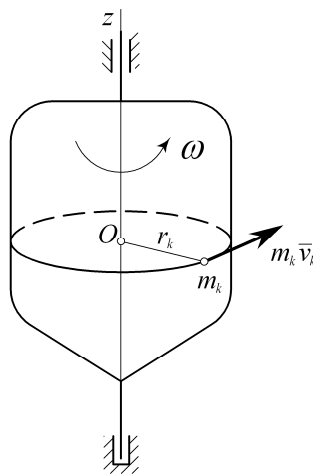


Рис. 3.27

Швидкість елементарного об'єму dm , віддаленого від осі обертання на відстань r становить $v = r\omega$, кількість руху $dQ = vdm = r\omega dm$, а елементарний кінетичний момент відносно осі Oz – $dl_z = rdQ = rvd m = r^2\omega dm$. Для всього тіла кінетичний момент $L_z = \omega \int_{(m)} r^2 dm$, де інтегрування поширено на всю масу тіла.

Інтеграл $\int_{(m)} r^2 dm$ залежить лише від характеру розподілу маси в тілі і є моментом інерції тіла відносно осі обертання $I_z = \int_{(m)} r^2 dm$. З урахуванням цього кінетичний момент тіла відносно осі Oz запишеться

$$L_z = I_z \omega. \tag{3.138}$$

Кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно осі на кутову швидкість тіла.

3.5.5. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи і закон його збереження

Нехай матеріальна система складається із n матеріальних точок,

де m_1, m_2, \dots, m_n – маси точок матеріальної системи;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – зовнішні сили, прикладені до точок;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ – внутрішні сили взаємодії між точками;

$\bar{l}_{10}, \bar{l}_{20}, \dots, \bar{l}_{n0}$ – моменти кількості руху точок відносно центра O .

Для кожної точки застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху (3.135), відокремивши її від системи і прикладаючи моменти внутрішніх сил

$$\frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Підсумуємо цей вираз по всіх точках системи

$$\sum \frac{d\bar{l}_{ok}}{dt} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}); \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}),$$

де $\sum \bar{l}_{ok} = \bar{L}_o$ – кінетичний момент системи,

$\sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}) = 0$ – головний вектор внутрішніх сил.

Остаточно

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^e) = \bar{M}_o \quad (3.139)$$

Похідна за часом від кінетичного моменту \bar{L}_o матеріальної системи відносно нерухомого центра O дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того ж центра.

Проектуємо векторне рівняння (3.139) на осі декартових координат і отримуємо аналітичні вирази

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= \sum m_z (\bar{F}_k^e) = M_{Oz}; & \frac{dL_x}{dt} &= \sum m_x (\bar{F}_k^e) = M_{Ox}; \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum m_y (\bar{F}_k^e) = M_{Oy} \end{aligned} \quad (3.140)$$

Рівняння (3.139) виражає теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи в диференціальній формі.

Доведемо цю теорему в інтегральній формі, для чого запишемо вираз (3.139) у вигляді $d\bar{L}_o = \bar{M}_o dt$. Інтегруючи цю рівність у межах від t_0 до t , одержимо

$$\bar{L}_o(t) - \bar{L}_o(t_0) = \int_{t_0}^t \bar{M}_o dt = \bar{L}_o^e, \quad (3.141)$$

де \bar{L}_o^e – головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно центра O .

Вираз (3.141) використовують під час вивчення елементарної теорії удару.

Під час руху матеріальної системи може статися, що сума моментів сил відносно центра дорівнює нулю

$$\sum \bar{m}_o (\bar{F}_k^e) = 0; \Rightarrow \bar{L}_o = \sum \bar{m}_o (m_k \bar{v}_k) = const.$$

Якщо головний момент зовнішніх сил, які діють на систему, відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то кінетичний момент матеріальної системи відносно цього центра зберігає свою величину.

Як випадок, сума моментів сил відносно осі може дорівнювати нулю

$$\sum m_z (F_k^e) = 0 \Rightarrow L_z = \sum m_z (m_k v_k) = const.$$

З останнього виразу випливає, що для твердого тіла, яке обертається навколо осі z з кутовою швидкістю ω , кінетичний момент теж зберігає своє значення $L_z = I_z \cdot \omega = const$, а це означає, що коли, наприклад,

зменшується осьовий момент інерції тіла I_z , то кутова швидкість обов'язково збільшуватиметься, щоб зберегти добуток незмінним

$$I_{z_1} \cdot \omega_1 = I_{z_2} \cdot \omega_2 = \dots = \text{const}.$$

Цей закон природи добре демонструє лави Жуковського, яку розкручують навколо вертикальної осі. І якщо в цей момент людина, яка стоїть на лаві, різко підніме руки в сторони, збільшуючи свій момент інерції навколо вертикальної осі, то кутова швидкість дуже помітно знижується.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначте поняття моменту кількості руху точки і системи.
2. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки. Напишіть математичний вираз теореми.
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту матеріальної системи. Напишіть математичний вираз теореми.
4. Як визначити кінетичний момент тіла відносно осі обертання?
5. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної точки.
6. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту системи.
7. Наведіть приклади із побуту, як працює закон збереження кінетичного моменту системи.
8. Сформулюйте закон збереження кінетичного моменту матеріальної системи відносно осей координат.
9. Як визначити головний момент кількості руху системи?
10. Що демонструє лави Жуковського?

3.6. Динаміка твердого тіла

3.6.1. Основні задачі. Диференціальні рівняння поступального руху тіла

Як і в разі матеріальної точки для твердого тіла розглядають дві основні задачі динаміки: пряма і обернена. Для невільного руху тіла треба визначати і реакції в'язей. Аналізуючи сили, слід зазначити, що внутрішні сили у твердому тілі врівноважуються. Отже, сили, що діють на тверде тіло є зовнішніми. Крім того, за другою класифікацією сили, що діють на тверде тіло, поділяють на активні сили і реакції в'язей.

Частина перша

У динаміці твердого тіла вибирають нерухому систему координат і дві допоміжних системи: поступальну, осі якої паралельні осям нерухомої системи і яка рухається разом з полюсом, і систему координат, що незмінно зв'язана з тілом.

Положення вільного тіла у просторі визначається шістьма параметрами (наприклад, три координати полюса і три кути Ейлера). Тому для розв'язання згаданих задач динаміки необхідно шість рівнянь, які зв'язують кінематичні параметри із силами, що діють на тверде тіло. Подібно до того, як це було в кінематиці твердого тіла, розглянемо поступальний, обертальний рух навколо нерухомої осі, плоскопаралельний рух тіла.

При поступальному русі тіло перебуває у спокої відносно системи осей, що паралельні осям нерухомої системи координат. Тому для здійснення поступального руху тіла треба, щоб головний момент зовнішніх сил відносно центра мас і початкова кутова швидкість дорівнювали нулю.

Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла в проекціях на осі нерухомої системи координат

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e, \\ m\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e, \\ m\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e, \end{cases} \quad (3.142)$$

де m – маса тіла; x_c , y_c , z_c – координати центра мас;

F_{kx}^e , F_{ky}^e , F_{kz}^e – проекції k -ї зовнішньої сили на осі координат.

Рівняння (3.142) дають змогу розв'язати першу і другу задачі динаміки поступального руху тіла.

3.6.2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла

Невільне тверде тіло (рис. 3.28) під дією прикладених до нього зовнішніх сил $\bar{P}_1^e, \bar{P}_2^e, \dots, \bar{P}_n^e$ обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω , маючи один ступінь вільності.

Виведемо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту системи або твердого тіла відносно осі

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\bar{P}_k). \quad (3.143)$$

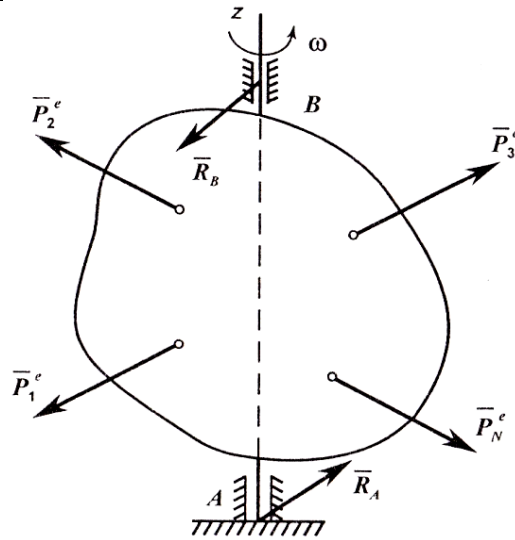


Рис. 3.28

Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання z

$$L_z = I_z \cdot \omega, \quad (3.144)$$

де I_z – сталий осьовий момент інерції тіла; ω – кутова швидкість.

Візьмемо похідну за часом від виразу (3.144) і підставимо в (3.143)

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (3.145)$$

Вираз (3.145) є шуканим **диференціальним рівнянням обертального руху тіла відносно нерухомої осі.**

Відомо, що кутове прискорення може бути виражено

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

У відповідності з останнім і диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі може бути записане у варіантах

$$I_z \cdot \varepsilon = \sum m_z (\bar{P}_k^e); I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{P}_k^e); I_z \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (3.146)$$

Добуток осьового моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил відносно цієї самої осі.

При вивченні обертального руху тіла за додатний приймають напрямок обертання. Тоді моменти рушійних сил, які створюються

Частина перша

двигунами і спрямовані у напрямку обертання, мають додатні значення, а моменти сил опору, спрямовані протилежно напрямку обертання – від’ємні.

Таким чином, обертання відбувається за рахунок різниці моментів рушійних сил і моментів сил опору.

Якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) > 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ – обертальний рух прискорений,

якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) < 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$ – обертальний рух сповільнений,

якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ – обертання рівномірне ($\omega = const$).

Приклад 3.13

Колесо масою m і радіусом R обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω_0 . Визначити час гальмування t_1 і кут повороту колеса φ_1 до зупинки, якщо сила тиску, прикладена до колодки, дорівнює T , а коефіцієнт тертя ковзання – f (рис. 3.29).

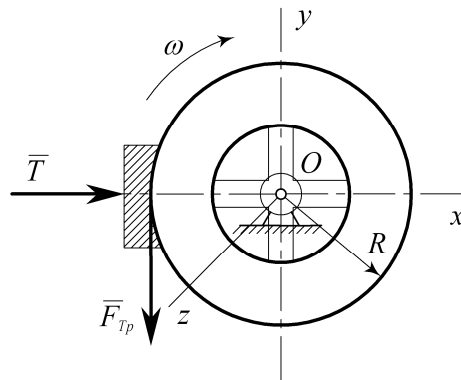


Рис. 3.29

Розв’язання

Запишемо диференціальне рівняння обертального руху колеса (3.145) і підставимо в праву частину момент прикладених сил, який направлений проти напрямку руху (гальмівний момент)

$$I_{oz} \frac{d\omega}{dt} = -F_{mp} \cdot R = -f \cdot T \cdot R \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fTR}{I_{oz}}.$$

Після відокремлення змінних і інтегрування

$$\omega = -\frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t + C_1;$$

Довільну сталу інтегрування шукаємо із початкових умов: якщо $t_0 = 0$, то $\omega = \omega_0$.

Після підстановки в попередній вираз, отримаємо $C_1 = \omega_0$.
Остаточно закон зміни кутової швидкості

$$\omega = \omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t. \quad (a)$$

Під час зупинки колеса $\omega = 0$. Із виразу (а) час гальмування

$$\omega_0 = \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0 I_{oz}}{fTR}. \quad (б)$$

Визначимо кут повороту колеса:

$$\varphi = \int \omega \cdot dt = \int \left(\omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t \right) \cdot dt = \omega_0 t - \frac{fTR}{2I_{oz}} t^2 + C_2.$$

Якщо $t_0 = 0$, то $\varphi_0 = 0$, $C_2 = 0$ і остаточно

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}} = \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}}. \quad (в)$$

Обчислимо за умовою момент інерції колеса $I_{oz} = MR^2$.

Підставимо відповідні значення в рівняння (б), (в) і отримаємо в заданих параметрах час гальмування і кут повороту до зупинки

$$t_1 = \frac{M\omega_0 R}{fT}; \quad \varphi_1 = \frac{fT t_1^2}{2MR}.$$

3.6.3. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла

Відомо, що плоский або плоскопаралельний рух твердого тіла можна уявити як суму двох найпростіших рухів: поступального разом з полюсом і обертального відносно полюса.

Поступальний рух визначається двома координатами полюса, а обертальний – кутом повороту навколо полюса.

Якщо обрати за полюс центр мас тіла C , то поступальна частина руху буде визначатись векторним рівнянням

$$m\bar{a}_c = \sum \bar{P}_k^e, \quad (3.147)$$

де \bar{a}_c – прискорення центра мас,

$\sum \bar{P}_k^e$ – головний вектор зовнішніх сил.

Обертальний рух відносно полюса визначається рівнянням

$$I_{zc} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z(\bar{P}_k^e), \quad (3.148)$$

де I_{zc} – момент інерції відносно центральної осі, що перпендикулярна площині руху,

$\sum m_z(\bar{P}_k^e)$ – головний момент зовнішніх сил.

У координатній формі диференціальні рівняння плоского руху тіла

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_c = \sum P_{kx}^e, \\ m \cdot \ddot{y}_c = \sum P_{ky}^e, \\ I_{zc} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_z(\bar{P}_k^e) \end{cases} \quad (3.149)$$

Отже, для реалізації плоского руху необхідно, щоб сума проєкцій сил на вісь z і суми моментів зовнішніх сил або головні моменти навколо двох інших осей дорівнювали нулю:

$$\sum \bar{P}_{kz}^e = 0; \quad \sum m_x(\bar{P}_k^e) = 0; \quad \sum m_y(\bar{P}_k^e) = 0.$$

Приклад 3.14

Суцільний однорідний коловий циліндр (рис. 3.30) радіуса R котиться вздовж похилої площини без ковзання. *Визначити* величину прискорення центра циліндра \bar{a}_c і силу \bar{F} , яка утримує циліндр від проковзування.

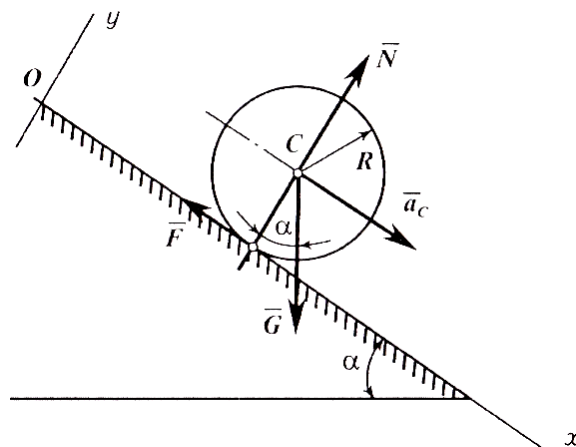


Рис. 3.30

m – маса циліндра; $G = m \cdot g$ – вага циліндра;

R – радіус циліндра; ε – кутове прискорення циліндра.

Розв'язання

Запишемо диференціальні рівняння плоского руху (3.149)

$$\begin{cases} m \cdot a_c = G \sin \alpha - F, & (a) \\ I_{zc} \cdot \varepsilon = F \cdot R. & (б) \end{cases}$$

Кутове прискорення $\varepsilon = \frac{a_c}{R}$ підставимо в рівняння (б)

$$I_{zc} \cdot \frac{a_c}{R} = F \cdot R \Rightarrow F = \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}.$$

Тоді рівняння (а) матиме вигляд

$$m \cdot a_c = mg \sin \alpha - \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}.$$

Для суцільного циліндра

$$I_{zc} = \frac{mR^2}{2}; \Rightarrow ma_c = mg \sin \alpha - \frac{ma_c}{2}.$$

Відповідь: $a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha; F = \frac{1}{3} G \sin \alpha.$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому динаміка поступального руху тіла може бути зведена до динаміки точки?
2. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання?
3. Напишіть формулу і сформулюйте вираз диференціального рівняння обертального руху тіла відносно осі.
4. В яких випадках дії сил обертальний рух тіла буде рівномірним, прискореним чи сповільненим?
5. Напишіть закон коливань фізичного маятника. Чому дорівнює період коливань?
6. Що таке зведена довжина фізичного маятника і як вона визначається?
7. Скільки диференціальних рівнянь визначають динаміку плоского руху твердого тіла і який вигляд ці рівняння мають?
8. Що таке фізичний маятник і чим він відрізняється від математичного?

9. Як визначити положення центра коливань фізичного маятника?
10. Які методи визначення моменту інерції тіл надає теорія коливань фізичного маятника?

3.7. Робота і потужність сили

3.7.1. Елементарна робота сили

Матеріальна точка M рухається під дією сили \vec{F} вздовж криволінійної траєкторії. Положення точки в довільний момент часу t визначається радіусом-вектором \vec{r} , проведеним із фіксованої точки O початку нерухомої системи відліку (рис. 3.31).

Під час переміщення точки радіус-вектор за нескінченно малий проміжок часу dt отримує приріст $d\vec{r}$ як елементарне переміщення точки.

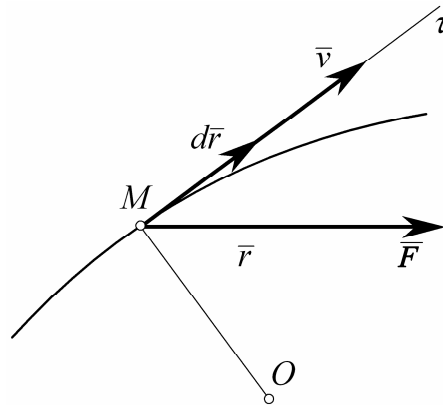


Рис. 3.31

Елементарною роботою сили \vec{F} на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ називається міра дії сили, рівна скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладання.

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.150)$$

Вираз (3.150) визначає роботу сили за векторним способом задання руху точки.

За натуральним способом задання руху точки $d\vec{r} = \vec{\tau} ds$ ($\vec{\tau}$ – орт дотичної до траєкторії в точці M ; ds – диференціал дуги траєкторії). Тоді елементарна робота

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = F ds \cos(\hat{F}, \vec{\tau}). \quad (3.151)$$

Елементарна робота сили за натуральним способом задання руху

точки дорівнює добутку сили на елементарне переміщення точки прикладання сили вздовж траєкторії і на косинус кута між векторами сили і швидкості.

Отже, роботу виконує дотична проекція сили

$$\begin{aligned} F \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) &= F_{\tau}, \\ \delta A &= F_{\tau} \cdot ds. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Якщо кут між векторами сили і швидкості $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) < 90^\circ$, то елементарна робота додатна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = 0^\circ$; $\Rightarrow \delta A = F \cdot ds$, то робота максимальна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) > 90^\circ$, то робота від'ємна; кут $(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = 90^\circ$, то робота дорівнює нулю, тобто, сила, перпендикулярна вектору швидкості, роботу не виконує.

Зв'яжемо з точкою O прямокутну систему декартових координат з ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Визначимо елементарну роботу сили в координатній формі. Для цього силу \vec{F} і елементарне переміщення $d\vec{r}$ розкладемо за ортами осей системи координат

$$\vec{F} = \bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z, \quad d\vec{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz$$

і підставимо у вираз роботи (3.168)

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.153)$$

Елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій сили на варіації відповідних координат точки прикладання сили.

3.7.2. Робота сили на кінцевому переміщенні. Потужність сили

Припустимо, що точка M перемістилась з положення M_1 у положення M_2 (рис. 3.32). Потрібно визначити роботу сили \vec{F} на кінцевому переміщенні.

Величина, рівна криволінійному інтегралу від елементарної роботи, взятому вздовж дуги кривої, окресленої точкою прикладання сили під час її переміщення, називається роботою сили на кінцевому переміщенні або повною роботою сили.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.154)$$

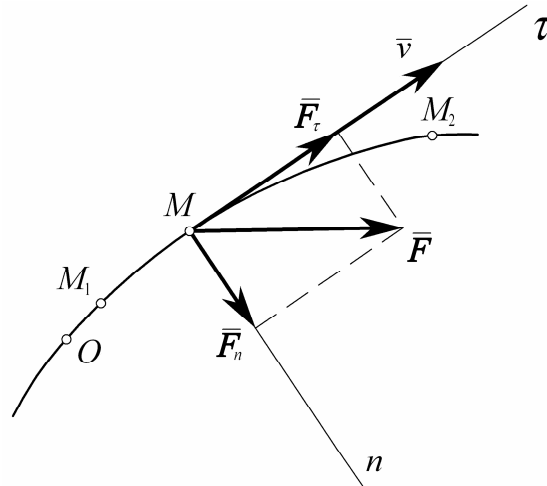


Рис. 3.32

За координатного способу задання руху повна робота сили виражається

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.155)$$

За натурального способу задання руху повна робота сили

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} F ds \cos(\vec{F}, \hat{\vec{v}}). \quad (3.156)$$

Якщо перейти від криволінійного інтеграла (3.155) до визначеного, то треба врахувати $dx = \dot{x}dt$; $dy = \dot{y}dt$; $dz = \dot{z}dt$.

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt,$$

де t_1, t_2 – моменти часу, коли точка перебувала в положеннях M_1 і M_2 (рис. 3.38).

Робота сталої сили

$$A = F \cdot S \cdot \cos(\vec{F}, \hat{\vec{v}}). \quad (3.157)$$

Робота сталої сили на прямолінійному переміщенні точки її прикладання дорівнює добутку модуля сили на величину переміщення і на косинус кута між векторами сили і швидкості.

Одиницею роботи сили в системі СІ є джоуль Дж.

Потужність сили – це фізична алгебраїчна величина, яка характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки, і дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки.

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt}.$$

Знаючи потужність сили, можна визначити виконану роботу за деякий проміжок часу $A = \int_{t_1}^{t_2} N dt$. Якщо ж потужність стала, то $A = Nt$, де $t = t_2 - t_1$ – згаданий проміжок часу.

Одиницею потужності в системі СІ є ват Вт [Дж · с⁻¹].

3.7.3. Теорема про роботу рівнодійної сили

Робота рівнодійної сили на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж самому переміщенні.

Нехай система складається із n сил. Проекція рівнодійної сили \vec{R} на вісь τ дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх сил на цю вісь (рис. 3.33).

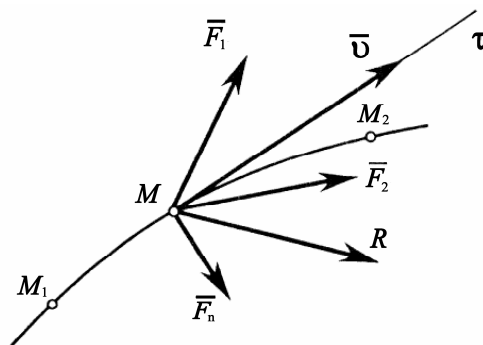


Рис. 3.33

$$R \cdot \cos(\hat{R}, \hat{v}) = F_1 \cdot \cos(\hat{F}_1, \hat{v}) + F_2 \cdot \cos(\hat{F}_2, \hat{v}) + \dots + F_n \cdot \cos(\hat{F}_n, \hat{v}) \quad (3.158)$$

Помножимо почленно рівняння (3.158) на dS і, інтегруючи на

Частина перша

переміщенні від точки M_1 до точки M_2 , остаточно одержимо:

$$\int_{M_1}^{M_2} R \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{v}}) \cdot ds = \int_{M_1}^{M_2} F_1 \cos(\widehat{\vec{F}_1, \vec{v}}) \cdot ds + \int_{M_1}^{M_2} F_2 \cos(\widehat{\vec{F}_2, \vec{v}}) \cdot ds + \dots + \int_{M_1}^{M_2} F_n \cos(\widehat{\vec{F}_n, \vec{v}}) \cdot ds.$$
$$A_R = A_1 + A_2 + \dots + A_n. \quad (3.159)$$

3.7.4. Робота сили в окремих випадках

Припустимо, що матеріальна точка M рухається вздовж деякої траєкторії із положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ у положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$ під дією сталої сили ваги $G = mg$, де g – прискорення вільного падіння.

Обчислимо роботу сили \vec{G} на переміщенні точки M_1M_2 . Оберемо нерухому прямокутну систему декартових координат, як на рис. 3.34.

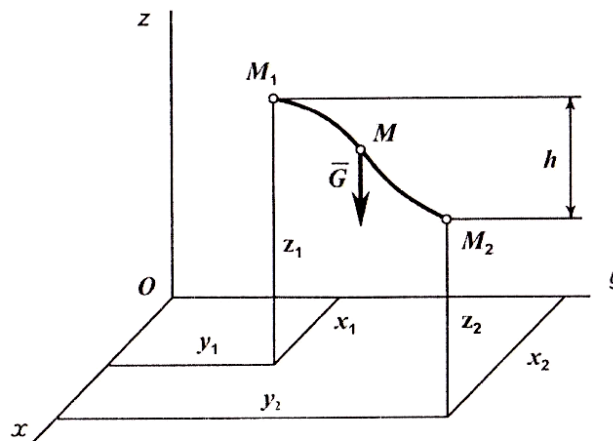


Рис. 3.34

Проекції сили \vec{G} на координатні осі

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad G_z = -G = -mg. \quad (3.160)$$

Використаємо координатний вираз елементарної роботи сили (3.173)

$$\delta A = G_x dx + G_y dy + G_z dz = -mg dz. \quad (3.161)$$

Знак мінус означає, що сила \vec{G} напрямлена протилежно відносно осі Oz .

Робота, що виконується силою \vec{G} на переміщенні точки з положення M_1 в положення M_2

$$A = \int_{M_2}^{M_1} \delta A = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mgz \Big|_{z_1}^{z_2} =$$

$$= -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) = mgh,$$
(3.162)

де $h = z_1 - z_2$ – величина вертикального переміщення точки M .

Якщо $z_1 > z_2$, то робота сили ваги додатна, а якщо $z_1 < z_2$, то робота сили ваги від’ємна.

Таким чином, робота, що виконується силою ваги

$$A = \pm mgh,$$
(3.163)

де знак «плюс» відповідає переміщенню точки донизу, а знак «мінус» – переміщенню точки вгору.

Робота, що виконується силою ваги матеріальної точки, дорівнює добутку модуля сили ваги на різницю висот початкового і кінцевого положення точки.

Робота сили ваги матеріальної точки не залежить від виду траєкторії, по якій рухається точка, а залежить тільки від різниці по вертикалі між положеннями точки.

Робота, що виконується силою ваги твердого тіла на замкненому переміщенні його центра ваги дорівнює нулю.

Робота лінійної сили пружності

Визначимо спочатку елементарну роботу пружної сили F_{np} , яка підкоряється закону Гука, прикладеної до точки B пружини (рис. 3.35) під час її деформації на елементарну величину dx .

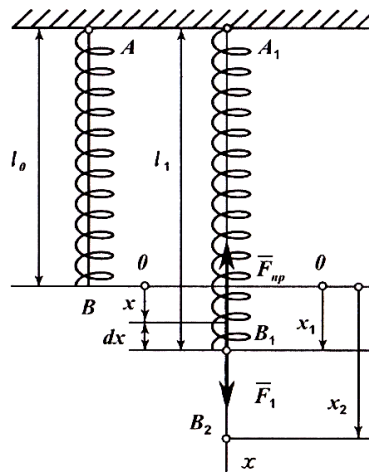


Рис. 3.35

Основною характеристикою пружного елемента є **коефіцієнт**

Частина перша

жорсткості c (H/m) – відношення сили, яка діє на пружний елемент, до величини його деформації.

Якщо обрати вісь x вздовж осі пружини у напрямі її розтягу, а початок координат O – у положенні недеформованої пружини довжиною l_0 , то сила пружності

$$F_{np} = -cx, \quad (3.164)$$

де x – деяка деформація пружного елемента.

Знак «мінус» свідчить, що вектор сили спрямований у бік, протилежний напрямку переміщення кінця пружини точки B .

Елементарна робота сили (3.173)

$$\begin{aligned} \delta A &= F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad F_{np_x} = -cx; \quad F_{np_y} = F_{np_z} = 0. \\ \delta A &= -F_{np} dx = -cxdx. \end{aligned} \quad (3.165)$$

За переміщенням точки прикладання сили з положення B_1 у положення B_2 , тобто, на відстань $x_2 - x_1$, сила пружності виконує роботу

$$A = \int_{B_1}^{B_2} \delta A = - \int_{x_1}^{x_2} F_{np} dx = -c \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = - \left. \frac{cx^2}{2} \right|_{x_1}^{x_2} = - \frac{c(x_2^2 - x_1^2)}{2}. \quad (3.166)$$

Робота сили пружності, якщо вона відповідає закону Гука, дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на різницю квадратів координат кінця і початку переміщення точки прикладання сили, яке відраховується від положення недеформованого стану.

Якщо позначити деформацію пружини $x_2 - x_1 = h$, то роботу сили пружності можна визначити

$$A = - \int_0^h F_{np} dx = -c \int_0^h x \cdot dx = - \frac{ch^2}{2}$$

Робота сили пружності від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно напрямку переміщення точки її прикладання.

Якщо кінець пружини відпускати до початкового положення, то сила пружності виконує додатну роботу

Робота і потужність сили, прикладеної до обертового тіла

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі z під дією довільно

розміщеної у просторі зовнішньої сили \vec{P} , прикладеної в точці M на відстані r від осі (рис. 3.36). Визначимо роботу цієї сили.

Для цього проведемо крізь точку M площину Π , перпендикулярну до осі. Розкладемо вектор сили \vec{P} на дві складові: \vec{P}_1 розміщену у площині Π , і \vec{P}_2 , паралельну осі z .

Відомо, що складова \vec{P}_2 роботу не виконує, оскільки її напрямок перпендикулярний вектору швидкості \vec{v} і згідно з формулою (3.157) її робота дорівнює нулю.

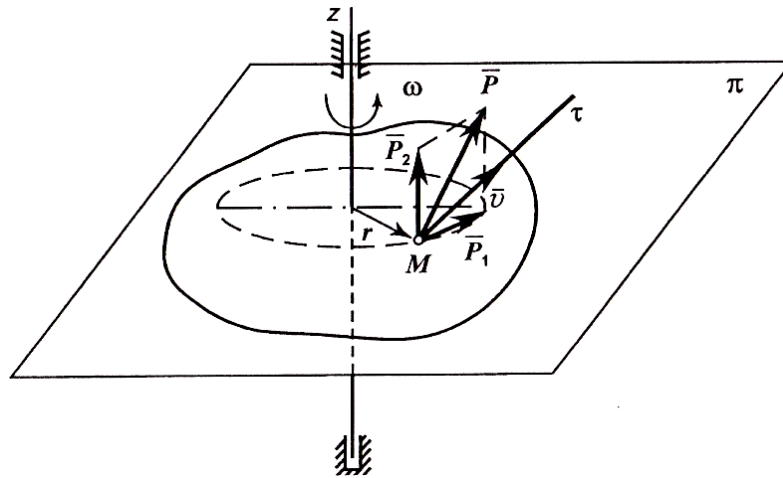


Рис. 3.36

Елементарна робота сили

$$\delta A = P_1 \cdot ds \cdot \cos(\vec{P}_1, \vec{v}) = P_1 r \cdot \cos(\vec{P}_1, \vec{v}) \cdot d\varphi = M_z d\varphi,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту тіла;

$ds = r \cdot d\varphi$ – елементарна дуга кола, що окреслює точка M під час обертання разом з тілом;

$$F_1 r \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{v}) = M_z^e \quad \text{– обертальний момент сили } \vec{F}^e \text{ відносно осі } z.$$

Елементарна робота сили, прикладеної до тіла, що обертається відносно осі z , дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі z на елементарний кут повороту тіла.

Повна робота сили дорівнює інтегралу від елементарної роботи

$$A = \int_0^\varphi M_z^e \cdot d\varphi. \quad (3.167)$$

Якщо обертальний момент є сталою величиною ($M_z = const$), то

$$A = M_z^e \cdot \varphi. \quad (3.168)$$

Потужність сили, прикладеної до обертового тіла

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega. \quad (3.169)$$

Потужність сили, прикладеної до тіла, що обертається відносно нерухомої осі, характеризує швидкість виконаної роботи і дорівнює добутку моменту сили відносно цієї осі на кутову швидкість тіла.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке елементарна робота сили?
2. Як впливає кут між векторами сили і швидкості на величину і знак елементарної роботи?
3. Як визначити роботу сили на кінцевому переміщенні?
4. Напишіть формулу роботи сталої сили, спрямованої під кутом до вектора швидкості.
5. Як визначити роботу рівнодійної сили?
6. Визначте роботу сили ваги і сили пружності.
7. Як визначається робота сили, прикладеної до обертового тіла?
8. Що таке коефіцієнт корисної дії і як він визначається?
9. Як визначити потужність сили, прикладеної до обертового тіла?
10. Як визначити потужність сили, прикладеної до тіла, що рухається поступально?
11. Як визначити елементарну роботу сили, прикладеної до обертового тіла?
12. Чому дорівнює повна робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла?
13. Чому робота сили пружності є від'ємною?
14. В яких випадках робота сили ваги є додатною, а в яких – від'ємною?
15. Що таке коефіцієнт жорсткості пружного елемента, як він визначається і яка його розмірність?

3.8. Кінетична енергія матеріальних точки і системи

3.8.1. Визначення кінетичної енергії. Теорема Кьоніга

Кінетична енергія характеризує здатність механічного руху перетворюватись в еквівалентну кількість іншої форми руху (потенціальна енергія, теплота тощо).

Кінетична енергія – це друга найважливіша міра механічного руху. Ця міра руху була введена Г. Лейбніцем і названа «живою силою». У ХІХ ст. з появою поняття енергії Г. Гельмгольц назвав цей вид енергії кінетичною.

Кінетичною енергією матеріальної точки називають скалярну міру механічного руху, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості в нерухомій системі координат

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} m v^2, \quad (3.170)$$

де \bar{v} – швидкість матеріальної точки відносно заданої системи відліку.

Вираз (3.170) приймає різний вигляд в залежності від способу задання руху точки. За векторного способу $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ і кінетична енергія дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2. \quad (3.171)$$

За координатного способу швидкість $\bar{v} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}$;

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти осей прямокутної системи декартових координат

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (3.172)$$

За натурального способу $\bar{v} = v_\tau \bar{\tau}$; $v_\tau = \dot{s}$; $\bar{\tau}$ – орт дотичної

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2. \quad (3.173)$$

Кінетичною енергією матеріальної системи в нерухомій системі координат називається скалярна величина, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій точок, що належать системі

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2, \quad (3.174)$$

де \bar{v}_k – швидкість k -ї матеріальної точки відносно нерухомої інерціальної системи координат.

Зрозуміло, що кінетична енергія є додатною величиною і не залежить від напрямків швидкостей точок системи.

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи в абсолютному русі. Система у цьому разі здійснює складний рух, швидкість кожної точки якої складається з векторної суми переносної і відносної швидкостей. Обмежимося тим випадком, коли переносний рух є поступальним зі швидкістю, яка дорівнює швидкості центра мас системи, а початок рухомої системи координат співпадає з центром інерції (центр мас). Матеріальна система рухається довільним чином відносно рухомої системи координат, а разом з рухомою системою координат виконує поступальний рух навколо нерухомої системи координат. Тоді абсолютна швидкість довільної точки матеріальної системи $\bar{v}_k = \bar{v}_c + \bar{v}_{kr}$, де \bar{v}_c – швидкість центра мас, \bar{v}_{kr} – швидкість точки відносно рухомої системи координат, що здійснює поступальний рух. Підставимо абсолютну швидкість точки у вираз (3.193) і після перетворень маємо три доданки

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr}) \cdot (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2 + \bar{v}_c \cdot \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{kr}. \end{aligned}$$

Останній доданок у цьому виразі дорівнює нулю на підставі (3.89): початок відліку рухомої системи координат вибраний в центрі мас і тому

$$\bar{r}_c = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k \dot{\bar{r}}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_{kr} = 0.$$

Остаточо маємо:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2. \quad (3.175)$$

Формула (3.175) є математичним виразом теореми Кьоніга.

Кінетична енергія матеріальної системи у довільному русі дорівнює сумі кінетичних енергій поступального переносного руху системи разом із центром мас і відносного руху навколо центра мас.

3.8.2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Нехай матеріальна точка масою m рухається вздовж криволінійної траєкторії із положення M_1 в положення M_2 під дією рівнодійної сили \bar{P} .

Згідно з основним законом динаміки

$$m \cdot \bar{a} = \bar{P}, \quad (3.176)$$

де m – маса точки; \bar{a} – вектор прискорення точки; \bar{P} – рівнодійна сил, що діють на точку (рис. 3.37).

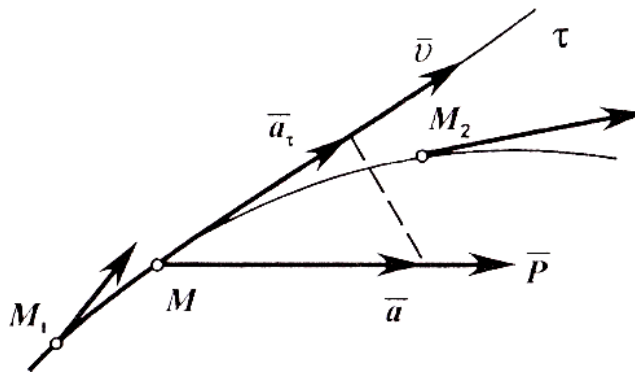


Рис. 3.37

Спроектуємо рівняння (3.176) на дотичну

$$m \cdot a_\tau = P \cdot \cos(\hat{P, \bar{v}}), \quad (3.177)$$

де $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – тангенціальне прискорення.

Підставимо значення a_τ у вираз (3.177):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos(\hat{P, \bar{v}}). \quad (3.178)$$

Рівняння (3.178) помножимо на елементарне переміщення точки вздовж траєкторії ds

$$m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = P \cdot ds \cdot \cos(\hat{P, \bar{v}}), \quad (3.179)$$

де $P \cdot ds \cdot \cos(\hat{P, \bar{v}})$ – елементарна робота сили \bar{P} , $\frac{ds}{dt} = v$. Підставимо це у вираз (3.179)

$$mv \cdot dv = \delta A \Rightarrow d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \delta A \Rightarrow dT = \delta A. \quad (3.180)$$

Формула (3.180) є математичним виразом теореми у диференціальній формі:

|| диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на цю точку.

Припустимо, що в момент часу t_1 швидкість точки дорівнювала v_1 , а в момент t_2 – v_2 , і візьмемо визначений інтеграл у відповідних границях

$$\int_{v_1}^{v_2} mv \cdot dv = \int_{M_1}^{M_2} \delta A.$$

Після інтегрування

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A. \quad (3.181)$$

Формула (3.181) є математичним виразом теореми у кінцевій формі.

|| Зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили, що прикладена до точки на цьому самому переміщенні.

Одиницею кінетичної енергії (як і роботи) у Міжнародній системі СІ є джоуль [Дж].

Розглянемо теорему про зміну кінетичної енергії точки у випадку її відносного руху, для якого основний закон динаміки має вигляд (3.20)

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k$$

Проводячи подібні перетворення як для виразу (3.181), дістанемо

$$\frac{mv_{2r}^2}{2} - \frac{mv_{1r}^2}{2} = A(\sum \bar{F}_k) + A(\bar{\Phi}_e) + A(\bar{\Phi}_k), \quad (3.182)$$

де $A(\sum \bar{F}_k)$, $A(\bar{\Phi}_e)$, $A(\bar{\Phi}_k)$ – робота активних сил, переносної і коріолісової сил інерції відповідно;

v_{1r}^2, v_{2r}^2 – відносна швидкість точки на початку і наприкінці руху.

3.8.3. Обчислення кінетичної енергії твердого тіла

Тверде тіло рухається поступально

Приймаючи до уваги, що за поступальним рухом швидкості всіх точок тіла однакові і дорівнюють швидкості такої характерної точки тіла як центр мас \bar{v}_c , а відносні швидкості точок дорівнюють $\bar{v}_r = 0$, то запишемо на підставі теореми Кьоніга (3.194) формулу кінетичної енергії тіла, що рухається поступально

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_c^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{1}{2} m v_c^2, \quad (3.183)$$

де $\sum_{k=1}^n m_k = m$ – маса тіла.

Кінетична енергія тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.

Тверде тіло обертається відносно центральної нерухомої осі

У цьому випадку швидкість центра мас $\bar{v}_c = 0$, а швидкість кожної точки тіла $v_k = \omega \cdot r_k$, де r_k – відстань точки до осі обертання. Тоді кінетична енергія тіла на підставі (3.194) дорівнює:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} \Rightarrow T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}, \quad (3.184)$$

де $I_z = \sum m_k r_k^2$ – осьовий момент інерції тіла, як міра інертності тіла за обертальним рухом.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω дорівнює половині добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості.

Тверде тіло рухається плоскопаралельно

Плоскопаралельний рух тіла M можна розглядати у кожний заданий момент часу, як обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей – точки P (рис. 3.38).

Введемо такі позначення:

C – центр мас тіла; v_c – швидкість центра мас тіла;

I_{zc} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка проходить через

Частина перша

центр мас C перпендикулярно до площини плоскопаралельного руху;

I_{zp} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка проходить через миттєвий центр швидкостей P .

За теоремою Гюйгенса-Штейнера (3.108) момент інерції відносно паралельної осі

$$I_{zp} = I_{zc} + m \cdot (PC)^2.$$

Оскільки $v_c = \omega \cdot PC$, то кінетична енергія тіла дорівнює

$$T = \frac{I_{zp} \cdot \omega^2}{2} = \frac{(I_{zc} + m \cdot (PC)^2) \cdot \omega^2}{2} = \frac{I_{zc} \omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2};$$

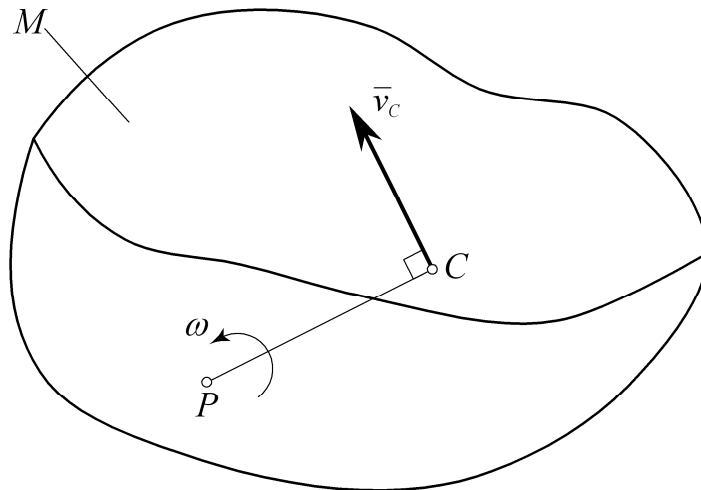


Рис. 3.38

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc} \omega^2}{2}. \quad (3.185)$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює арифметичній сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху відносно центра мас.

Аналогічно, формулу (3.185) можна отримати, сумуючи вирази (3.183) і (3.184).

3.8.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається із n матеріальних точок і має такі параметри:

m_1, m_2, \dots, m_n – маси матеріальних точок;

$v_{10}, v_{20}, \dots, v_{n0}$ – початкові швидкості кожної точки;

v_1, v_2, \dots, v_n – кінцеві швидкості кожної точки;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – рівнодійні зовнішніх сил, що діють на кожну точку;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ – рівнодійні внутрішніх сил, як сили взаємодії між

точками.

Для кожної точки системи можна записати теорему про зміну кінетичної енергії в кінцевій формі

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^e + A_k^{in}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.186)$$

де A_k^e – робота рівнодійної зовнішніх сил, які діють на k -у точку;

A_k^{in} – робота рівнодійної внутрішніх сил, які діють на k -у точку.

Підсумуємо рівняння (3.186) по всіх точках системи

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (3.187)$$

Запишемо вираз (3.187) більш компактно:

де $\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = T$ – кінцева кінетична енергія матеріальної системи;

$\sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = T_0$ – початкова кінетична енергія матеріальної системи;

$\sum A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему;

$\sum A_k^{in}$ – сума робіт внутрішніх сил, які діють між точками системи.

Остаточно вираз теореми має вигляд:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (3.188)$$

Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому самому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил.

Особливістю цієї теореми є врахування роботи внутрішніх сил. Хоча головний вектор і головний момент цих сил дорівнюють нулю, але робота, що ними виконується, може відрізнитися від нуля. Зрозуміло, що для незмінних матеріальних систем (деформації тіл яких можна не враховувати) сума робіт внутрішніх сил рівна нулю $\sum A_k^{in} = 0$.

Тоді вираз (3.188) спрощується

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (3.189)$$

Приклад 3.15. Задача №38.24

(І.В. Мещерський. «Збірник задач з теоретичної механіки»).

На рис. 3.39 зображений підйомний механізм лебідки. Вантаж А вагою \bar{P}_1 піднімається за допомогою троса, що перекинутий через блок С і навитий на барабан В радіусом r_2 і вагою \bar{P}_2 .

До барабана прикладений обертальний момент, який з часу включення пропорційний квадрату кута повороту φ барабана $M_{об} = k\varphi^2$, де k – сталий коефіцієнт.

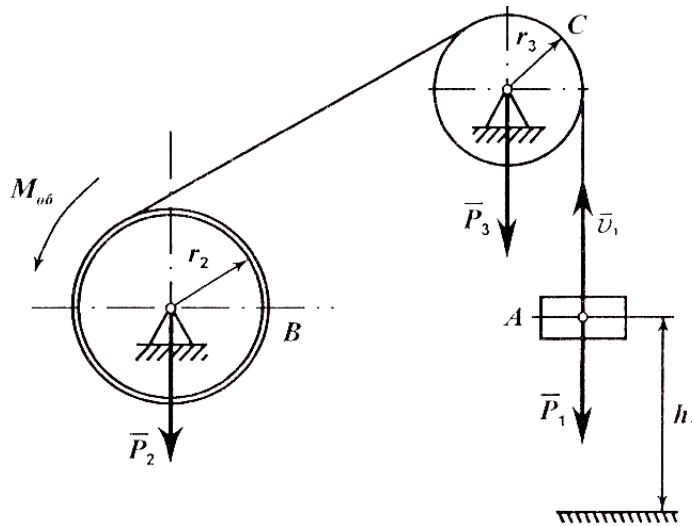


Рис. 3.39

Визначити швидкість вантажу А в момент, коли він підніметься на висоту h_1 .

Масу барабана В вважати рівномірно розподіленою по його ободу. Блок С є суцільним диском вагою \bar{P}_3 .

Масою і деформацією троса знехтувати. У початковий момент система перебувала у стані спокою.

Розв'язання

Задана задача розв'язується за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи, яка вважається незмінною (3.189)

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

На початку руху система перебувала у стані спокою, тому $T_0 = 0$

$$T = \sum A_k^e. \quad (a)$$

Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі енергій тіл, що складають систему

$$T = T_A + T_B + T_C. \quad (б)$$

Визначимо кінетичну енергію кожного тіла, виразимо її через задані параметри і шукану швидкість.

$$T_A = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P_1 v_1^2}{2g} \text{ – тіло рухається поступально;}$$

$$T_B = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} \text{ – тіло обертається навколо нерухомої осі;}$$

$$I_2 = m_2 r_2^2 = \frac{P_2 r_2^2}{g} \text{ – осьовий момент інерції тіла;}$$

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} \text{ – кутова швидкість, виражена через шукану швидкість } v_1.$$

$$T_B = \frac{P_2 r_2^2 v_1^2}{2g \cdot r_2^2} = \frac{P_2 v_1^2}{2g}. \text{ Аналогічно і для обертового тіла } C:$$

$$T_C = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \quad I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{r_3}; \quad T_C = \frac{P_3 r_3^2 \cdot v_1^2}{2 \cdot 2g \cdot r_3^2} = \frac{P_3 \cdot v_1^2}{4g}.$$

Підставимо значення кінетичних енергій у вираз (б):

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{P_1 v_1^2}{2g} + \frac{P_2 v_1^2}{2g} + \frac{P_3 v_1^2}{4g} = \frac{v_1^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3).$$

Далі визначаємо праву частину виразу (а) – роботу діючих сил і моментів

$$\sum A_k^e = A(P_1) + A(M_{o\delta}), \quad (с)$$

де $A(P_1) = -P_1 h_1$ (знак «мінус» свідчить, що це робота сили опору).

$$A(M_{o\delta}) = \int_0^{\varphi} M_{o\delta} \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} k\varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{k\varphi^3}{3}; \quad \varphi = \frac{h_1}{r_2}.$$

Підставимо значення визначених робіт у вираз (с):

$$\sum A_k^e = \frac{k\varphi^3}{3} - P_1 h_1 = \frac{kh_1^3}{3r_2^3} - P_1 h_1 = \frac{h_1 (kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Підставимо сумарну кінетичну енергію і сумарну роботу у вираз (а):

$$\frac{v_1^2}{4g}(2P_1 + 2P_2 + P_3) = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Звідки шукана швидкість

$$v_1 = \frac{2}{r_2} \sqrt{\frac{gh_1(kh_1^2 - 3P_1r_2^3)}{3r_2(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Запишіть вираз кінетичної енергії точки і системи.
2. Як обчислюється кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоскопаралельно і обертаються?
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії точки і напишіть її вираз у диференціальній і кінцевій формах.
4. Яка розмірність кінетичної енергії?
5. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи.
6. Сформулюйте теорему Кьоніга і запишіть її математичний вираз.
7. Означте кінетичну енергію як другу найважливішу міру руху.
8. Чи дорівнює нулю робота внутрішніх сил?
9. Як виражається кінетична енергія точки за натуральним способом задання руху?
10. Надати основні закони динаміки і закони їх збереження.

3.10. Кінетостатика невідільної матеріальної системи

Принцип д'Аламбера надає можливість складати рівняння руху для невідільної матеріальної системи, використовуючи умови геометричної статичності. Такий метод складання рівнянь руху називається методом кінетостатичності. Цей принцип для невідільної системи, наприклад, механізму, можна сформулювати так.

Для невідільної матеріальної системи або механізму в будь-який момент руху векторна сума головних векторів активних сил, сил реакцій зовнішніх в'язей і сил інерції, а також векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції, обчислених відносно довільного центра, дорівнюють нулю.

Метод кінетостатичності особливо успішно застосовується для силового

або кінетостатичного розрахунку багатоланкових плоских механізмів, де розв'язується перша задача динаміки, коли за заданим законом руху ведучої ланки необхідно визначити сили і моменти сил на інших ланках і реакції у шарнірах або, більш точно, у кінематичних парах.

3.10.1. Принцип д'Аламбера для матеріальної системи

Припустимо, що матеріальна система складається з n матеріальних точок з масами m_1, m_2, \dots, m_n . На кожну точку системи діють активні сили, рівнодійні яких $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ і рівнодійні реакцій в'язей $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n$.

Під дією прикладених сил система рухається прискорено. Умовно прикладемо до кожної точки **силу інерції**

$$\bar{\Phi}_1 = -m_1 \bar{a}_1, \bar{\Phi}_2 = -m_2 \bar{a}_2, \dots, \bar{\Phi}_n = -m_n \bar{a}_n.$$

Застосуємо для k -ї матеріальної точки принцип д'Аламбера (3.15)

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (3.190)$$

Підсумуємо почленно рівняння (3.190) по всіх точках k системи

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{N}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0,$$

де $\sum \bar{F}_k = \bar{F}^A$ – головний вектор активних сил матеріальної системи,

$\sum \bar{N}_k = \bar{N}^R$ – головний вектор реакцій в'язей матеріальної системи,

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}$ – головний вектор сил інерції матеріальної системи.

Тоді
$$\bar{F}^A + \bar{N}^R + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.191)$$

У будь-який момент руху матеріальної системи головний вектор активних сил, головний вектор реакцій в'язей і головний вектор сил інерції умовно складають зрівноважену систему сил.

Обираємо у просторі довільний полюс O за центр зведення сил, які діють на матеріальну систему.

Кожна точка системи відносно полюса O матиме свій радіус-вектор $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$.

Кожний доданок рівняння (3.191) помножимо векторно на радіус-вектор \bar{r}_k , а потім підсумуємо по всіх точках системи

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k + \bar{r}_k \times \bar{N}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{N}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

де $\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{M}_0^F$ – головний момент активних сил системи;

$\sum \bar{r}_k \times \bar{N}_k = \bar{M}_0^R$ – головний момент реакцій в'язей системи;

$\sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = \bar{M}_0^\phi$ – головний момент сил інерції матеріальної системи.

Тоді
$$\bar{M}_0^F + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^\phi = 0 \quad (3.192)$$

У будь-який момент руху матеріальної системи сума головного моменту активних сил, головного моменту реакцій в'язей і головного моменту сил інерції, умовно прикладеного до тіл матеріальної системи, дорівнює нулю.

Рівнянням (3.191) і (3.192), які математично відображають принцип д'Аламбера для матеріальної системи, відповідають три рівняння в проекціях на осі прямокутної системи декартових координат і три рівняння моментів відносно цих самих осей

$$\begin{aligned} F_x^A + N_x^R + \Phi_x &= 0, \\ F_y^A + N_y^R + \Phi_y &= 0, \\ F_z^A + N_z^R + \Phi_z &= 0, \\ M_x^F + M_x^R + M_x^\phi &= 0, \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\phi &= 0, \\ M_z^F + M_z^R + M_z^\phi &= 0. \end{aligned} \quad (3.193)$$

Розглянутий метод внаслідок своєї простоти і наочності широко застосовується в інженерній практиці для розв'язування задач динаміки.

Особливо цей метод зручний для визначенні реакцій в'язей матеріальної системи.

Цей метод, звичайно, можна використовувати і для визначення прискорень тіл матеріальної системи.

3.10.2. Зведення сил інерції системи матеріальних точок до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції

Головний вектор сил інерції окремих точок системи не залежить від вибору центра зведення і може бути обчислений заздалегідь

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k; \Rightarrow \bar{\Phi} = -\sum m_k \bar{a}_k = m \cdot \bar{a}_c; \quad (3.194)$$

Головний вектор сил інерції матеріальної системи, що рухається

довільно, дорівнює добутку маси системи на прискорення його центра мас і спрямований протилежно вектору прискорення.

де m – маса системи (тіла); \bar{a}_c – прискорення центра мас системи, яке можна розкласти на тангенціальну і нормальну складові:

$$\bar{a}_c = \bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n; \Rightarrow \bar{\Phi} = -m(\bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n) = -m \cdot \bar{a}_c^\tau - m \cdot \bar{a}_c^n = \bar{\Phi}^\tau + \bar{\Phi}^n.$$

Головний момент сил інерції залежить від вибору центра зведення і визначається для окремих випадків руху твердого тіла.

Поступальний рух системи (тіла)

За поступального руху системи (тіла) відсутнє обертання навколо центра мас, тобто, сума головного моменту активних сил і головного моменту реакцій в'язей відносно центра мас системи дорівнює нулю

$$M_c^F + M_c^R = 0.$$

Згідно з принципом д'Аламбера і з урахуванням останнього виразу

$$M_c^P + M_c^R + M_c^\phi = 0; \Rightarrow M_c^\phi = 0.$$

Оскільки головний момент сил інерції за поступального руху системи відсутній, то головний вектор сил інерції є рівнодієюю сил інерції, тобто, одиничним силовим фактором інерційних сил.

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

Нехай тіло обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 3.40). Довільна точка масою m_k описує коло радіуса r_k і має тангенціальне прискорення \bar{a}_k^τ .

Кожна точка матиме тангенціальну складову сили інерції $\bar{\Phi}_k^\tau = -m_k \bar{a}_k^\tau = -m_k \varepsilon \cdot r_k$ і нормальну або відцентрову силу інерції $\bar{\Phi}_k^n = -m_k \bar{a}_k^n = -m_k \omega^2 r_k$.

Остання складова не створює моменту відносно осі обертання, тому що вона перетинає цю вісь.

Тангенціальні складові сил інерції створюють моменти відносно осі обертання z . Плечі цих моментів є відстанями до осі обертання r_k

$$M_z^\phi = \sum \Phi_k^\tau \cdot r_k = -\sum m_k \varepsilon \cdot r_k^2 = -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -I_z \cdot \varepsilon,$$

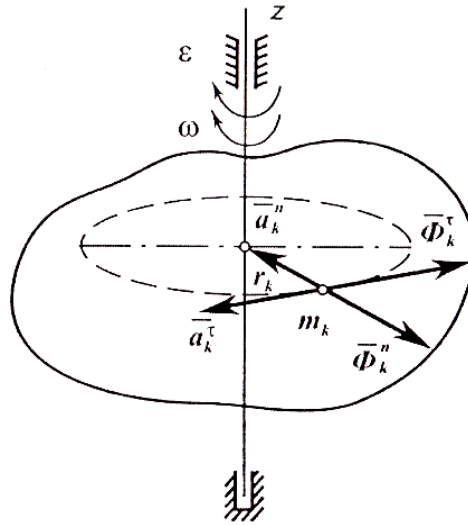


Рис. 3.40

$$M_z^\phi = -I_z \cdot \varepsilon. \quad (3.195)$$

Момент сил інерції тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням, дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення і спрямований протилежно кутовому прискоренню.

Зазначимо, що момент сил інерції тіла виникає тільки в період розгону або гальмування (перехідні режими). У період усталеного руху (рівномірне обертання) момент сил інерції дорівнює нулю.

Нагадаємо, що кожна матеріальна точка m_k обертового тіла, розміщена на деякій відстані r_k , створює елементарну тангенціальну складову сили інерції $\bar{\Phi}_k = -m_k \varepsilon \bar{r}_k$ як добуток маси на тангенціальне прискорення.

Підсумуємо елементарні сили за всіма точками тіла і отримаємо зведену тангенціальну силу інерції

$$\bar{\Phi}^\tau = \sum \bar{\Phi}_k^\tau = -\sum m_k \varepsilon \bar{r}_k = -\varepsilon \sum m_k \bar{r}_k = -\varepsilon \cdot m \cdot \bar{r}_c = -m \bar{a}_c^\tau, \quad (3.196)$$

де $\sum m_k \bar{r}_k = m \cdot \bar{r}_c$ на підставі виразу для положення центра мас (3.89).

Тангенціальна сила інерції тіла прикладена в центрі мас тіла і спрямована протилежно тангенціальному прискоренню центра мас, що і підкреслює знак мінус у виразі (3.196).

Зведемо далі відцентрові сили інерції точок тіла (рис. 3.41).

Згадаємо, що саме для кожної точки m_k маємо силу інерції

$\Phi_k^n = m_k \omega^2 r_k$. Зведену або підсумкову силу інерції для всього тіла визначимо через проєкції на осі координат, обрані на рис. 3.41

$$\Phi^n = \sqrt{(\Phi_x^n)^2 + (\Phi_y^n)^2} . \quad (3.197)$$

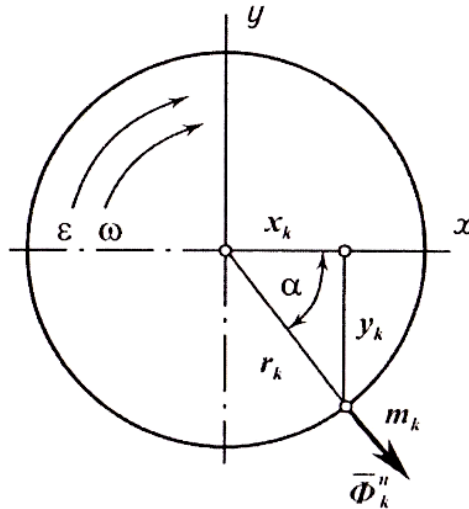


Рис. 3.41

$$\Phi_x^n = \sum \Phi_{kx}^n = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha = \omega^2 \sum m_k x_k .$$

Значення із формули для координати x_c центра мас (3.90) $\sum m_k x_k = m x_c$ підставимо в останнє рівняння

$$\Phi_x^n = \omega^2 \cdot m x_c . \quad (3.198)$$

Аналогічно визначимо і проєкцію на вісь y

$$\Phi_y^n = \omega^2 \cdot m y_c . \quad (3.199)$$

Підставляємо вирази (3.198) і (3.199) у вираз (3.197)

$$\Phi^n = m \omega^2 \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = m \omega^2 r_c = m \cdot a_c^n , \quad (3.200)$$

де r_c – радіус-вектор центра мас тіла; $a_c^n = \omega^2 r_c$ – нормальне або доцентрове прискорення центра мас.

Аналіз виразу (3.200) відцентрової сили інерції свідчить, що ця сила має місце при всіх режимах обертання (розгін, усталений рух, гальмування) і є досить небезпечною, бо вона пропорційна квадрату кутової швидкості. Відцентрова сила дорівнює нулю, якщо $r_c = 0$, тобто, коли центр мас розміщений на осі обертання. Це досягається методом

$$r_c = 0; \Rightarrow a_c^n = \omega^2 r_c = 0; \Rightarrow \Phi^n = m\omega^2 r_c = 0.$$

Плоскопаралельний рух тіла

Плоскопаралельний рух твердого тіла може бути розкладений на суму двох рухів: поступальний разом з полюсом і обертальний відносно полюса. За полюс, як правило, обирають центр мас точку C (рис. 3.42).

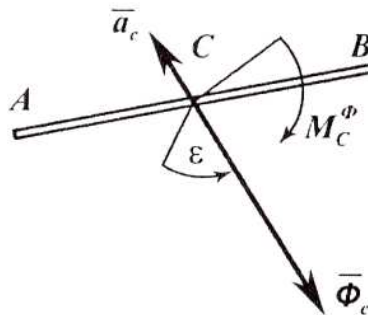


Рис. 3.42

Тіло (стрижень AB) масою m рухається у площині рисунка, бо рух плоскопаралельний. Центр мас C має лінійне прискорення \bar{a}_c , кутове прискорення тіла – ε .

Головний вектор сил інерції і **головний момент** сил інерції дорівнюють, відповідно:

$$\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c, M_c^\phi = -I_{zc} \cdot \varepsilon, \quad (3.201)$$

де I_{zc} – осьовий момент інерції тіла відносно осі z , яка перпендикулярна до площини руху і перетинає центр мас.

Напрямок головного вектора сил інерції протилежний вектору прискорення центра мас, де він прикладений. Напрямок головного моменту протилежний напрямку кутового прискорення тіла.

Далі надамо методику застосування принципу д'Аламбера і приклад для матеріальної системи.

Приклад 3.17

Визначити прискорення тіл і динамічні реакції під час руху матеріальної системи. Припустимо, що маса другого вантажу більше $m_2 > m_1$, тоді блок обертатиметься за ходом годинникової стрілки, саме туди напрямлене і кутове прискорення ε . Задані маси тіл A, B, C :

m_1, m_2, m_3 . Шків однорідний і суцільний, трос нерозтяжний (рис. 3.43).

Визначити прискорення вантажів \bar{a} ; натяг тросу ліворуч N_1 ; натяг тросу праворуч N_2 ; реакцію опори шківів R_0 .

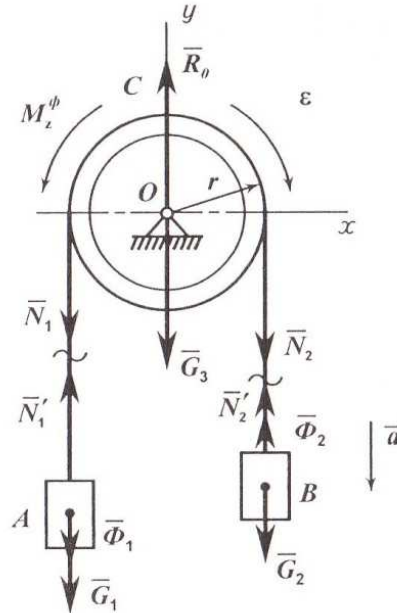


Рис. 3.43

Розв'язання

Визначимо і прикладемо до відповідних тіл силу ваги, силу інерції і момент сил інерції. Визначимо вагу тіл $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$, $G_3 = m_3 g$. Визначимо сили інерції тіл і прикладемо протилежно напрямкам їх прискорень $|\bar{\Phi}_1| = m_1 a$, $|\bar{\Phi}_2| = m_2 a$.

Визначимо через шукане прискорення момент сил інерції шківів і покажемо його напрямком на схемі дуговою стрілкою, яка спрямована проти напрямку кутового прискорення ϵ

$$|M_z^\phi| = I_z \epsilon = I_z \cdot \frac{a}{r} = m_3 r^2 \frac{a}{r} = m_3 r a,$$

де $I_z = m_3 r^2$ – осьовий момент інерції шківів відносно центральної осі Oz (на схемі вісь не показано).

Якщо умовно прикласти до вантажів вектори сил інерції $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$, а до шківів – момент сил інерції M_z^ϕ , то система буде в рівновазі і на підставі принципу д'Аламбера можна скласти рівняння рівноваги системи у вигляді суми моментів сил відносно точки O , виключивши сили натягу тросів \bar{N}_1 і \bar{N}_2 як внутрішні

$$\Phi_1 r + G_1 r + \Phi_2 r - G_2 r + M_3^\phi = 0; \quad m_1 a r + m_1 g r + m_2 a r - m_2 g r + m_3 r a = 0,$$

$$\Rightarrow m_1 a + m_2 a + m_3 a = m_2 g - m_1 g.$$

Звідси шукане прискорення вантажів

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Визначимо натяги тросів, зробивши переріз, і реакцію опори шківів. Натяг тросу ліворуч визначається із суми проекцій

$$N_1' = G_1 + \Phi_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a).$$

Натяг тросу праворуч для тіла 2 аналогічно

$$N_2' = G_2 - \Phi_2 = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a).$$

Реакція опори шківів визначається із суми проекцій сил на вісь y

$$R_0 = N_1 + N_2 + G_3 = m_1 (g + a) + m_2 (g - a) + m_3 g =$$

$$= G_1 + G_2 + G_3 - a(m_2 - m_1).$$

3.10.3. Визначення динамічних реакцій підшипників

Припустимо, що тіло обертається навколо нерухомої осі z зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 3.44).

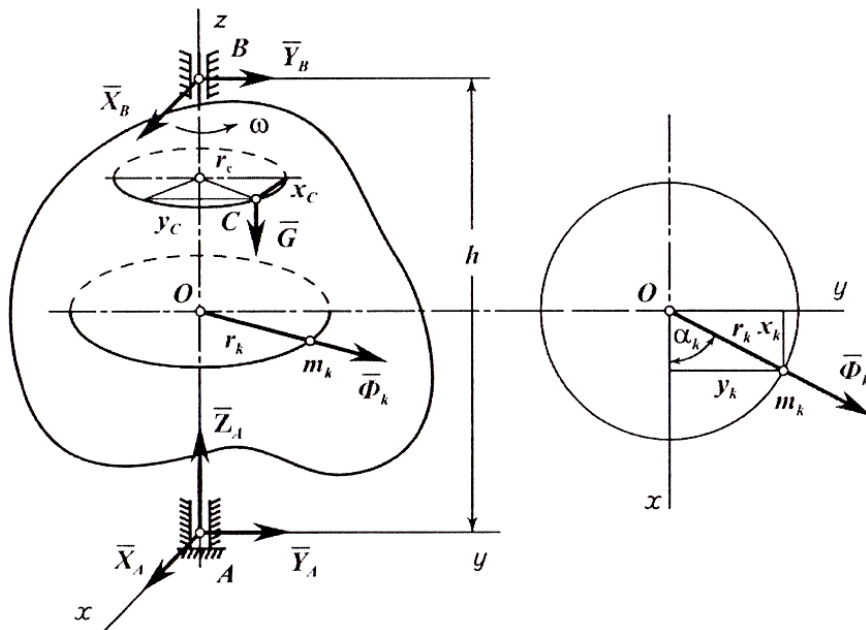


Рис. 3.44

Визначимо динамічні реакції від сил інерції. Якщо до кожної точки тіла прикласти відповідну силу інерції $\overline{\Phi}_k$, то тіло умовно перебуватиме у стані рівноваги під дією просторової системи довільних сил.

На рисунку показано: $G = mg$ – сила ваги тіла; m – маса тіла; h – вертикальна відстань між опорами A і B ; $\overline{\Phi}_k$ – сила інерції k -ї точки; x_c, y_c – координати центра мас C , де прикладена сила ваги.

Оскільки кутова швидкість є сталою величиною, то тангенціальна складова сил інерції дорівнює нулю. Динамічні доданки створює відцентрова сила, яка в кожній точці дорівнює $|\overline{\Phi}_k| = m_k \omega^2 r_k$.

$$\cos \alpha_k = \frac{x_k}{r_k}, \quad \sin \alpha_k = \frac{y_k}{r_k}.$$

Складемо шість рівнянь рівноваги на підставі принципу д'Аламбера:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum F_{kx} &= 0 & x_A + x_B + \sum \Phi_{kx} &= 0, \\ 2. \quad \sum F_{ky} &= 0 & y_A + y_B + \sum \Phi_{ky} &= 0, \\ 3. \quad \sum F_{kz} &= 0 & z_A - G &= 0, \\ 4. \quad \sum m_x(\overline{F}_k) &= 0 & -G \cdot y_c - y_B \cdot h - \sum m_x(\overline{\Phi}_{ky}) &= 0, \\ 5. \quad \sum m_y(\overline{F}_k) &= 0 & G \cdot x_c + x_B \cdot h + \sum m_y(\overline{\Phi}_{kx}) &= 0. \\ 6. \quad \sum m_z(\overline{F}_k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.202}$$

У шостому рівнянні сума моментів відносно осі тотожно дорівнює нулю, тому що всі сили паралельні або перетинають вісь обертання.

Визначимо проекцію головного вектора сил інерції на вісь x

$$\sum \Phi_{kx} = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha_k = \sum m_k \omega^2 r_k \frac{x_k}{r_k} = \sum m_k \omega^2 x_k = \omega^2 \sum m_k x_k = \omega^2 m \cdot x_c.$$

Аналогічно і на вісь y $\sum \Phi_{ky} = \omega^2 m \cdot y_c$.

Визначимо моменти від сил інерції відносно осей x і y

$$\begin{aligned} \sum m_x(\overline{\Phi}_{ky}) &= -\sum m_k \omega^2 y_k z_k = -\omega^2 \sum m_k y_k z_k = -\omega^2 \cdot I_{yz}, \\ \sum m_y(\overline{\Phi}_{kx}) &= \sum \Phi_{kx} \cdot z_k = \sum m_k \omega^2 x_k z_k = \omega^2 \sum m_k x_k z_k = \omega^2 I_{xz}, \end{aligned}$$

де I_{xz}, I_{yz} – відцентрові моменти інерції тіла.

Остаточно, після підстановки визначених сил інерції і моментів інерційних сил рівняння для динамічних реакцій набувають вигляду

$$1. \quad x_A + x_B + \omega^2 m x_c = 0, \quad ,$$

$$\begin{aligned} 2. & y_A + y_B + \omega^2 m y_c = 0, \\ 3. & z_A - G = 0, \\ 4. & -G \cdot y_C - y_B \cdot h - \omega^2 I_{yz} = 0, \\ 5. & G \cdot x_C + x_B \cdot h + \omega^2 I_{xz} = 0. \end{aligned} \tag{3.203}$$

З рівнянь (3.203) можна визначити динамічні реакції, якщо відомі координати центра мас x_C , y_C і відцентрові моменти інерції тіла I_{xz} , I_{yz} . А шукані реакції, як можна побачити з системи рівнянь, залежать від квадрату кутової швидкості тіла ω^2 . Статичними реакціями є ті, що залишаються, якщо $\omega = 0$ (спокій).

Динамічні ж реакції можуть бути значно більші, ніж статичні, і це залежить не тільки від величини кутової швидкості ω , але і від геометричних і масових характеристик тіла x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz} , які визначають розподіл маси тіла по відношенню до осі обертання z і асиметрію мас відносно двох осей. З аналізу рівнянь (3.203) випливає, що динамічні реакції опор, які виражаються останніми доданками в рівняннях 1, 2, 4, 5, будуть відсутні, якщо виконуються умови:

$$x_C = 0, y_C = 0, I_{xz} = 0, I_{yz} = 0. \tag{3.204}$$

Перші дві умови (3.204) означають, що центр ваги або центр мас розміщений на осі обертання, а останні дві умови свідчать про те, що вісь z є головною віссю інерції.

Таким чином, для знешкодження динамічних реакцій на опорах (підшипниках) необхідно, щоб вісь обертання була головною центральною віссю інерції тіла для початку координат.

Сили інерції усіх точок при цьому врівноважуються, а вісь обертання буде вільною віссю обертання.

Тіла, які обертаються навколо осі і у яких реакції опор не залежать від величини кутової швидкості і кутового прискорення, називаються динамічно зрівноваженими.

3.10.4. Поняття про статичне і динамічне балансування

Тіло, що має вісь обертання, вважається статично збалансованим, якщо головний вектор сил інерції дорівнює нулю, а це є наслідком того, що координати центра ваги дорівнюють нулю ($x_C = 0$ і $y_C = 0$), а вісь обертання перетинає центр ваги (центр мас) тіла. Під час обертання таке тіло (ротор, барабан) зупиняється кожен раз у байдужому положенні. Це можливо при статично збалансованому тілі.

Для досягнення статичного зрівноважування (збалансування), якщо

центральна вісь паралельна осі обертання, досить до тіла додати деяку масу на певному радіусі або висвердлити таку ж масу і вісь обертання буде центральною віссю. Але для повного збалансування необхідно виконати і другу пару умов (3.204).

Відцентрові моменти інерції I_{xz} і I_{yz} , якщо тіло обертається відносно осі z , характеризують асиметрію тіла навколо осі обертання.

Якщо тіло статично збалансоване ($x_c = 0$; $y_c = 0$), але насаджене на вал з перекосом, тобто, площина його симетрії не перпендикулярна до осі обертання, то тіло не буде динамічно збалансованим.

Якщо тіло зрівноважене статично, то динамічно воно може бути і не зрівноваженим. І тільки тоді, коли тіло зрівноважене динамічно ($I_{xz} = 0$; $I_{yz} = 0$), воно збалансоване і статично (повне зрівноважування). Останнє означає, що динамічні додатки реакцій опор дорівнюють нулю.

Якщо тіло динамічно або моментно не збалансоване, то осі A_x , A_y і A_z (рис. 3.58) не будуть головними осями інерції. Як наслідок цього, в опорах створюється пара сил реакцій, реактивний момент якої необхідно зрівноважувати. А пару сил можна зрівноважити тільки парою. Тому в двох спеціально підібраних площинах корекції приєднують дві маси.

Але все це робиться на спеціальних балансувальних верстатах, про що детально розповідається в курсах теорії механізмів і машин.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Напишіть формулу зведеного моменту сил інерції тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
2. Чому сили інерції вважаються фіктивними, а принцип д'Аламбера – формальним?
3. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для матеріальної системи.
4. Як звести до рівнодійної сили інерції точок тіла, яке рухається поступально?
5. Як звести до відповідних силових факторів сили інерції точок тіла, що обертається навколо осі, рухається плоскопаралельно?
6. На підставі якого принципу проводять кінетостатичне дослідження механізму?
7. Який порядок приймається під час дослідження механізму?
8. Як визначаються динамічні реакції підшипників?
9. Назвіть умови динамічної зрівноваженості обертового тіла.
10. Що таке статичне балансування? Чому саме динамічне балансування є достатнім для повної зрівноваженості обертового тіла?

ЧАСТИНА II

РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИЛАДІВ І МАШИН

2.1. Вступ. Основні положення

2.1.1. Задачі розрахунку на міцність елементів конструкцій

Реальним твердим тілам властиві такі якості як міцність і жорсткість, здатність в певних межах сприймати дію навантажень без значних змін форми (геометричних розмірів) і без руйнування. Під час проектування споруд, приладів і машин інженеру доводиться вибирати матеріал і поперечні розміри кожної деталі, ланки, елемента, щоб останні успішно чинили опір зовнішнім силам, що передаються від інших частин конструкції, без спотворення своєї форми і ризику руйнування, забезпечуючи нормальне функціонування згаданих об'єктів. Саме оптимальний вибір матеріалів для виготовлення деталей і визначення їх поперечних розмірів і є основною задачею розрахунку на міцність.

Користуються під час розрахунків методами опору матеріалів, яка є частиною такої загальної науки як будівельна механіка.

Наука про міцність, жорсткість, стійкість і інші механічні властивості елементів інженерних конструкцій, споруд та деталей механізмів приладів і машин називається опором матеріалів.

Методами *опору матеріалів* проводяться практичні розрахунки і визначаються оптимальні розміри деталей механізмів і машин та різних будівельних споруд. Під час проектування цих об'єктів інженер вибирає матеріал і розраховує поперечні розміри для кожного елемента конструкції таким чином, щоб була забезпечена нормальна робота цього елемента, щоб він надійно, без руйнування і відчутної деформації чинив опір дії зовнішніх сил, постійних і змінних навантажень. Наукову базу для правильного вирішення цієї задачі надає наука про опір матеріалів.

Опір матеріалів вивчає поведінку різних матеріалів під час дії на них сил і надає вказівки, як підібрати для кожного елемента конструкції відповідний матеріал і оптимальні поперечні розміри за умови надійної роботи при найменшій витраті матеріалу.

Основні теоретичні положення *опору матеріалів* обґрунтовані законами теоретичної механіки і в першу чергу положеннями статики, без знання яких вивчення курсу опору матеріалів неможливе.

На відміну від теоретичної механіки *опір матеріалів* вирішує завдання, в яких найбільш вагомими є властивості деформованих тіл, а закони руху жорсткого тіла відступають на другий план.

Опір матеріалів створює науково обґрунтовані методи розрахунків

найбільш поширених типових елементів будівельних конструкцій і деталей механізмів і машин, широко використовуючи наближені інженерні методи.

Методи опору матеріалів під час виконання інженерних розрахунків необхідно використовувати творчо. Слід пам'ятати, що успіх практичного розрахунку залежить не лише від безпомилкового використання складного математичного апарату, а й від уміння розуміти фізичну суть досліджуваного об'єкта, від майстерності знаходити найбільш вдалу модель реального об'єкта.

Опір матеріалів є однією з основних загально-інженерних дисциплін і відіграє суттєву роль у становленні інженера будь-якої спеціальності.

Розвиток *опору матеріалів* йшов паралельно з прогресом будівництва і машинобудування та пов'язаний з цілою низкою робіт видатних математиків, фізиків і інженерів.

Сучасний технологічний прогрес потребує високопродуктивної енергонасиченої техніки великих швидкостей. Але існуючі матеріали і методи перевірки їх міцності вже не задовольняють потребам практики. Тому завжди йде пошук нових «прогресивних» матеріалів, легких і міцних, розробляються нові методи дослідження їх механічних і фізичних властивостей. Наука про опір матеріалів приречена встигати за загальним прогресом техніки.

Опір матеріалів, вивчаючи залежність між силами та викликаними ними деформаціями і напруженнями в елементах конструкцій, надає інженеру можливість протиставити дії зовнішніх сил стрижень або інший елемент конструкції оптимально достатніх розмірів із найбільш придатного конструкційного матеріалу.

Основними вимогами суспільства до машини або до інженерної конструкції є надійність, економія матеріалів та людської праці під час створення і експлуатації об'єктів. Ці вимоги суперечать одна одній, але спонукають науку до удосконалення її методів.

Початок опору матеріалів як науки пов'язують з ім'ям видатного вченого епохи Відродження Галілео Галілея (1564-1642). Опубліковані ним у 1638 р. дослідження присвячені розв'язанню задач про залежність між розмірами балок і інших елементів конструкцій та тими навантаженнями, що вони здатні витримати.

2.1.2. Методи розрахунку і моделі об'єктів дослідження

Конструювання і розрахунок механізмів, машин або інженерних споруд тісно пов'язані між собою. Перше передбачає детальне розроблення структурно-кінематичної схеми і креслень певних конструкцій, що мають бути виготовлені з обраних конструкційних матеріалів, а метою розрахунку конструкцій є перевірка їх елементів на міцність, жорсткість і стійкість.

Опір матеріалів – це наука про міцність окремих частин конструкцій і машин, яка ґрунтується на набутому практичному досвіді із використанням сучасних теоретичних і експериментальних методів шляхом побудови і вивчення моделей реальних об'єктів. Теоретичні моделі базуються на основі законів фізики, механіки, теплотехніки й інших наук із застосуванням математичного апарату. Емпіричні ж моделі будуються на основі спостережень і дослідних даних. Опір матеріалів із моменту свого виникнення завжди був тісно пов'язаний з повсякденною практикою.

Опір матеріалів не є суто теоретичною наукою. Методи науки про опір матеріалів ґрунтуються на експериментальному дослідженні справжніх властивостей застосованих конструкційних матеріалів.

Теоретичні положення опору матеріалів базуються на законах механіки твердого тіла. Разом із тим, розв'язок будь-якої задачі опору матеріалів починається з припущень, які ґрунтуються на базі експериментальних досліджень, і закінчується перевіркою одержаних теоретичних розрахунків у лабораторії. Як вказував видатний німецький філософ Гегель у праці «Наука логіки», шлях розвитку будь-якої науки наступний: «Від живого споглядання до абстрактного мислення і від нього до практики – такий діалектичний шлях пізнання істини, пізнання об'єктивної реальності».

Опір матеріалів широко застосовує методи абстракцій, узагальнення, методи математичної і формальної логіки. Критерієм істинності наших знань є досвід і практика.

Опір матеріалів як і будь-яка наука має справу не з самими реальними матеріальними об'єктами, а з їх ідеальними моделями з тим чи іншим ступенем межі абстракції конкретних властивостей реальних фізичних тіл.

До таких ідеальних моделей реальних тіл як конструктивних елементів споруд і машин належать брус (балка, стрижень), пластинка, оболонка, масив. До цих основних форм зводиться все різноманіття реальних тіл, що зустрічаються на практиці.

Брусом називається елемент конструкції, у якого один із розмірів – довжина, є значно більший від двох інших. Це найбільш поширений в інженерній практиці елемент. Залежно від форми геометричної осі брусся можуть бути прямолінійні і криволінійні. Більшість деталей машин і конструкцій можна вважати брусами з допустимим для практики наближенням.

Відносно тонкий і довгий брус із прямолінійною віссю, що працює на розтяг або стиск, називається **стрижнем**.

Брус із прямолінійною віссю, що працює на кручення, називається **валом**.

Брус із прямолінійною віссю, що працює на згин, називається

балкою.

Пластинкою називається елемент конструкції, обмежений двома паралельними площинами, у якого два розміри (довжина і ширина) більші від третього (товщина).

Оболонкою називається елемент, обмежений кривими поверхнями, у якого два розміри більші від третього.

Масивом називається елемент, у якого всі три розміри мають величини одного порядку.

2.1.3. Класифікація зовнішніх сил, діючих на конструкції

1. Залежно від місця прикладання зовнішні сили поділяються на **поверхневі сили**, наприклад, тиск рідини на поверхню гідروциліндра і **об'ємні сили**, прикладені до кожної точки об'єму елемента (сила ваги).

2. Залежно від розміру площі дії зовнішні сили поділяються на **зосереджені**, прикладені в точці, і **розподілені по лінії** (погонне навантаження певної інтенсивності) або **площині** (тиск води на греблю).

3. За характером дії зовнішні сили поділяються на **статичні**, що не викликають прискорень в елементах системи, **динамічні** (інерційні, ударні, періодичні та вибухові), а також на **постійні** (власна вага) і **тимчасові**.

2.1.4. Поняття про деформацію. Метод перерізів

Реальні тіла внаслідок дії зовнішніх сил змінюють свою форму і як наслідок – геометричні розміри.

Зміна форми (геометричних розмірів) тіла називається деформацією.

Величина і характер деформації залежить від структури застосованих матеріалів.

Деформація, яка зникає повністю після припинення дії зовнішніх сил, називається пружною, а здатність тіл відновлювати свою початкову форму називається пружністю.

Хоча абсолютно пружних тіл в природі не існує, проте, деякі матеріали (сталь, дерево та ін.) за своїми властивостями подібні до таких тіл, якщо зовнішні сили не перевершують певної границі (границі пружності), встановленої для них дослідним шляхом.

Перевищення границі пружності веде до виникнення **залишкових деформацій**. При проектуванні елементів конструкцій їх розміри повинні бути такими, щоб не виникали залишкові деформації.

Під дією зовнішніх сил в елементах конструкції виникають додаткові внутрішні сили міжмолекулярної взаємодії, які супроводжують деформацію і чинять опір намаганням зруйнувати цей елемент, змінити

Частина друга

його форму, відокремити одну частину від іншої, а потім і відновити попередню форму після зняття зовнішніх сил.

Для визначення статичного еквівалента внутрішніх сил використаємо відомий із механіки *метод перерізів, який полягає в уявному відсіканні однієї частини елемента і переведенні внутрішніх сил перерізу у зовнішні*, адже внутрішні сили визначити не можна. Цей метод є окремим випадком застосування аксіоми про звільнення від в'язей.

Уявимо тіло, до якого прикладена у загальному вигляді просторова система довільних сил, яке умовно розсікають площиною на дві частини (рис. 2.1). Для стрижня ця площина має бути перпендикулярною до центральної осі.

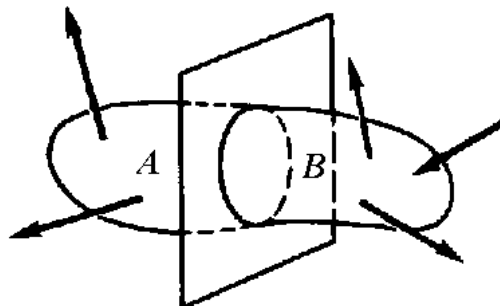


Рис. 2.1

Далі одну із частин тіла відкидають, замінюючи її дію на іншу частину силами, прикладеними в площині перерізу, і розглядають рівновагу тієї частини, що залишилася (рис. 2.2).

Згідно з теоремою Пуансо із статки, будь яку систему сил, що розподілені по перерізу, можна звести до однієї точки, наприклад, до центра ваги перерізу O і отримати у підсумку головний вектор і головний момент системи сил. На рис. 2.2 прямими стрілками показані проекції головного вектора, а дуговими стрілками – проекції головного моменту на осі вибраної прямокутної системи декартових координат $Oxyz$.

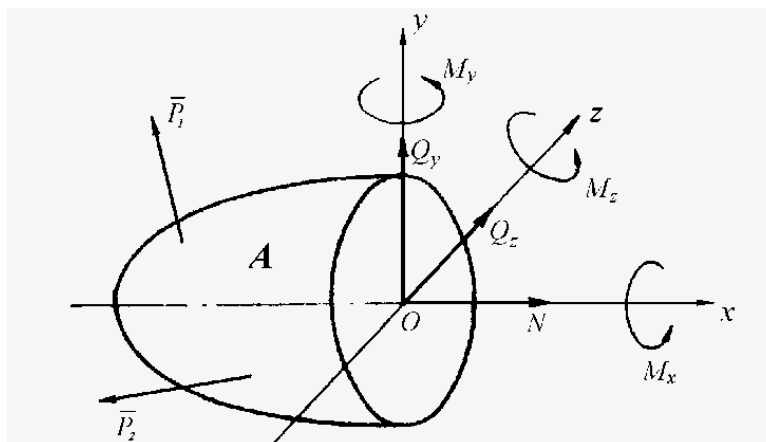


Рис. 2.2

Таким чином, зовнішні сили, прикладені до залишеної частини тіла, врівноважуються силами, діючими в площині перерізу у вигляді проєкцій головного вектора и головного моменту. Це дозволяє скласти для частини тіла (наприклад, для частини А) в загальному випадку просторової системи сил шість рівнянь на підставі умов рівноваги (2.1).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рівняння, що складаються на підставі умов рівноваги (2.1), дають можливість визначити головний вектор і головний момент системи сил по їх проєкціях, які еквівалентні внутрішнім силам пружності в перерізі, але методом перерізів переведені у зовнішні (рис. 2.2).

У загальному випадку із шести рівнянь рівноваги в поперечному перерізі тіла визначаються шість складових сил: три проєкції сили N_z , Q_x , Q_y – складові головного вектора, напрямлені вздовж координатних осей, і три проєкції моменту M_x , M_y , M_z – складові головного моменту сил.

Вказані шість складових сил називаються **силовими факторами**, що діють у перерізі тіла. Кожна з цих складових має свою назву і позначення:

N_x – подовжня (нормальна) сила N ; Q_y , Q_z – поперечні сили Q , M_x – момент кручення M_κ ; M_y , M_z – згинальні моменти $M_{зг}$.

2.1.5. Основні типи деформацій

Складові силових факторів залежать від характеру навантаження тіла і характеру його деформованого стану. При різних видах деформації в поперечному перерізі будуть виникати різні силові фактори.

Розглянемо окремі випадки простого деформованого стану тіла, якщо в його поперечному перерізі діє лише один силовий фактор.

1. **Подовжня деформація розтягу (стиску)** відбувається, якщо в поперечному перерізі виникає подовжня сила N , напрямлена вдовж центральної осі тіла. Такої деформації зазнають стрижні, троси, паси, шатуни двигунів, навантажені зовнішніми силами вздовж їх осей (рис. 2.3 а, б).

2. **Деформація зсуву** відбувається тоді, коли в поперечному перерізі виникає поперечна сила Q , що лежить в площині перерізу. Така

Частина друга

деформація спостерігається в болтах, клепках, зварних швах, де зовнішні сили протилежно спрямовані, зміщуючи плоскі перерізи елементів з'єднання один відносно одного (рис. 2.3 в).

3. **Деформація кручення** відбувається, якщо в поперечному перерізі виникає крутний момент M_k , паралельний його площині. Таку деформацію маємо, наприклад, у валах, де діють пари сил, площини яких перпендикулярні до осі вала (рис. 2.3 г).

4. **Деформація чистого згину** відбувається тоді, коли в поперечному перерізі перпендикулярно до нього діє згинальний момент $M_{зг}$, що врівноважує дію зовнішніх згинальних моментів. Деформацію чистого згину можна отримати від дії на балку зовнішніх згинальних моментів (рис. 2.3 д).

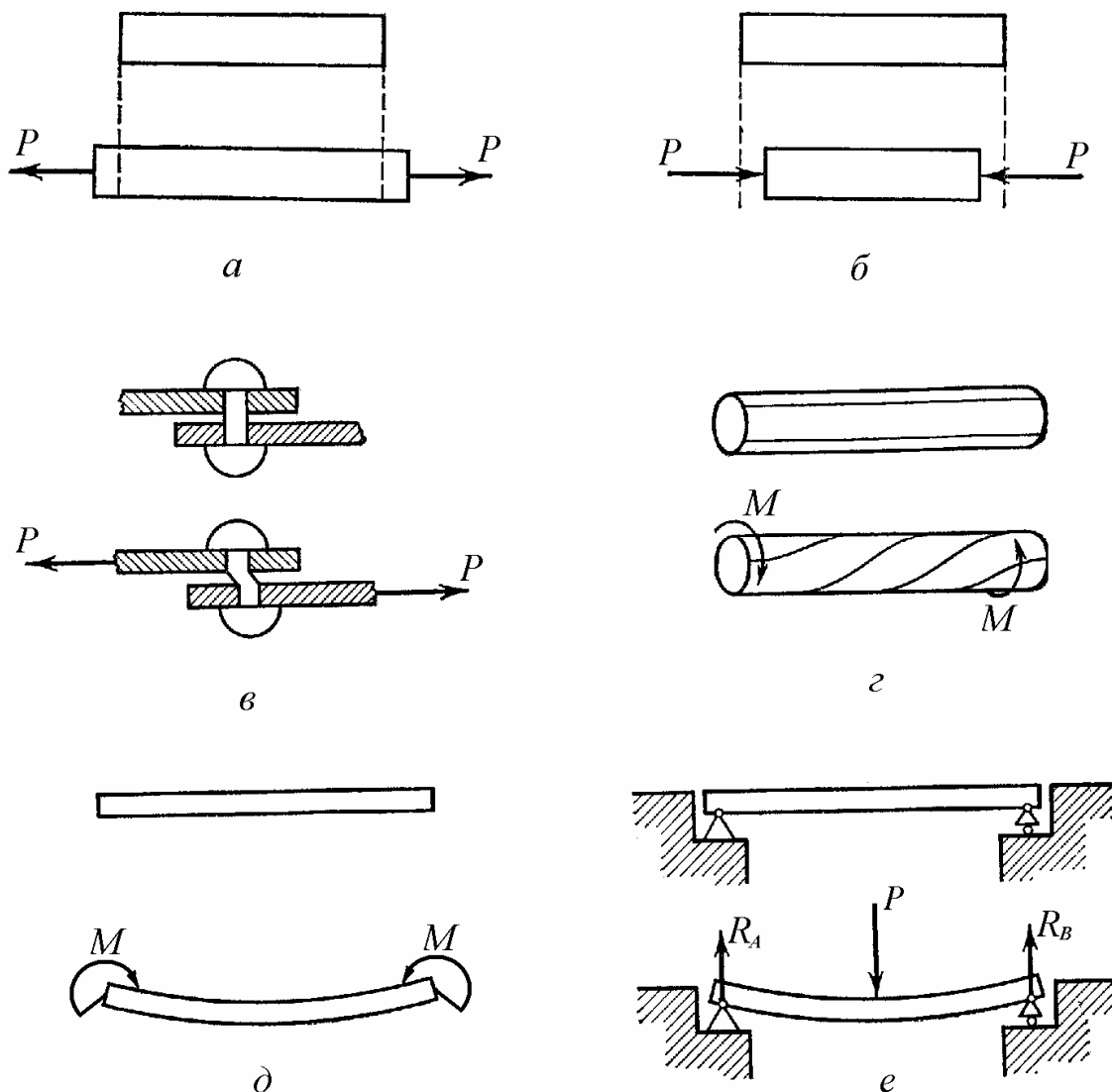


Рис. 2.3

Слід наголосити, що в таких конструкціях може відбуватися **деформація поперечного згину**, коли в поперечному перерізі діє два силові

фактори – згинальний момент M_{z_2} і поперечна сила Q . Деформація згину спостерігається в балках (рис. 2.3 е), осях, зубцях зубчастих коліс і інших об'єктах, які моделюються як балки.

Випадки одночасної дії в поперечних перерізах тіла декількох силових факторів відносять до складних видів деформованого стану тіла, при якому має місце поєднання основних видів деформації (наприклад, згин з крученням, кручення і розтяг, тощо).

2.1.6. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів

Під час дослідження напруженого стану реальних тіл виникають складнощі, зумовлені великим різноманіттям фізичних і механічних властивостей матеріалів щодо їхньої структури, характеру деформацій, геометрії конструкції. У зв'язку з цим для побудови теорії опору матеріалів приймають низку гіпотез і припущень.

1. **Гіпотеза плоских перерізів.** Припускається, що плоскі перерізи, уявно проведені до деформації перпендикулярно до осі стрижня, залишаються плоскими і перпендикулярними до осі і після деформації. Ця гіпотеза справедлива для багатьох важливих у практичному плані випадків.

2. **Гіпотеза про суцільність.** Вважається, що весь об'єм тіл суцільно заповнений речовиною. Дискретність тіл до уваги не приймається.

3. **Гіпотеза про мализну деформацій.** Деформації тіл, зумовлені дією зовнішніх сил, вважаються малими порівняно з їх розмірами. Це дає підставу для нехтування зміною положення точок прикладання сил на тілі внаслідок деформації, тому рівняння статки складають для недеформованого тіла.

4. **Гіпотеза про однорідність і ізотропність.** Припускається, що фізичні і механічні властивості тіла однакові в усіх точках та в кожній точці – по всіх напрямках.

Однорідні тіла (матеріали), які мають однакові фізичні і механічні властивості по всіх напрямках, називаються **ізотропними**. Тіла, які не мають властивостей ізотропності, називаються **анізотропними**. До останніх можна віднести деревину і синтетичні матеріали.

5. **Гіпотеза про лінійну залежність між навантаженням і деформацією.** Припускається, що для більшості матеріалів справедливий закон Гука, який встановлює таку пряму пропорційність. Як наслідок гіпотез про мализну деформацій і лінійну залежність між навантаженням і деформацією застосовується **принцип суперпозиції** (принцип незалежності дії сил):

результат дії на тіло системи сил дорівнює векторній сумі результатів дії тих же самих сил, якщо вони прикладаються до тіла окремо.

2.1.7. Поняття про напруження у перерізах

У кожному ненавантаженому тілі за для збереження його форми існують сили взаємодії між кристалами, молекулами, атомами, які в опорі матеріалів не враховуються.

В елементах навантажених конструкцій під дією зовнішніх сил виникають додаткові внутрішні сили взаємодії між її окремими частинами, сили пружності, які іноді називають зусиллями. Виникнення цих додаткових внутрішніх сил супроводжується деформацією матеріалу. Сили пружності протидіють зовнішнім силам і намагаються відновити попередню форму тіла.

Поряд із поняттям деформації одним із основних понять опору матеріалів є така фізична величина, як **напруження** в точці перерізу тіла.

Напруження характеризує інтенсивність сил пружності, що діють у перерізі.

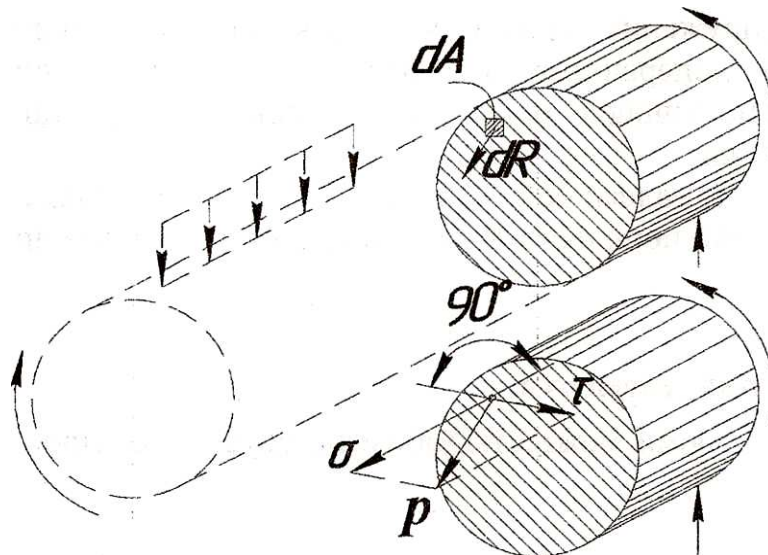


Рис. 2.4

Розглянемо довільно навантажений брус і застосуємо до нього метод перерізів (рис. 2.4).

Виділимо у перерізі нескінченно малий елемент площі dA (вважаємо матеріал бруса суцільним).

Завдяки малізні цього елемента можна вважати, що в його межах сили, прикладені до різних точок, однакові за модулем і напрямом, отже, вони є системою

сил, що паралельні одна одній. Рівнодійну цієї системи сил позначимо $\Delta \bar{R}$.

Межу відношення величини рівнодійної сил елемента перерізу $\Delta \bar{R}$ до елементарної площини цього елемента ΔA , якщо остання

стягується в точку, називається дійсним напруженням \bar{p} в цій точці.

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A} = \frac{d\bar{R}}{dA}. \quad (2.2)$$

У Міжнародній системі одиниць СІ напруження вимірюється у паскалях: м^2 . Практично використовують кратні одиниці: кілопаскаль (КПа), мегапаскаль (МПа): $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$.

Розкладаючи вектор напруження на нормаль (перпендикуляр до перерізу) і дотичну (площина перерізу) одержимо нормальні і дотичні складові напруження. Оскільки кут між нормальними і дотичними напруженнями прямий, то модуль повного напруження p визначається за формулою:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (2.3)$$

Розкладання повного напруження на нормальну і дотичну складові має цілком визначений фізичний зміст. Як побачимо далі, в поперечному перерізі бруса у випадках розтягу, стиску і чистого згину діють **тільки нормальні напруження**, а при зсуві і крученні – **тільки дотичні напруження**.

Користуючись принципом незалежності дії сил, можна переходити від вивчення найпростіших основних деформацій, коли в поперечних перерізах бруса діють тільки нормальні або дотичні напруження, до вивчення більш складніших типів деформацій.

Зазначимо, що принцип незалежності дії сил стосується тільки конструкцій, деформації яких малі порівняно з їх розмірами і пропорційні діючим навантаженням за законом Гука.

В інженерній практиці дуже поширені конструкції, які складаються з кількох брусів, наприклад, ферми, рами та ін.

У багатьох машинах і конструкціях є елементи, що мають складну форму – масиви, пластинки і оболонки, розрахунки яких не можна здійснити лише методами, викладеними у курсі опор матеріалів.

2.2 Центральний розтяг і стиск

2.2.1 Визначення напружень по площадках, перпендикулярних до осі стрижня

Деформацію розтягу (стиску) досліджують на прямолінійних брусках, які називаються стрижнями.

Центральний розтяг або стиск стрижня виникає під дією сил, прикладених до його кінців і спрямованих вздовж геометричної осі. **Центральна геометрична вісь** – це лінія, що з'єднує центри ваги

Частина друга

поперечних перерізів бруса або стрижня. Якщо сили направлені від кінцевих перерізів назовні, то це буде деформація розтягу (рис. 2.5), а якщо навпаки – деформація стиску. Висновки щодо центрального розтягу здебільшого стосуються і центрального стиску. Відмінності виникають при дослідженні тонких довгих стрижнів і в процесі руйнування матеріалів.

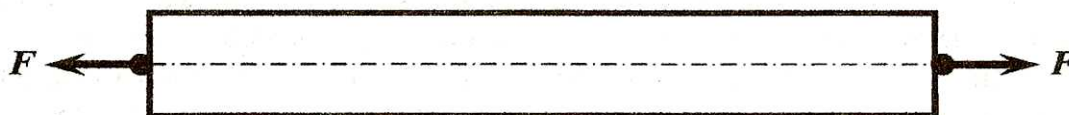


Рис. 2.5

Розглянемо стрижень постійного перерізу, до кінців якого прикладені сили, які розтягують брус вздовж його осі. Сили можна прикласти до кінців стрижня різними способами.

У місцях прикладання сил процес деформації стрижня проходить у дуже складних умовах, не схожих на простий розтяг. Перерізи, значно віддалені від місця прикладання сил, зазнають, за експериментальними дослідженнями, звичайного розтягу або стиску. Отже, характер прикладання сил має тільки місцеве значення і не впливає на напружений стан віддалених перерізів.

Дослідження показали, що при центральному розтягу або стиску переріз у середній частині стрижня залишається плоским і в процесі деформації, поступально переміщуючись вздовж осі стрижня. Отже, підтверджується гіпотеза плоских перерізів Якоба Бернуллі. Звідси можна зробити висновок, що всі поздовжні волокна зазнають однакового видовження або укорочення. Отже, напруження у перерізі також будуть постійними і рівномірно розподіленими по його площині.

При визначенні сил у перерізі уявно розріжемо стрижень (рис. 2.5) у середній частині по перерізу mn , перпендикулярному до його осі, і відкинемо праву частину цього стрижня (рис. 2.6).

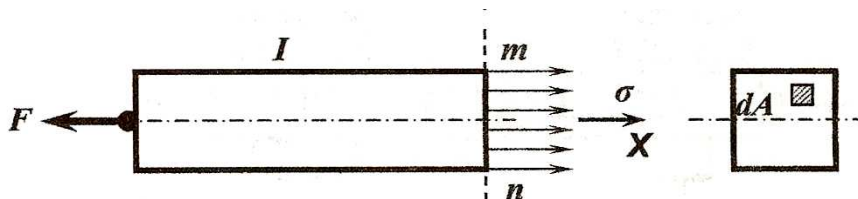


Рис. 2.6

Дію відкинутої частини замінимо силами пружності, які діють у цьому перерізі. У перерізі mn діють тільки нормальні напруження σ , оскільки подовжня сила \bar{F} може бути зрівноважена зворотним зусиллям, яке перпендикулярне до проведеного перерізу і є рівнодієюю нормальних сил пружності.

У перерізі mn розглянемо елементарну площадку dA , на яку діє

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

зусилля σdA . Рівнодійна рівномірно розподілених по площині елементарних зусиль є нормальною силою \bar{N} , прикладеною в центрі ваги перерізу. Складемо рівняння рівноваги на підставі умови суми проєкцій на вісь

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0; \Rightarrow -F + N = 0; F = N.$$

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma A.$$

Звідси дістаємо розрахункову формулу для визначення напружень у перерізах, перпендикулярних до осі стрижня:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \tag{2.4}$$

де A – площа даного поперечного перерізу.

Якщо нормальні сили в окремих поперечних перерізах різні, зручно

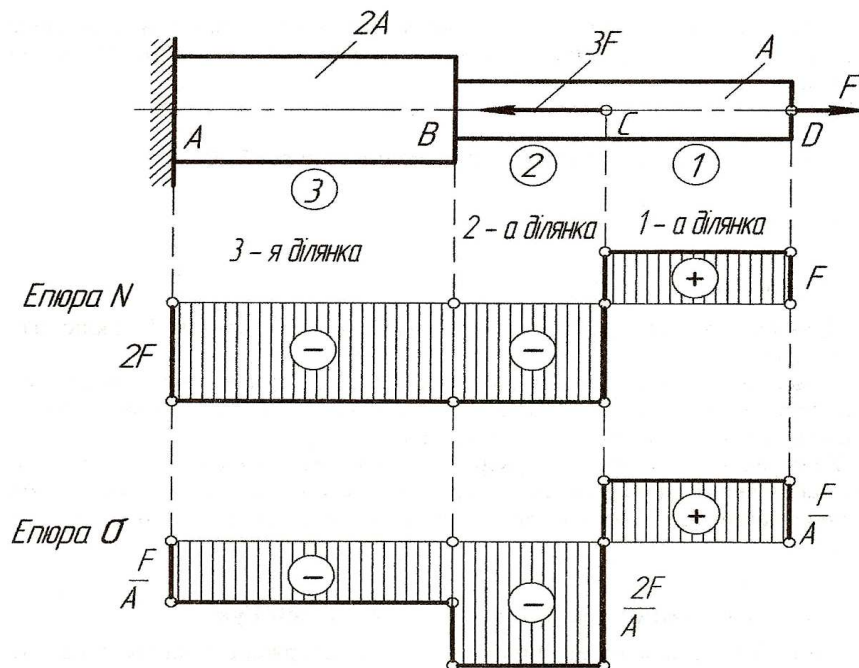


Рис. 2.7

зобразити закон їх зміни у вигляді графіка, який називається епюра нормальних сил.

Побудуємо епюри подовжніх сил і нормальних напружень для ступінчастого стрижня, зображеного на рис. 2.7.

Для цього розділимо стрижень на окремі ділянки і пронумеруємо їх, як показано на рисунку.

Межами ділянок є точки прикладання зовнішніх сил і місця зміни розміру поперечного перерізу.

Частина друга

Для побудови епюри подовжніх сил N під рисунком стрижня проведемо базу епюри, паралельну осі стрижня, і штриховими лініями обмежимо ділянки.

Величини подовжніх сил у довільному масштабі відкладемо перпендикулярно до осі епюри, причому додатні значення N (розтяг) відкладаємо вгору, а від'ємні (стиск) – вниз від осі.

Епюру штрихуємо тонкими лініями, перпендикулярними до осі. Лінія штрихування в масштабі (ордината графіка) дає значення подовжньої сили у відповідному поперечному перерізі бруса

У точках прикладання зосереджених сил на епюрі N відбуваються стрибкоподібні зміни, причому величина «стрибка» дорівнює модулю прикладеної в перерізі бруса зовнішньої зосередженої сили.

Перейдемо до деталізації. Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, дивлячись справа, що в усіх поперечних перерізах першої ділянки діє подовжня сила $N_1 = F$.

Відкладемо вгору від осі епюри величину F у довільному масштабі і проведемо в межах ділянки пряму, паралельну осі епюри.

У точці C стрижня прикладено силу $3F$. Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, що в усіх поперечних перерізах другої і третьої ділянок діє подовжня сила $N_2 = N_3 = -2F$, тоді епюра буде горизонтальною лінією, яка проходить на $2F$ нижче від осі епюри.

Очевидно, що значення ординати епюри подовжніх сил зліва під жорстким закріпленням дорівнює величині реакції опори. Тому зручніше розглядати рівновагу частини стрижня з боку його вільного кінця, щоб заздалегідь не визначити реакцію закріплення.

Щоб побудувати епюру нормальних напружень σ , визначимо ці напруження на ділянках стрижня:

$$\begin{aligned} \text{нормальні напруження на першій ділянці } \sigma_1 &= \frac{F}{A}; \\ \text{на другій ділянці } - \sigma_2 &= \frac{2F}{A}; \text{ на третій } - \sigma_3 = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}. \end{aligned}$$

Правила побудови епюри нормальних напружень σ такі ж самі, як і для епюри N , включаючи і правило знаків.

У межах кожної ділянки напруження є сталими, тому епюра σ на кожній ділянці паралельна осі.

Для наочності на епюрах N і σ знаками «+» і «-» помічають додатні і від'ємні значення ординат на відповідних ділянках епюр.

У розрахунках на міцність звертають особливу увагу на ті перерізи стрижня, в яких напруження за абсолютною величиною максимальні. Ці перерізи можуть бути небезпечними. У цьому прикладі такими є перерізи бруса на другій ділянці.

**2.2.2. Деформації при розтягу і стиску стрижня. Закон Гука.
Коефіцієнт Пуассона**

Під дією прикладених сил розтягу стрижень видовжується, а кінцевий переріз mn переміщується: в положення m_1n_1 (рис. 2.8).

Якщо позначити початкову довжину стрижня через l , то **абсолютне видовження** визначиться з виразу:

$$\Delta l = l_1 - l, \tag{2.5}$$

де l_1 – довжина стрижня після деформації.

Абсолютне видовження вимірюється в одиницях довжини (мм, см).

Для зручності порівняння деформацій вводиться поняття безрозмірного **коефіцієнта відносного видовження**.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{2.6}$$

Якщо розглядати межу пружних деформацій стрижня, то для них дослідним шляхом встановлена лінійна залежність (пропорційність) між напруженнями і коефіцієнтом відносного видовження.

Ця залежність виражається законом Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \tag{2.7}$$

де E – модуль пружності матеріалу.

За законом Гука **нормальні напруження прямо пропорційні коефіцієнту відносного видовження**.

Модуль пружності E (модуль Юнга) характеризує пружні властивості матеріалу, його здатність чинити опір протидії зовнішнім силам.

Як видно з виразу (2.7), розмірність модуля пружності збігається з розмірністю напруження (коефіцієнт ε є безрозмірна величина). Середні значення модуля пружності E наведено в табл. 2.1.

Визначимо абсолютне видовження стрижня, для чого еквівалентно перетворимо формулу (2.7):

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l}.$$

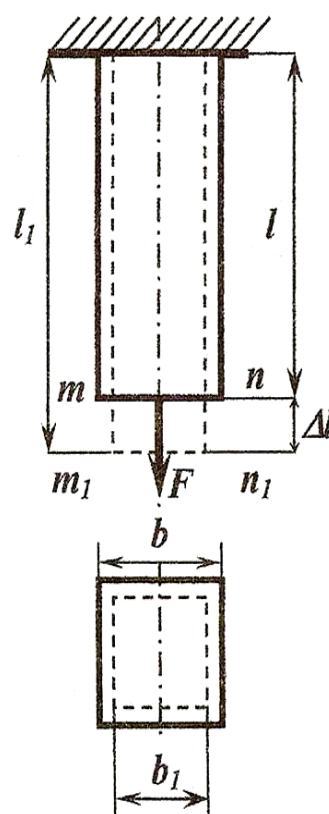


Рис. 2.8

Таблиця 2.1

Матеріал	Модуль Е в Н/мм ²
Сталь	2 10 ⁵
Чавун	1,1 10 ⁵
Мідь та її сплави (латунь, бронза)	1 10 ⁵
Алюміній і дюралюміній	0,7 10 ⁵
Бетон	(0,1...0,3) · 10 ⁵

Звідси отримаємо другу форму запису закону Гука:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}. \quad (2.8)$$

Отже, *абсолютне видовження прямо пропорційне силі та довжині стрижня і обернено пропорційне модулю пружності та площі його поперечного перерізу.*

Розтягнуті (стиснуті) стрижні, як показали досліди, зазнають не тільки подовжньої, а й поперечної деформації (рис. 2.8). Поперечний розмір бруса під час розтягу зменшується на величину

$$\Delta b = b_1 - b = -(b - b_1), \quad (2.9)$$

де b – початковий поперечний розмір стрижня;

b_1 – розмір після деформації.

Коефіцієнт поперечного відносного зменшення дорівнює:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}. \quad (2.10)$$

При стиску, навпаки, збільшуються поперечні розміри стрижня.

Величина відношення коефіцієнта поперечної відносної деформації до коефіцієнта подовжньої відносної деформації називається коефіцієнтом Пуассона

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

Така важлива характеристика як коефіцієнт Пуассона залежить від властивостей матеріалу і для різних матеріалів змінюється в межах від 0 до 0,5.

Наведемо середнє значення коефіцієнтів Пуассона для деяких конструкційних матеріалів: сталь – 0,25...0,33; мідь, бронза, алюміній –

0,31...0,35; чавун – 0,23...0,27; бетон – 0,08...0,18.

Приклад 2.1

Стальна штанга (стрижень) довжиною 40 м і діаметром 30 мм розтягується силою $F = 100$ кН. Знайти абсолютне видовження штанги і зменшення її діаметра, якщо коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$, а модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм².

Розв'язок

Абсолютне видовження штанги визначають за законом Гука (2.8):

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 706,5} = 28,3 \text{ мм} = 2,83 \text{ см.}$$

Відносне видовження дорівнює (2.6):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2,83}{4000} = 0,00071.$$

Відносну поперечну деформацію штанги визначають із виразу (2.11):

$$\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon = -0,25 \cdot 0,00071 = -0,00017.$$

Абсолютне зменшення діаметра буде:

$$\Delta d = \varepsilon_1 d = -0,000171 \cdot 30 = -0,0053 \text{ мм.}$$

Приклад 2.2

При розтягу силою $F=50$ кН сталюого плоского зразка з поперечним перерізом 30×10 мм і довжиною 220 мм його видовження дорівнювало 0,192 мм, а зменшення більшого поперечного розміру – 0,007 мм. Визначити модуль пружності і коефіцієнт Пуассона.

Розв'язок

Напруження у зразку дорівнює:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{50}{3} = 16,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,192}{220} = 0,00087.$$

Відносне поперечне видовження:

Відносне зменшення становитиме:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b} = \frac{-0,007}{30} = -0,00023.$$

Модуль пружності:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{16,7}{0,00087} = 1,92 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Тоді, коефіцієнт Пуассона:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{0,00023}{0,00087} = 0,26.$$

2.2.3. Експериментальне дослідження розтягу і стиску матеріалів. Діаграма напружень

Для розрахунку конструкцій необхідно знати механічні властивості (характеристики) матеріалів: міцність, пружність, твердість, пластичність. Більшість механічних характеристик можна визначити прямо або опосередковано при випробуванні *на розтяг* пластичних або крихких матеріалів.

Пластичні матеріали характеризуються тим, що їх руйнування настає лише після значної залишкової деформації, крихкі ж руйнуються при дуже малих залишкових деформаціях. До пластичних матеріалів належать, наприклад, м'яка сталь і мідь, а до крихких – чавун, бетон тощо.

Механічні властивості матеріалів визначаються експериментальним дослідженням на спеціальних машинах. Для цього в лабораторних умовах випробовують технологічно виготовлені зразки. При випробуваннях на розтяг застосовують зразки круглого або прямокутного поперечного перерізу, розширені на кінцях.

Кінці стрижня закріплюють у затискачах машини і розтягують, поступово збільшуючи силу. Величину сили визначають динамометром, а видовження зразка – тензومتром. У більшості сучасних машин є пристрої, які автоматично викреслюють графік залежності між силою і видовженням, записуючи діаграму розтягу.

Якщо по вертикальній осі замість сил відкладати напруження, а по горизонтальній осі замість абсолютного видовження – відносні, то така діаграма називається діаграмою напружень під час розтягу.

При цьому ординати графіка дорівнюють:

$$\sigma = F / A_0,$$

де A_0 – початкова площа зразка; F – змінна сила розтягу.

Значення абсциси дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.12)$$

де Δl – змінне видовження зразка; l_0 – розрахункова довжина.

Діаграма напружень при розтягу маловуглецевої (м'якої) сталі наведена на рис. 2.9.

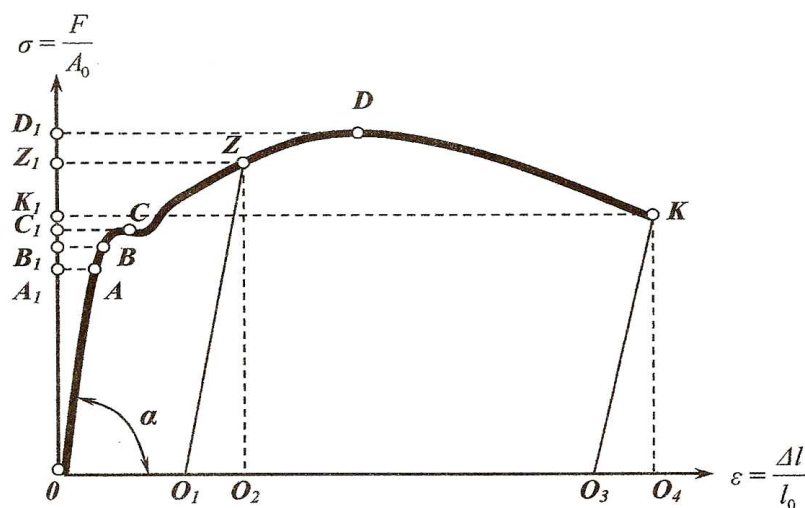


Рис. 2.9

Межею пропорційності σ_n (ордината OA_1) називається таке напруження, при якому зберігається пряма пропорційність між нормальним напруженням σ і відносною деформацією ε . Для м'якої сталі ця границя $\sigma_n = 200 \text{ Н/мм}^2$.

Межею пружності (ордината OB_1) називається напруження, при якому в матеріалі виникає залишкова деформація, що дорівнює наперед заданій малій величині (0,002... 0,005% від початкової довжини зразка).

Точка B діаграми розміщена близько від точки A . Із діаграми напружень видно, що

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E. \quad (2.13)$$

Отже, модуль пружності геометрично можна визначити як тангенс кута нахилу лінійної (початкової) ділянки діаграми розтягу до горизонталі.

Межею текучості σ_m (ордината OC_1) є таке напруження, при якому відбувається збільшення деформації майже без збільшення навантаження, зразок «тече». Для м'якої сталі ця межа $\sigma_T \cong 240 \text{ Н/мм}^2$.

Горизонтальна ділянка діаграми називається площадкою текучості, яка характеризується появою волосних ліній (ліній зсуву) на поверхні зразка, нахилених, приблизно, під кутом 45° до лінії дії сили.

Частина друга

Згадані лінії вперше помітив під час досліджень відомий російський вчений Д.К. Чернов (лінії Чернова). Поява цих ліній свідчить про зсуви окремих кристалів сталі.

Після утворення площадки текучості зразок матеріалу знову набуває здатності чинити опір збільшенню навантаження за рахунок перебудови кристалевих решіток.

Максимальна ордината напруження OD_1 називається тимчасовим опором $\sigma_{то}$.

Для крихких матеріалів відзначається напруження в момент руйнування зразка, яке називають **межею міцності $\sigma_{мл}$** .

Тимчасовий опір $\sigma_{то}$ є напруження, яке відповідає максимальній розривній силі (для м'якої сталі $\sigma_{то} = 400 \text{ Н/мм}^2$).

Подальше випробування зразка призводить до утворення шийки, місцевого звуження поперечного перерізу елемента стрижня (рис. 2.10).

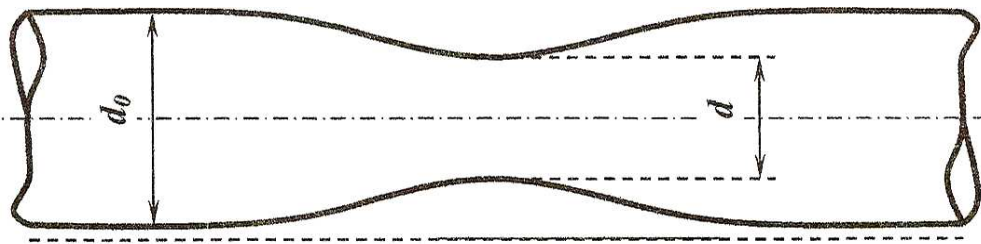


Рис. 2.10

Внаслідок зменшення площі перерізу зразка його розривання відбувається при меншому напруженні (силі) (точка K , рис. 2.9).

Якщо припинити дослід при напруженні, меншому від межі пропорційності, то після зняття навантаження зразок набере своїх початкових розмірів до деформації.

Між точками C і K розвантаження зразка зобразиться прямою $ZO1$ або $KO3$, яка майже паралельна лінії OA . Отже, довжина зразка після розвантаження буде більша початкової довжини на величину $\Delta l = OO1$.

Відрізок $OO1$ називається залишковою деформацією, відрізок $O1O2$ – пружною деформацією, а $OO2$ – повною деформацією. Навіть у момент розриву, зразок має пружну деформацію, яка зображується відрізком $O3O4$.

Величина повної деформації $OO4$ в момент розриву зразка залежить від пластичності матеріалу.

У крихких матеріалів навіть при малих величинах напружень реально має місце нелінійна залежність між напруженнями і коефіцієнтом відносної деформації.

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Але ці відхилення від закону Гука для згаданих матеріалів незначні, що дає змогу у розрахунках приймати лінійну залежність між напруженнями і деформаціями.

Під час випробування крихких матеріалів на стиск застосовують зразки у вигляді кубиків, а для пластичних матеріалів і чавунів – у вигляді циліндрів. Висота циліндра вибирається трохи більшою за діаметр.

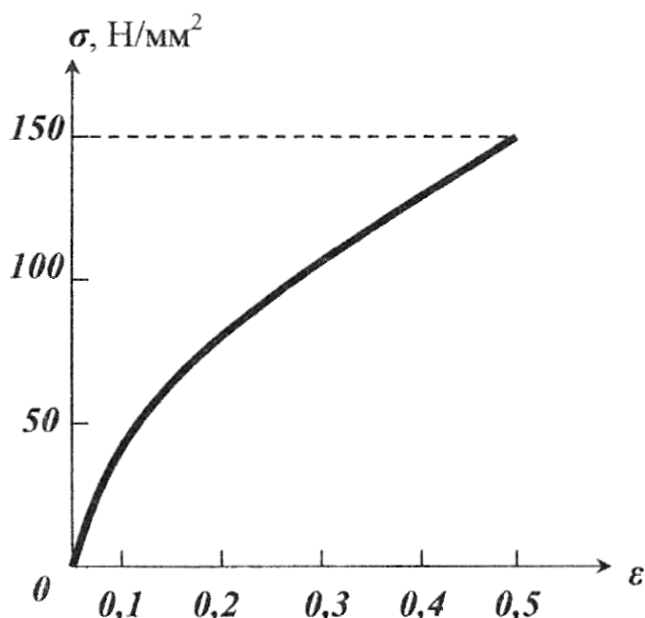


Рис. 2.11

Як наголошувалось, під час розтягу крихкі матеріали руйнуються при малих деформаціях. На рис. 2.11 наведено діаграму напружень при розтягу крихкого матеріалу.

При випробуванні на стиск крихкі матеріали руйнуються так само, як і при розтягу.

Величини границі пропорційності і модулі пружності для пластичних матеріалів при стиску і розтягу майже рівні.

Наведемо значення межі міцності для деяких матеріалів (табл. 2.2).

Експериментальні дослідження показують, що пластичні матеріали однаково добре працюють на розтяг і стиск, крихкі ж – погано чинять опір розтягу.

Таблиця 2.2

Вид матеріалу	розтяг Н/мм ²	Стиск Н/мм ²
Сталь для конструкцій (Ст. 3)	380	420
Сталь машинобудівна	500	800

Частина друга

Сталь рейкова	700	800
Сталь спеціальна для машинобудування	до 1600	–
Сірий чавун	170...250	600... 1000
Сплави міді (латунь, бронза)	220... 500	–
Бетон	2...5	5...60
Дерево (сосна)	80	40
Текстоліт	85...100	230...250
Дюралюміній	360	280

У зв'язку з різким зменшенням площі поперечного перерізу зразка після утворення шийки, що практично рівнозначно руйнуванню його, для розрахунків беруть лише величину межі тимчасового опору.

2.2.4. Допустимі напруження

Для нормальної роботи елемента конструкції необхідно, щоб напруження які виникли в ньому (допустимі напруження), були менші від межі пружності, бо інакше в стержні виникнуть залишкові деформації. Крім цього, допустиме напруження є частиною межі міцності і пов'язане з нею таким рівнянням:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{zm}}{k}, \quad (2.14)$$

де k – коефіцієнт запасу міцності.

При виборі допустимого напруження слід у лабораторії визначити межу міцності для даного матеріалу, а потім вибирати відповідний коефіцієнт запасу міцності.

Визначення допустимих напружень, які залежать від технічних і економічних факторів – одна з найважливіших народногосподарських проблем. Тому цим питанням займаються державні нормуючі органи, вони видають норми і правила, які є керівними при розрахунках інженерних споруд і машин.

Коефіцієнт запасу міцності повинен бути таким, який забезпечував би нормальну роботу елементів і всієї конструкції в цілому.

Величина коефіцієнта запасу залежить від виду діючого навантаження, властивостей матеріалу та інших причин.

Крихкі матеріали потребують значно більших коефіцієнтів запасу ніж пластичні. При наявності динамічних навантажень беруть більші коефіцієнти запасу, ніж при статичних.

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Щодо точності розрахунку належать реальні уявлення про навантаження, властивості матеріалів і про відповідність розрахункової схеми справжнім умовам роботи елемента.

Із розвитком науки про міцність під час розрахунків приймають менші коефіцієнти запасу міцності.

Знаючи межу міцності матеріалу і відповідний коефіцієнт запасу міцності, можна визначити значення величин допустимих напружень.

У прийнятому методі розрахунку будівельних конструкцій замість загального коефіцієнта запасу міцності застосовують три окремі коефіцієнти: перевантаження, умов роботи і однорідності матеріалу, що надає можливість більш раціонально проектувати конструкції.

Значення допустимих напружень для деяких матеріалів наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Матеріали	Стиск В Н/мм ²	Розтяг В Н/мм ²
Сталь Ст.0 і Ст.2	140	140
Сталь Ст.3	160	160
Сталь вуглецева, конструкційна для машинобудування	60...250	60...250
Сталь легована, конструкційна для машинобудування	100...400	100...400
Чавун (сірий)	120...150	–

2.2.5. Розрахунок міцності стрижнів при розтягу і стиску

Розглянемо наступні методики розрахунку стрижнів.

1. Підбір перерізу елемента

Задано діючі сили і матеріал з відомим допустимим напруженням $[\sigma]$. Треба визначити поперечні розміри стрижня.

Потрібну площу перерізу визначають за формулою:

$$A_{II} \geq \frac{F}{[\sigma]}. \quad (2.15)$$

Визначивши площу, можна вибрати найбільш раціональну форму поперечного перерізу і її розміри. Знайдена величина площі перерізу повинна бути близькою до потрібної. Відхилення від потрібної площі допустимо в межах $\pm 5\%$.

2. Перевірка міцності елемента

Частина друга

Відомо розміри поперечного перерізу елемента, матеріал і діюча сила. Треба визначити значення напружень у елементі і порівняти їх із допустимими. Умову міцності запишемо так:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] \quad (2.16)$$

3. Визначення допустимого навантаження на елемент

Задано розміри перерізу і допустимі напруження. Треба визначити значення найбільшої сили, яку може сприйняти цей конкретний елемент. Найбільшу силу визначають із виразу:

$$F_{\text{Макс}} \leq A [\sigma] \quad (2.17)$$

Формули (2.15), (2.16) і (2.17) придатні для розрахунків будь-яких розтягнутих стрижнів і коротких стиснених елементів. Короткими називають такі стрижні, у яких довжина порівняно з розмірами поперечного перерізу незначна.

Якщо ж відношення довжини стрижня до розміру його поперечного перерізу дуже велике, то слід враховувати можливість втрати стійкості (про це – далі).

При розрахунку стрижнів, послаблених отворами або виточками, у формулах (2.15), (2.16), (2.17) вказується площа «нетто» з урахуванням послаблення замість повної площі поперечного перерізу. Цю площу визначають із виразу:

$$A_{\text{нт}} = A_{\text{бр}} - A_{\text{посл}} \quad (2.18)$$

де $A_{\text{бр}}$ – повна площа перерізу (без врахування послаблення);

$A_{\text{посл}}$ – площа послаблення.

Приклад 2.3

Визначити поперечні розміри з'єднаних шарнірами стрижнів кронштейна АВС, до якого в точці С прикладена сила $P=10\text{кН}$ (рис. 2.12).

Кронштейн складається з сталюї тяги АС круглого поперечного перерізу і дерев'яного підкоса СВ прямокутного перерізу.

Допустимі напруження для сталі $[\sigma] = 140 \text{ Н/мм}^2$ і для дерева $[\sigma] = 10 \text{ Н/мм}^2$.

Розв'язок

Визначимо зусилля у стрижнях АС і ВС із умови рівноваги вузла С, застосовуючи умови рівноваги системи збіжних сил:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & -R_A + R_C \cos 30^\circ &= 0; \\ \sum Y &= 0; & -F + R_C \sin 30^\circ &= 0. \end{aligned}$$

З рівнянь рівноваги знайдемо:

$$R_c = \frac{F}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ кН};$$

$$R_A = R_c \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,3 \text{ кН}.$$

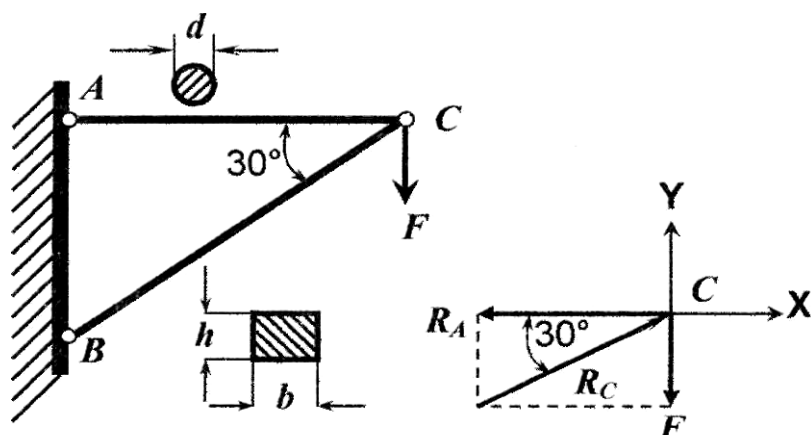


Рис. 2.12

Потрібну площу сталю стрижня визначимо з умови міцності. Для тяги, що отримає деформацію розтягу, вона дорівнює:

$$A_1 = \frac{R_A}{[\sigma_p]} = \frac{17,3 \cdot 10^3}{140} = 124 \text{ мм}.$$

Діаметр тяги:

$$d = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 124}{3,14}} = 12,5 \text{ мм}.$$

Площа підкоса із дерева, який перебуває під деформацією стиску:

$$A_2 \frac{R_c}{[\sigma_c]} = \frac{20 \cdot 10^3}{10} = 2000 \text{ мм}^2.$$

Відношення між поперечними розмірами перерізу підкоса: $h = \frac{b}{2}$.

$$\text{Тоді } b = \sqrt{2A_2} = \sqrt{2 \cdot 2000} = 63,5 \text{ мм}, \quad h = \frac{63,5}{2} = 31,75 \text{ мм}.$$

2.2.6. Вплив власної ваги на деформацію стрижня

В розрахунках на міцність будівельних споруд, колон, фундаментів,

Частина друга

шахтних канатів, тощо доводиться враховувати істотний вплив власної ваги на величину нормальних напружень.

Розглянемо довгий брус, закріплений вгорі, який розтягується силою F (сила ваги прикріпленого вантажу) (рис. 2.13).

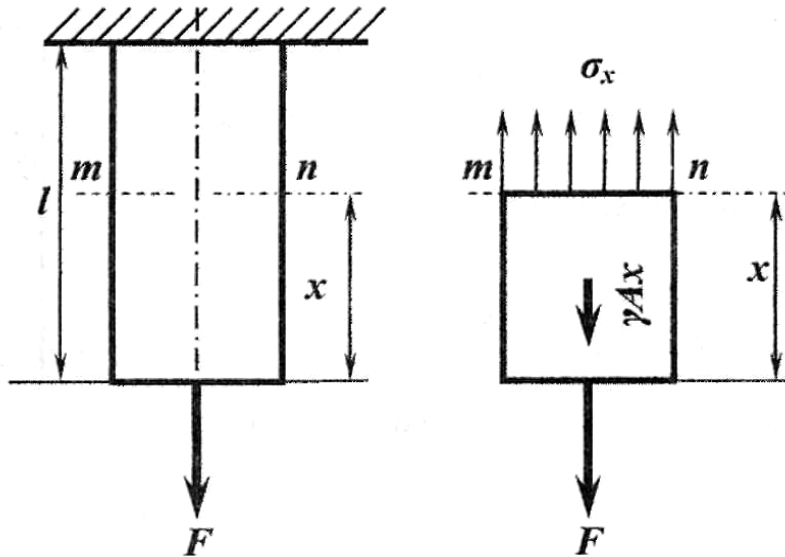


Рис. 2.13

Визначимо напруження у поперечному перерізі mn площею A , розміщеному на відстані x від вільного кінця бруса. На нижню частину бруса довжиною x діятимуть зовнішня сила F і власна вага бруса γAx (γ – густина матеріалу).

Рівняння рівноваги нижньої частини бруса:

$$\sigma_x A - F - \gamma Ax = 0, \quad (2.19)$$

Звідси змінна величина напружень у будь-якому перерізі по довжині бруса дорівнюватиме:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \gamma x. \quad (2.20)$$

Максимальне напруження, переріз найнебезпечніший, буде біля закріпленого кінця бруса, для якого $x = l$:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma l. \quad (2.21)$$

Умова міцності на розтяг за сумісної дії зовнішньої сили і сили ваги:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (2.22)$$

З виразу (2.22) підбирається потрібна площа перерізу:

$$A_n \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (2.23)$$

Розглядаючи розтяг у межах пропорційності, визначимо абсолютну деформацію бруса від дії власної ваги, для чого виділимо на відстані x від вільного кінця двома нескінченно близькими поперечними перерізами елемент бруса довжиною dx (рис. 2.14).

Абсолютна деформація елемента dx на підставі закону Гука дорівнюватиме:

$$\Delta dx = \frac{(F + \gamma Ax) dx}{EA}. \quad (2.24)$$

Повне видовження бруса:

$$\Delta l = \int_0^l \left(\frac{F}{EA} + \frac{\gamma Ax}{E} \right) dx. \quad (2.25)$$

Взявши інтеграл від цього виразу в межах від 0 до l , знайдемо:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (2.26)$$

Помноживши і поділивши чисельник і знаменник другого доданку (2.26) на A і вважаючи при цьому, що власна вага бруса $Q = \gamma Al$, дістанемо:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{Ql}{2EA}. \quad (2.27)$$

Якщо зовнішня сила відсутня, видовження від самої власної ваги:

$$\Delta l = \frac{Ql}{2EA}. \quad (2.28)$$

Формула (2.28) інформує, що видовження тільки від власної ваги у два рази менше видовження від прикладеної до кінця бруса сили, яка дорівнює його власній вазі Q .

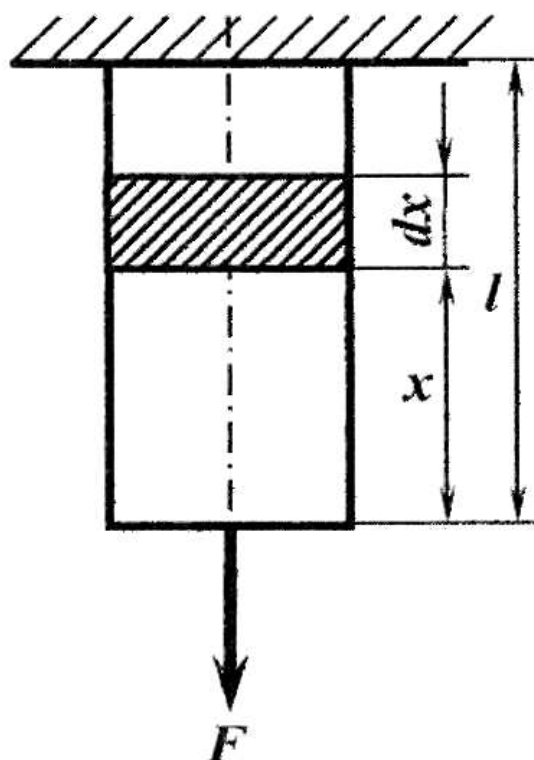


Рис. 2.14

Приклад 2.4

Визначити діаметр рудникової штанги і повне її видовження з урахуванням власної ваги, якщо розтягувальна сила $F = 20$ кН, довжина штанги $l=10$ м, інші характеристики матеріалу штанги:

$$[\sigma] = 280 \text{ Н/мм}^2, E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2, \gamma = 0,0078 \text{ Н/мм}^3.$$

Розв'язок

Потрібна площа перерізу штанги дорівнює із формули (2.23):

$$A = \frac{F}{[\sigma] - \gamma l} = \frac{20 \cdot 10^3}{280 - 0,0078 \cdot 10 \cdot 10^3} = 99 \text{ мм}^2.$$

Діаметр штанги:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 99}{3,14}} = 11,2 \text{ мм}.$$

Повне видовження (2.26):

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot \frac{3,14 \cdot 11,2^2}{4}} + \frac{0,0078 \cdot (10 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 12,1 \text{ мм}.$$

2.2.7. Розрахунок ідеальної (гнучкої) нитки

До ідеальної нитки відносять електричні проводи, канати, троси різного призначення, паси передач тощо, які працюють тільки на розтяг.

Нехай ідеальна нитка (провід) підвішена в точках A і B , які знаходяться на одному рівні (рис. 3.15).

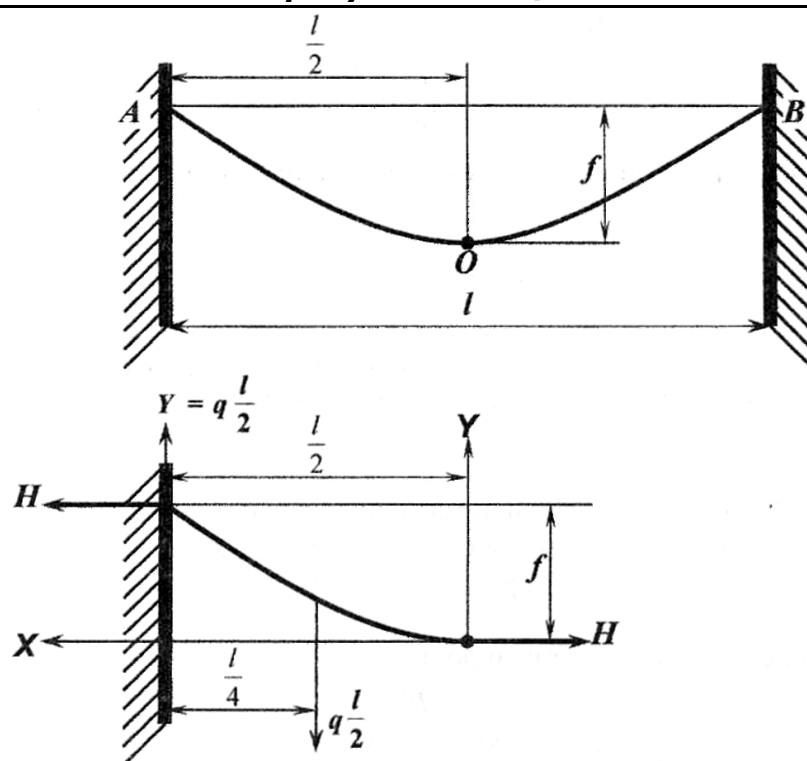


Рис. 2.15

Під дією власної ваги гнучкий провід провисає по деякій кривій AOB . Провисання проводу звичайно невелике порівняно з його прольотом l . Тому з достатнім ступенем точності можна вважати, що вага ідеальної нитки рівномірно розподілена по довжині його горизонтальної проекції, тобто, по довжині прольоту l .

Нехай інтенсивність розподіленого навантаження по прольоту нитки дорівнює q . Візьмемо початок координат у найнижчій точці O провисання нитки і позначимо натяг у точці через H .

Величину сили H і стрілу провисання f визначимо, розглядаючи стан рівноваги системи. Знайдемо суму моментів всіх сил відносно точки A :

$$Hf - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0, \quad H = \frac{ql^2}{8f} \text{ або } f = \frac{ql^2}{8H}.$$

2.2.8. Напруження у стрижнях при зміні температури

Нехай стрижень довжиною l нерухомо затиснутий кінцями в стіні при значенні температури t_1 . Визначити зусилля, які виникають у стрижні при зміні його температури до величини t_2 . При підвищенні температури від t_1 до t_2 стрижень видовжується, розпираючи стіни, що веде до виникнення сил реакцій з боку стін, які в свою чергу стискають брус (рис. 2.16).

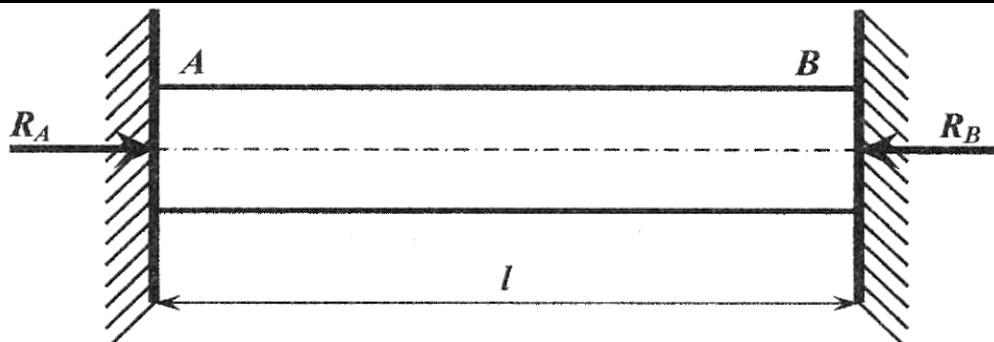


Рис. 2.16

Реакції стін не можна визначити з умови рівноваги $\sum X = 0$, як суми проєкцій сил на горизонталь, оскільки єдине рівняння свідчить, що $R_A = R_B = R$.

Для розв'язання статично невизначеної задачі треба скласти додаткове **рівняння сумісності деформацій**: видовження стрижня від нагрівання дорівнює його укороченню від стиску силами реакцій R :

$$\Delta l_t = \Delta l_R. \quad (2.29)$$

Видовження стрижня від нагрівання визначають за формулою

$$\Delta l_t = \alpha(t_2 - t_1)l. \quad (2.30)$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу стрижня. Укорочення стрижня за законом Гука дорівнює:

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EA}. \quad (2.31)$$

Тоді рівняння (2.29) сумісності деформації можна записати у такому вигляді:

$$\alpha(t_2 - t_1)l = \frac{Rl}{EA}. \quad (2.32)$$

Поділивши праву і ліву частини рівняння (2.32) на l , дістанемо:

$$\sigma_1 = \frac{R}{A} = \alpha E(t_2 - t_1). \quad (2.33)$$

Отже, напруження, що виникають у стрижні сталого перерізу з жорстко закріпленими кінцями при зміні температури не залежать від його довжини.

2.2.9. Деформація зминання

Коли деталі конструкцій, які передають значне стиснене навантаження, мають невелику площу контакту, то поверхні цих деталей можуть зминатися. Щоб не сталося зминання, під гайки і головки болтів підкладають шайби (рис. 2.17).

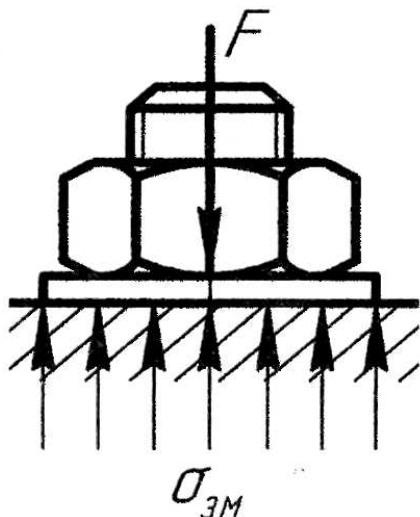


Рис. 2.17

Для спрощення розрахунків вважають, що при площинному контакті виникають нормальні напруження зминання, що рівномірно розподілені по площі контакту. Розрахункове рівняння на зминання має вигляд

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}] \quad (2.34)$$

де F – сила стиску;

$[\sigma_{зм}]$ – допустимі напруження на зминання;

$A_{зм}$ – площа контакту.

Якщо дотичні деталі виготовлені з різних матеріалів, то на зминання перевіряють *м'якший* матеріал.

Для двох деталей, які контактують циліндричними поверхнями (наприклад, заклепочне з'єднання), закон розподілу напружень зминання по поверхні контакту складний (рис. 2.18, а).

Тому в розрахункову формулу зминання циліндричних отворів підставляють не площу бокової поверхні півциліндра, по якій контактують деталі, а меншу площу його діаметрального перерізу отвору (умовна площа зминання): $A_{зм} = ds$, де d – діаметр отвору; s – товщина з'єднуваної деталі (висота циліндра).

Якщо з'єднані деталі мають різну товщину, то в формулу підставляють меншу.

Допустимі напруження на зминання для болтових і шпонкових з'єднань із сталі у межах 100...120 МПа, для заклепочних з'єднань 240...320 МПа, для деревини (сосна, дуб) – 2,4...11 МПа залежно від типу деревини і напряму сили стиску порівняно з напрямом волокна.

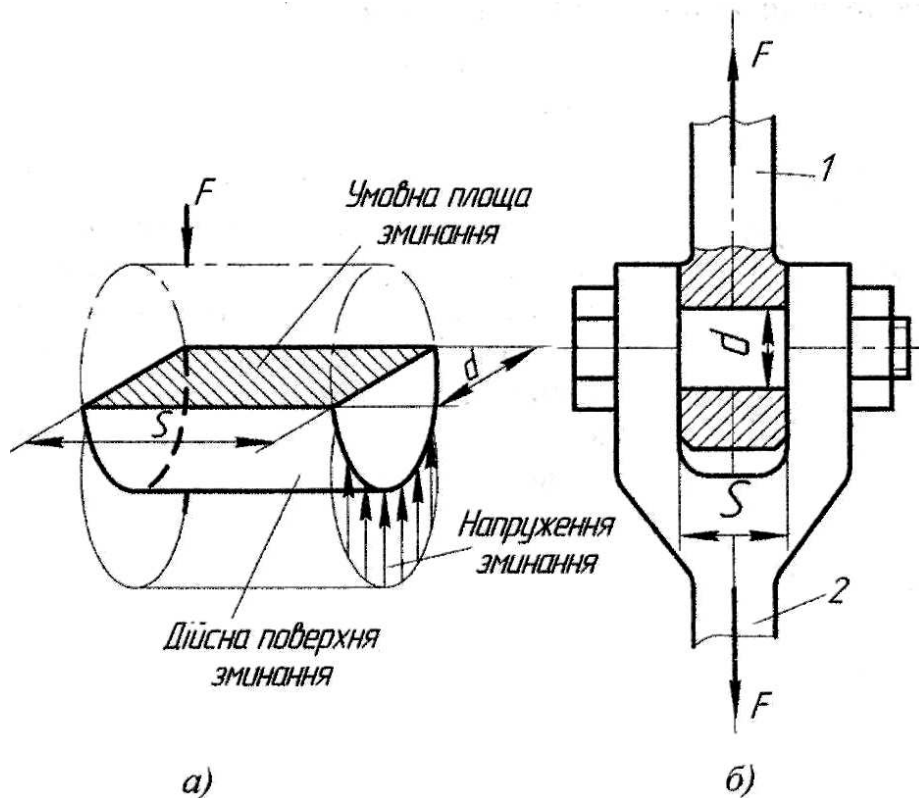


Рис. 2.18

Приклад 2.5

Тяга 1, з'єднана з вилкою 2 за допомогою болта, поставленого без зазору, і навантажена, як показано на рис. 2.18, б.

Визначити напруження змінання у головці тяги, якщо сила $F = 32$ кН, діаметр болта $d = 20$ мм, а товщина головки тяги $s = 24$ мм.

Розв'язок

Обчислимо умовну площу змінання:

$$A_{зм} = d \cdot s = 20 \cdot 24 = 480 \text{ мм}^2.$$

Визначимо напруження змінання у головці тяги:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} = \frac{32 \cdot 10^3}{(480 \cdot 10^{-6})} = 67 \cdot 10^6 \text{ Па} = 67 \text{ МПа}.$$

2.3. Деформація зсуву

2.3.1. Дотичні напруження

В умовах довільного навантаження в перерізах бруса виникають нормальні напруження, що чинять опір деформації розтягу (стиску), і

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

дотичні напруження, що чинять опір зсуву завдяки виникненню поперечної сили, яка є рівнодієюю елементарних сил пружності бруса.

Деформація зсуву однієї частини бруса відносно іншої відбувається, якщо до нього з протилежних сторін на дуже близькій відстані прикладено дві рівні за величиною сили, перпендикулярні до осі бруса. Це можна спостерігати, наприклад, під час різання ножицями металевих прутків (рис. 2.19, а).

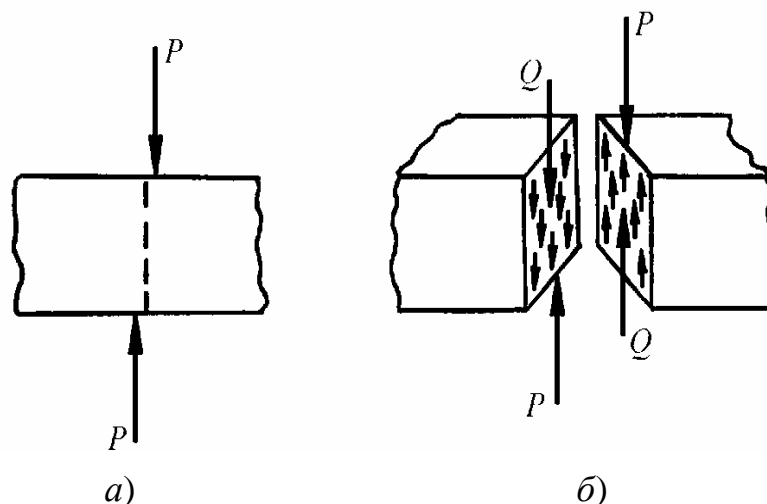


Рис. 2.19

Поперечну силу Q , що виникає в площині перерізу під дією зовнішньої сили P , визначимо методом перерізів з умов рівноваги однієї із частин бруса (рис. 2.19 б).

$$Q=P.$$

Функціональний зв'язок між поперечною силою и дотичними напруженнями виражається формулою

$$Q = \int_A \tau dA. \quad (2.35)$$

Якщо дотичні напруження розподілені рівномірно по перерізу, що допускається, то з урахуванням (2.35) одержимо:

$$Q = P = \tau A \Rightarrow \tau = \frac{P}{A} = \frac{Q}{A}, \quad (2.36)$$

де A – площа поперечного перерізу бруса.

Отже, **поперечна сила є рівнодієюю елементарних дотичних сил пружності тіла у перерізі бруса, що чинять опір зсуву.**

Не дивлячись на умовність припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу, в інженерній практиці широко користуються виразом (2.36) для розрахунку реальних конструкцій. Тим паче. що багато елементів конструкцій і деталей машин руйнуються

шляхом зсуву.

Відмітимо, що викладений розрахунок дотичних напружень при зсуві наближений, оскільки лінії дії сил P і Q (рис. 2.19 б) напрямлені не по одній прямій і, точно кажучи, утворюють пару сил. Проте, момент цієї пари дуже невеликий і його впливом можна знехтувати.

2.3.2. Розрахунок на міцність при деформації зсуву

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що найбільше напруження (робоче напруження), яке виникає в ній, не повинно бути більшим від допустимого. Звідки, розрахункова формула при зсуві має такий вигляд:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]. \quad (2.37)$$

Дотичне напруження при зсуві, обчислене за формулою (2.37) не повинно бути більшим від допустимого.

За цією формулою роблять проектний і перевірний розрахунки та визначають допустиме навантаження.

Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають зрізом (стосовно металевих деталей) або сколюванням (стосовно неметалевих конструкцій).

Допустиме напруження на зріз для пластичних матеріалів вибирають залежно від границі текучості. У машинобудуванні для штифтів, болтів, шпонок тощо приймають $[\tau_z] = (0,25 \dots 0,35) \sigma_T$, для деревини допустимі напруження на сколювання при врубванні коливаються в межах від 0,5 до 1,4 МПа і залежать від сорту деревини і напряму зовнішньої сили по відношенню до напряму волокон.

Розрахунки з'єднань на зріз, звичайно, супроводжуються перевіркою міцності цих з'єднань на зминання.

Приклад 2.6

На рис. 3.20 зображено сталевий циліндр з головкою висотою h . З'ясувати, чи витримуються умови рівномірності стрижня діаметром d на розтяг, його головки діаметром D на зріз і опорної поверхні головки на зминання, якщо $[\sigma_p] = 120$ МПа, $[\tau_z] = 70$ МПа, $[\sigma_{зм}] = 170$ МПа, $D = 32$ мм, $d = 20$ мм, $h = 12$ мм.

Визначити також допустиме значення сили $[F]$.

Розв'язок

Обчислимо площі перерізів, які

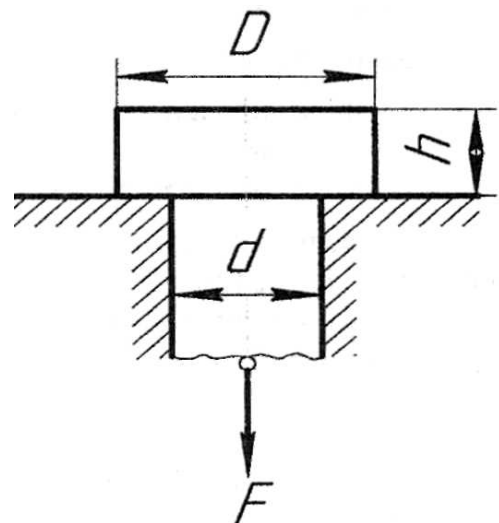


Рис. 2.20

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

працюють на розтяг, зминання і зріз.

У розрахунок на розтяг ввійде площа поперечного перерізу стрижня

$$A_p = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 400 \cdot 10^{-6}}{4} = 314 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

Площа опорної поверхні головки, що працює на зминання, дорівнює

$$A_{зм} = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 490 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Площа зрізу дорівнює площі бокової поверхні циліндра діаметром d і висотою h :

$$A_z = \pi d s = 3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 754 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Використовуючи основні розрахункові рівняння для розтягу, стиску і зрізу, знаходимо допустиме значення $[F]$:

$$[F_p] = [\sigma_p] \cdot A_p = 120 \cdot 10^6 \cdot 314 \cdot 10^{-6} = 37,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 37,7 \text{ кН};$$

$$[F_{зм}] = [\sigma_{зм}] \cdot A_{зм} = 170 \cdot 10^6 \cdot 490 \cdot 10^{-6} = 83,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 83,3 \text{ кН};$$

$$[F_z] = [\sigma_z] \cdot A_z = 70 \cdot 10^6 \cdot 754 \cdot 10^{-6} = 52,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 52,8 \text{ кН}.$$

Знайдені значення допустимих сил значно відрізняються одне від одного. Із цього випливає, що умови рівномірності не втримуються. Як допустиме значення сили $[F]$ візьмемо найменше із знайдених значень.

$$[F] = [F_p] = 37,7 \text{ кН}$$

2.3.3. Закон парності дотичних напружень

Закон парності дотичних напружень формулюють так:

дотичні напруження у двох взаємно перпендикулярних площадках, перпендикулярних до їх спільного ребра, однакові за модулем.

Всередині тіла біля якоїсь точки виділимо елементарний паралелепіпед із розмірами dx , dy , dz (рис. 2.21, а).

Нехай на верхній грані цього паралелепіпеда діє дотичне напруження τ . Сила, що діє в цій грані, дорівнюватиме

$$dQ = \tau dx dy.$$

Оскільки паралелепіпед перебуває всередині тіла в рівновазі, то сума

Частина друга

проекцій сил на вісь x дорівнює нулю, тоді на нижній грані паралелепіпеда повинна діяти така ж сама сила, але у протилежному напрямі.

В свою чергу пара сил (dQ, dQ) намагатиметься повернути паралелепіпед проти ходу стрілки годинника (рис. 2.21, б). Оскільки паралелепіпед перебуває у рівновазі, то сума моментів сил відносно осі y дорівнює нулю, тому пара (dQ, dQ) врівноважується іншою парою з моментом, що дорівнює моменту першої пари. Другу пару утворюють дотичні напруження τ' , які діють на бокових (правій і лівій) гранях паралелепіпеда, причому $dQ' = \tau' dy dz$. Отже,

$$M(dQ, dQ) = M(dQ', dQ'), \text{ або}$$

$$\tau dx dy dz = \tau' dy dz dx; \Rightarrow \tau = \tau'.$$

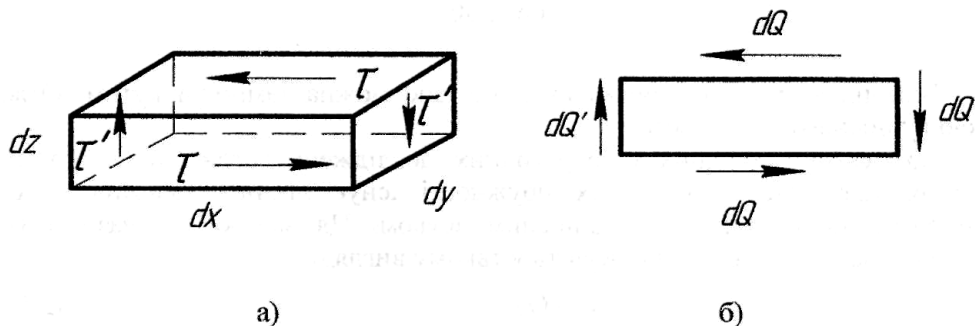


Рис. 2.21

Звернемо увагу на те, що парні дотичні напруження у двох взаємно перпендикулярних перерізах напрямлені або до лінії перерізу січних площин, або від неї.

2.3.4. Закон Гука при деформації зсуву

Деформація зсуву призводить до перекошування прямих кутів у виділених із бруса елементарних паралелепіпедів $abcd$, в яких виникають кутові деформації. Дотичні сили, як наслідок дії дотичних напружень, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої (рис. 2.22).

Продемонструємо процес загального випадку деформації зсуву на виділеному в тілі елементарному елементі $adcd$, нижню грань якого dc вважаємо умовно закріпленою (рис. 2.23).

Такий елемент можна змістити, якщо вздовж його зовнішніх протилежних граней прикласти дві пари однакових за величиною і протилежних за напрямом елементарних зусиль від дотичних напружень τ .

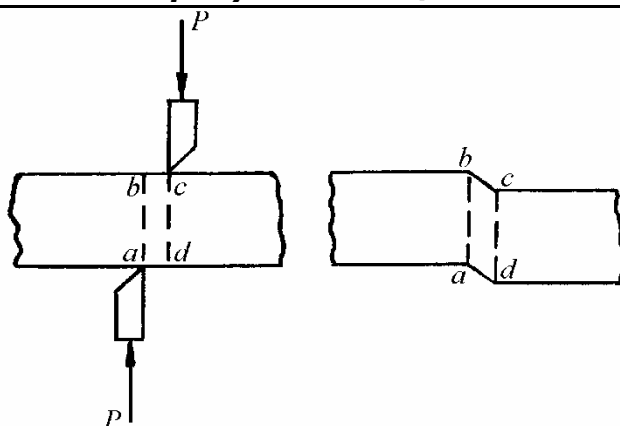


Рис. 2.22

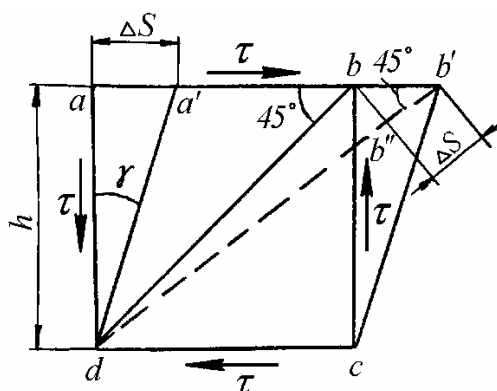


Рис. 2.23

При цьому грань ab зміститься паралельно на величину $aa' = bb' = \Delta s$, яка називається *абсолютним зсувом*. Елемент $adcd$ перекосяться і його прями кути скривляться на величину γ .

Кут γ називається кутом зсуву або відносним зсувом.

Величина відносного зсуву досить мала, тому $tg \gamma \approx \gamma$ і визначається через абсолютний зсув:

$$tg \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{h}. \quad (2.38)$$

В межах пружності матеріалу між напруженнями і деформацією при зсуві спостерігається залежність, яка аналогічна залежності при деформації розтягу (стиску):

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (2.39)$$

Вираз (2.39) називається законом Гука при деформації зсуву і формулюється так: **дотичне напруження прямо пропорційне відносному зсуву.**

Коефіцієнт пропорційності G характеризує пружні властивості матеріалу при деформації зсуву і називається *модулем зсуву* або *модулем пружності другого роду*. Модуль зсуву матеріалу знаходиться

Частина друга

експериментальним шляхом із діаграми зсуву $\gamma - \tau$ при скручуванні тонкостінної труби, коли маємо випадок, так званої, деформації чистого зсуву, який буде розглядатись далі.

Наведемо середні значення G для ряду матеріалів, МПа: сталь – $0,8 \cdot 10^5$, мідь технічна – $0,4 \cdot 10^5$, деревина вздовж волокон – $0,0055 \cdot 10^5$.

Між модулем пружності E і модулем зсуву G існує наступна залежність:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (2.40)$$

де μ – коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона).

Таблиця 2.4

Матеріал	Модуль G Н/мм ²
Сталь	$8 \cdot 10^4$
Чавун	$4,5 \cdot 10^4$
Мідь	$4,0 \cdot 10^4$
Алюміній	$2,7 \cdot 10^4$

Отже, дотичні напруження при деформації зсуву прямо пропорційні куту зсуву. Формула (2.40) виражає теоретичну залежність між модулем пружності при зсуві та модулем пружності при розтягу через коефіцієнт Пуассона. Орієнтовні значення модуля зсуву наведені у табл. 2.4.

2.3.5. Напруження в похилих перерізах при лінійному напруженому стані

Взаємодію між частинами елемента конструкції можна характеризувати величинами нормальних і дотичних напружень в кожній точці цього елемента. Ці величини залежать від напрямку перерізу, проведеного крізь цю точку.

Сукупність нормальних і дотичних напружень, діючих по всіх площадках, що проходять крізь розглядувану точку, називається **напруженим станом в цій точці**.

Розглянемо спочатку лінійний (одноосний) напружений стан призматичного бруса, який випробують на центральний розтяг рівними силами F (рис. 2.24).

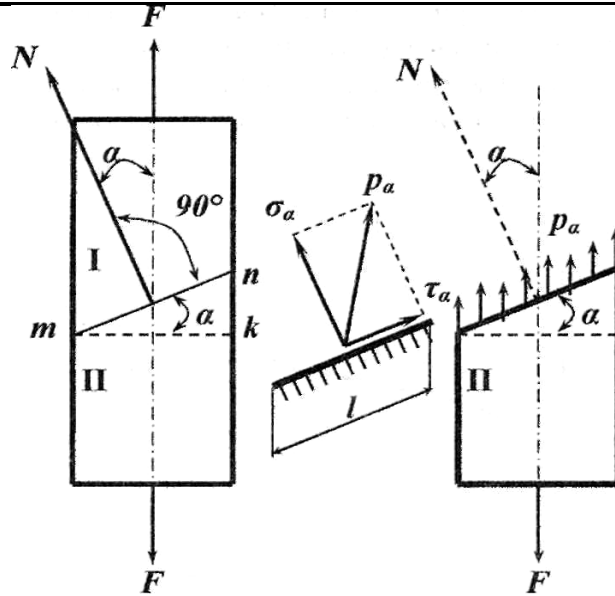


Рис. 3.24

Треба обчислити напруження, які виникають у похилому перерізі. Для цього уявно розсічено брус площиною mn , нахиленою під кутом α до нормального перерізу. Зовнішня нормаль N до проведеного перерізу складатиме з віссю бруса також кут α . Відкинемо верхню частину і замінимо її дію на нижню частину напруженнями p_α .

Умова рівноваги нижньої частини бруса

$$-F + p_\alpha A_\alpha = 0. \quad (2.41)$$

Звідси дістанемо, що напруження

$$p_\alpha = \frac{F}{A_\alpha}, \quad (2.42)$$

де A_α – площа похилого перерізу.

Із рисунка видно, що площа похилого перерізу

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}, \quad (2.43)$$

де A – площа нормального перерізу

Підставляючи значення A_α у формулу (2.42), дістанемо:

$$p_\alpha = \frac{F}{A} \cos \alpha. \quad (2.44)$$

Враховуючи, що $\sigma = \frac{F}{A}$, знаходимо:

$$p_\alpha = \sigma \cos \alpha. \quad (2.45)$$

Розкладаємо повне напруження на нормальну і дотичну складові

$$\begin{aligned}\sigma_a &= p_a \cos \alpha; \\ \tau_a &= p_a \sin \alpha.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Підставляючи значення p_a у формулу(3.46), дістанемо:

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \sigma \cos^2 \alpha; \\ \tau_a &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Наявність нормального і дотичного напружень створюють можливості для деформацій розтягу і зсуву. Для перевірки міцності матеріалу необхідно знайти найбільші величини цих напружень в залежності від напрямку площини перерізу (кута нахилу α).

При зростанні кута α від 0 до 90° нормальні напруження на площадці будуть зменшуватись від значення $\sigma_\alpha = \sigma = \sigma_{max}$ до значення $\sigma = 0$. Дотичні напруження із зміною кута α від 0 до 45° зростають від значення $\tau_a = 0$ до значення $\tau_a = \frac{\sigma}{2} = \tau_{max}$, а потім зменшуються до $\tau_a = 0$ при куті $\alpha = 90^\circ$.

Отже, при розтягу або стиску найбільші нормальні напруження виникають на площадках, перпендикулярних до осі бруса, а найбільші дотичні напруження на площадках, розміщених під кутом 45° до осі. Найбільші дотичні напруження чисельно дорівнюють половині найбільших нормальних напружень.

Напружений стан, при якому у поперечних площадках при центральному розтягу нормальні напруження є максимальними, а у подовжніх площадках – відсутні називається лінійним напруженим станом.

Проте, на практиці можливі випадки, коли елемент конструкції піддається розтягу або стиску по двох, трьох напрямках, перебуваючи в складному напруженому стані.

2.3.6. Напруження в похилих перерізах при плоскому напруженому стані

Напружений стан, при якому вектори всіх повних напружень розміщені в одній площині, називається *плоским напруженим станом*. Необхідно знайти найбільші нормальні і дотичні напруження в цій площині (рис. 2.25).

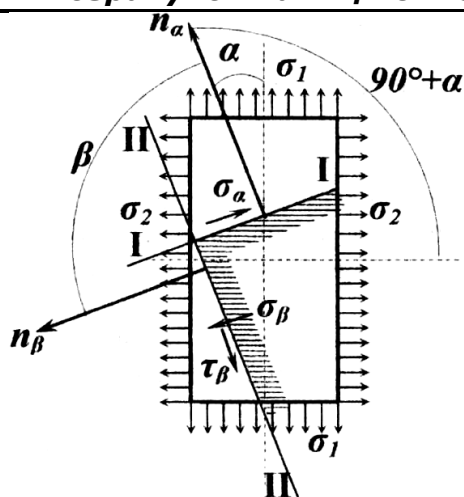


Рис. 2.25

Уявимо собі прямокутний паралелепіпед, на бокових гранях якого виникають напруження. Обидва напруження будемо вважати розтягувальними, причому $\sigma_1 > \sigma_2$. Потрібно визначити нормальні і дотичні складові в похилих перерізах.

Спочатку визначимо величину цих напружень у похилому перерізі I-I. Згідно з принципом незалежності дії сил, користуючись формулами (2.47), дістанемо:

$$\sigma_a = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (2.48)$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.49)$$

На основі формул (2.48) і (2.49) можна легко знайти величини для напружень у перерізі II-II, перпендикулярному до перерізу I-I:

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta; \quad (2.50)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta. \quad (2.51)$$

Для нашого випадку кут $\beta = 90^\circ + \alpha$. Отже,

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha. \quad (2.52)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.53)$$

Із знайдених формул для напружень, які діють у взаємно перпендикулярних перерізах, можна вивести дві важливі властивості:

1. Складаємо вирази (2.48) і (2.52):

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}. \quad (2.54)$$

Сума нормальних напружень у двох взаємно перпендикулярних перерізах є сталою величиною і дорівнює сумі головних напружень;

2. Порівнюємо формули (2.49) і (2.53):

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}. \quad (2.55)$$

Дотичні напруження у двох взаємно перпендикулярних перерізах рівні за величиною і протилежні за напрямом; це називають законом парності дотичних напружень.

Для визначення найбільших значень нормальних напружень візьмемо похідну за кутом α від виразу (3.48) і прирівняємо її до нуля.

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (2.56)$$

Звідси після перетворення дістанемо:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0. \quad (2.57)$$

Із цього виразу випливає: якщо $\alpha = 0$, то $\sigma_{\max} = \sigma_1$, якщо $\alpha = 90^\circ$, то $\sigma_{\min} = \sigma_2$.

Найбільші і найменші нормальні напруження, що виникають у взаємно перпендикулярних перерізах (площадках), які дорівнюють, відповідно, σ_1 і σ_2 , є головними.

Такі площадки, по котрих немає дотичних напружень, називають головними. Нормальні напруження по головних площадках називаються **головними напруженнями**.

Найбільше значення дотичних напружень буде при $\alpha = 45^\circ$;

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (2.58)$$

Отже, найбільші дотичні напруження рівні піврізниці головних напружень і виникають на площадках, нахилених до головних площадок під кутом 45° .

2.3.7. Про теорії міцності і руйнування

Руйнування елементів конструкцій, які працюють при складному напруженому стані, зумовлюється різними величинами головних напружень і їх співвідношенням.

Одержання механічних характеристик матеріалу для цього стану потребує в кожному конкретному випадку проведення досліджень, що ускладнює розрахунки. Крім того, проведення таких робіт завжди пов'язане з лабораторними дослідженнями.

Внаслідок цього виникла необхідність на основі лабораторних

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

випробувань лінійно-напруженого зразка визначити міцність конструктивних елементів у випадку складного напруженого стану.

Складання умов міцності елементів, які працюють у складному напруженому стані, потребує застосування деяких припущень про їх руйнування, які встановлюються на основі, так званих, теорій міцності.

Розглянемо деякі теорії міцності.

1. **Теорія найбільших нормальних напружень** (перша теорія міцності) приймає за критерій безпечності для матеріалу найбільше за абсолютною величиною нормальне напруження.

Умова міцності за цією теорією запишеться так:

$$\sigma_{F1} = \sigma_1 \leq [\sigma], \quad (2.59)$$

де σ_1 – найбільше нормальне напруження при складному напруженому стані;

$[\sigma]$ – допустиме напруження при простому розтягу.

Ця теорія дає досить задовільні результати тільки при розрахунку конструктивних елементів з крихких матеріалів. Істотним протиріччям першої теорії міцності є те, що кубик при всебічному стиску, як показали досліди, витримує набагато більші напруження, ніж при простому стиску.

2. **Теорія найбільших відносних деформацій** (друга теорія міцності) приймає за критерій безпечності для матеріалу найбільші відносні деформації.

Умову міцності за цією теорією запишемо так:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon], \quad (2.60)$$

Для загального випадку маємо:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad (2.61)$$

а для випадку простого розтягу:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}. \quad (2.62)$$

Тоді умова міцності за другою теорією остаточно набере вигляду:

$$\varepsilon_{F2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma]. \quad (2.63)$$

Ця теорія міцності для пластичних матеріалів не підтверджується дослідами, але для крихких матеріалів вона дає результати, які звичайно узгоджуються з експериментом.

3. **Теорія найбільших дотичних напружень** (третья теорія міцності) приймає за критерій безпечності для матеріалу найбільші дотичні

напруження.

Умову міцності за цією теорією запишемо так:

$$\tau_{max} \leq [\tau] \quad (2.64)$$

Запишемо вирази для i $[\tau]$ за відомими формулами: для плоского напруженого стану

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (2.65)$$

для простого розтягу

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (2.66)$$

Тоді умова міцності за третьою теорією набуде вигляду:

$$\sigma_{F3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (2.67)$$

Теорія найбільших дотичних напружень дає результати, які досить добре збігаються з дослідями, особливо для пластичних матеріалів. Звичайно, ця теорія дає змогу призначати розміри, які забезпечують достатню міцність елементів конструкцій і машин.

4. Енергетична теорія міцності (четверта теорія міцності) приймає за критерій безпечності для конструкційного матеріалу накопичену потенціальну енергію в одиниці об'єму матеріалу, яка пов'язана із зміною форми елемента за умови, що відносна зміна об'єму $\theta_v = 0$.

Умову міцності за четвертою теорією наводимо без виведення при $\mu = 0,5$.

$$\sigma_{F4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq [\sigma]. \quad (2.68)$$

Для плоского напруженого стану формула (3.68) набуде вигляду:

$$\sigma_{F4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]. \quad (2.69)$$

Енергетична теорія міцності звичайно добре узгоджується з дослідями для пластичних матеріалів. Розрахунки показують, що результати цієї теорії міцності мало відрізняються від розрахунків, які дістають за третьою теорією міцності. Тому тепер при перевірці міцності конструктивних елементів із пластичних матеріалів користуються третьою і четвертою теоріями міцності.

2.4. Деформація кручення

2.4.1. Відомості про деформацію кручення

В інженерній практиці часто приходиться зустрічатися з

деформацією кручення (рис. 2.26).

На кручення працюють вали машин і різноманітних трансмісій, пружини, вали редукторів, механічних передач тощо. Згадані елементи конструкцій, безумовно, зазнають і інших деформацій, в першу чергу згину. Проте, в цьому розділі розглядається тільки деформація кручення, а інші види деформацій відсутні.

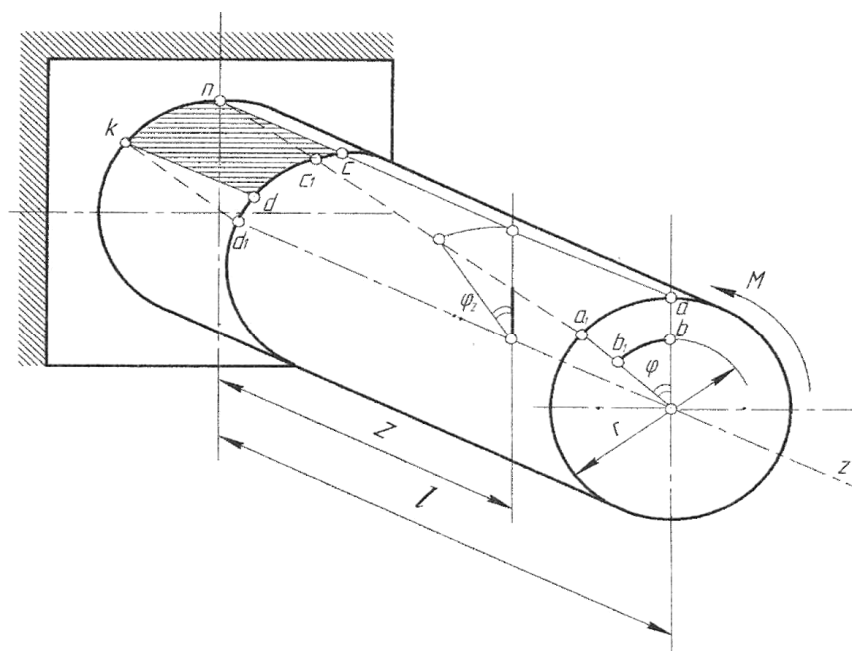


Рис. 2.26

Крученням називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент пружності, а всі інші силові фактори дорівнюють нулю.

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Оскільки на кручення працюють вали, які, звичайно, мають круглий або кільцевий переріз, то розглянемо деформацію кручення круглого циліндра.

Виготовимо з прозорого гнучкого матеріалу прямий круговий циліндричний брус і жорстко затиснемо один його кінець.

Нанесемо на поверхню циліндра сітку ліній, що складаються з твірних, кіл і частин кіл, а потім прикладемо до вільного кінця бруса пару сил в площині, перпендикулярній до осі. Брус отримає деформацію кручення. При цьому можна спостерігати таке:

1. Вісь циліндра після деформації залишається прямою;
2. Усі поперечні перерізи циліндра залишаються плоскими і після деформації;
3. Радіуси поперечних перерізів при деформації залишаються прямими;

4. Відстані між перерізами не змінюються;
5. Усі твірні циліндра повертаються на той самий кут;
6. Кожний поперечний переріз повертається один відносно одного на деякий кут, який називається кутом закручування.

Із цього можна зробити висновок, що для кручення круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів, а також припустити, що радіуси кіл залишаються під час деформації прямими.

Оскільки в поперечних перерізах бруса немає подовжніх сил, то відстані між перерізами не змінюються. Із цього випливає висновок:

деформація кручення круглого циліндра полягає у повороті поперечних перерізів одного відносно одного навколо осі кручення, причому кути повороту перерізів прямо пропорційні їх відстаням до місця закріпленого перерізу.

Кут повороту перерізу дорівнює куту закручування частини циліндра, що знаходиться між даним перерізом і закріпленням. ***Кут φ повороту кінцевого перерізу називають повним кутом закручування циліндра.***

Відносним кутом закручування θ називають відношення кута закручування φ_z до відстані z даного перерізу до місця закріплення.

Якщо брус довжиною l має сталий переріз і навантажений крутним моментом на кінці, то

$$\theta = \frac{\varphi_z}{z} = \frac{\varphi}{l} = \text{const.} \quad (2.70)$$

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні бруса, обмежений будь-якою клітинкою сітки (наприклад, $kncd$ на рис. 2.26), можна побачити, що ця клітинка при деформації перекошується (knc_1d_1).

Подібне спостерігалось під час вивчення деформації зсуву. На цій підставі можна зробити висновок, що при крученні також виникає деформація чистого зсуву, за рахунок повороту одного поперечного перерізу відносно іншого.

Отже, при крученні у поперечних перерізах виникають тільки дотичні сили пружності, які утворюють крутний момент. Крутний момент є сумарним моментом дотичних сил відносно осі бруса поперечного перерізу.

2.4.2. Епюри крутних моментів

Для наочного зображення розподілу крутних моментів у перерізах вздовж осі бруса будують епюри цих моментів. Моменти визначають за допомогою методу перерізів. Оскільки вал (брус), що рівномірно обертається, як і нерухомий, перебувають у рівновазі, то, очевидно, що моменти сил пружності, які виникають у поперечному перерізі, повинні

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

зрівноважувати зовнішні моменти, які діють на розглядувану частину бруса.

Крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів пар сил, прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.

Крученням називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент пружності, а всі інші силові фактори дорівнюють нулю.

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Оскільки на кручення працюють вали, які, звичайно, мають круглий або кільцевий переріз, то розглянемо деформацію кручення круглого циліндра.

На рис. 2.27 показано вал, до якого прикладено пари сил з моментами M_1 , M_2 , M_3 і M_4 . Тут M_1 – момент пари ведучого шківів, а M_2 , M_3 і M_4 – моменти пар ведених шківів. При рівномірному обертанні вала, а тертя в його опорах незначне, алгебраїчна сума всіх моментів, які прикладені до вала, дорівнює нулю:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0.$$

Крутний момент вважаємо **додатним**, якщо сумарний момент зовнішніх пар сил, прикладених до розглядуваної частини вала, буде напрямлений за стрілкою годинника, коли дивиться з боку перерізу, і навпаки.

Розбиваємо вісь вала на три ділянки 1, 2, 3 з межами в точках прикладання зовнішніх моментів пар. Визначимо крутні моменти в поперечних перерізах вала кожної ділянки, застосовуючи метод перерізів. При цьому будемо складати рівняння рівноваги для лівої частини вала, відкинувши праву, і використовувати прийняте правило знаків для зовнішніх моментів, що діють на цю частину.

Тоді крутний момент в будь-якому перерізі першої ділянки вала дорівнює:

$$M_{\kappa 1} = -M_4 = -200 \text{ Нм.}$$

На другій ділянці:

$$M_{\kappa 2} = -M_4 + M_1 = -200 + 600 = 400 \text{ Нм.}$$

На третій ділянці:

$$M_{\kappa 3} = -M_4 + M_1 - M_2 = -200 + 600 - 300 = 100 \text{ Нм.}$$

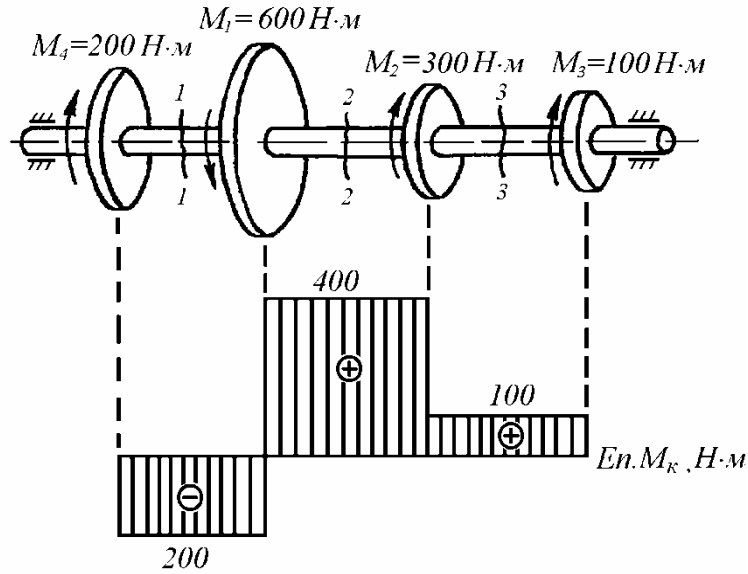


Рис. 2.27

По знайденим величинам будемо епюру крутних моментів, відкладаючи від нульової лінії у вибраному масштабі від'ємні значення вниз, а додатні – вгору.

З епюри видно, що значення ординат епюри в її крайніх точках дорівнює зовнішнім моментам пар, діючих на відповідних кінцях вала.

Діаграма, на якій зображується крива ламана лінія крутного моменту вдовж осі вала, називається епюра крутних моментів (рис. 2.27).

Розрахунковим крутним моментом буде найбільший із них за абсолютної величиною.

Часто в інженерній практиці задаються не величини пар зовнішніх моментів M_i (Нм), а потужності N_i (Вт), що передаються на вал, і кутова швидкість ω (рад/с) або частота обертання n (об/хв). Тоді обертальні моменти визначаються за відомої залежності:

$$M_i = \frac{N_i}{\omega} = \frac{30 \cdot N_i}{\pi \cdot n}. \quad (2.71)$$

2.4.3. Закон Гука для деформації кручення. Напруження і деформації кручення

Уявимо, що прямий круговий циліндр, який зазнає деформації кручення, складається з нескінченно великої кількості волокон, паралельних осі.

Знаючи, що під час кручення відбувається деформація зсуву, природно вважати, що в точках поперечного перерізу бруса виникають тільки дотичні напруження τ , перпендикулярні до радіуса, який сполучає

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

ці точки з віссю кручення. Визначимо зв'язок між дотичними напруженнями і деформацією.

Існування нормальних напружень у подовжньому перерізі виключаються, бо немає подовжньої сили. З рис. 2.26 видно, що абсолютний зсув перерізу волокна a дорівнює дузі aa_1 , а перерізу волокна b – дузі bb_1 :

$$u bb_1 = \rho\varphi, \quad u aa_1 = r\varphi,$$

де φ – повний кут закручування, рад;

r – радіус циліндра;

ρ – відстань волокна b від осі кручення.

Оскільки радіуси перерізу під час кручення залишаються прямими, то величина абсолютного зсуву перерізу волокон прямо пропорційна їх відстані до осі кручення. Відносний зсув перерізу волокна b

$$\gamma_\rho = \frac{\rho\varphi}{l} = \theta\rho. \quad (2.72)$$

Оскільки при крученні спостерігається деформація зсуву, то застосуємо формулу закону Гука для зсуву (2.39) з урахуванням виразу (2.72):

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\theta\rho. \quad (2.73)$$

Якщо $\rho=0$, то $\tau=0$, тобто, на осі кручення дотичні напруження дорівнюють нулю.

Якщо $\rho=r$, то $\tau=\tau_{max}$, тобто, дотичні напруження досягають максимальних значень у волокнах, що найбільше віддалені від осі кручення:

$$\tau_{max} = G\theta r. \quad (2.74)$$

Оскільки відносний кут закручування θ є сталою величиною для даного циліндричного бруса, то дотичні напруження при крученні прямо пропорційні відстаням точок перерізу до осі бруса. Елюра розподілу напружень вздовж радіуса перерізу згідно формули (2.73) має вигляд трикутника (рис. 2.28).

Якщо брус складається з однієї ділянки зі сталим по довжині крутним моментом, то дотичні напруження у даному волокні по всій довжині циліндра однакові.

Перейдемо до виведення формул для визначення кута закручування і напружень у поперечному перерізі залежно від крутного моменту.

Розріжемо брус, зображений на рис. 2.26, поперечною площиною, що знаходиться на відстані z від місця закріплення, і розглянемо його

Частина друга

переріз (рис. 2.28).

Виділимо у перерізі нескінченно малу площадку dA на відстані ρ від осі кручення. Сила dQ , яка діє на цю площадку, буде перпендикулярна до радіуса і дорівнюватиме

$$dQ = \tau_0 dA.$$

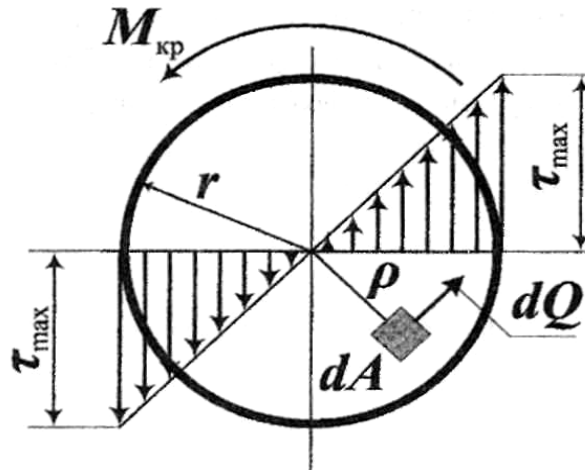


Рис. 2.28

Визначимо момент сил пружності відносно осі кручення або крутний момент:

$$M_k = \int_A dQ \rho = \int_A \tau_\rho dA = \int_A G \theta \rho dA \rho = G \theta \int_A \rho^2 dA = G \theta J_p.$$

Звідки знайдемо відносний кут закручування:

$$\theta = \frac{M_k}{G J_p}. \quad (2.75)$$

Повний кут закручування циліндра довжиною l

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p}, \text{ рад.} \quad (2.76)$$

де J_p – полярний момент інерції перерізу, м^4 ;

G – модуль пружності другого роду.

Добуток, що стоїть у знаменнику, називають кутовою жорсткістю поперечного перерізу при крученні. Її розмірність $\text{Н} \cdot \text{м}^2$.

Таким чином, повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра і обернено

пропорційний кутовій жорсткості перерізу при крученні.

Залежність (2.76) між кутовим переміщенням φ і силовим фактором M_K є лінійною. Цей вираз уявляє закон Гука при крученні.

Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок:

$$\varphi = \sum \varphi_I.$$

Загальна формула для визначення напружень у будь-якій точці перерізу, в якій діє визначений крутний момент, має вигляд:

$$\tau_\rho = G\theta\rho = \frac{GM_K\rho}{GJ_p} = \frac{M_K}{J_p}\rho. \quad (2.77)$$

Із формули (2.77) видно, що дотичні напруження у перерізі круглого вала є лінійною функцією радіуса. При цьому максимальні величини напружень спостерігаються в точках вала, найбільш віддалених від його осі при $\rho = r$.

$$\tau_{max} = \frac{M_K r}{J_p} = \frac{M_K}{\frac{J_p}{r}} = \frac{M_K}{W_p}, \quad (2.78)$$

де W_p – полярний момент опору перерізу.

Момент опору дорівнює відношенню полярного моменту інерції до радіуса перерізу. Одиниця виміру моменту опору – m^3 .

Отже, напруження і кут деформації кручення круглого циліндра обчислюють за формулами:

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_p}; \quad \varphi = \frac{M_K l}{GJ_p}.$$

Потрібно звернути увагу на те, що ці формули за структурою аналогічні формулам для обчислення напружень і деформацій розтягу і застосовні лише для ділянок бруса з однакового матеріалу, що мають постійні поперечний переріз і крутний момент вздовж всієї осі вала.

За законом парності дотичних напружень, останні виникають не тільки у поперечних, а й у подовжніх перерізах, тому, наприклад, у дерев'яних брусах під час кручення виникають тріщини вздовж волокон (деревина погано працює на сколювання вздовж волокон).

З епюри розподілу дотичних напружень при крученні (рис. 2.28)

Частина друга

видно, що внутрішні волокна бруса зазнають невеликих напружень, тому вали іноді роблять порожнистими, чим досягається зменшення матеріаломісткості при незначній втраті міцності.

Визначимо полярний момент опору крученню для круглого і кільцевого перерізів.

1. Круг діаметра d :

$$W_p = \frac{J_p}{0,5d} = \frac{\pi d^4}{30 \cdot 0,5d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

2. Кільце, що має розміри $D \times d$:

$$W_p = \frac{J_p}{0,5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{30 \cdot 0,5D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \approx \frac{0,2(D^4 - d^4)}{D}.$$

Зазначимо, що коли полярний момент інерції кільцевого перерізу можна визначити як різницю моментів інерції великого і малого кругів, то момент опору крученню не можна визначати як різницю моментів опорів цих кругів.

2.4.4. Розрахункові формули на міцність і жорсткість при крученні

Умова міцності бруса при крученні полягає у тому, що найбільші дотичні напруження, які виникають у небезпечних точках перерізу, не повинні перевищувати допустимі.

Розрахункова формула на міцність при крученні має вигляд

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau_K]. \quad (2.79)$$

Дотичні напруження у небезпечному перерізі не повинні перевищувати допустимі.

Допустимі напруження при крученні вибирають залежно від допустимого напруження для розтягу, а саме:

- сталь $[\tau_K] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma_p]$;
- чавун $[\tau_K] = (1 \dots 1,2)[\sigma_p]$;

Із формули (2.77) можна визначити полярний момент опору площі перерізу вала

$$W_p \geq \frac{M_K}{[\tau_K]}. \quad (2.80)$$

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Крім міцності до валів ставлять **вимогу жорсткості**, яка полягає у тому, що **кут закручування вала не повинен перевищувати певної величини**, щоб не сталося втрати точності або виникнення коливань передачі.

Допустимий кут закручування вала довжиною 1 м задають в градусах $[\theta] = 0,25 \dots 1 \frac{\text{град}}{\text{м}}$.

Розрахункова формула на кутову крутильну жорсткість

$$\theta_{\max} = \frac{M_K}{GJ_P} \leq [\theta]. \quad (2.81)$$

За допомогою формул (2.79), (2.80), (2.81) виконують три види розрахунків конструкцій на міцність і жорсткість при крученні:

- проектний розрахунок;
- перевірний розрахунок;
- визначення допустимого навантаження.

Наприклад, при проектному розрахунку вала на кручення може бути рекомендована наступна методика.

Маючи схему вала і схему зовнішнього навантаження, будують епюру крутних моментів пружності в перерізах по окремих ділянках вала, як показано на рис. 2.27. Далі обирають матеріал вала і приймають для цього матеріалу допустиме напруження, записують умови міцності (2.77) для ділянки вала з максимальним крутним моментом згідно епюри.

Проводячи розрахунок вала постійного перерізу по довжині, запишемо умову міцності (2.80). Тоді розрахункова формула для визначення діаметра вала має вигляд:

$$W_P = \frac{\pi d^3}{16} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_K}{\pi [\tau]}}. \quad (2.82)$$

Приклад 2.7

Визначити діаметр вала машини, що передає крутильний момент $M_K = 12 \text{ кНм}$. Допустиме напруження матеріалу вала $\tau = 2,5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$.

Для розв'язання задачі використаємо формулу (2.82).

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_K}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 12}{\pi \cdot 2,5 \cdot 10^4}} = 0,135 \text{ м} = 135 \text{ мм}.$$

Приклад 2.8

Визначити діаметр суцільного вала, зображеного на рис. 2.29, при

Частина друга

наступних величинах моментів, що передаються чотирма шківками (третій із них – ведучий): $M_1 = 900 \text{ Нм}$, $M_2 = 1200 \text{ Нм}$, $M_3 = 3000 \text{ Нм}$, $M_4 = 900 \text{ Нм}$.

Допустиме напруження $[\tau] = 3 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$. Допустимий відносний кут

скручування вала $[\theta] = \frac{\pi}{180 \cdot 4} \text{ рад/м}$. Модуль пружності сталі при зсуві

$$G = 8 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2.$$

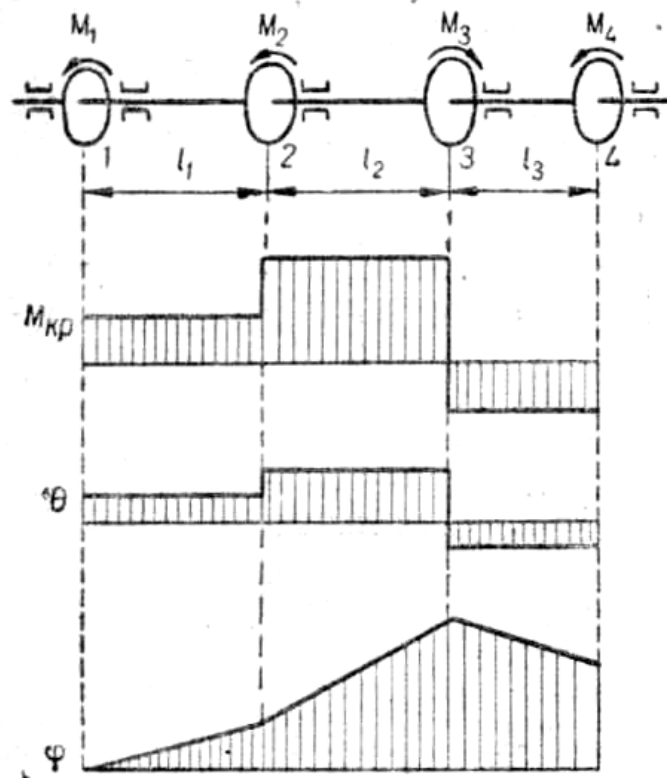


Рис. 2.29

Розв'язок

Побудуємо епюру крутних моментів M_k по окремих ділянках вала. Найбільший момент має місце на ділянці 2-3 (рис. 2.29)

$$M_{K \max} = M_1 + M_2 = 900 + 1200 = 2100 \text{ Нм}.$$

Спочатку виберемо діаметр вала за умови міцності (2.82)

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_K}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,1}{\pi \cdot 3 \cdot 10^4}} = 0,071 \text{ м} = 71 \text{ мм}.$$

Далі визначимо діаметр вала за умови крутильної жорсткості (2.81)

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_K}{G \pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,1 \cdot 180 \cdot 4}{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^7}} = 0,088 \text{ м} = 88 \text{ мм}.$$

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Із двох знайдених значень діаметра вала належить обрати більший за умови крутильної жорсткості, приймаючи $d = 90\text{мм}$.

Далі визначимо відносний кут скручування вала по окремих ділянках, користуючись формулою (2.75).

$$\theta_1 = \frac{M_1}{GJ_p} = \frac{0,9 \cdot 32}{8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot (9 \cdot 10^{-2})^4} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м};$$

$$\theta_2 = \frac{M_2}{GJ_p} = \frac{2,1 \cdot 32}{8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot (9 \cdot 10^{-2})^4} = 4,07 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м};$$

$$\theta_3 = \frac{M_3}{GJ_p} = \frac{0,9 \cdot 32}{8 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot (9 \cdot 10^{-2})^4} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м};$$

Епюра знайдених відносних кутів скручування ділянок вала показана на рис. 2.29.

На цьому ж рисунку знизу показано епюру повного кута скручування ділянок вала, обчисленого на підставі формули (2.76.)

2.4.5. Потенціальна енергія деформації при крученні

Уявимо круглий циліндричний брус сталого перерізу, жорстко закріплений одним кінцем і навантажений на другому кінці крутильним моментом, прикладеним статично, тобто, момент повільно збільшується від нуля до якогось значення M_k .

Вважаємо, що кутові деформації залишаються у межах пропорційності, підкоряючись закону Гука.

Крутильний момент викликає в брусі деформацію кручення, яка акумулюється у вигляді потенціальної енергії деформації U .

Без врахування незначної втрати енергії можна вважати, що робота моменту і потенціальна енергія деформації при крученні дорівнюють

$$A = U.$$

$$U = A = \frac{M_k \varphi}{2} = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p}, \quad (2.83)$$

де φ – повний кут закручування бруса за формулою (2.76).

Потенціальна енергія деформації при крученні може бути виражена і через кутове переміщення φ , якщо із формули (2.76) визначити спочатку крутний момент M_k

$$M_k = \frac{G J_P}{l} \varphi.$$

Підставляючи цей вираз в (2.83), дістанемо:

$$U = \frac{\varphi^2 G J_P}{2l}. \quad (2.84)$$

Із формул (2.83) і (2.84) випливає, що потенціальна енергія деформації при крученні уявляє собою квадратичну функцію силового фактора M_k або відповідного йому кутового переміщення φ .

Якщо на брус одночасно діє кілька крутильних моментів, або коли він має змінні розміри поперечного перерізу, то брус розділяють на ділянки і потенціальну енергію деформації всього бруса визначають як суму потенціальних енергій окремих ділянок.

2.5. Плоский згин прямого бруса

2.5.1. Загальні поняття про деформацію згину. Навантаження і типи опор балок

Згином називається деформація, яка супроводжується зміною кривини осі бруса (балки).

Деформація згину виникає під дією прикладених до бруса сил або пар сил, розміщених у площині, яка проходить через його подовжню вісь.

Якщо сили, прикладені до бруса, перпендикулярні до його центральної осі, то такий згин носить назву поперечного. Під дією

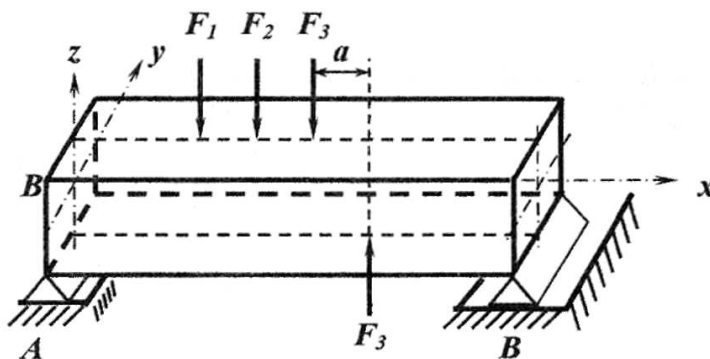


Рис. 2.30

цих сил брус згинається, а його вісь скривлюється саме в центральній площині (рис. 2.30), де розміщені центри ваги перерізів.

Брус, який піддається плоскому згину, називають балкою. Якщо прикладені сили лежать у площині (силова площина), яка проходить через подовжню вісь балки і в ній розміщується одна з головних осей інерції, то відбувається **плоский згин**.

При плоскому згині вісь бруса скривлюється у площині діючих сил. Внаслідок цього зігнута вісь балки уявляє собою плоску криву.

Майже всі балки, що зустрічаються в інженерній практиці, мають не

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

менше однієї осі симетрії, а сили, що діють на них, розташовуються в площині, яка збігається з однією з головних осей інерції.

Тому вивчення плоского згину має великий практичний інтерес, оскільки знайдені результати придатні для проектування різних елементів конструкцій і машин. Вивчення плоского згину потребує визначення:

1. рівнодійних сил пружності, які виникають у перерізі балки;
2. закону розподілу сил пружності у перерізі і виведення розрахункових формул для балок.

Балка може бути навантажена зосередженими силами і розподіленими навантаженнями.

Насправді, всі навантаження діють на певну площу. Якщо ж ця площа мала порівняно з довжиною балки, то таке навантаження можна розглядати як зосереджену силу.

Наприклад, тиск від коліс автомобіля можна вважати зосередженими силами (рис. 2.31, *а*). До розподілених навантажень належать: рівномірно розподілені навантаження (рис. 2.31, *б*), навантаження від моменту (рис. 2.31, *в*) і навантаження, розподілені за законом трикутника (рис. 2.31, *г*).

Балка чинить тиск, який виникає від дії прикладеного до неї навантаження, на інші конструктивні елементи. Внаслідок цього на опорних елементах балки виникають сили реакцій.

Визначення величин опорних реакцій є першим етапом розв'язку задачі на згин і виконується методами теоретичної механіки.

Застосування цих методів до пружних елементів можливе внаслідок того, що деформації балок незначні і вони не впливають істотно на рівновагу системи. Балки можуть мати такі опори:

- а) шарнірно-нерухому;
- б) шарнірно-рухому (коток);
- в) жорстке закріплення.

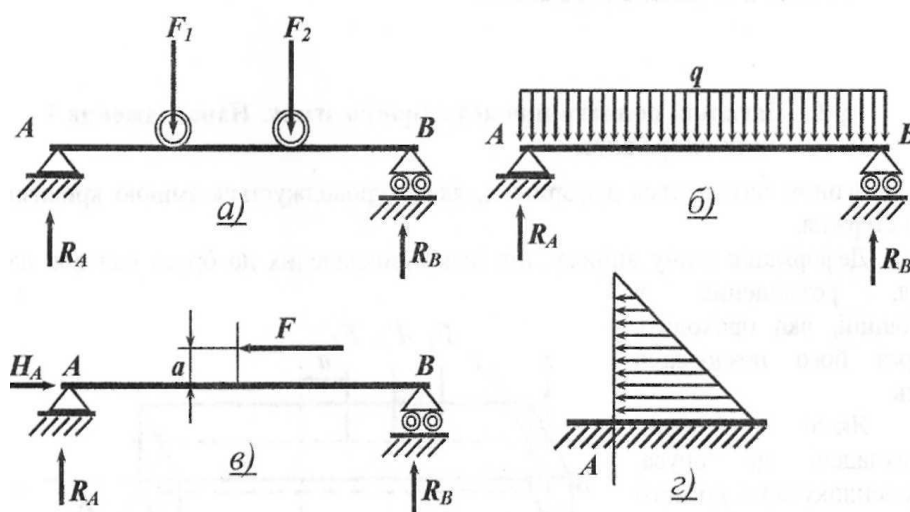


Рис. 2.31

Під дією навантаження в місці розміщення опор балки виникають певні сили реакцій, а в останній опорі і реактивний момент (див. рис. 2.31 з). Балку з одним закріпленим кінцем (другий вільний), називають *консольною балкою* або консоллю.

2.5.2. Визначення згинальних моментів і поперечних сил.

При розрахунках балок дуже корисно застосовувати одноманітну систему сил. Як відомо з курсу теоретичної механіки, будь-яка система сил, що лежить у площині, може бути еквівалентно зведена до однієї сили і до однієї пари сил.

Для цього треба навантаження і опорні реакції, що діють на балку, звести до зазначеного вище виду сил. При цьому за центр зведення сил зручно брати центр ваги розглядуваного перерізу балки, що значно спрощує визначення складових цих сил.

Систему сил, які діють на балку зліва від перерізу mn , розміщеного на відстані x від опори A (рис. 2.32), можна виразити через момент пари сил і зосереджену силу.

Для цього в даному місці прикладемо, згідно теореми Пуансо, по дві рівні і протилежно направлені сили R_A і F_I . Отже, система сил, що діє зліва від перерізу mn , зводиться до головного моменту (пари сил) і головного вектора

$$\begin{aligned}M_x &= R_A \cdot x - F_I(x - a), \\ Q_x &= R_A - F_I.\end{aligned}\tag{2.85}$$

Головний момент пари M_x називається згинальним моментом у даному перерізі, а головний вектор Q_x – поперечною силою у тому самому перерізі.

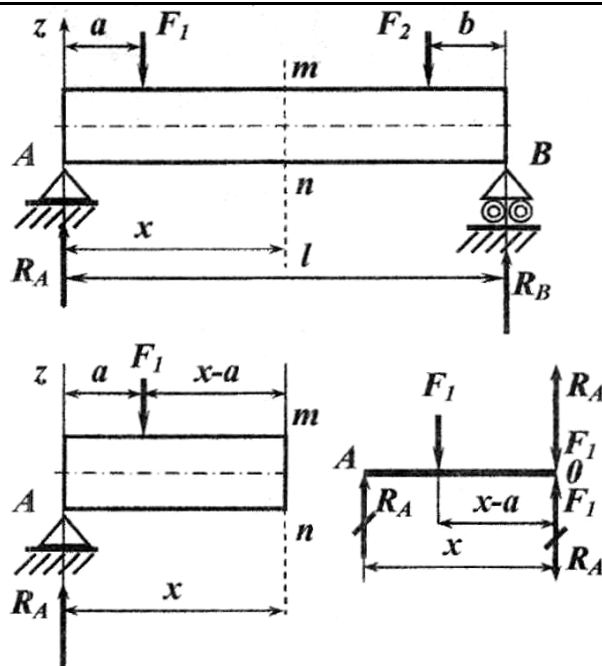


Рис. 2.32

Згинальний момент у будь-якому перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил, які діють із одного боку від проведеного перерізу балки відносно центра ваги перерізу.

Поперечна сила в будь-якому перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх зовнішніх сил, прикладених з одного боку проведеного перерізу балки на напрям площини перерізу.

Прийнято застосовувати таке правило знаків для M_x і Q_x .

1. Згинальний момент вважається додатним, якщо сумарний момент усіх сил зліва від перерізу має напрям за годинниковою стрілкою. Цей момент згинає горизонтальну балку випуклістю вниз. При згині балки в зворотному напрямі вважається, що в цьому перерізі діє від'ємний згинальний момент (рис. 2.32).

2. Поперечна сила вважається додатною, якщо сумарна проєкція всіх сил зліва від перерізу направлена вгору. При зворотному напрямі рівно дійної поперечна сила буде від'ємною (рис. 2.33).

У багатьох випадках для зменшення обсягу обчислень зручно розглядати праву частину балки замість лівої, якщо до неї прикладена менша кількість сил.

Для дотримання прийнятого вище правила знаків згинальних моментів і поперечних сил при розгляді правої частини балки слід враховувати, що:

- а) згинальний момент буде додатним, якщо він спрямований проти годинникової стрілки і згинає балку випуклістю вниз;*
- б) поперечна сила буде додатна, якщо вона направлена вниз.*

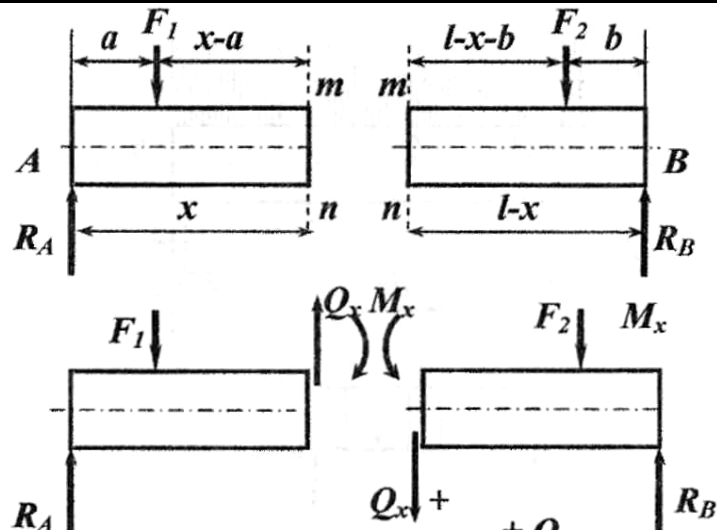


Рис. 2.33

Слід також зазначити, що прийняте правило знаків пов'язане з характером деформації балки.

2.5.3 Теорема про диференціальну залежність між згинальним моментом і поперечною силою

Нехай на балку, яка розміщена на двох опорах, діє деяка система сил (рис. 2.34).

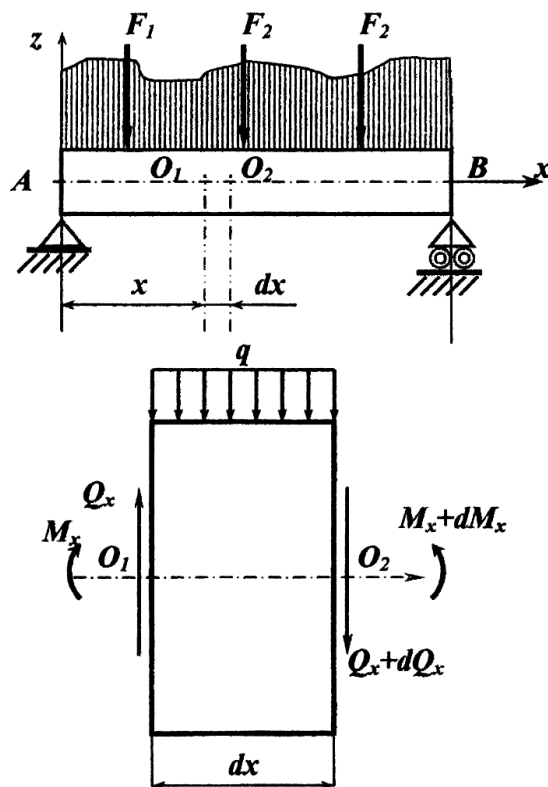


Рис. 2.34

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Виділимо на балці елементарну ділянку довжиною dx і замінимо дію відкинутих частин балки зліва і справа відповідними згинальними моментами і поперечними силами. Дію відкинутої лівої частини замінимо згинальним моментом M_x і поперечною силою Q_x які вважаємо додатними. Взаємодія справа відрізняється елементарними величинами dM_x і dQ_x .

Із умов рівноваги виділеного елемента зусилля справа повинні бути направлені в протилежну відносно M_x і Q_x сторону. Складемо рівняння рівноваги елемента балки:

$$\begin{aligned}\sum Z_k &= 0; \quad Q_x - qdx - (Q_x + dQ_x) = 0; \\ \sum M_{O_i} &= 0; \quad -M_x - q_x dx \cdot \frac{dx}{2} + (M_x + dM_x) - (Q_x + dQ_x) dx = 0. \quad (2.86)\end{aligned}$$

Із першого рівняння дістанемо:

$$q_x = \frac{-dQ_x}{dx}. \quad (2.87)$$

Похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює обраній з протилежним знаком інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження в даному перерізі.

Із другого рівняння, нехтуючи нескінченно малими величинами другого порядку мализни, матимемо:

$$Q_x dx - dM_x = 0. \quad Q_x = \frac{dM_x}{dx} \text{ або } q_x = \frac{d^2 M_x}{dx^2}. \quad (2.88)$$

Похідна від згинального моменту за абсцисою перерізу балки дорівнює поперечній силі.

Подальші побудови епюр M_x і Q_x дають наочне уявлення про цю важливу теорему при розв'язуванні задач згину.

2.5.4. Побудова епюр згинальних моментів і поперечних сил

Зусилля, які виникають у перерізі балки, залежать від величин згинальних моментів і поперечних сил. Зрівноважити момент зовнішніх сил може тільки момент сил пружності балки, утворений силами, направленими по нормалі до перерізу балки. Поперечна сила може бути урівноважена силою, яка є рівнодієюю сил пружності, розміщених у площині перерізу балки. Таким чином, нормальні напруження, які виникають у перерізі балки, залежать від величини згинального моменту, а дотичні – від величини поперечної сили. Цю залежність у загальному вигляді можна записати так:

$$\sigma=f_1(M_x); \tau=f_2(Q_x).$$

Тому при визначенні найбільш напруженого перерізу потрібно знати закони зміни згинального моменту і поперечної сили за абсцисою цього перерізу вдовж балки. Для цього будують два графіки, які дають змогу встановити закони зміни згинального моменту і поперечної сили по довжині балки. Ці графіки називають епюрами.

Порядок побудови епюр M_x і Q_x такий:

- визначають величини опорних реакцій і перевіряють правильність їх обчислень;
- ділять балку на окремі ділянки з однаковим законом зміни навантаження;
- складають рівняння для визначення значень згинальних моментів і поперечних сил на кожній ділянці. Слід пам'ятати, що на межі ділянок величини M_x і Q_x обчислені справа і зліва, повинні дорівнювати одна одній із врахуванням прикладених сил або моментів;
- обчислюють ординати M_x і Q_x за складеними для окремих ділянок рівняннями;
- будують у прийнятому масштабі епюри M_x і Q_x .

Епюру згинальних моментів будують із боку стисненого волокна.

Нульовою лінією епюри називається лінія, яка відповідає нульовим значенням M_x і Q_x . При побудові епюр поперечних сил відкладаємо вгору від нульової лінії її додатні значення, а вниз – від'ємні.

Епюри слід штрихувати лініями, перпендикулярними до осі балки, тому що вони одночасно будуть і величинами ординат згинальних моментів та поперечних сил у відповідних перерізах балки.

Для контролю правильності побудов епюр M_x і Q_x слід застосовувати вище згадану диференціальну залежність між величинами цих характеристик згину.

Геометричну інтерпретацію похідної можна уявити так: поперечна сила є тангенсом кута нахилу дотичної в епюрі M_x .

Приклад 2.9

Консольна балка навантажена зосередженою силою P , яка прикладена до вільного кінця балки (рис. 2.35).

Балка має одну ділянку довжиною l . Будуємо епюри справа наліво, взявши за початок відліку абсциси x точку B .

Розглянувши рівновагу правої частини балки, визначаємо функції $M_z(x)$ і $Q_y(x)$ на довжині $0 \leq x \leq l$:

$$Q_y(x) = P, M_z(x) = -P \cdot x.$$

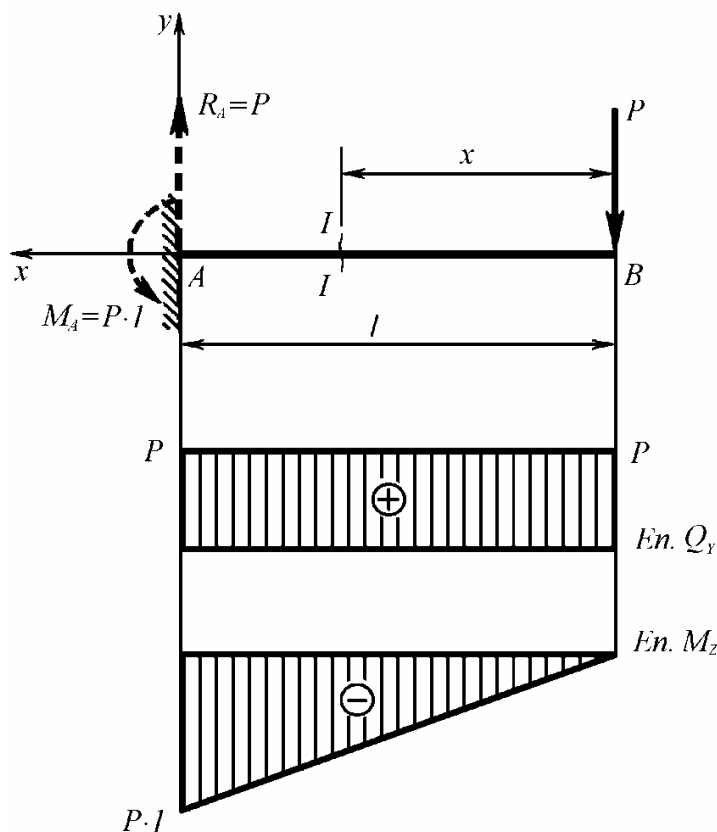


Рис. 2.35

Отже, поперечні сили в перерізах мають постійне додатне значення по довжині балки, а функція згинального моменту $M_z(x)$ є лінійною з такими значеннями в характерних перерізах:

при $x=0$ (переріз B): $M_B = -P \cdot 0 = 0$,

при $x=l$ (переріз A): $M_A = -P \cdot l$.

За отриманими даними будуюмо епюри поперечних сил і згинальних моментів (рис. 2.35). Максимальний згинальний момент – в точці A.

Приклад 2.10

На консольну балку діє рівномірно розподілене по довжині навантаження інтенсивності $q \left(\frac{\kappa H}{m} \right)$ (рис. 2.36).

Балка має одну ділянку довжиною l . Будуємо епюри справа наліво, прийнявши за початок відліку x точку B.

Розглянувши рівновагу правої частини балки, визначаємо функції $M_z(x)$ і $Q_y(x)$ на довжині $0 \leq x \leq l$:

$$Q_y(x) = -q \cdot x, \quad M_z(x) = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

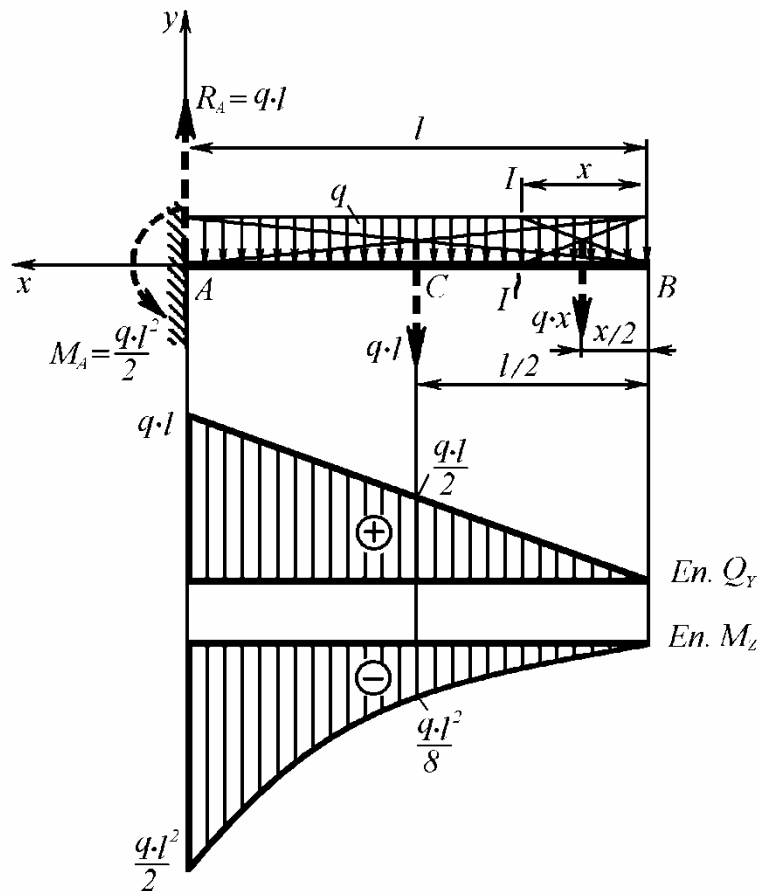


Рис. 2.36

За рівняннями поперечна сила $Q_y(x)$ змінюється за законом прямої, а згинальний момент $M_z(x)$ – за законом квадратичної параболи.

Для побудови епюри поперечних сил достатньо визначити ординати у двох характерних перерізах:

при $x=0$ (переріз B): $Q_B = -q \cdot 0 = 0$, при $x=l$ (переріз A):
 $Q_A = -q \cdot l$.

Враховуючи, що епюра згинальних моментів є кривою, для її побудови визначимо ординати в трьох поперечних перерізах:

при $x=0$ (переріз B): $M_B = 0$, при $x = \frac{l}{2}$ (переріз C): $M_C = -\frac{ql^2}{8}$,

при $x=l$ (переріз A): $M_A = -\frac{ql^2}{2}$.

За отриманими даними будуємо епюри поперечних сил і згинальних моментів (рис. 2.36).

Перейдемо до розгляду балок на двох опорах, де потрібно попередньо визначити опорні реакції.

Приклад 2.11

Двохопорна балка навантажена зосередженою силою P (рис. 2.37). Спочатку визначимо опорні реакції.

$$\sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0, \quad -R_A \cdot l + P \cdot b = 0, \quad R_A = \frac{Pb}{l},$$

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0, \quad -P \cdot a + R_B \cdot l = 0, \quad R_B = \frac{Pa}{l}.$$

В даному випадку балка має дві ділянки AC і CB із точкою C на їх границі. Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку x точку A .

Розглядаємо рівновагу лівої частини балки. На першій ділянці AC в межах значень $0 \leq x \leq a$ для довільного перерізу $I - I$:

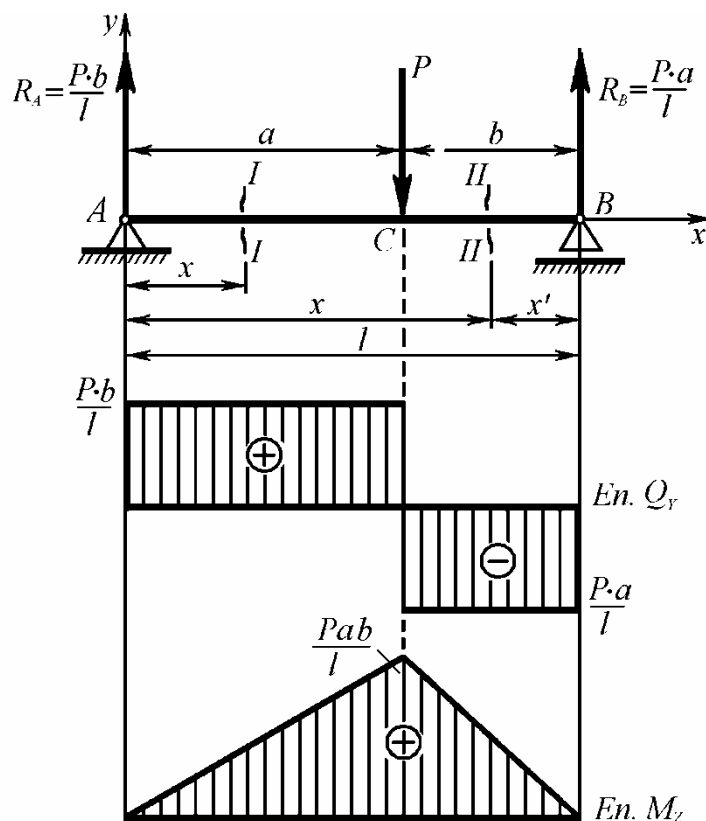


Рис. 2.37

$$Q_y^I(x) = R_A = \frac{Pb}{l} \quad M_z^I(x) = R_A \cdot x = \frac{Pb}{l} \cdot x.$$

Отже, на першій ділянці поперечні сили $Q_y^I(x)$ однакові у всіх перерізах і дорівнюють додатному значенню реакції в опорі A , їх епюра має вигляд горизонтальної прямої.

Частина друга

Епюра згинальних моментів $M_z^I(x)$ змінюється лінійно з величинами в характерних перерізах:

$$\text{при } x=0 \text{ (переріз } A): M_A=0, \text{ при } x=a \text{ (переріз } C): M_B=\frac{Pab}{l}.$$

На другій ділянці CB в межах значень $a \leq x \leq l$ для довільного перерізу $II-II$:

$$\begin{aligned} Q_y^{II}(x) &= R_A - P = \frac{Pb}{l} - P = -P \frac{l-b}{l} = -\frac{Pa}{l} \\ M_z^{II}(x) &= R_A \cdot x - P(x-a) = \frac{Pb}{l} \cdot x - P(x-a) = \\ &= \frac{P}{l}(bx - lx + la) = \frac{P}{l}(-ax + la) = \frac{Pa}{l}(l-x). \end{aligned}$$

В даному випадку функції $M_z^{II}(x)$ і $Q_y^{II}(x)$ простіше було визначати при побудові епюри на цій ділянці справа наліво із застосуванням координати довільного перерізу x' в напрямку від точки B до точки A):

$$Q_y^{II}(x') = -R_B = -\frac{Pa}{l}, \quad M_z^{II}(x') = R_B \cdot x' = R_B \cdot (l-x) = \frac{Pa}{l} \cdot (l-x).$$

На другій ділянці поперечні сили $Q_y^{II}(x)$ також постійні за величиною, але мають від'ємне значення реакції в опорі B . Згинальні моменти $M_z^{II}(x)$ змінюються лінійно, їх величини в характерних перерізах дорівнюють:

$$\text{при } x=a \text{ (переріз } C): M_C = \frac{Pa}{l}(l-a) = \frac{Pab}{l},$$

$$\text{при } x=l \text{ (переріз } B): M_B = \frac{Pa}{l}(l-l) = 0.$$

В результаті отримаємо епюри, які представлені на рис. 3.36. Епюра свідчить, що при $x=a$ функція $Q_y(x)$ має стрибок на величину зовнішньої сили P , а функція $M_z(x)$ в цьому перерізі має злам при максимальному значенні.

Приклад 2.12

Двохопорна балка навантажена зосередженою парою сил, із моментом M (рис. 2.38). Спочатку визначимо опорні реакції.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0, & -R_A \cdot l - M &= 0, & R_A &= -\frac{M}{l}, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, & -M + R_B \cdot l &= 0, & R_B &= \frac{M}{l}. \end{aligned}$$

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Отримане від'ємне значення реакції R_A вказує на те, що в дійсності вона направлена вниз. Змінюємо напрямок R_A на розрахунковій схемі балки на протилежний і приймаємо його значення додатним.

Балка має дві ділянки AC і CB із точкою C на їх границі. Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку x точку A .

Розглядаємо рівновагу лівої частини балки.

На першій ділянці AC в межах значень $0 \leq x \leq a$ для довільного перерізу $I - I$:

$$Q_y^I(x) = -R_A = -\frac{M}{l} \quad M_z^I(x) = -R_A \cdot x = \frac{M}{l} \cdot x.$$

На другій ділянці CB в межах значень $a \leq x \leq l$ для довільного перерізу $II - II$:

$$Q_y^{II}(x) = -R_A = -\frac{M}{l},$$

$$\begin{aligned} M_z^{II}(x) &= -R_A \cdot x + M = -\frac{M}{l} \cdot x + M = \\ &= \frac{Ml}{l} - \frac{M}{l}x = \frac{M}{l}(l-x). \end{aligned}$$

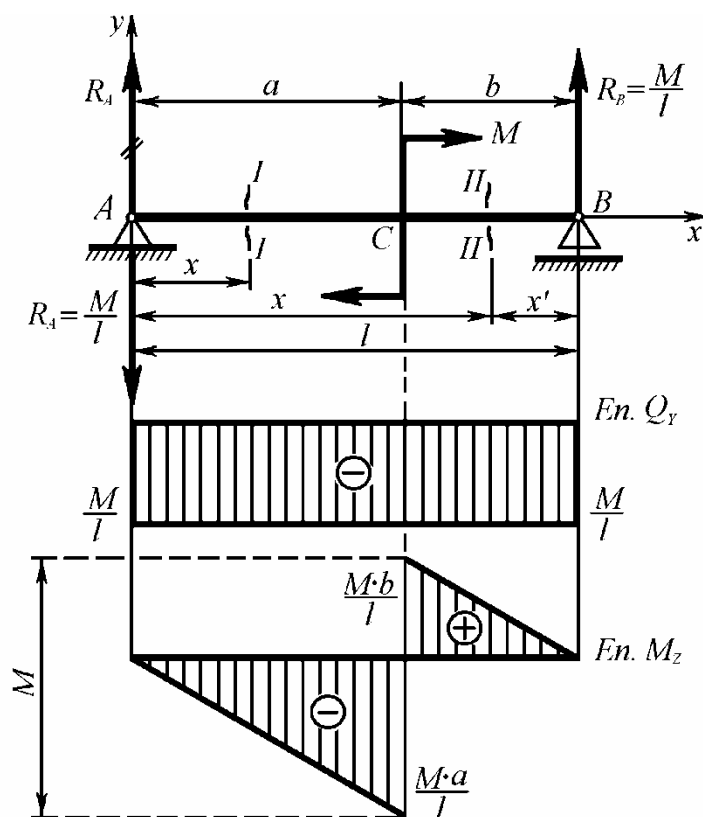


Рис. 2.38

Частина друга

Із цих виразів видно, що поперечні сили $Q_y(x)$ у всіх перерізах балки на обох ділянках мають однакове від'ємне значення. Функція згинального моменту $M_z(x)$ має лінійний характер і в характерних перерізах обох ділянок набуває наступні значення:

на першій ділянці AC ($0 \leq x \leq a$)

при $x=0$ (переріз A): $M_A=0$, при $x=a$ (переріз C): $M_C = \frac{Ma}{l}$,

на другій ділянці CB ($a \leq x \leq l$)

при $x=a$ (переріз C): $M_C = \frac{Ma}{l} + M$,

при $x=l$ (переріз B): $M_B = \frac{Ma}{l}(l-l) + M = 0$.

Епюри поперечних сил і згинаючих моментів, побудовані по отриманим значенням, показані на рис. 2.38.

Функція $M_z(x)$ в місці дії зовнішнього моменту M (при $x=a$) має стрибок на величину цього моменту.

Максимальне значення епюра згинальних моментів – в місці дії зовнішнього моменту.

Приклад 2.13

На двохопорну балку діє рівномірно розподілене по довжині навантаження інтенсивності $q \left(\frac{\kappa H}{m} \right)$ (рис. 2.39).

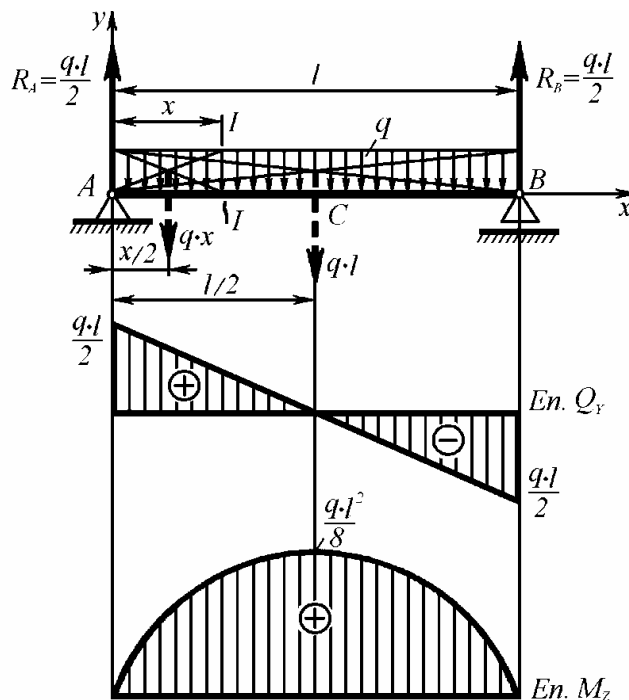


Рис. 2.39

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Визначаємо опорні реакції балки. Для цього зведемо розподілене навантаження до зосередженої сили ql , що прикладена посередині балки, і з рівнянь рівноваги для симетричної системи отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0, & -R_A \cdot l + ql \cdot \frac{l}{2} &= 0, & R_A &= \frac{ql}{2}, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, & -ql \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot l &= 0, & R_B &= \frac{ql}{2}. \end{aligned}$$

Переходимо до побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів.

Балка має одну ділянку AB довжиною l . Будуємо епюри зліва направо, прийнявши за початок відліку x точку A .

Розглянувши рівновагу лівої частини балки, визначаємо функції $M_z(x)$ і $Q_y(x)$ на довжині $0 \leq x \leq l$:

$$Q_y(x) = R_A - q \cdot x = \frac{ql}{2} - qx, \quad M_z(x) = R_A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Отже, поперечна сила $Q_y(x)$ змінюється за лінійним законом, а згинальний момент $M_z(x)$ – за законом квадратичної параболи.

Для побудови епюри поперечних сил достатньо визначити ординати у двох характерних перерізах:

$$\text{при } x=0 \text{ (переріз } A\text{): } Q_A = \frac{ql}{2}, \quad \text{при } x=l \text{ (переріз } B\text{): } Q_B = -\frac{ql}{2}.$$

Враховуючи, що епюра згинальних моментів є кривою, для її побудови визначимо ординати в трьох поперечних перерізах:

$$\text{при } x=0 \text{ (переріз } A\text{): } M_A = 0,$$

$$\text{при } x = \frac{l}{2} \text{ (переріз } C\text{): } M_C = -\frac{ql^2}{8},$$

$$\text{при } x=l \text{ (переріз } B\text{): } M_B = 0.$$

На підставі розглянутих прикладів можна визначити загальні закономірності побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів.

1. На ділянці балки, де відсутнє розподілене навантаження, епюра Q_y є прямою, яка паралельна подовжній осі балки, а епюра M_z – похила пряма.

2. В перерізі, де до балки прикладена зосереджена сила P , на епюрі Q_y буде стрибок на величину цієї зовнішньої сили, а на епюрі M_z – злам.

Частина друга

3. В перерізі, де до балки прикладена зосереджена пара сил з моментом M , на епюрі M_z буде стрибок на величину цього моменту, а на епюрі Q_y змін не буде.

4. На ділянці дії рівномірно розподіленого навантаження q епюра Q_y буде похилою прямою, а епюра M_z – параболою із випуклістю назустріч дії розподіленого навантаження.

5. Якщо на ділянці дії розподіленого навантаження q епюра Q_y перетинає базову лінію (точка, де $Q_y = 0$), то в цьому перерізі згинальний момент має екстремальне значення.

6. Згинальний момент в кінцевих перерізах балки завжди дорівнює нулю, крім випадку, коли до цього перерізу прикладена пара сил з моментом M . В такому разі згинальний момент M_z в кінцевому перерізі дорівнює моменту прикладеної пари сил.

Вказані закономірності дозволяють спростити процедуру побудови епюр у складних випадках навантаження балки і обчислювати значення епюр тільки в характерних перерізах балки.

2.5.5. Визначення нормальних напружень при згині

Над розв'язанням цього питання протягом довгого часу працювали багато видатних вчених. Перша спроба розв'язати задачу при згині брусів належить великому італійському вченому Г. Галілею (1561-1642).

Пізніше Маріотт, Лейбніц і Я. Бернуллі розглядали балку як пружне тіло і припускали, що волокна зазнають розтягу, причому нейтральним шаром є зовнішня угнута поверхня. Бернуллі ввів при вивченні згину гіпотезу плоских перерізів.

Нав'є вперше встановив правильне положення нейтральної лінії і довів аналітично, що вона проходить через центр ваги поперечного перерізу балки. Він надав сучасного вигляду формулі для визначення напружень при згині балок.

Вище зазначалося, що згинальний момент викликає в перерізі балки нормальні напруження. Тому при визначенні їх слід розглянути такий випадок навантаження, при якому в перерізах балки діятимуть тільки одні згинальні моменти, а поперечних сил не буде. Таку деформацію називають чистим згином.

Основні положення розрахунку будь-яких конструктивних елементів повинні завжди ґрунтуватись на результатах експериментальних досліджень, які проводяться на відповідних зразках у лабораторії. Експериментальні дослідження балки, яка підлягає чистому згину, дають змогу зробити такі висновки.

1. Проведені до деформації по бокових поверхнях балки дві паралельні прямі лінії, які розташовані близько одна від одної і

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

перпендикулярні до поздовжньої осі, після навантаження на балку залишаються прямими, але поверненими відносно одна одної на деякий кут $d\alpha$ (рис. 2.40 б).

2. Волокно KT вкорочується, а волокно AB видовжується (рис. 2.40 а). Отже, між цими волокнами повинні лежати волокна, видовження яких дорівнює нулю, що вказує на відсутність у них напружень. Такий шар волокон балки називається нейтральним.

3. Площа перерізу балки в стисненій зоні збільшується, а в розтягненій – зменшується (рис. 2.40 б).

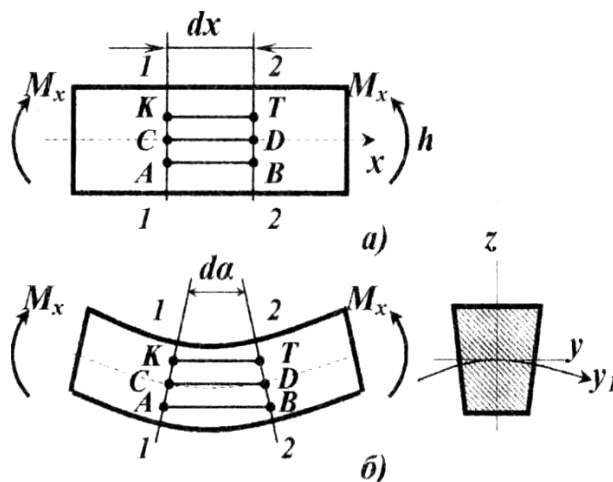


Рис. 2.40

На основі даних досліджень можна зробити такі припущення:

а) плоский поперечний переріз балки при чистому згині залишається плоским до і після деформації (гіпотеза плоских перерізів);

б) подовжні волокна під дією нормальних напружень перебувають у лінійному напруженому стані;

в) деформації волокон по ширині перерізів елемента однакові, а це дає підставу вважати, що і нормальні напруження по ширині балки також стали.

При розв'язку даної задачі треба застосувати ще такі обмеження:

1. балка повинна мати хоча б одну вісь симетрії, яка лежить у площині дії прикладених сил;

2. матеріал балки підкоряється закону Гука, крім того, модуль пружності при розтягу і стиску однаковий;

3. розмір балки має бути таким, при якому виникає тільки плоский згин без скручування і жолоблення.

Метод визначення нормальних напружень, який ґрунтується на перерахованих вище припущеннях і обмеженнях, дає достатню для інженерної практики точність при розрахунках балок на згин.

Для визначенні закону розподілу нормальних напружень уявно відокремимо від балки двома близькими перерізами 1-1 і 2-2 елементарну

Частина друга

ділянку довжиною dx і розглянемо її рівновагу (рис. 2.41).

Позначимо вісь z як лінію перетину площини згину з площиною перерізу балки. Вісь y є нейтральною, утвореною перерізом нейтрального шару з площиною перерізу балки. Вісь x взято вздовж нейтрального шару перпендикулярно до осей y і z .

У кожній точці поперечного перерізу діє лише нормальне напруження σ_2 . На елементарну площадку з координатами y і z діє сила $\sigma_2 dA$.

Запишемо рівняння рівноваги елементарної частини балки. Із шести можливих рівнянь у випадку заданого навантаження використаємо три.

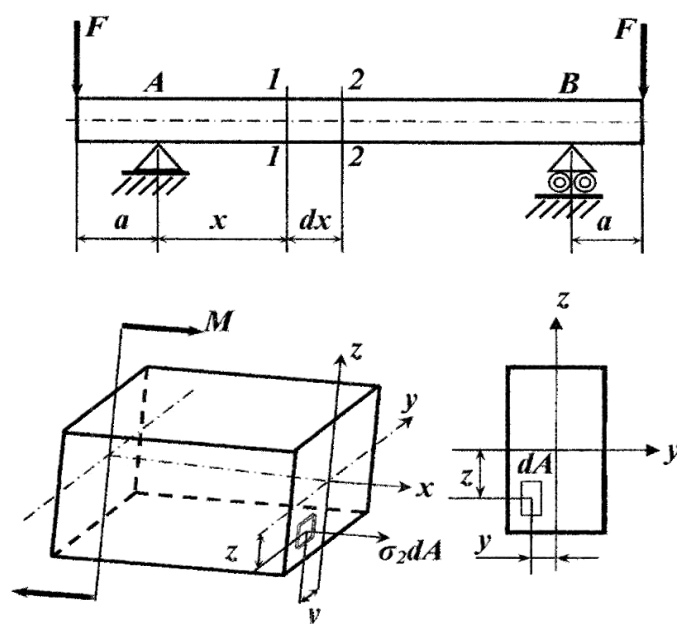


Рис. 2.41

Рівняння на підставі умов рівноваги $\sum Y = 0$ і $\sum Z = 0$ перетворюються в тотожність, тому що проекції зусилля $\sigma_2 dA$ на ці осі дорівнюють нулю. Рівняння моментів відносно осі x також перетворюються в нуль, оскільки зусилля $\sigma_2 dA$ паралельно до осі x .

$$\begin{aligned} \sum X_k = \int_A \sigma_2 dA = 0; \quad \sum M_y = \int_A \sigma_2 z dA - M = 0; \\ \sum M_z = \int_A \sigma_2 y dA = 0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Проте, трьох рівнянь рівноваги статички не досить для визначення нормальних напружень. Тому треба звернутись до розгляду деформації, яка виникає при згині балки. Виділимо двома нескінченно близькими перерізами елемент довжиною dx . Під дією навантаження балка згинається, а перерізи 1-1 і 2-2 повертаються і утворюють між собою кут $d\alpha$ (рис. 2.42).

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Волокна балки скривлюються, маючи в точці M загальний центр кривини. Слід зазначити, що волокна нейтрального шару KT , скривлюючись, зберігають при цьому свою початкову довжину. Знайдемо видовження волокна AB , розміщеного на відстані z від нейтрального шару. Довжина дуги AB дорівнює:

$$\overset{\frown}{AB} = (\rho + z) d\alpha.$$

Визначимо абсолютне видовження волокна AB , враховуючи, що початкова довжина волокон дорівнює довжині волокон нейтрального шару як до, так і після деформації самої балки.

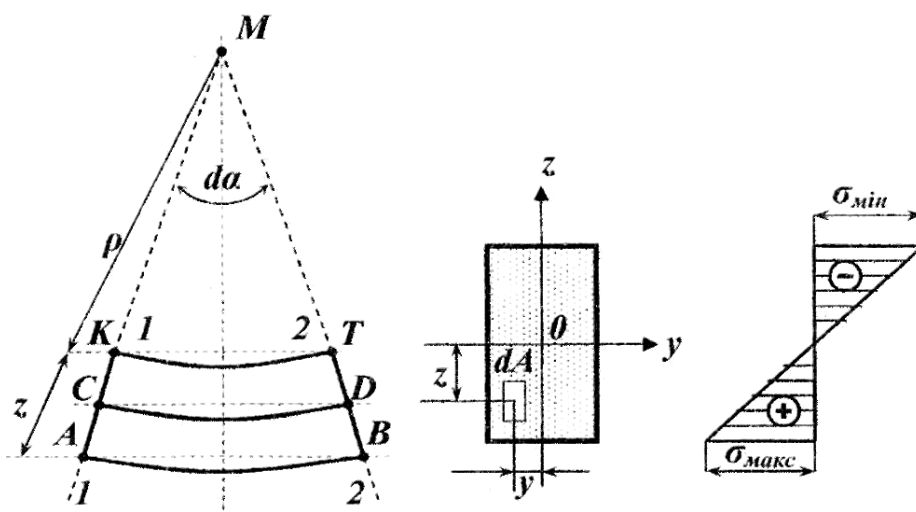


Рис. 2.42

$$\Delta l = \overset{\frown}{AB} - \overline{AB} = \overset{\frown}{AB} - \overline{KT} = (\rho + z) d\alpha - \rho d\alpha = z d\alpha. \quad (2.90)$$

Відносне видовження волокна AB буде дорівнювати:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{\overline{AB}} = \frac{z d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z}{\rho}.$$

Видовження волокон пропорційне їх відстаням до нейтрального шару. На основі другого припущення про лінійну залежність між напруженнями і деформаціями запишемо за законом Гука:

$$\sigma_2 = E\varepsilon = E \frac{z}{\rho}.$$

Звідси можна зробити висновок, що розподіл нормальних напружень по перерізу балки відбувається за лінійним законом (рис. 2.42). Підставимо значення напружень σ_2 у перше рівняння рівноваги (2.89):

$$\frac{E}{\rho} \int_A z dA = 0; \Rightarrow \int_A z dA = 0; \quad \text{оскільки } \frac{E}{\rho} \neq 0.$$

Цей інтеграл є статичним моментом площі перерізу відносно нейтральної осі. Рівність його нулю свідчить, що нейтральна вісь проходить через центр ваги перерізу. Отже, положення нейтральної осі визначено.

Із другого рівняння рівноваги (2.89) знайдемо

$$\int_A \frac{E}{\rho} z \cdot z dA = M \quad \text{або} \quad \frac{E}{\rho} \int_A z^2 \cdot dA = M,$$

де $\int_A z^2 dA$ – осьовий або екваторіальний момент інерції перерізу відносно нейтральної осі. Зробивши деякі перетворення, матимемо:

$$\frac{EI_y}{\rho} = M \quad \text{або} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{M}{I_y}. \quad (2.91)$$

Оскільки $\frac{E}{\rho} z = \sigma_z$, то остаточно будемо мати:

$$\sigma_z = \frac{M}{I_y} z. \quad (2.92)$$

Помноживши праву і ліву частину рівності (2.91) на z дістанемо:

$$\frac{E}{\rho} z = \frac{M}{I_y} z.$$

Нормальні напруження у будь-якій точці перерізу прямо пропорційні величині згинального моменту і відстані від даної точки до нейтральної осі та обернено пропорційні моменту інерції перерізу відносно цієї ж осі.

Підставивши значення σ_z у третє рівняння (2.89), дістанемо:

$$\int_A \frac{E}{\rho} zy dA = 0 \quad \text{або} \quad \frac{E}{\rho} \int_A zy dA = 0,$$

де $\int_A zy dA$ – відцентровий момент інерції перерізу балки.

Рівність відцентрового моменту нулю вказує на те, що переріз симетричний відносно осі z .

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Формула (2.92) свідчить, що максимальні нормальні напруження по перерізу виникають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної осі. Обчислюються вони за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_y} z_{\max} = \frac{M}{\frac{I_y}{z_{\max}}}. \quad (2.93)$$

Відношення $\frac{I_y}{z_{\max}}$ називають осьовим моментом опору при згині.

Тоді формулу (2.93) можна записати у вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_y}. \quad (2.94)$$

2.5.6. Розрахункова формула міцності балки на згин

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальне нормальне напруження в небезпечному перерізі не повинно перевищувати допустиме.

Вважаючи, що гіпотеза про не натискання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруження в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що й у випадку чистого згину. Питання, що стосуються перевірки міцності балки на дотичні напруження і розрахунку балок на жорсткість розглядатимуться у наступних параграфах.

Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{3\Gamma \max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (2.95)$$

Нормальні напруження в небезпечному перерізі, обчислені за формулою (2.95), не повинні перевищувати допустимі.

Допустиме нормальне напруження для випадку згину обирають таким самим, як для розтягу і стиску. Максимальний згинальний момент знаходять з епюр згинальних моментів або розраховують.

Оскільки осьовий момент опору деформації згину W у розрахунковій формулі стоїть у знаменнику, то ***чим більше W , тим менші розрахункові напруження.***

Визначимо моменти опору деформації згину для найбільш поширених перерізів.

1. Прямокутники зі сторонами $b \times h$ (рис. 2.43).

$$W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

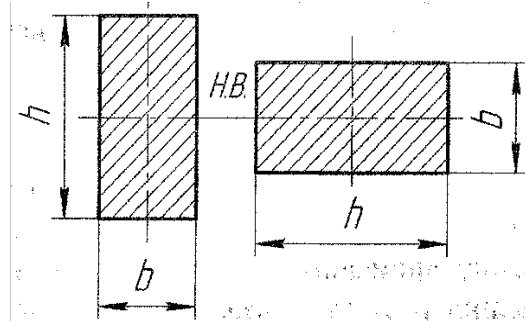


Рис. 2.43

Якщо балку прямокутного перерізу покласти плазом, то $W' = h \cdot \frac{b^2}{6}$,

$$\frac{W_{\text{ПП}}}{W'_{\text{ПП}}} = \frac{bh^2/6}{hb^2/6} = \frac{h}{b} > 1.$$

Отже, за інших рівних умов максимальні нормальні напруження σ' в прямокутній балці, яку покладено плазом, будуть більшими (мається на увазі, що згин відбувається у вертикальній площині).

Із сказаного випливає правило:

для забезпечення максимальної міцності вісь, відносно якої момент інерції максимальний, повинна бути нейтральною.

2. Круг діаметром d :

$$W = \frac{\pi d^4}{64} \div \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

3. Кільце розміром D x d :

$$W = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \div \frac{D}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Момент опору кільцевого перерізу не можна обчислювати як різницю моментів опорів великого і малого кругів.

Неважко підрахувати, що при однаковій площі поперечного перерізу, тобто однаковій витраті матеріалу; момент опору кільцевого перерізу більший ніж момент опору суцільного круглого перерізу.

Оскільки поблизу нейтральної осі матеріал зазнає незначного напруження, то вигідно більше матеріалу розміщувати далі від нейтральної осі.

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Тому в машинобудуванні рідко використовують металеві балки прямокутного перерізу, але досить широко використовують прокатні профільні балки таврового, двотаврового, кутового, швелерного й інших перерізів.

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад, чавун), доцільно використовувати профілі, несиметричні відносно нейтральної осі, наприклад таврові або П-подібні. Оскільки у несиметричного профілю під час згину виникають неоднакові напруження розтягу і стиску, то переріз, наприклад, чавунної балки вигідно розміщувати так, щоб менші напруження були в зоні розтягнутих, а більші – в зоні стиснених волокон (рис. 2.44).

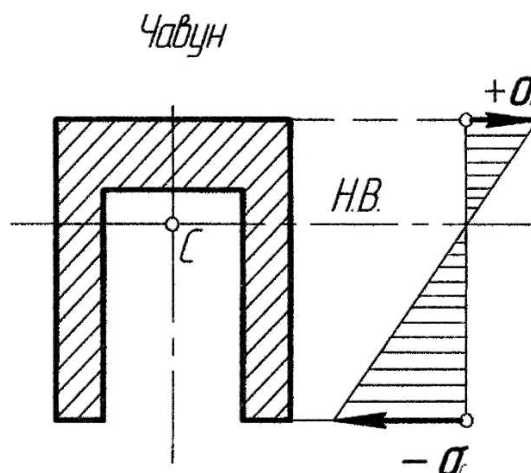


Рис. 2.44

2.5.7. Визначення дотичних напружень

При проектуванні інженерних споруд для залізниці Москва — Петербург потрібно було дослідити міцність складених балок і ферм. У зв'язку з цим головний проектувальник і будівельник інженерних споруд проф. Д.І. Журавський провів численні дослідження з питань розподілу дотичних напружень і в 1855 р. запропонував свій метод визначення цих напружень.

Як зазначалося вище, дотичні напруження, що виникають при згині, зрівноважують поперечну силу Q_x і зв'язані з нею також функціональною залежністю:

$$\tau_z = f_2(Q_x).$$

Д.І. Журавський при виведенні закону розподілу дотичних напружень по перерізу прямокутної балки застосував такі припущення:

1. дотичні напруження, що виникають при згині балки по перерізу, паралельні зрівноваженій ними силі Q_x ;
2. дотичні напруження стали по ширині перерізу балки, тобто для точок, однаково віддалених від нейтральної осі, вони рівні.

При розгляді балки, яка перебуває в стані плоского згину, уявно виділимо з неї перерізами I-I та II-II елемент шириною dx (рис. 2.45).

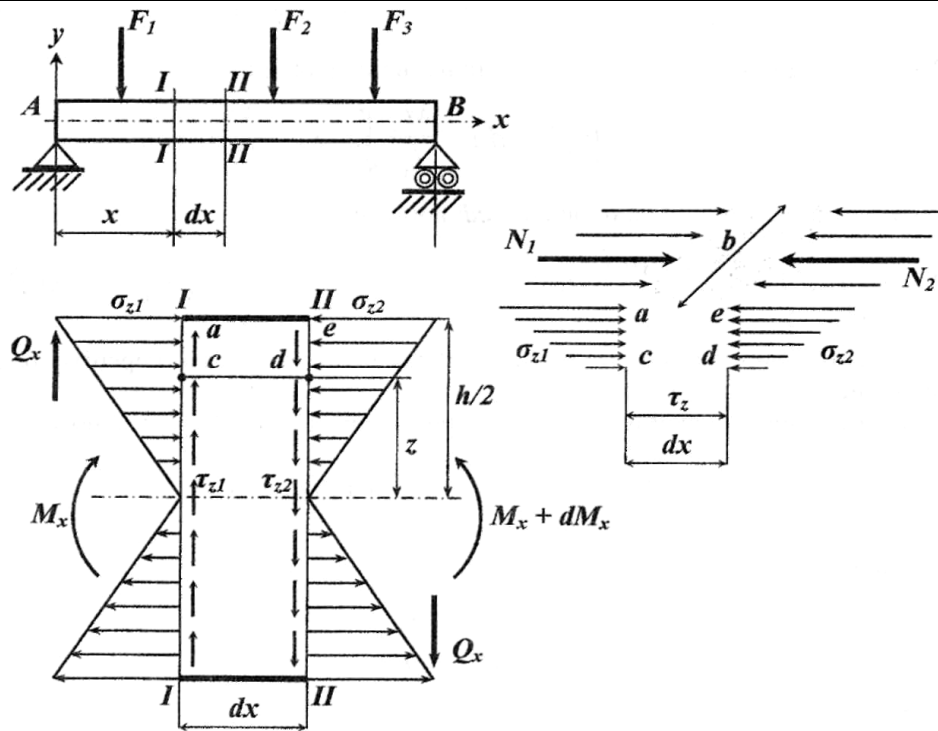


Рис. 2.45

Цей елемент розміщений на навантаженій ділянці балки і на достатній відстані від зосереджених сил. Тому по перерізах I-I та II-II діють рівні поперечні сили, які викликають однакові дотичні напруження. На вирізаний паралелепіпед діють згинальні моменти M_x і $(M_x + dM_x)$ та поперечні сили Q_x . Ці силові фактори врівноважуються дотичними і нормальними напруженнями, що виникають по перерізах I-I та II-II.

Замість розгляду дотичних напружень по зазначених вище перерізах можна на основі закону парності цих напружень визначити їх значення в площині cd .

Розглянемо рівновагу елемента $acde$ (рис. 2.45), розміри якого будуть $\frac{h}{2} - z$, b та dx .

По бічних гранях цього елемента діють зліва напруження σ_{z1} і τ_{z1} а справа σ_{z2} та τ_{z2} . По перерізу cd діють напруження τ_z , які замінюють вплив відкинutoї частини балки. Із умови рівноваги можна записати, що

$$\sum X = 0 \quad \text{тобто} \quad N_1 - N_2 + \tau_z b dx = 0, \quad (2.96)$$

де N_1 – рівнодійна всіх сил по площадці ac , що дорівнює:

$$N_1 = \int_A \sigma_{z1} dA = \int_A \frac{M_x}{I_y} z_1 dA = \frac{M_x}{I_y} \int z_1 dA = \frac{M_x}{I_y} S(z).$$

N_2 – рівнодійна всіх сил на площадці ed , що дорівнює:

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

$$N_2 = \int_A \sigma_{z2} dA = \int_A \frac{M_x + dM_x}{I_y} z_I dA = \frac{M_x + dM_x}{I_y} \int z_I dA = \frac{M_x + dM_x}{I_y} S(z),$$

$S(z)$ – статичний момент відсіченої частини поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі.

Підставивши значення N_1 і N_2 , із рівняння рівноваги (2.96) дістанемо:

$$\frac{M_x}{I_y} S(z) - \frac{M_x + dM_x}{I_y} S(z) + \tau_z b dx = 0.$$

$$\tau_z = \frac{dM_x}{dx} \cdot \frac{S(z)}{b I_y}.$$

Відомо, що $\frac{dM_x}{dx} = Q_x$, тоді остаточно матимемо:

$$\tau_z = \frac{Q_x S(z)}{b I_y}. \quad (2.97)$$

Дотичне напруження пропорційне величині поперечної сили і статичному моменту розглядуваної частини перерізу і обернено пропорційне ширині балки і моменту інерції її перерізу відносно нейтральної осі.

Статичний момент слід обчислювати для частини площі поперечного перерізу, яка лежить вище (або нижче) розглядуваного шару, відносно осі, яка проходить через центр ваги перерізу балки.

Епюру розподілу дотичних напружень τ_z по висоті перерізу балки показано на рис. 2.46.

Для прямокутного перерізу епюра τ матиме вигляд параболи (рис. 3.26 а). Найбільшого значення дотичні напруження будуть досягати в точках, які лежать на нейтральній осі. Статичний момент половини перерізу визначають за формулою

$$S_{max} = b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}.$$

Тоді максимальне дотичне напруження для цього перерізу

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{b I_y} = \frac{Q_{max} \cdot 12bh^2}{bh^3 b 8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{bh}. \quad (2.98)$$

У міру наближення до країв перерізу дотичні напруження зменшаться і для крайніх волокон дорівнюватимуть нулю. Формулу (2.98) виведено для суцільних балок прямокутного поперечного перерізу; для інших перерізів вона застосовується з деяким наближенням.

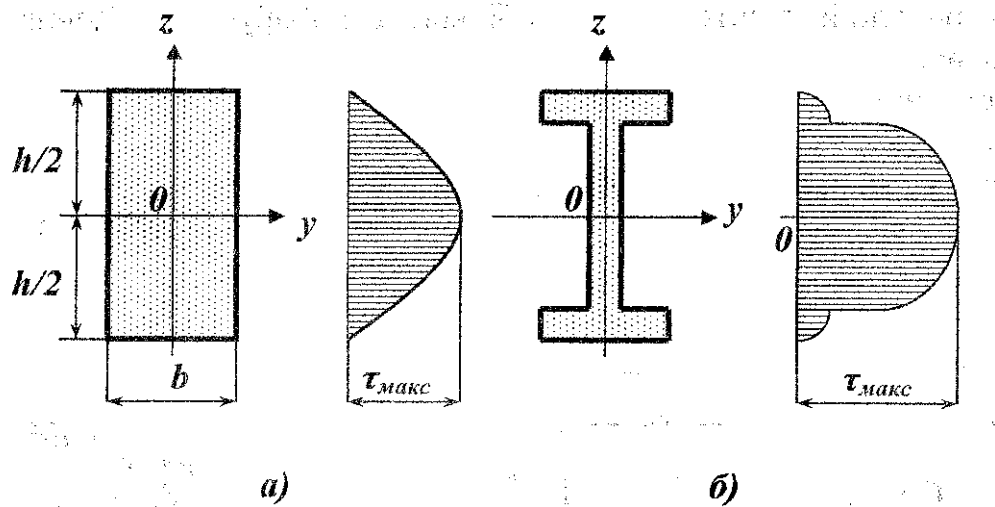


Рис. 2.46

Для двотаврового перерізу епюра дотичних напружень має вигляд параболи, круто вигнутої в середній частині, там, де ширина перерізу різко зменшується (рис. 2.46 б).

2.5.8. Визначення головних напружень при згині

Головними нормальними напруженнями називають найбільші і найменші напруження, які виникають по двох взаємно перпендикулярних площадках.

Головними площадками називають такі площадки, по яких діють головні напруження, а дотичні відсутні. Для будь-якої точки балки завжди можна вибрати дві взаємно перпендикулярні площадки, які будуть головними, причому по одній із них діють найбільші, а по другій найменші нормальні напруження.

При визначенні величини головних напружень у довільній точці A виокремлюємо елемент ACD , на який діють сили, показані на рис. 2.47.

Головні напруження σ_1 і σ_2 позначимо σ' . Площадка CD є головною, її площа дорівнює dA . Рівняння рівноваги вирізаного призми можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sigma' dA \sin \alpha - \sigma dA \sin \alpha + \tau dA \cos \alpha &= 0; \\ \sum Y = 0; \quad \sigma' dA \cos \alpha + \tau dA \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Після перетворення дістанемо:

$$\begin{aligned} (\sigma' - \sigma) \sin \alpha &= -\tau \cos \alpha; \\ \sigma' \cos \alpha &= -\tau \sin \alpha. \end{aligned}$$

Перемножуючи ліві і праві частини цих рівнянь, матимемо:

$$(\sigma' - \sigma)\sigma' = \tau^2 \quad \text{або} \quad (\sigma')^2 - \sigma\sigma' - \tau^2 = 0.$$

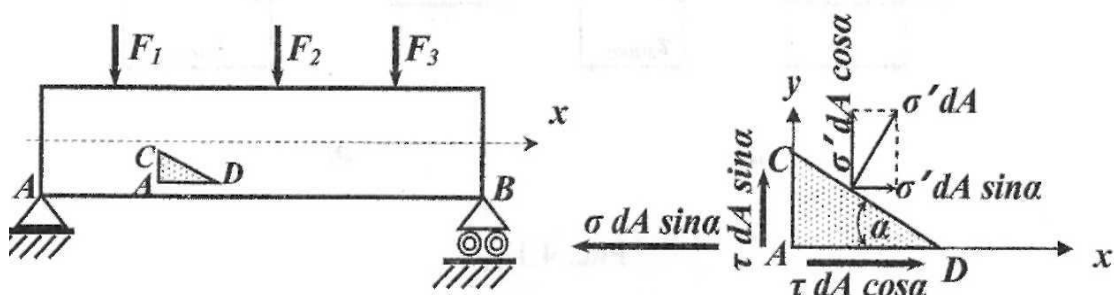


Рис. 2.47

Визначимо корені цього квадратного рівняння:

$$\sigma_{max\ min} = \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} [\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]. \quad (2.99)$$

З рівняння $\sigma' \cos \alpha = -\tau \sin \alpha$ визначимо кут нахилу головної площадки

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sigma'}{\tau}. \quad (2.100)$$

Головні напруження будуть мати найбільшу величину в точках, де одночасно нормальні і дотичні напруження досягають максимального значення.

2.5.9. Перевірка міцності балки на згин

Міцність балки при згині перевіряють за головними напруженнями. У загальному випадку умову міцності можна записати в такому вигляді:

$$\sigma' \leq [\sigma]. \quad (2.101)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження.

Як свідчить формула (2.101), міцність балки перевіряють за першою теорією міцності, хоча б можливо застосовувати третю і четверту теорії міцності. Прийняття такого способу перевірки, як показали дослідження, забезпечує достатню міцність балки і економію матеріалу.

Для крайніх волокон головні напруження дорівнюють нормальним. Дотичні напруження у цих волокнах дорівнюють нулю.

Звідси умова міцності має такий вигляд:

$$\sigma' = \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (2.102)$$

Частина друга

Для волокон, розміщених у нейтральному шарі, головні напруження за величиною дорівнюють дотичним і умова міцності для них запишеться:

$$\sigma' = \tau_{max} = \frac{M_{max} \cdot S_{max}}{b I_y}. \quad (2.103)$$

Для решти волокон балки треба спочатку обчислити дотичні і нормальні напруження за відповідними формулами, а потім перевірити їх міцність за формулою

$$\sigma_{max\ min} = \frac{1}{2} [\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}] \leq [\sigma]. \quad (2.104)$$

У балках прямокутного поперечного перерізу немає точок, в яких одночасно будуть діяти великі нормальні і дотичні напруження. Тому міцність таких балок перевіряють за формулою (2.102). У балках двотаврового поперечного перерізу в місці переходу від полиці до стінки можуть діяти одночасно великі нормальні і дотичні напруження, що зумовлює потребу перевірки міцності балки за формулою (2.104).

Отже, для перерізу балки, в якому одночасно згинальний момент і поперечна сила є досить великі, і для волокон, де ширина балки різко змінюється, міцність балки потрібно перевіряти за формулою (2.104).

2.5.10. Визначення деформацій балок при згині

Вміння визначати деформації балок при згині потрібне при розв'язанні таких важливих завдань:

1. При перевірці балок на жорсткість поперечні розміри елемента повинні не лише задовольняти умовам міцності, а й деформації його не повинні бути більшими за певну величину, без чого неможлива нормальна робота конструкції. Отже, балку слід перевірити на міцність і жорсткість.

2. При розв'язанні статично невизначених задач на згин.

3. При перевірці теоретичних пропозицій у лабораторії.

Зовнішні сили, прикладені до балки, викривлюють її прямолінійну вісь, деформують.

Зігнутою віссю або пружною лінією, називається крива, в яку перетворюється при деформації прямолінійна вісь балки. На основі прийнятої гіпотези плоских перерізів поперечні перерізи залишаються під час деформації плоскими і перпендикулярними до зігнутої осі. Тому знаходження форми зігнутої осі балки дає змогу встановити переміщення будь-якої точки даного перерізу балки.

Для цього потрібно знайти функціональну залежність прогину від положення точок по довжині балки, як рівняння пружної лінії

$$y = f(x).$$

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Приймаємо початок координат на опорі A (рис. 2.48), вісь x направляємо вздовж осі балки вправо, а вісь y – вгору.

На рис. 2.48 зображено зігнуту вісь простої балки. Центр ваги O перерізу на відстані x від опори A перемістився після деформації в точку O_1 .

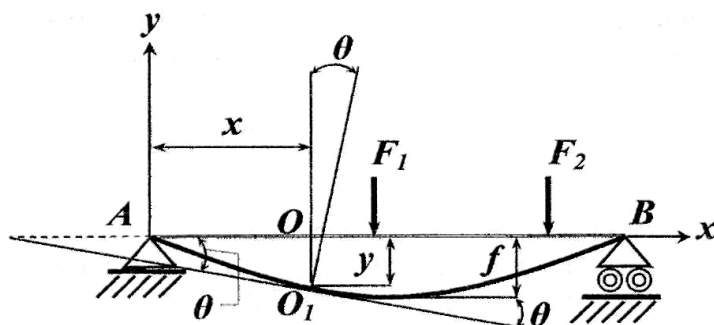


Рис. 2.48

Більшість балок, які зустрічаються в практиці, мають малу деформацію, і переміщення OO_1 можна вважати перпендикулярним до початкової осі балки. Це переміщення називається прогином.

Отже, **прогином балки** у даному перерізі називається переміщення OO_1 його центра ваги в напрямі, перпендикулярному до початкової осі балки.

Для визначення переміщення будь-якої точки балки потрібно знати, на який кут повернеться переріз після деформації.

Кутом повороту θ перерізу називається кут між його положеннями до і після деформації.

Кут між дотичною до пружної лінії у даній точці і початковою віссю балки дорівнює за величиною куту повороту цього перерізу на основі взаємної перпендикулярності їхніх сторін (рис. 3.48).

Тангенс кута повороту дорівнює для малих кутів самому куту:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \cong \theta. \quad (2.105)$$

Кут повороту перерізу дорівнює першій похідній за абсцисою x від прогину y .

При виведенні формули нормальних напружень дістали залежність (2.91):

$$\frac{l}{\rho} = \frac{M_x}{EI},$$

Частина друга

де EI – лінійна жорсткість балки при згині.

Кривина балки прямо пропорційна згинальному моменту і обернено пропорційна лінійній жорсткості балки.

З диференціального числення кривина лінії визначається так:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}.$$

Звідси можна знайти зв'язок між згинальним моментом і кривиною зігнутої осі:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} = \pm \frac{M_x}{EI}. \quad (2.106)$$

Правило визначення знака у цій формулі таке:

якщо крива своїм угнутим боком повернена у бік додатної осі Oy , треба ставити знак плюс, а якщо в бік від'ємної – мінус.

Для більшості балок кути повороту перерізів є величинами малими (біля 1°), а їх квадрати – ще меншими, і тому членом $\frac{dy}{dx}$ можна знехтувати. Тоді формулу (2.106) можна значно спростити і переписати при прийнятому напрямі осі уу такому вигляді:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI}. \quad (2.107)$$

Цей вираз є наближеним диференціальним рівнянням пружної лінії або зігнутої осі балки.

Отже, між прогином, кутом повороту, моментом, поперечною силою і інтенсивністю рівномірно розподіленого навантаження існує диференціальна залежність, яку можна записати у вигляді:

$$\theta = \frac{dy}{dx}; \quad M_x = EI; \quad Q_x = EI \frac{d^3 y}{dx^3}; \quad q_x x = EI \frac{d^4 y}{dx^4}. \quad (2.108)$$

Ці залежності називаються теоремами п'яти рядків.

Деформації балок визначають теоретичним і експериментальним

методами.

Теоретичне визначення прогинів і кутів повороту можна виконати такими методами: аналітичним, графічним, графоаналітичним, методом початкових параметрів.

Розглянемо аналітичний і графоаналітичний методи.

Аналітичний метод

Суть цього методу полягає в тому, що складається диференціальне рівняння зігнутої осі балки, а потім його безпосередньо інтегрують.

Знайдені при інтегруванні довільні сталі інтегрування визначаються з умов закріплення балки на опорах або на межах суміжних ділянок.

Для визначення кутів повороту перерізів і прогинів треба інтегрувати диференціальне рівняння зігнутої осі (2.107). У цьому рівнянні момент M_x є функцією довжини x і має однаковий закон зміни для всієї балки або для певної ділянки.

Інтегруючи рівняння (2.107), дістанемо:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M_x dx + C. \quad (2.109)$$

Інтегруємо рівняння (2.109)

$$EI y = \int dx \int M_x dx + C_x + D. \quad (2.110)$$

Звідси кут повороту визначається за формулою

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left[\int M_x dx + C \right], \quad (2.111)$$

а прогин дорівнюватиме:

$$y = \frac{1}{EI} \int dx \int M_x dx + C_x + D. \quad (2.112)$$

Довільні сталі інтегрування C , як зазначалося вище, знаходять із граничних умов.

Графоаналітичний метод

Суть цього методу полягає в тому, що епюру моментів розглядають як фіктивне розподілене навантаження. Тоді на основі теореми п'яти рядків (2.108) прогини і кути повороту перерізів балок знаходять як моменти і поперечні сили від цього фіктивного навантаження. Їх також називають фіктивними моментами M_ϕ , або фіктивними поперечними силами Q_ϕ .

Прогин балки у дорівнює фіктивному згинальному моменту, поділеному на її жорсткість EI , а кут повороту перерізу дорівнює фіктивній поперечній силі, також поділеній на жорсткість EI .

Прогин або кут повороту визначають у такій послідовності:

– для заданого навантаження будують епюру моментів; підбирають відповідну фіктивну балку;

– для перерізу, в якому треба визначити прогин, знаходять фіктивний згинальний момент i , поділивши його на жорсткість $E I$, дістають величину прогину /для цього перерізу;

– для перерізу, в якому треба знайти кут повороту, визначають фіктивну поперечну силу i , поділивши її на жорсткість $E I$, дістають кут повороту цього перерізу.

Таким чином, суть графоаналітичного методу можна виразити такими формулами:

$$y = \frac{M_{\phi}}{EI}; \quad \theta = \frac{Q_{\phi}}{EI}. \quad (2.113)$$

2.5.11. Статично невизначені балки

Щоб визначити реакції для статично невизначених балок, не досить рівнянь статики. Тому слід скласти додаткові рівняння, що виражають умови сумісності деформацій, які разом із рівняннями статики дадуть можливість визначити всі опорні реакції.

Як відомо, кількість додаткових рівнянь, потрібних для знаходження зусиль в елементах системи, дорівнює кількості зайвих зв'язків, що визначають статичну невизначеність системи.

При розрахунку статично невизначених балок доводиться складати, крім рівнянь статики, додаткові рівняння деформацій за числом зайвих в'язей, що входять до системи.

2.6. Складні деформації елементів конструкцій

У практиці більшість елементів машин і конструкцій піддаються дії сил, які зумовлюються одночасно кількома видами деформацій. Такі складні випадки напруженого стану внаслідок малих деформацій можна при розгляді звести до найпростіших, тобто, застосувати метод суперпозиції сил.

Отже, складною деформацією називають такий напружений стан конструкції, який можна замінити комбінацією найпростіших видів деформацій.

Можливі такі складні опори: косий згин, згин з одночасним розтягом

або стиском, позацентровий стиск або розтяг, кручення із згином тощо.

2.6.1. Деформація косого згину

Раніше було розглянуто прямий згин балок, при якому всі навантаження лежали в одній площині, що проходить через одну з головних осей перерізу. За такого згину вісь деформується у площині дії навантажень.

Згин, при якому площина дії навантажень не збігається з однією із головних осей перерізу, називають косим.

Розглянемо консольну балку довжиною l прямокутного перерізу, до кінця якої прикладено силу F , що утворює з віссю y кут α (рис. 2.49).

Розкладемо силу F на дві складові, напрямлені вздовж головних осей перерізу, і, користуючись принципом незалежності дії сил, зведемо косий згин до прямих згинів у двох взаємно перпендикулярних площинах.

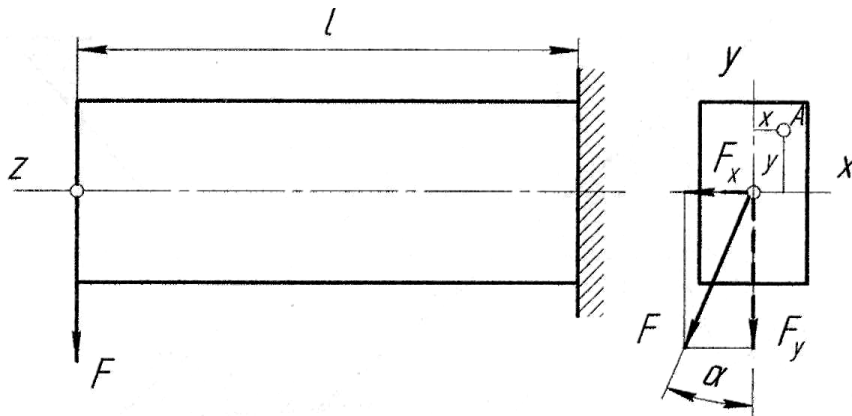


Рис. 2.49

Очевидно, що небезпечний переріз буде в закріпленні і максимальні згинальні моменти дорівнюватимуть:

$$M_{зГx} = Fl \cos \alpha, \quad M_{зГy} = Fl \sin \alpha.$$

Відповідні цим згинальним моментам нормальні напруження в якійсь точці A небезпечного перерізу обчислюють за формулами

$$\sigma_{1A} = \frac{M_{зГx}}{J_x}, \quad \sigma_{2A} = \frac{M_{зГy}x}{J_y}, \quad (2.114)$$

де x, y – поточні координати точки A ;

J_x, J_y – моменти інерції перерізу відносно нейтральних осей.

Сумарне нормальне напруження у точці A

$$\sigma_A = \sigma_{1A} + \sigma_{2A} = \frac{M_{3\Gamma x} y}{J_x} + \frac{M_{3\Gamma y} x}{J_y} = Fl \left(\frac{y \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \sin \alpha}{J_y} \right). \quad (2.115)$$

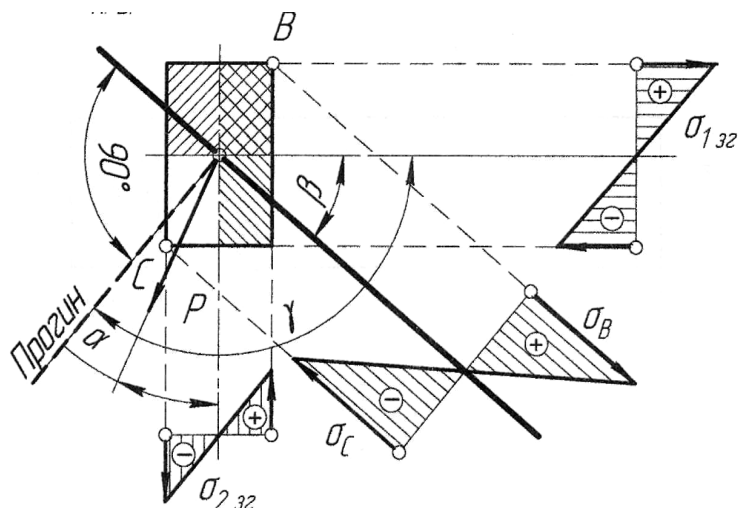


Рис. 2.50

Якщо заштрихувати в різних напрямках частини перерізу, в яких діятимуть тільки напруження розтягу σ_{132} і σ_{232} , то побачимо, що в зоні, заштрихованій в клітинку, діятимуть сумарні напруження розтягу, а в не заштрихованій – сумарні напруження стиску (рис. 2.50).

Очевидно, що максимальне напруження розтягу виникає у точці B , а максимальне напруження стиску в точці C небезпечного перерізу. Епюри нормальних напружень показано на тому самому рисунку.

Оскільки на нейтральній осі $\sigma_A = 0$, то рівняння цієї осі має вигляд

$$\frac{y \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \sin \alpha}{J_y} = 0,$$

де x, y – поточні координати точок нейтральної осі.

Із рівняння видно, що нейтральною віссю є пряма лінія, яка проходить через початок координат, тобто, через центр ваги перерізу балки. Визначимо кут β , який нейтральна вісь утворює з віссю x :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x} = \frac{-J_x \sin \alpha}{J_y \cos \alpha} = - \left(\frac{J_x}{J_y} \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.116)$$

Із цієї рівності видно, якщо $J_x \neq J_y$, то $\beta \neq \alpha$ і нейтральна вісь не перпендикулярна до лінії дії сили F .

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Користуючись принципом незалежності дії сил, визначимо напрям прогину балки під дією сили F . Прогин f_x у напрямі осі x

$$f_x = \frac{F \sin \alpha \cdot l^3}{3EJ_y}. \quad (2.117)$$

Прогин f_y у напрямі осі y

$$f_y = \frac{F \cos \alpha \cdot l^3}{3EJ_x}. \quad (2.118)$$

Сумарний прогин визначиться за формулою

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (2.119)$$

Позначивши кут між напрямом сумарного прогину і віссю x , матимемо:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{f_x}{f_y} = \frac{\frac{F \sin \alpha l^3}{3EJ_y}}{\frac{F \cos \alpha l^3}{3EJ_x}}, \quad \operatorname{ctg} \gamma = \left(\frac{J_x}{J_y} \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою для визначення tg , бачимо, що ctg і tg мають тільки різні знаки. Отже, самі кути відрізняються на кут 90° і сумарний прогин балки лежить у площині, перпендикулярній до нейтральної осі.

При косому згині площина прогину не збігається з площиною дії навантажень.

2.6.2. Деформація згину і розтягу (стиску)

Розглянемо брус довжиною l сталого поперечного перерізу, затиснутий одним кінцем і навантажений на вільному кінці довільною напрямленою силою F , яку прикладено в центрі ваги перерізу (рис. 2.51).

Розкладемо силу F на складові F_x , F_y і F_z . У результаті дії цих складових виникають одночасно деформації розтягу і поперечного згину в двох взаємно перпендикулярних площинах (дотичними напруженнями згину надалі нехтуватимемо).

Застосуємо принцип незалежності дії сил і визначимо максимальні нормальні напруження в небезпечному перерізі (закріпленні):

$$\sigma_p = \frac{F_z}{A}; \quad \sigma_{13\Gamma} = \pm \frac{F_y l}{W_x}; \quad \sigma_{23\Gamma} = \pm \frac{F_x l}{W_y}.$$

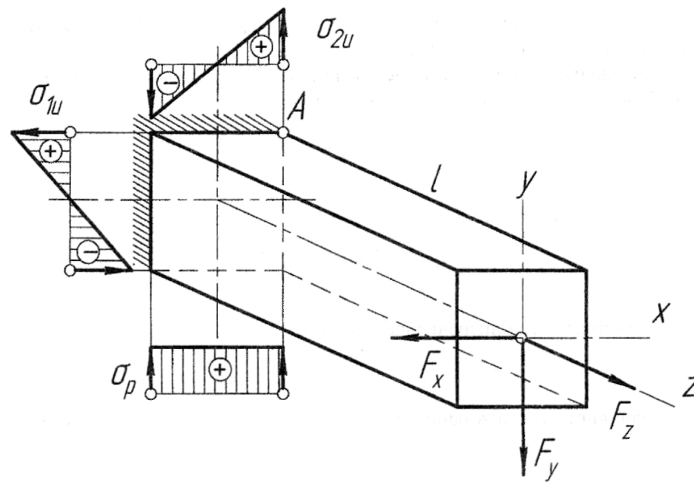


Рис. 2.51

Максимальні сумарні напруження виникнуть у точці A і будуть напруженнями розтягу

$$\sigma_{max} = \sigma_A = \frac{F_z}{A} + \frac{F_y l}{W_x} + \frac{F_x l}{W_y}. \quad (2.120)$$

Епюри нормальних напружень розтягу і згину подано на рис. 2.51. Деформації розтягу і згину поєднуються, наприклад, у гаках, гвинтах з відігнутою головкою, гвинтах слюсарних лещат тощо.

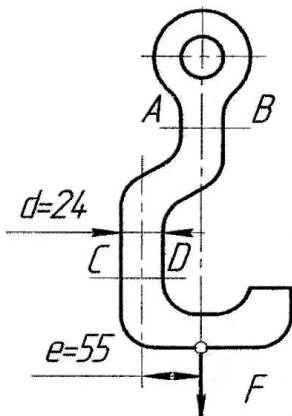


Рис. 2.52

Приклад 3.14

Визначити напруження в перерізах AB і CD сталюго гака сталого круглого перерізу (рис. 2.52) $F = 3 \text{ кН}$, розміри подано у міліметрах.

Розв'язок

Використовуючи метод перерізів, бачимо, що в перерізі AB діятиме одна поздовжня сила $N=F$. У цьому перерізі гак працює тільки на розтяг.

Обчислимо нормальне напруження;

$$\sigma_{AB} = \frac{N}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

У перерізі CD маємо поєднання згину і розтягу, згинаючий момент $M_{зг} = F \cdot e$.

Обчислимо максимальне сумарне напруження в перерізі CD . Це буде

напруження розтягу:

$$\sigma_{CD} = \sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{F \cdot e}{W}.$$

Враховуючи, що $e = 55 \text{ мм}$, а $W = 0,1 d^2$, дістаємо:

$$\sigma_{CD} = \frac{6,7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 \cdot 55 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 24^3 \cdot 10^{-9}} = 125,7 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Позацентричний стиск

Позацентричним називають такий вид деформації, при якому стисна сила паралельна осі бруса, але точка її прикладання не збігається з центром ваги перерізу (розглянуті раніше деформації були центральним стиском).

Розглянемо брус прямокутного перерізу $b \times h$ (рис. 2.53), до якого на відстані e від центральної осі прикладено паралельну їй силу F .

Застосуємо теорему статки про паралельне перенесення лінії дії сили.

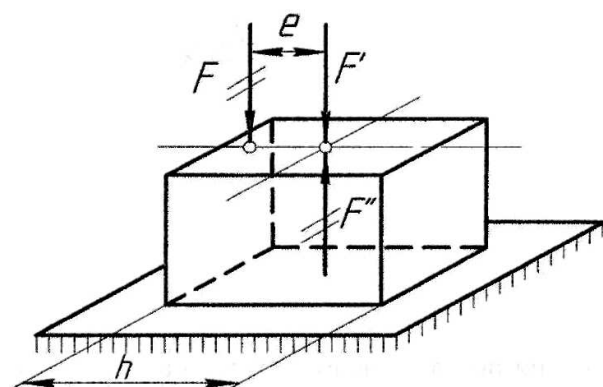


Рис. 2.53

Для цього у центрі ваги перерізу вздовж осі прикладемо дві протилежно напрямлені сили, які за модулем дорівнюють силі F .

Утворену систему трьох сил розглядатимемо як силу F , прикладену в центрі ваги, і пару сил з моментом $m = Fe$.

Користуючись принципом незалежності дії сил, позацентричний стиск розглядатимемо як **поєднання центрального стиску і чистого**

згину, причому відповідні нормальні напруження визначатимемо за формулами:

$$\sigma_c = \frac{F}{A}, \quad \sigma_{зг} = \frac{M_{зг}}{W_x},$$

а сумарні напруження – за формулою

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_{зг} = \frac{F}{A} \pm \frac{M_{зг}}{W}. \quad (2.121)$$

Максимальні сумарні напруження будуть напруженнями стиску:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W}. \quad (2.122)$$

Епюри нормальних напружень стиску, згину і сумарну епюру подано на рис. 2.54.

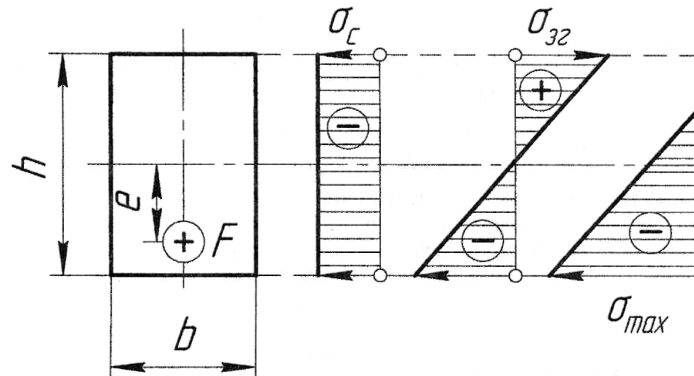


Рис. 2.54

Щоб у брусі не виникали напруження розтягу (недопустимі, наприклад, у цегляній або кам'яній кладці), має виконуватися нерівність

$$\sigma_c \geq \sigma_{zg} \quad \text{або} \quad \frac{F}{A} \geq \frac{F \cdot e}{W}, \quad \text{звідки} \quad e \geq \frac{W}{F}.$$

Для бруса прямокутного перерізу граничне значення ексцентриситету

$$e = \frac{W}{A} = \frac{bh^2}{6} \div bh = \frac{h}{6}. \quad (2.123)$$

У випадку позацентрового розтягу використовують такі ж формули, але з урахуванням знаків напружень.

2.6.3. Деформація згину і кручення

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, які, звичайно, бувають прямими брусами круглого або кільцевого перерізу.

Для розрахунку валів приймаємо до уваги тільки крутний і згинальний моменти, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

Максимальні нормальні і дотичні напруження для круглих валів обчислюють за формулами

$$\sigma = \frac{M_{3\Gamma}}{W}, \quad \tau = \frac{M_k}{W_p}, \quad (2.124)$$

причому, для круглих валів $W_p = 2W$

У випадку одночасного згину і кручення небезпечними будуть точки поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності, дістанемо:

$$\begin{aligned} \sigma_{екв} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{2W}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{3\Gamma}^2 + M_k^2}{W}}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Вираз, що стоїть у чисельнику, назвемо еквівалентним моментом:

$$M_{екв} = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + M_k^2}, \quad (2.126)$$

тоді розрахункова формула для круглих валів набуде вигляду

$$\sigma_{екв} = \frac{M_{екв}}{W} \leq [\sigma]. \quad (2.127)$$

Вали звичайно виготовляють із матеріалу, в якого $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$.

За цією формулою круглі вали розраховують як на згин, але за еквівалентним моментом.

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо:

$$\begin{aligned} \sigma_{екв} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{M_{3\Gamma}}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_k}{2W}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_{3\Gamma}^2 + 0,75 M_k^2}{W}}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Тобто, за енергетичною теорією міцності еквівалентний момент

$$M_{екв} = \sqrt{M_{3\Gamma}^2 + 0,75 M_k^2}. \quad (2.129)$$

Приклад 2.15

Перевірити міцність вала зубчастої передачі, виготовленого із сталі Ст. 4, межа текучості якої $\sigma_T = 260$ МПа.

Потужність, що передається, дорівнює $P = 40$ кВт, частота обертання

Частина друга

$n = 1000 \text{ хв}^{-1}$, допустимий коефіцієнт запасу міцності $[n] = 3$, діаметр вала $d = 35 \text{ мм}$.

Для розрахунку застосувати третю теорію міцності (на рис. 2.55, *a* розміри дано в міліметрах).

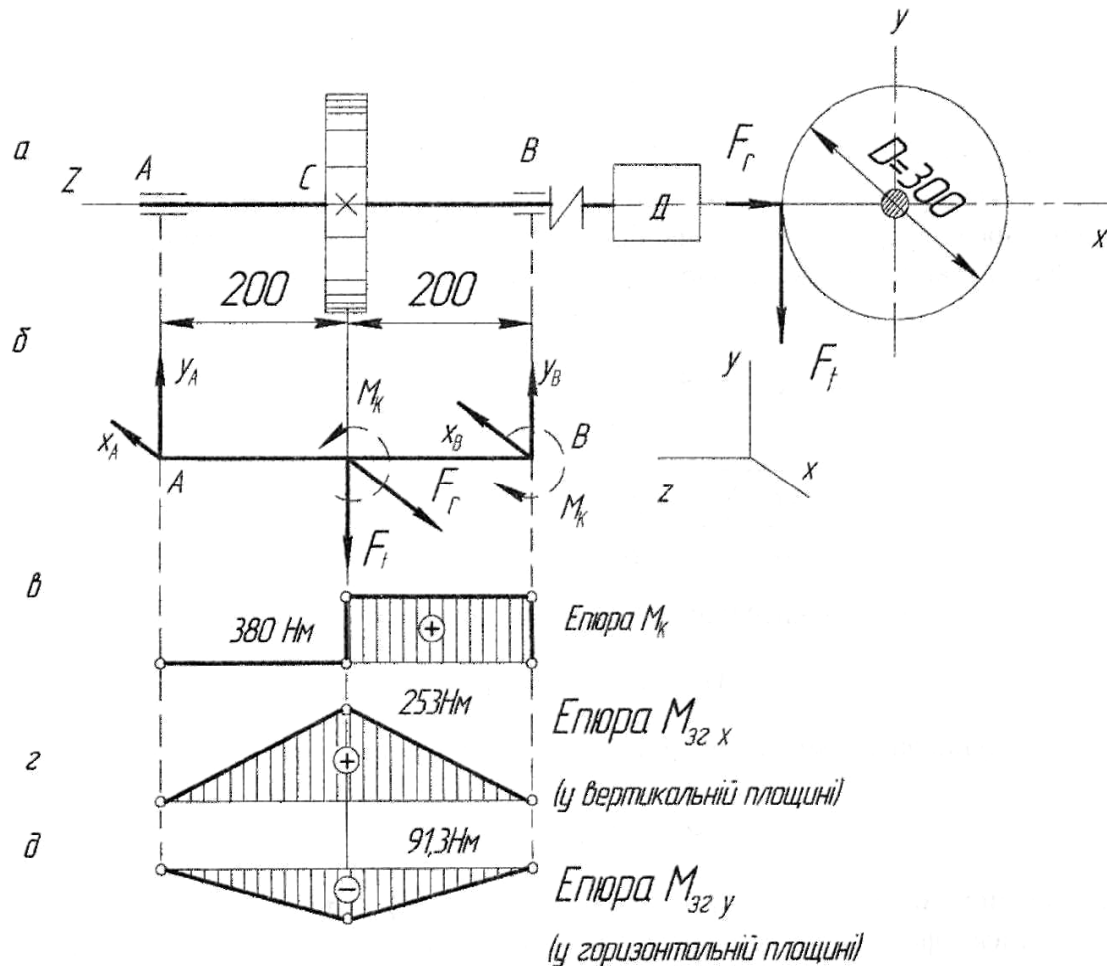


Рис. 2.55

Розв'язок

Визначимо обертальний момент, який передає вал:

$$T = \frac{P}{\omega}, \text{ де } \omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Підставляємо числові значення:

$$T = 40000 \cdot 30 / (3,14 \cdot 1000) = 380 \text{ Нм}.$$

Обертальний момент можна подати через колове зусилля F_t :

$$T = \frac{F_t D}{2}, \text{ звідки } F_t = \frac{2T}{D} = \frac{2 \cdot 380}{0,3} = 2530 \text{ Н}.$$

У зубчастих передачах діє також радіальне зусилля F_r , яке визначають із співвідношення

$$F_r = 0,36 F_t.$$

У даному прикладі

$$F_r = 0,36 \cdot 2530 = 913 \text{ Н.}$$

Зобразимо розрахункову схему вала (рис. 2.55 б).

Максимальний згинальний момент $M_{3Г}$ діє у вертикальній площині

$$M_{3Г_x} = \frac{F_t l}{4} = \frac{2530 \cdot 0,4}{4} = 253 \text{ Нм.}$$

Радіальне зусилля F_r згинатиме вал у горизонтальній площині. Максимальний згинальний момент від дії сили F_r буде на середині вала, а його значення буде

$$M_{3Г_y} = \frac{F_r \cdot l}{4} = \frac{913 \cdot 0,4}{4} = 91,3 \text{ Нм.}$$

За знайденими значеннями будемо епюри M_k ; $M_{3Г_x}$; $M_{3Г_y}$ і визначаємо положення небезпечного перерізу (рис. 2.55 в, г, д).

Із епюр видно, що небезпечний переріз знаходиться у місці закріплення зубчастого колеса.

Застосуємо третю теорію міцності; враховуючи, що $W = 0,1 d^3$, $M_k = T$, дістанемо:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\frac{253^2 + 91,3^2 + 380^2}{0,1 \cdot 35 \cdot 10^{-9}}} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па} = 109 \text{ МПа.}$$

Визначимо коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{екв}} = \frac{260}{109} = 2,38.$$

Порівнюючи знайдене значення n з допустимим коефіцієнтом запасу міцності $[n]$, бачимо, що

$$n < [n], \text{ (міцність вала недостатня).}$$

3.6.4 Деформація кручення і розтягу (стиску)

Одночасних деформацій кручення і розтягу зазнають, наприклад, болти і кріпильні гвинти, а деформацій кручення і стиску – гвинти домкратів і гвинтових пресів, свердла і шпинделі свердлильних верстатів. Ці деталі, звичайно, виготовляють з матеріалів, для яких $[\sigma_p] = [\sigma_{ск}] = [\sigma]$.

Нормальні і максимальні дотичні напруження в цих випадках

обчислюють за формулами

$$y = \frac{F}{A}, \quad \phi = \frac{M_k}{W_p}.$$

Застосувавши третю теорію міцності, знайдемо розрахункову формулу

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (2.130)$$

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (2.131)$$

2.7. Стійкість елементів конструкцій

2.7.1. Подовжній згин

У розрахунках на міцність і жорсткість, наведених у попередніх розділах, припускалося, що під час деформації конструкції між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами пружності була стійка форма рівноваги, при якій малим збурювальним діям відповідають малі відхилення статично навантаженої конструкції від початкової форми. Навантаження, при яких втрачається стійкість, називають критичними, а відповідні стани – критичними станами. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стрижнів, пластинок і оболонок. Явища втрати стійкості різноманітні. Найважливіші такі випадки прояву нестійкості:

1. виникнення якісно нових форм рівноваги;
2. зникнення стійких форм рівноваги.

Прикладом може бути центральний стиск прямого пружного стрижня. При невеликих значеннях сили стиску прямолінійна форма – єдина і притому стійка форма рівноваги; малим збудженням цієї форми, які виникають, наприклад, під час невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини. При критичному значенні сили стиску $F_{кр}$ прямолінійна форма стає нестійкою і після малих збурень стрижень набирає нової (нестійкої) форми рівноваги, якій відповідає зігнута вісь (рис. 2.56).

Критичною силою називається найбільше значення сили стиску, прикладеної центрально, вздовж осі стрижня, до якої прямолінійна форма рівноваги стрижня є стійкою.

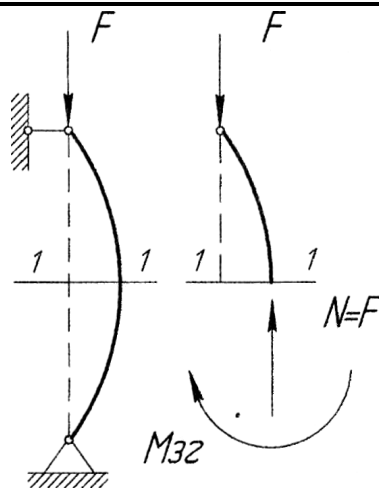


Рис. 2.56

Згин, пов'язаний із втратою стійкості стрижня прямолінійної форми, називається подовжнім згином.

Розглянемо тонкий сталевий стрижень, довжина якого значно більша за поперечні розміри, що стискається силою F , трохи більшою за $F_{кр}$ (рис. 3.56). Застосовуючи метод перерізів, упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стрижня виникають два силові фактори – подовжня сила $N = F$ і згинальний момент $M_{зг}$. Отже, викривлений стрижень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину. Якщо стискаючі сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруження згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції.

Тому критичний стан, який безпосередньо передуватиме руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв'язку з цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб сила стиску F , яка діє на стрижень, була менша за критичну $F_{кр}$.

Позначимо допустиму силу стиску $[F]$ тоді

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_{ст}]}, \quad (2.132)$$

де $[n_{ст}]$ – допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Очевидно, що стійкість стрижня достатня, якщо $[n_{ст}] > 1$.

Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стрижня і його матеріалу.

Звичайно для сталей $[n_{ст}] = 1,8 \dots 3$; для чавунів $[n_{ст}] = 5 \dots 5,5$; для

дерева $[n_{ст}] = 2,8 \dots 3,2$.

2.7.2. Формула Ейлера для критичної сили

Для розрахунків стиснених стрижнів на стійкість треба знати способи визначення критичної сили $F_{кр}$.

Вперше стійкість стиснених стрижнів досліджував академік Петербурзької Академії наук, швейцарець за походженням, Леонард Ейлер (1707-1783). Л. Ейлер, який прожив у Росії близько 30 років, залишив незгладимий слід у механіці і математиці.

Пізніше значну роботу в галузі теоретичного і експериментального дослідження питань стійкості виконав російський учений, професор Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення Ф.С. Ясинський (1856-1899), який у 1893 р. опублікував велику працю «Досвід розвитку теорії подовжнього згину».

Л. Ейлер вивів формулу для визначення величини критичної сили. Наведемо формулу Ейлера без виведення:

$$P_{кр} = \frac{p^2 EJ_{min}}{l_{зв}^2}. \quad (2.133)$$

де E – модуль пружності першого роду;

J_{min} – найменший з осевих моментів інерції перерізу, оскільки стрижень викривляється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитись, стискаючи подовжньою силою слюсарну лінійку;

$l_{зв}$ – зведена довжина стрижня:

$$l_{зв} = \mu l, \quad (2.134)$$

де l – довжина стрижня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стрижня; його інакше називають коефіцієнтом кріплення.

На рис. 2.57 зображено способи кріплення кінців стрижня, які найчастіше застосовують, і наведено значення μ :

- 1) обидва кінці стрижня закріплені шарнірно і можуть зближуватися (а);
- 2) нижній кінець жорстко закріплений, верхній – вільний (б);
- 3) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися (в);
- 4) нижній кінець закріплений жорстко, верхній – шарнірно, кінці можуть зближуватися (г);
- 5) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення (д).

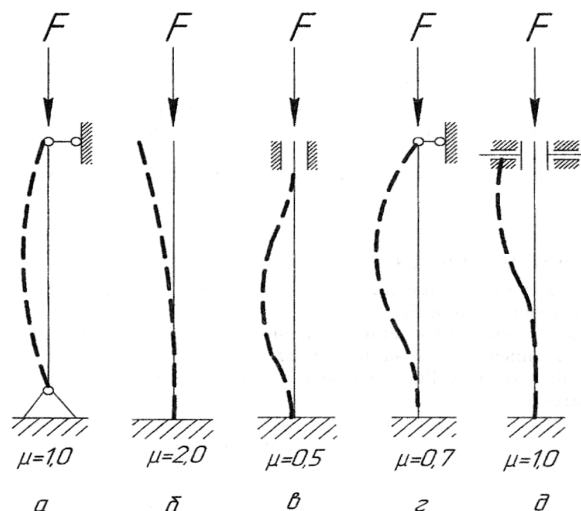


Рис. 2.57

Зазначимо, що чим менше μ , тим більша критична сила, а отже, і допустиме навантаження стиску. Наприклад, навантаження стиску стрижня, жорстко закріпленого обома кінцями ($\mu = 0,5$), може бути в 16 разів більше від навантаження стрижня, закріпленого одним кінцем ($\mu = 2$). Тому там, де це можливо, треба жорстко кріпити обидва кінці стрижня.

Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, поки напруження не перевищують границі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися не завжди.

Для визначення границь застосовності формули Ейлера знайдемо критичне напруження $\sigma_{кр}$, яке виникає в поперечному перерізі A стрижня під дією критичної сили:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2 A}. \quad (2.135)$$

Введемо поняття найменшого радіуса інерції поперечного перерізу стрижня i_{min} :

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}. \quad (2.136)$$

Перепишемо формулу для $\sigma_{кр}$ так:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \left(\frac{\mu l}{i_{min}} \right)^2$$

Вираз $\frac{\mu l}{i_{min}}$ називають гнучкістю стрижня. Це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стрижня і способу закріплення його

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (2.137)$$

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли виконується умова

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{ПЦ}.$$

де $\sigma_{ПЦ}$ – межа пропорційності матеріалу стрижня. Отже,

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{ПЦ}}}. \quad (2.138)$$

Величину, яка стоїть у правій частині нерівності, називають граничною гнучкістю і позначають $\lambda_{зр}$.

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стрижня і є сталою для даного матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді

$$\lambda \geq \lambda_{зр}.$$

Тобто, формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стрижня більша або дорівнює межі гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Обчислимо, як приклад, значення $\lambda_{зр}$ для маловуглецевої сталі Ст 3 ($\sigma_{ПЦ}=200$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

$$\lambda_{зр} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6}} = 100.$$

Для стрижнів із маловуглецевої сталі формула Ейлера застосовна, якщо їх гнучкість $\lambda > 100$. Аналогічно можна обчислити значення граничної гнучкості для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_{зр} = 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{зр} = 110$.

Якщо гнучкість стрижнів менша від наведених величин, то формула Ейлера вже не застосовна і в розрахунках користуються формулою Ясинського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (2.139)$$

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

де a і b – коефіцієнти, які залежать від матеріалу; їх беруть із довідкових таблиць. Зокрема, для сталі Ст3 при гнучкостях від $\lambda = 40 \div 100$ можна брати $a=310$ МПа, $b=1,14$ МПа.

Якщо гнучкість $\lambda < 40$, стрижні можна розраховувати на міцність при простому стисканні, не враховуючи небезпеки поздовжнього згину, тобто, за формулою $\sigma = E/A$.

Отже, при малих значеннях λ ($\lambda < 40$) стрижні із маловуглецевої сталі розраховують на просте стискання; при середніх значеннях ($40 \leq \lambda < 100$) розраховують за формулою Ясинського, а при великих ($\lambda > 100$) – за формулою Ейлера.

Зазначимо:

1) при малих значеннях λ критичне напруження $\sigma_{кр}$ дорівнює межі текучості σ_T ;

2) при середніх значеннях λ критичне напруження менше від межі текучості σ_T , але більше, ніж межа пропорційності ($\sigma_{пц} < \sigma_{кр} < \sigma_T$);

3) при великих значеннях λ критичне напруження менше від межі пропорційності.

2.7.3. Розрахунки стиснених стрижнів на стійкість

Залежно від мети розрізняють три види розрахунків на стійкість:

1. Перевірний розрахунок, коли визначають коефіцієнт запасу стійкості $n_{ст}$ і порівнюють знайдене значення з допустимим $[n_{ст}]$:

$$n = \frac{F_{ст}}{F} \geq [n_{ст}], \quad (2.140)$$

де F – діюче навантаження.

2. Визначення допустимого навантаження $[F]$:

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_{ст}]}. \quad (2.141)$$

3. Проектний розрахунок, коли визначають потрібне значення мінімального моменту інерції поперечного перерізу стрижня:

$$J \geq \frac{F \cdot [n_{ст}] \cdot (\mu l)^2}{\pi^2 E}, \quad (2.142)$$

після чого знаходять гнучкість і порівнюють її з граничною.

Розрахунок стиснених стрижнів на стійкість можна звести за формою до розрахунку на простий стиск. Розраховуючи будівельні конструкції, часто застосовують таку формулу:

$$[F] = \varphi [\sigma_{ск}] A \quad (3.143)$$

Частина друга

Тут $[\sigma_{ск}]$ – основне допустиме напруження на стиск, а φ – коефіцієнт подовжнього згину. Величина коефіцієнта φ залежить від гнучкості стрижня, його матеріалу. Для сталей його визначають з таблиць.

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стрижнів на стиск є кільцеві і коробчасті тонкостінні перерізи.

Доведено, що заміна стиснених стрижнів у вигляді кутиків і двотаврів трубчастими стрижнями дає економію матеріалу до 20... 40 %.

Приклад 2.16

Перевірити на стійкість стояк, зображений на рис. 2.58, якщо $l = 3\text{ м}$, $[n_{ст}] = 2$, матеріал стояка Ст 3, $F = 65\text{ кН}$, $d = 60\text{ мм}$.

Розв'язок

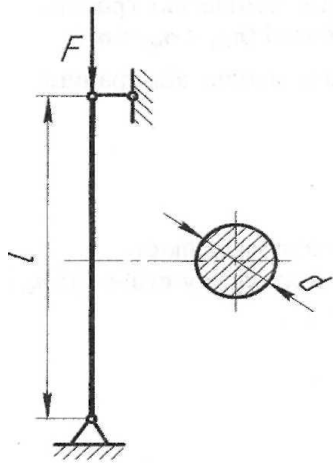


Рис. 2.58

Для заданого закріплення кінців стояка $\mu = 1$. Перевіримо застосовність формули Ейлера. Визначимо параметри для круга:

$$J_{min} = J = \frac{\pi d^4}{64}; \quad i = \sqrt{\frac{J}{A}}; \quad A = \frac{\pi d^2}{4};$$

звідки

$$i = \frac{d}{4} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{4} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Визначимо гнучкість стояка:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 3}{15 \cdot 10^{-3}} = 200 > 100,$$

отже, формула Ейлера застосовна.

Обчислимо критичну силу:

$$F = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{(1 \cdot 3)^2 \cdot 64} = 143 \text{ кН.}$$

Визначимо коефіцієнт запасу стійкості:

$$n_{ст} = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{143}{62} = 2,2 > 2,$$

отже, стійкість стояка достатня.

Приклад 2.17.

Знайти критичну силу $F_{кр}$ і допустиме навантаження $[F]$ для стояка кільцевого перерізу з сталі Ст 3 (рис. 2.59), якщо допустиме напруження на стиск $[\sigma_{ск}] = 140\text{ МПа}$.

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

Визначити, з яким коефіцієнтом запасу стійкості n_{cm} працюватиме стовп під навантаженням, яке дорівнює допустимому.

Розв'язок

Обчислюємо момент інерції кільцевого перерізу:

$$J_{min} = J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4);$$

$$J_{min} = J = \frac{3,14}{64} \left[(100 \cdot 10^{-3})^4 - (90 \cdot 10^{-3})^4 \right] = 169 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

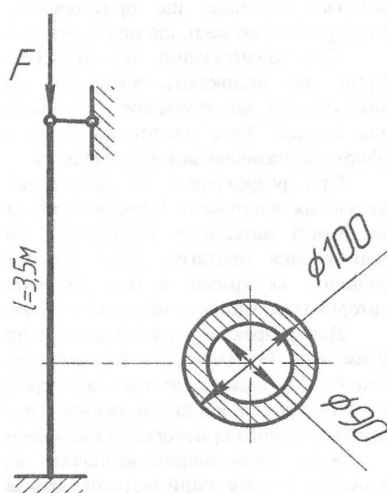


Рис. 2.59

Площа поперечного перерізу стовпа

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2);$$

$$A = \frac{\pi}{4} \left[(100 \cdot 10^{-3})^2 - (90 \cdot 10^{-3})^2 \right] = 14,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Знаходимо радіус інерції перерізу:

$$i_{min} = i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{169 \cdot 10^{-8}}{14,9 \cdot 10^{-4}}} = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для заданого способу кріплення кінців стовпа коефіцієнт зведення довжини $\mu = 0,7$.

Визначаємо гнучкість стовпа:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 3,5}{3,36 \cdot 10^{-2}} = 72,5 < 100,$$

отже, формула Ейлера незастосовна.

Обчислимо критичне напруження за формулою Ясинського.

Із довідкових таблиць знаходимо:

$$a = 310 \text{ МПа}; b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 72,5 = 227 \text{ МПа}.$$

Визначимо критичну силу:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = 227 \cdot 10^6 \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} = 340 \text{ кН.}$$

Допустиме навантаження $[F]$ визначимо за допомогою коефіцієнта подовжнього згину φ за формулою:

$$[F] = \varphi [\sigma_{ск}] A.$$

Для сталі Ст 3, коли $\lambda = 72,5$, то $\varphi = 0,795$; тоді

$$[F] = 0,795 \cdot 140 \cdot 10^6 \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} \approx 166 \cdot 10^3 \text{ Н} = 166 \text{ кН.}$$

Коефіцієнт запасу стійкості $n_{ст}$ визначаємо з співвідношення

$$n_{ст} = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{340}{166} = 2,05.$$

2.8. Напруження при динамічних навантаженнях балок

2.8.1. Деякі загальні положення

При вивченні напружень і деформацій вважали, що навантаження прикладаються статично. Як відомо, статичні навантаження поступово збільшуються від нуля до кінцевих значень і змінюють свою величину настільки повільно, що прискорення, які дістають при цьому елементи конструкцій, такі малі, що ними можна знехтувати.

При навантаженні, що швидко збільшується, слід враховувати сили інерції, які виникають внаслідок деформації системи; при дії на тіло навантаження, що зумовлює рух тіла з прискоренням, також треба врахувати сили інерції. Таке навантаження, а також спричинені ним напруження і деформації називаються динамічними.

При розрахунках на динамічне навантаження ускладнюється метод визначення напружень і деформацій, до того ж іноді змінюються механічні властивості матеріалів.

Наприклад, під час ударного навантаження (воно відбувається протягом надзвичайно короткого часу) деякі пластичні матеріали працюють як крихкі, а при дії змінного навантаження, що багаторазово повторюється, міцність матеріалів зменшується.

Для розрахунку на динамічне навантаження користуються принципом Даламбера.

Нагадаємо, що згідно з цим принципом всяке тіло, що рухається, ланка механізму, елемент конструкції можуть бути розглянуті як такі, що перебувають у стані миттєвої рівноваги, якщо до зовнішніх сил, які діють на тіло, і сил реакцій в'язей, які обмежують рух в певному напрямі, додати силу інерції, яка дорівнює добутку маси тіла на його прискорення і направлена у бік, протилежний прискоренню.

Якщо сили інерції і сили реакцій в'язей визначати важко, то для визначення динамічних напружень і деформацій застосовують закон збереження енергії.

2.8.2. Напруження при рівноприскореному русі

Якщо прискорення, з якими переміщуються деталі, відоме, то динамічні напруження обчислюються просто. Нехай вантаж F піднімається рівноприскорено на сталюму тросі з поперечним перерізом A (рис. 2.60). Об'ємну вагу матеріалу троса позначимо γ , прискорення вантажу, що піднімається – a . Визначимо напруження в перерізі троса на відстані x від нижнього його кінця.

Для цього застосуємо метод перерізів і розглянемо умови рівноваги нижньої відсіченої його частини.

Ця частина перебуває у стані руху з прискоренням, тому сила інерції, яка дорівнює добутку маси цієї частини на прискорення, буде:

$$\frac{F + \gamma Ax}{g} a,$$

де g – прискорення вільного падіння.

Таким чином, динамічне напруження $\sigma_{дин}$, що виникає в розглядуваному перерізі, дорівнюватиме:

$$\sigma_{дин} = \frac{F + \gamma Ax}{A} + \frac{F + \gamma Ax}{gA} a = \frac{F + \gamma Ax}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (2.144)$$

Як видно із цього виразу, величина $\frac{F + \gamma Ax}{g}$ є статичним напруженням $\sigma_{ст}$ у перерізі троса, з урахуванням його власної ваги, тому можна написати:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (2.145)$$

Тобто, величина динамічного напруження дорівнює статичному напруженню, помноженому на величину $1 + \frac{a}{g}$, яка називається

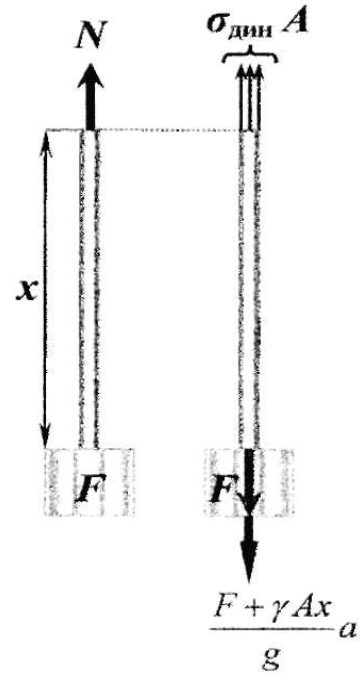


Рис. 2.60

Частина друга

коефіцієнтом динамічності $k_{\text{дин}}$. Отже, формулу (2.145) можна записати так:

$$y_{\text{дин}} = k_{\text{дин}} y_{\text{ст}}. \quad (2.146)$$

Умова міцності при динамічному навантаженні буде:

$$y_{\text{дин}} = k_{\text{дин}} y_{\text{ст}} \leq [\sigma]. \quad (2.147)$$

звідси

$$y_{\text{ст}} \leq \frac{[\sigma]}{k_{\text{дин}}}. \quad (2.148)$$

За формулою (2.145) при $a=0$ (якщо рух вантажу відбувається без прискорення) динамічні напруження дорівнюють статичним у випадку рівномірного прямолінійного руху: тоді напруження у перерізах троса будуть саме такими, як і при нерухомому вантажі.

Із викладеного видно, що динамічний розрахунок можна замінити статичним, якщо зменшити допустиме напруження, поділивши його на коефіцієнт динамічності.

2.8.3. Розрахунок на удар

Якщо швидкість елемента конструкції або частин, що з ним стикаються, змінюється за дуже короткий відрізок часу, відбувається явище удару. Завдяки великому прискоренню чи миттєвому сповільненню виникає значна сила інерції, величина якої визначає силу удару.

На нерухомо закріплену пружну систему (рис. 3.61) з деякої висоти h падає вантаж F .

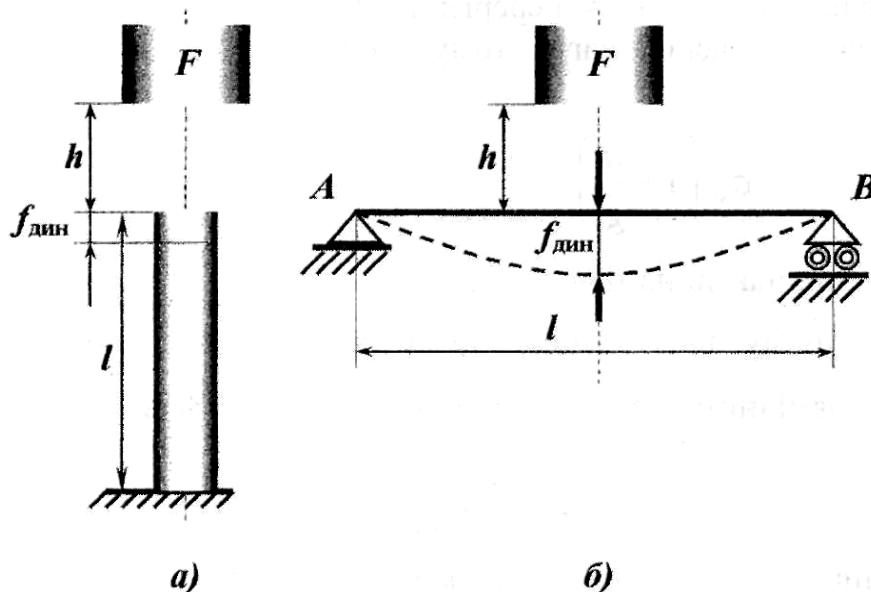


Рис. 2.61

Пройшовши шлях h , вантаж F , який рухається з деякою швидкістю, зустрічається з нерухомою системою і в процесі подальшого руху зумовлює її деформацію. Розглянемо випадки, коли ці деформації пружні, тобто, коли напруження, спричинені ударом, не перевищують межі пружності.

Удар може бути подовжнім (з деформаціями розтягу або стиску – рис. 2.61 *a*), коли вантаж падає на стрижень вздовж його осі, і поперечним (згинальним – рис. 3.61 *b*), якщо вантаж падає перпендикулярно до осі балки.

Метою розрахунку конструкції або деталі у даному випадку є визначення найбільших напружень і деформацій, які виникають під час удару.

Крім обмеження, що під час удару виникають лише пружні деформації, припускаємо додатково, що маса тіла, що піддається удару, досить незначна, порівняно з тілом, що наносить удар, і при розрахунку цю масу не приймаємо до уваги.

При цьому епюра переміщень системи від вантажу F при ударі подібна до епюри переміщень, що виникає від цього ж вантажу, але такого, що діє статично, тобто

$$\frac{f_{\text{дин}}}{f_{\text{ст}}} = k_{\text{дин}}, \quad (2.149)$$

де $f_{\text{дин}}$, $f_{\text{ст}}$ – динамічні і статичні деформації в тому самому напрямі від динамічної і статичної дії вантажу F .

Робота вантажу F внаслідок падіння його з висоти h дорівнює $F(h + f_{\text{дин}})$. Skorистаємось законом збереження енергії і порівняємо роботу вантажу F , що падає, до потенціальної енергії деформації

$$U = F(h + f_{\text{дин}}). \quad (2.150)$$

Переміщення від динамічної (ударної) дії навантаження F можна розглядати як статичне переміщення від сили F , помножене на динамічний коефіцієнт. Тоді потенціальна енергія деформації системи може бути виражена формулою

$$U = \frac{1}{2} F k_{\text{дин}} f_{\text{дин}}. \quad (2.151)$$

Порівнявши праві частини формул (2.150) і (2.151) і враховуючи (3.149), матимемо квадратне рівняння

$$f_{\text{дин}}^2 - 2f_{\text{ст}} f_{\text{дин}} - 2h f_{\text{ст}} = 0. \quad (2.152)$$

Частина друга

Із рівняння (2.152) дістанемо вираз для динамічного коефіцієнта

$$f_{\text{дин}} = f_{\text{ст}} + \sqrt{f_{\text{ст}}^2 - 2h f_{\text{ст}}} = f_{\text{ст}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}}}} \right), \quad (2.153)$$

або

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}}}}. \quad (2.154)$$

У формулі (2.154) перед знаком радикала стоїть знак плюс, тому що динамічний коефіцієнт $f_{\text{дин}}$ не може бути від'ємним.

Використавши формулу Г. Галілея для вільного падіння $v = \sqrt{2gh}$, вираз (2.154) можна записати так:

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g f_{\text{ст}}}}. \quad (2.155)$$

Враховуючи справедливість закону Гука для розглянутого випадку, можна написати, що динамічні напруження $\sigma_{\text{дин}}$ відносяться до статичних напружень як відповідне переміщення за формулою (2.149) $\sigma_{\text{ст}}$

$$\frac{\sigma_{\text{дин}}}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{f_{\text{дин}}}{f_{\text{ст}}} = k_{\text{дин}},$$

звідки

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}}. \quad (2.156)$$

Із викладеного видно, що, визначивши переміщення і напруження від статично прикладеного навантаження F і перемноживши ці величини на динамічний коефіцієнт, дістанемо переміщення і напруження при ударній дії навантаження F .

Із формули (2.154) видно, що при миттєвому прикладанні навантаження (якщо $h = 0$) динамічний коефіцієнт дорівнює

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + 0} = 2. \quad (2.157)$$

тобто, напруження і деформації у цьому разі у два рази більші, ніж при статичній дії того самого вантажу.

Якщо висота падіння вантажу $h > 1$, то у формулах (2.154) і (2.155) можна знехтувати одиницями

$$k_{дин} = \sqrt{\frac{2h}{f_{ст}}} = \sqrt{\frac{v^2}{f_{ст} g}}. \quad (2.158)$$

Слід відмітити, що при ударній дії навантаження напруження залежать від модуля пружності, тому що до виразів для $k_{дин}$ входять переміщення $f_{ст}$.

У випадку поздовжнього удару і при $h \ll l$ дістанемо з формули (2.158)

$$k_{дин} = \sqrt{\frac{2h}{f_{ст}}} = \sqrt{\frac{2hEA}{Fl}}, \quad (2.159)$$

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} k_{дин} = \frac{F}{A} \sqrt{\frac{2hEA}{Fl}}. \quad (2.160)$$

Таким чином, напруження при подовжньому ударі обернено пропорційні квадратному кореню із довжини стрижня. При статичній дії навантаження напруження не залежать від довжини стрижня.

Якщо вантаж падає на вільний кінець балки, один кінець якої закріплено, значення динамічного коефіцієнта матимемо з формули (2.154), підставляючи вираз

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{6Elh}{Fl^3}}. \quad (2.161)$$

Аналогічно можна дістати значення $k_{дин}$ для інших випадків. Формули (2.154) та (2.155) є загальними і ними можна безпосередньо користуватися під час розв'язку задач.

2.8.4. Розрахунки на міцність при змінних напруженнях

Розрахунки на міцність при змінних напруженнях у більшості випадків перевірні. У результаті дістають фактичні коефіцієнти запасу міцності n , які порівнюють із потрібними (допустимими) для даної конструкції коефіцієнтами запасу міцності $[n]$ за умови

$$n \geq [n], \quad (2.162)$$

Звичайно, для сталених деталей $[n] = 1, 3 \dots 3$ і більше залежно від виду і призначення деталі.

При симетричному циклі зміни напружень коефіцієнт запасу міцності визначають за формулами:

для розтягу (стиску)

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1p} \varepsilon_{\sigma} \beta}{k_{\sigma} \sigma}, \quad (2.163)$$

для кручення

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1p} \varepsilon_{\tau} \beta}{k_{\tau} \tau}, \quad (2.164)$$

для згину

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1p} \varepsilon_{\sigma} \beta}{k_{\sigma} \sigma}, \quad (2.165)$$

де σ і τ – номінальні значення максимальних нормальних і дотичних напружень;

k_{σ}, k_{τ} – ефективні коефіцієнти концентрації напружень;

$\varepsilon_{\sigma}, \varepsilon_{\tau}$ – коефіцієнти, які враховують вплив абсолютних розмірів деталі;

β – коефіцієнт якості поверхні.

Для деталей, які працюють в умовах асиметричного циклу, коефіцієнти запасу міцності n_a і n_x визначають за формулами Серенсена-Кінасшвілі [6]

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\left(\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta}\right) \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}, \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\left(\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \beta}\right) \sigma_a + \psi_{\tau} \tau_m}, \quad (2.166)$$

де ψ_{σ} і ψ_{τ} – коефіцієнти зведення асиметричного циклу до

Розрахунок на міцність елементів конструкцій

рівнонебезпечного симетричного; вони відбивають вплив асиметрії циклу на величину межі витривалості й обчислюються за формулами

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad \psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}, \quad (2.167)$$

де σ_0 і τ_0 – межі витривалості при віднульовому циклі зміни напружень. Значення $\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$ наводяться у спеціальних довідниках.

У випадку поєднання основних деформацій (згину і кручення, кручення і розтягу або стиску), тобто, для спрощеного плоского напруженого стану, загальний коефіцієнт запасу міцності n визначають з виразу

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2}, \quad n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (2.168)$$

Тут n_{σ} – коефіцієнт запасу міцності для нормальних напружень;

n_{τ} – коефіцієнт запасу міцності для дотичних напружень.

Формули для обчислення n_{σ} і n_{τ} наведено вище.

Крім коефіцієнта запасу міцності відносно межі витривалості, обчислюють коефіцієнт запасу міцності за опором пластичним деформаціям, тобто, відносно межі текучості σ_T (або τ_T) $\approx (0,55 \div 0,60) \sigma_p$.

Коефіцієнти запасу міцності за опором пластичним деформаціям визначають за формулами

$$n_{\sigma T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m}, \quad n_{\tau T} = \frac{\tau_T}{\tau_{max}} = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_m}. \quad (2.169)$$

Загальний коефіцієнт запасу міцності за опором пластичним деформаціям n_T обчислюють за формулою

$$n_T = \frac{n_{\sigma T} n_{\tau T}}{\sqrt{n_{\sigma T}^2 + n_{\tau T}^2}}. \quad (2.170)$$

Знайдені значення n і n_T порівнюють з допустимим значенням коефіцієнта запасу міцності $[n]$. Зазначимо, що із знайдених значень n і n_T у наступних розрахунках обирають менше значення.

ЧАСТИНА ІІІ

ОСНОВИ КОНСТРУЮВАННЯ ДЕТАЛЕЙ ПРИЛАДІВ І МАШИН

Вступ

Абсолютну більшість технологічних процесів на виробництві виконують машини, якісна і безпечна робота яких супроводжується і контролюється автоматичними приладами, що незрівнянно підвищує продуктивність фізичної та розумової праці людини, а іноді і повністю її замінює.

Як відомо, кожна машина, як механізм, складається з ланок, а ланки – із деталей. Деталлю прийнято називати складову частину машини, виготовлену із однієї марки матеріалу без застосування складальних операцій (наприклад, вісь, вал, шків, шестерня, зірочка тощо).

Сукупність двох або більше деталей, жорстко з'єднаних між собою певним способом і призначених для спільної роботи, як одне ціле, називається ланкою, складальною одиницею або вузлом.

Серед великої кількості деталей можна виділити деталі загального призначення (болти, вали, муфти, зубчасті колеса тощо). Деталі загального призначення широко застосовують у машинобудуванні і приладобудуванні.

Методи розрахунку і конструювання деталей вивчаються в третій частині курсу «Інженерної механіки» під назвою «Основи конструювання деталей приладів і машин».

Розглянемо стисло основні стандартні типи передач і деталей машин і приладів. Так, для перетворення руху (зміни кутової швидкості) використовують різноманітні механічні передачі: зубчасті, черв'ячні, пасові, фрикційні і ланцюгові.

Для підтримування деталей під час роботи призначені вали та осі. Вони обертаються в підшипниках, які поділяються на підшипники ковзання і кочення.

Для сполучення валів і регулювання роботи машини застосовують постійні, керовані і запобіжні муфти. В курсі розглядаються також методи розрахунку і проектування корпусних деталей, напрямних, пружин і ресор.

Застосовні енергетиками на практиці вимірювальні прилади і системи автоматичного регулювання поряд з електричними, електронними, оптичними та іншими елементами, мають обов'язково і механічні елементи, які і вивчаються в даному курсі.

Проте, методика проектування механічних елементів приладів має свої особливості, обумовлені тим, що діючі у приладах навантаження незначні, а вимоги до точності їх функціонування є головними.

Частина третя

3.1. Основні критерії проектування. Конструкційні матеріали для деталей приладів і машин

3.1.1 Умови працездатності деталей

Під *працездатністю* деталі або вузла машини розуміють можливість виконання їх функціонального призначення протягом заданого строку служби. При цьому за критеріями працездатності деталей має бути забезпечена цілісність цієї деталі або вузла, зберігатись їх форма тощо.

Поняття *міцності* означає здатність деталі чинити опір руйнуванню, як основний критерій працездатності, оскільки руйнування однієї деталі може призвести до руйнування машини в цілому. Розрахунки деталей машин на міцність виконують методами опору матеріалів.

Руйнування деталей може відбуватись внаслідок дії статичних, ударних або іншого виду напружень, характер зміни яких необхідно встановити перед розрахунком деталей машин на міцність. Якщо на деталь діють статичні напруження, то за небезпечні при розрахунку на міцність приймають напруження межі текучості σ_T (для пластичних матеріалів, приміром, для більшості марок сталей) або межі міцності σ_B (для таких крихких матеріалів, як чавун). У разі дії на деталь змінних за часом напружень проводити розрахунки необхідно тільки з точки зору руйнувань від втоми матеріалу. При цьому за небезпечні необхідно приймати напруження межі витривалості матеріалу. У випадку дії ударних навантажень потрібно встановити вплив швидкості удару за врахуванням коефіцієнта динамічності. При розрахунках на міцність деталей швидкісних машин враховуються, за принципом д'Аламбера, сили інерції і інерційні моменти.

Для забезпечення умов міцності деталі реальні напруження, величини яких залежить від форми і розмірів деталі та характеру прикладених навантажень, не повинні перевищувати допустимі напруження, вибір яких залежить від матеріалу, його обробки та характеру напружень.

Жорсткість – здатність деталі зберігати свою форму при навантаженні. Зміна форми деталі внаслідок дії навантажень або температури призводить до зміни характеру спряження між деталями, що може викликати зменшення міцності або збільшення зношування спряжених деталей. Тому важливим критерієм жорсткості деталей є обмеження прогину або кута повороту площини перерізу деталі відносно початкового її положення.

Допустимі величини цих переміщень залежать від можливості спряжених деталей компенсувати ці переміщення. Надмірне збільшення жорсткості є також негативним фактором, оскільки при цьому збільшується матеріалоемність виробу.

Важливим критерієм роботи деталей, що знаходяться в контакті між

собою, є **зносостійкість** – здатність деталі чинити опір зношуванню (процесу руйнування поверхні твердого тіла). Це достатньо складний процес, в якому поряд з механічними мають місце фізико-хімічні, теплофізичні та інші явища. При розрахунку на зносостійкість, як правило, обмежують напруження (тиск) у зоні контакту тіл. Допустимий тиск частіше всього визначається шляхом експериментальних досліджень. Інколи додатково перевіряють такі спряження з умови енергетичного балансу для запобігання перегріванню вузла.

3.1.2. Матеріали для приладів і машин

Перед розрахунком і проектуванням деталі вибирають матеріал для її виготовлення з урахуванням забезпечення працездатності деталі, технологічності її виготовлення та економічності.

Основним будівним матеріалом для приладів і машин є сталь різних марок. **Сталь** – це сплав заліза з вуглецем (вміст останнього до 2%) та іншими елементами. Вона широко застосовується в машинобудуванні через високу міцність, пластичність, здатність легко оброблятися. Конструкційні сталі поділяються на три групи: вуглецеві звичайної якості, якісні конструкційні і леговані.

Вуглецеві сталі загальної якості (ДСТУ 380-94) знайшли найбільш широке розповсюдження завдяки низькій вартості. З таких сталей виготовляють корпусні деталі, металоконструкції, легко навантажені деталі. За видом поставок ці сталі поділяються на групи: А – поставляються за механічними властивостями (вони найчастіше застосовуються); Б – за хімічним складом і В – за механічними властивостями і хімічним складом. Ці сталі позначаються буквами Ст і номерами в порядку зростання міцності (табл. 4.1), причому, починаючи зі Ст 4, номер відповідає мінімальній межі міцності (МПа), поділеній на 100.

Якісні вуглецеві конструкційні сталі (ДСТУ 1050-74, табл. 4.1) умовно поділяють на низько – (до 0,25% вуглецю С), середньо – (0,3...0,55% С) і високовуглецеві (0,6...0,85% С). Ці сталі легко обробляються, міцні, достатньо пластичні і використовуються для виготовлення навантажених деталей (зубчастих коліс, валів, елементів підшипників тощо). Вони позначаються двозначними числами, які вказують на середній вміст вуглецю в сотих частках процента (наприклад, сталь 35).

Леговані конструкційні сталі (ДСТУ 4543-71, табл. 4.1) на відміну від вуглецевих містять добавки легуючих елементів, які вводяться для покращення властивостей сталі. Леговані сталі додатково позначаються буквами, які вказують на вміст легуючих елементів: В – вольфрам, Г – марганець, Д – мідь, М – молібден, Н – нікель, Р – бор, С – кремній, Т – титан, Х – хром, Ф – ванадій, Ю – алюміній тощо. Цифри після букв означають процентний вміст елемента (якщо цей вміст менший або близький до 1%, то цифру не проставляють). Високоякісні леговані сталі додатково позначаються буквою А в кінці позначення (наприклад, 40ХН, 20ХН3А). Леговані сталі дорожчі за вуглецеві. Вони мають високу міцність і застосовуються для виготовлення

Частина третя

відповідальних навантажених деталей (зубчастих коліс, підшипників).

Механічні властивості сталей залежать не тільки від хімічного складу, а й від виду обробки. Всі види термічної обробки передбачають нагрівання деталі до певної температури, витримування на заданий час і охолодження за заданою швидкістю.

Таблиця 3.1. Механічні властивості деяких матеріалів, що застосовуються в приладах і машинах

Марка матеріалу	Стан або термообробка	Межі, Мпа		Твердість
		текучості	міцності	
Сталі загальної якості, ДСТУ 380-71				
Ст3	Гарячекатана	210...240	380...470	НВ 131
Ст4	Гарячекатана	240...260	420...520	НВ 143
Ст5	Гарячекатана	260...280	500...620	НВ 170
Вуглецеві конструкційні сталі, ДСТУ 1050-74				
20	Нормалізація	220...280	420...500	НВ123...167
40	Нормалізація	260...280	500...530	НВ150...200
40	Покращення	390...410	680...720	НВ190...230
50	Покращення	520...540	700...800	НВ230...260
Леговані сталі, ДСТУ 4543-71				
35Х	Нормалізація	440...490	690...740	НВ190...240
40НХ	Покращення	630...750	800...920	НВ240...300
40НХ	Гартування	750...780	920...950	НRC 48...53
38НМЮА	Азотування	780...790	980...1000	НRC 47...50
Сірий чавун, ДСТУ 1412-85				
СЧ15	-	-	150	НВ 130...220
СЧ20	-	-	200	НВ150...250
СЧ25	-	-	250	НВ160...260
Високоміцний чавун, ДСТУ 7393-95				
ВЧ40	-	250	400	НВ140...200
ВЧ50	-	320	500	НВ150...245
ВЧ80	-	480	800	НВ250...350
Бронзи				
БрОФЮ-1	Відливка в землю	140	225	НВ 80...100
БрОФЮ-1	Відливка в кокіль	150	255	НВ 100...120
БрАЖ 9-4	Відливка в землю	200	390	НВ 100
БрАЖ 9-4	Відливка відцентрова	200	490	НВ 120

Залежно від параметрів термічного обробітку розрізняють відпал, нормалізацію, гартування і відпуск.

Відпал характеризується повільним охолодженням деталі після нагрівання (як правило, разом з піччю). Ця операція зменшує твердість, покращує оброблюваність, знімає залишкові напруження у матеріалі.

Нормалізація характеризується порівняно з відпалом більшою швидкістю охолодження, яке проводиться на повітрі. Вона дає однорідну структуру матеріалу з більш високою твердістю і міцністю, ніж після відпалу.

Гартування характеризується інтенсивнішим охолодженням деталі в маслі, воді, водних розчинах солей. В результаті гартування отримують метал високої міцності і твердості, але менш пластичний, який важко обробляти механічно. Розрізняють об'ємне гартування, коли перетворенню підлягає весь об'єм матеріалу, і поверхневе, коли гартується лише поверхневий шар деталі на певну глибину. Останній зручний тим, що деталь має високі характеристики міцності, зносостійкості і твердості поверхневого шару і, в той же час, достатньо високу в'язкість і пластичність серцевини, що важливо для надійної роботи деталей.

Відпуск полягає в нагріванні деталі до температури нижче температури структурних перетворень, витримуванні та охолодженні. Його застосовують для підвищення в'язкості, зменшення залишкових напружень і покращення механічної обробки.

Термохімічна обробка передбачає насичення поверхневого шару деталі певними хімічними елементами для надання йому високої твердості, міцності і зносостійкості. Розрізняють **цементацію** (насичення поверхневого шару сталі вуглецем), **азотування** (насичення азотом) тощо.

Чавун – це сплав заліза з вуглецем з вмістом останнього понад 2%. Чавуни мають добрі ливарні властивості і легко обробляються різанням, мають кращі за сталь антифрикційні та демпферні властивості. Залежно від структури розрізняють сірі, білі, ковкі, високоміцні чавуни.

Сірий чавун (ДСТУ-412-85, табл. 4.1) є основним ливарним матеріалом. Більша частина вуглецю в ньому знаходиться у вигляді пластинчастого графіту. Ці чавуни мають достатньо низьку міцність і застосовуються для виготовлення деталей відносно складної конфігурації за відсутності жорстких вимог до матеріалоемності. Сірі чавуни позначають буквами СЧ з цифрами, які відповідають межі міцності при розтягу (приміром, СЧ20, де межею міцності є 200 Н/мм²).

При підвищених вимогах до міцності застосовують високоміцні чавуни з кулеподібним графітом (ДСТУ 7293-85). Форма графітових включень у них близька до сферичної, що зменшує концентрацію напружень на графітових включеннях і підвищує міцність у декілька разів порівняно з сірими чавунами. Ці чавуни можуть успішно замінити сталеві відливки і поковки, ковкий чавун (наприклад, для виготовлення

Частина третя

колінчатих валів і зубчатих коліс). Позначаються високоміцні чавуни буквами ВЧ і цифрами, які відповідають межі міцності (наприклад, ВЧ 80, де межею міцності є 800 Н/мм^2).

Для виготовлення деталей для приладів і машин застосовуються **сплави** на основі міді (латунь і бронза), олова, свинцю і кальцію (бабіт), титанові і алюмінієві сплави. Латуні, бронзи і бабіти мають високі антифрикційні властивості та оброблюваність і застосовуються для виготовлення деталей вузлів тертя, черв'ячних коліс. Широке застосування цих матеріалів стримується великою вартістю (в 5...20 разів перевищують вартість якісної сталі). Титанові сплави мають високу міцність, невелику питому вагу та високу корозійну стійкість і застосовуються у виробках авіакосмічної техніки та суднобудуванні.

Зараз у машинобудуванні все частіше замість металів використовують **пластмаси і композитні матеріали**, перевагами яких є легкість, антикорозійність, високі демпферні властивості. У багатьох випадках пластмаси мають здатність самозмащення, що дає можливість застосовувати їх у вузлах тертя. Композитні матеріали на основі скловолокна і вуглецевого волокна мають міцність, яку можна порівняти з міцністю сталей, але їх вартість надто велика. Широке застосування пластмас і композитних матеріалів у приладах і машинах – шлях до зниження металоємності, підвищення надійності й довговічності виробів.

3.2. Механічні передачі

3.2.1. Характеристика механічних передач

Як відомо, машинний агрегат складається із двигуна, робочої машини, яка забезпечує виконання технологічного процесу, і передавальних механізмів між ними, де застосовуються механічні передачі. Розрахунок і проектування механічних передач приладів і машин розглядаються в курсі Інженерної механіки.

Механічними передачами називаються механізми для передавання енергії від джерела енергії (двигуна) до робочої технологічної машини з можливим перетворенням руху (зміни закону руху), в результаті чого змінюються діючі сили і крутильні моменти на виході цієї механічної передачі.

За допомогою силових механічних передач можна отримати великі передаточні відношення для зменшення або регулювання частоти обертання веденого вала, мати можливість забезпечити потрібну компоновку машини.

3.2.2. Класифікація і основні параметри передач

В загальному вигляді передачі можна класифікувати за способом передавання руху. Це **передачі зачепленням** з безпосереднім контактом ланок: зубчаті, черв'ячні, гвинтові; **передачі гнучким зв'язком**: ланцюгові, пасові; **передачі тертям** з безпосереднім контактом: фрикційні

Якщо механічна передача має постійне передаточне відношення

(число) і розташована в закритому корпусі, то вона називається **редуктором** (зменшує або редукує кутову швидкість веденого вала) або **мультиплікатором** (збільшує кутову швидкість).

Передачі зі змінним передаточним числом поділяються на **коробки зміни швидкостей** (коробки зміни передач), в яких частота обертання веденого вала змінюється ступінчате, і **варіатори**, які плавно змінюють передаточне відношення (число).

Основними характеристиками механічних передач є передаточне число, передавальна потужність і коефіцієнт корисної дії.

Передаточним числом механічної передачі називається відношення більшої кутової швидкості до меншої у напрямі руху енергетичного потоку. Термін **передаточне відношення** є більш загальним і не залежить від напрямку потоку.

Механічні передачі можуть бути одноступінчатими і багатоступінчатими. Передаточне число n послідовно з'єднаних передач (пар зубчатих коліс) дорівнює добутку передаточних чисел цих передач:

$$u_{1n} = u_1 \cdot u_2 \dots u_n. \quad (4.1)$$

Як відомо з курсу теоретичної механіки, потужність P , яка передається обертальним рухом, дорівнює

$$P = T \omega, \quad (4.2)$$

де T – крутильний момент, $Нм$, ω – кутова швидкість, $рад/с$.

Відношення потужності P_2 на веденому валу передачі до потужності P_1 на ведучому валу називається **коефіцієнтом корисної дії** (ККД) :

$$\eta_{12} = P_2 / P_1. \quad 2 \quad (4.3)$$

Загальний ККД багатоступінчатої передачі визначається як добуток ККД окремих передач:

$$\eta_{1n} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n. \quad (4.4)$$

3.3. Зубчаті і черв'ячні передачі

3.3.1. Загальна характеристика передач

Зубчаті передачі – це механізми, які за допомогою зубчатого зачеплення передають рух від ведучого зубчатого колеса до веденого. При цьому, як правило, відбувається зміна кутової швидкості і можлива зміна напрямку обертання.

Зубчаті передачі – найбільш поширені типи механічних передач. Вони використовуються в широкому діапазоні потужностей (до десятків тисяч кіловат), швидкостей (до 100 м/с) і різноманітних умов роботи.

Залежно від виконання, зубчаті передачі бувають відкритими,

Частина третя

розміщеними поза корпусом, і закритими (редуктори), які працюють в корпусі, що захищає їх від зовнішнього середовища (рис. 4.1).

За відносним розташуванням поверхонь вершин і западин зубців коліс розрізняють зубчаті передачі із зовнішнім (утворюються при зачепленні коліс із зовнішніми зубцями) і внутрішнім зачепленням (утворюються парою зубчастих коліс із зовнішніми і внутрішніми зубцями).

За формою профілю робочої поверхні зубця передачі можуть бути з евольвентним зачепленням, в якому профілі зубців є частиною евольвенти, і з коловим зубцем (зачеплення Новікова), в якому профіль зубця складається із дуг кіл.

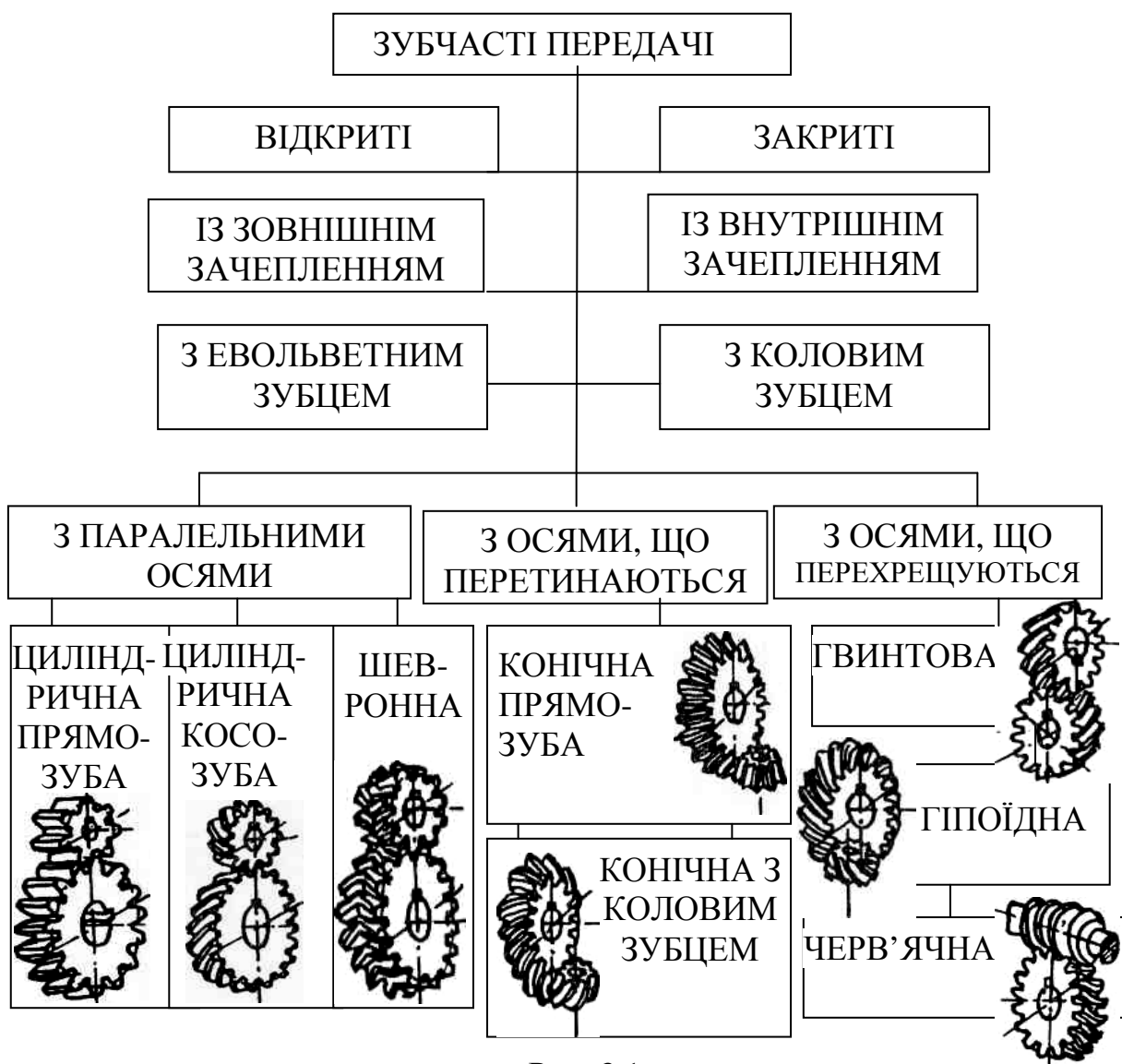


Рис. 3.1

За взаємним розташуванням осей зубчатих передач розрізняють передачі з паралельними осями: циліндричні прямозубі, косозубі і шевронні, з осями, що перетинаються: конічні з прямим і коловим зубцем, і з осями, що перехрещуються: циліндричні, гвинтові, гіпоідні і черв'ячні.

Зубчаті передачі широко застосовують завдяки малим габаритам, високим коефіцієнтам корисної дії ($\eta = 0,97 \dots 0,98$ для однієї пари коліс) та надійності, простоті експлуатації, постійному передаточному відношенню. Недоліками зубчатих передач є достатньо високі вимоги до точності виготовлення зубчатих коліс, шум і динамічні навантаження під час роботи.

Циліндричні і конічні зубчаті колеса, а також черв'яки виготовляють з конструкційних вуглецевих (сталь 35, 40, 50 тощо) та легованих сталей (сталь 20Х, 40ХН тощо).

Залежно від термічної або термохімічної обробки розрізняють "м'які" зубчаті колеса з твердістю матеріалу $HV < 350$, які одержують після нормалізації, і "тверді" колеса з твердістю матеріалу $HV > 350$, які одержують після гартування, цементації, азотування.

У зв'язку з тим, що в процесі руху в черв'ячних передачах між витком черв'яка і зубцем черв'ячного колеса має місце тертя ковзання, то до матеріалів черв'ячної пари ставляться високі антифрикційні вимоги, яким задовольняють бронзи (наприклад, Бр.ОФ, Бр.ОНФ, Бр.АЖ 9-4 тощо), сірі чавуни, з яких виготовляють черв'ячні колеса.

Ці матеріали добре працюють із сталевими гартованими черв'яками, які після гартування, як правило, шліфують.

Більш наочно пари зубчатих коліс можна побачити на рис. 3.2.

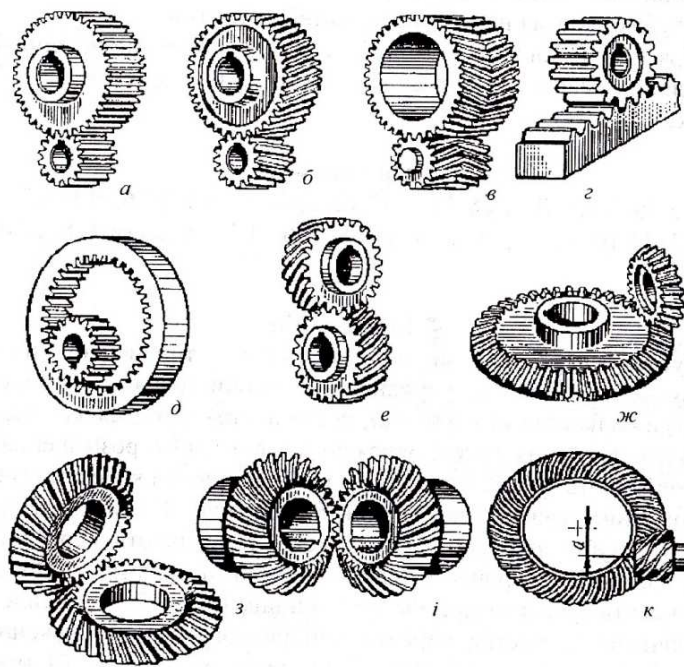


Рис. 3.2

Частина третя

Так, на рис. 3.2 *а б в* показані зубчаті колеса з паралельними осями: *а* – циліндрична, *б* – косозуба, *в* – шевронна.

На рис. 3.2 *г* можна побачити рейкове зачеплення прямозубого циліндричного колеса (зверху) з рейкою, а на рис. 3.2 *д* – передача з внутрішнім зачепленням, де велике колесо має свої зубці з внутрішньої сторони.

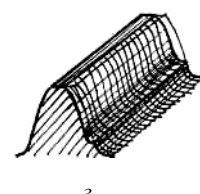
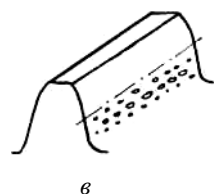
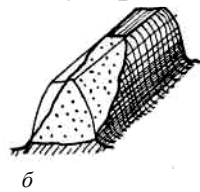
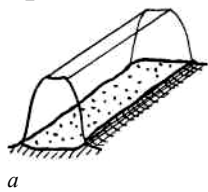
Позиція *е* на цьому рисунку показує гвинтову зубчасту передачу з перехресними осями, а позиції *ж і з* – прямозубу і косозубу конічні передачі з перпендикулярними осями, що перетинаються.

Позиція *і* характеризує конічну зубчасту передачу з круговим зубом, а позиція *к* – гіпоїдну передачу з перехресними осями, що зміщені відносно центра великого колеса.

3.3.2. Критерії працездатності зубчатих передач

У процесі роботи на зубці зубчатих і черв'ячних передач діють зусилля, які викликають різні види руйнувань.

Поломка зубців (рис. 4.3 *а б*) відбувається внаслідок дії напружень згину. При цьому руйнування зароджується біля ніжки зубця під впливом напружень розтягу. Зубці можуть зламатися через великі перенавантаження ударної або статичної дії або внаслідок багатоциклового навантаження в процесі роботи передачі



(втомі матеріалу). При цьому для прямозубих зубчатих передач характерною є поломка зубця по всій його довжині (рис. 3.3 *а*), а для косозубих – по косій поверхні (рис. 3.3 *б*). Це пов'язано з тим, що контакт між зубцями в косозубих колесах не відбувається одночасно по всій довжині. Для запобігання поломкам

зубців розраховують зубчаті передачі на згин. У разі незадовільної міцності зубчатих передач за напруженнями згину збільшують модуль зачеплення, що призводить до збільшення розмірів зубця і, як наслідок, до зменшення напружень згину. Поломка зубця – характерний вид руйнувань для відкритих передач.

Викришування зубців від втоми (рис. 3.3 *в*) – тип пошкоджень, пов'язаний з дією контактних напружень у зоні торкання зубців між собою. Контактні напруження виникають у випадку взаємодії двох тіл, площа контакту яких мала порівняно з розмірами самих тіл. Контактні напруження носять локальний (місцевий) характер, вплив їх поширюється на незначні області тіл. Але величина цих напружень достатньо велика. Під їх дією у поверхневому шарі зубців виникають мікротріщини. Розмір цих тріщин збільшується внаслідок дії змінних напружень і посилюється

від потрапляння в них мастила з наступним стисканням. У решті решт відбувається викришування зубця, що призводить до появи заглиблень, які в подальшому розвиваються у раковини. Викришування починається на зубцях дещо нижче полюса зачеплення і далі поширюється на всю поверхню зубців. Викришування є характерним видом руйнування для закритих зубчатих передач, які мають добрі умови мащення. Для запобігання викришуванню від втоми зубчаті передачі розраховують на контактну витривалість. Якщо необхідно збільшити контактну міцність зубчатих передач, збільшують міжосьову відстань або твердість матеріалу.

Абразивне зношування зубців (рис. 3.3 г) характерне для зубчатих передач з недостатнім мащенням або відкритих передач, які працюють у середовищі, що має абразивні речовини. Це передачі транспортних, гірничих, сільськогосподарських машин. Подібне абразивне зношування призводить до стирання поверхневого шару раніше, ніж в ньому з'являться тріщини від втоми матеріалу, тому в цих передачах не зустрічається викришування поверхневих шарів. Розрахунок на зношування достатньо складний. Тому зношування зубця враховується при розрахунках введенням додаткового коефіцієнта зношування.

Заїдання зубців і пластичні зсуви характерні для високонавантажених зубчатих передач, коли в зоні контакту виникають великі зусилля. Це призводить до розігрівання і молекулярного зчеплення матеріалів коліс з наступним виривання більш м'якого матеріалу (заїдання зубців), або до пластичного деформування зубців за низькою твердістю матеріалів коліс.

3.3.3. Розрахунок циліндричних прямозубих зубчатих передач

У процесі роботи зубчатих передач у місцях контакту зубців виникають зусилля, які викликають різні види напружень і призводять до їх руйнування. Повна сила F_n спрямована за нормаллю до поверхні зубців (вдovж лінії зачеплення). Як показав досвід, оперувати цією силою при розрахунках зубчатих передач незручно (рис. 4.4)

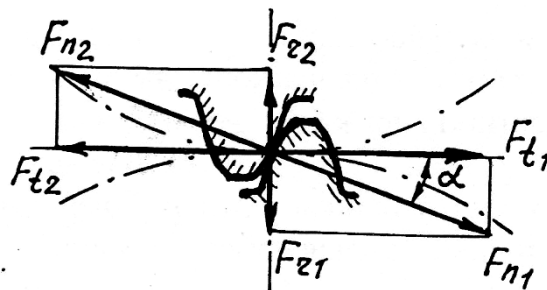


Рис. 3.4

Тому її розкладають на три складові: **колову або тангенціальну F_t** , спрямовану по дотичній до ділильного кола; **радіальну або доцентрову F_r** ,

Частина третя

спрямовану по радіусу зубчатих коліс до їх центра; **осьову або аксіальну** F_a , спрямовану паралельно осі зубчатого колеса (остання відсутня у циліндричних прямозубих передачах).

З відомого крутильного моменту відносно осі колеса можна одержати колову складову:

$$F_t = \frac{2T}{d}, \quad (3.5)$$

де T – крутильний момент; d – дільний діаметр зубчатого колеса.

З рис. 3.4 можна визначити:

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha; \quad F_n = F_t / \cos \alpha, \quad (3.6)$$

де $\alpha = 20^\circ$ – кут зачеплення для евольвентних зубчатих передач без зміщення

Розрахунок зубців на контактні напруження

Розрахунок циліндричних прямозубих передач виконують за напруженнями контактної витривалості і згину з урахуванням абразивного зношування.

За вихідне рівняння для розрахунку на контактну міцність приймають формулу Герца для визначення напружень у зоні контакту двох циліндрів, яке в застосуванні до зубчатих коліс має вигляд:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{q E_{\Sigma\Sigma}}{\rho_{\Sigma\Sigma}}} \leq [\sigma_{HP}], \quad (3.7)$$

де σ_H – контактне напруження в полюсі зачеплення зубців; q – інтенсивність розподілу навантаження на одиницю довжини зубця; $E_{\Sigma\Sigma}$ – зведений модуль пружності матеріалів зубчатих коліс; $\rho_{\Sigma\Sigma}$ – зведений радіус кривини профілів зубців у полюсі зачеплення; $[\sigma_{HP}]$ – допустимі напруження контактної витривалості.

Інтенсивність розподілу навантаження q на одиницю довжини зубця можна виразити таким чином з урахуванням динамічних ефектів і нерівномірності його розподілу вздовж довжини зубця:

$$q = \frac{F_{\Pi} K_{H\beta} K_{H\nu}}{l_{\text{конт}}}, \quad (3.8)$$

де $l_{\text{конт}}$ – довжина лінії контакту між двома зубцями (для прямозубих коліс довжина контакту дорівнює ширині зубчатого колеса b_2).

$K_{H\beta} = 1,0 \dots 1,25$ – коефіцієнт, що враховує вплив на контактну міцність нерівномірності розподілу навантаження по довжині зубця (його величина залежить від ширини зубчатого колеса, розміщення колеса відносно опор і твердості матеріалу коліс);

$K_{H\nu} = 1,0 \dots 1,4$ – динамічний коефіцієнт, який залежить від лінійної швидкості коліс.

Зведений модуль пружності:

$$E_{зв} = \frac{2E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \quad (3.9)$$

де E_1, E_2 – модулі пружності матеріалів шестерні і колеса, відповідно.

Якщо обидва зубчатих колеса виготовлені зі сталей, то:

$$E_{зв} = E_1 = E_2 = 2,15 \cdot 10^5 \text{ МПа.} \quad (3.10)$$

Зведений радіус кривини профілів зубців у полюсі зачеплення:

$$\frac{1}{\rho_{зв}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}, \quad (3.11)$$

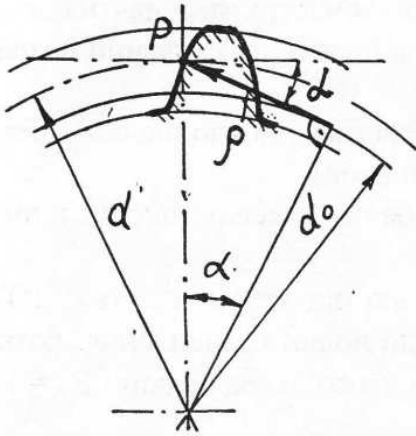


Рис. 3.5

де ρ_1, ρ_2 – радіуси кривини профілю зубця шестерні і колеса, відповідно.

Як видно з рис. 4.5 і визначення евольвенти, радіус кривини евольвенти зубця дорівнює:

$$\rho = \frac{d}{2} \sin \alpha.$$

$$\frac{1}{\rho_{зв}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{d_1 \sin \alpha} + \frac{2}{d_2 \sin \alpha} = \frac{2}{d_1 \sin \alpha} \left(1 + \frac{1}{u} \right) = \frac{2(u+1)}{d_1 u \sin \alpha} \quad (3.12)$$

При перетворенні використовували співвідношення $d_2 = d_1 U$.

Нарешті, для циліндричного прямозубого зачеплення одержимо:

$$\frac{1}{\rho_{зв}} = \frac{2(u+1)}{d_1 u \sin \alpha} \quad (3.13)$$

Підставивши в рівняння (3.7) значення компонент, що входять до нього згідно з (3.8), (3.10), (3.13), з урахуванням виразу (3.5), а також підставивши кут $\alpha = 20^\circ$, після перетворень отримаємо:

$$\sigma_H = 436 \sqrt{\frac{F_n (u+1) K_{Hb} K_{HV}}{d_1 d_2 U}} \leq \sigma_{Hp}. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) застосовується для перевірки контактної міцності циліндричних прямозубих коліс. Для проєктувальних розрахунків використовують іншу формулу, яку можна одержати з формули (3.14) або безпосередньо з формули (3.7). Для цього необхідно всі геометричні параметри передачі виразити через будь-який один параметр (міжосьову відстань, модуль, діаметр зубчатого колеса). При розрахунку на контактну міцність таким параметром прийнята **міжосьова відстань** a_w , через яку виразимо діаметр шестерні.

Частина третя

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{d_1(u+1)}{2}, \quad (3.15)$$

$$d_1 = \frac{2 a_w}{u+1}. \quad (3.16)$$

Введемо позначення:

$$\psi_{ba} = b_2/a_w \quad (3.17)$$

де ψ_{ba} – коефіцієнт ширини зубчатого колеса (він характеризує співвідношення між шириною зубчатого колеса і міжосьовою відстанню).

Вираз (3.15) з урахуванням виразів (3.5), (3.16) і (3.17) дістане вигляд рівняння третього степеня відносно a_w . Якщо прийняти $K_{H\beta}=1$ і розв'язати одержане рівняння відносно a_w , то остаточно отримаємо:

$$a_w = 495(u+1)^3 \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{H\beta}}{\psi_{ba} u \sigma_{H\beta}^2}} \quad (3.18)$$

Розрахунок зубців на згин

Повний розрахунок зубців зубчатих передач на згин достатньо складний. Тому в інженерній практиці виконують наближений розрахунок, приймаючи деякі припущення.

1. Повне навантаження, що діє в зачепленні, передається лише однією парою зубців і прикладене до вершини зубця (самий небезпечний випадок);

2. Зубець розглядається як консольна балка, що жорстко защемлена у основи (реально висота і товщина зубця є величинами одного порядку).

Вектор повної сили F_{Π} у цьому випадку буде спрямований під кутом $\alpha' > \alpha = 20^\circ$, оскільки зубці увійдуть у контакт один з одним ще до полюса зачеплення.

Розкладемо вектор сили F_{Π} на колову і радіальну складові з урахуванням формул (3.6).

$$F'_t = F_{\Pi} \cos \alpha' = F_t \cos \alpha' / \cos \alpha;$$
$$F'_r = F_{\Pi}^* \sin \alpha' = F_t \sin \alpha' / \cos \alpha.$$

Як відмічалось у попередньому параграфі, небезпечною при згині зубця є точка А біля ніжки зубця (рис. 3.6), де діють максимальні напруження розтягу. Вони складатимуться з напружень згину від моменту, що створює зусилля F'_t , і напружень стиску від зусилля F'_r .

$$\sigma_F = \sigma_{z2} + \sigma_{cm} = \frac{M_{z2}}{W} - \frac{F'_r}{A} \leq [\sigma_{FP}],$$

де $M_{z2} = F'_t h_p$ – згинальний момент в небезпечному перерізі;

$W = b \frac{s^2}{6}$ – момент опору небезпечного перерізу; $A = bs$ – площа небезпечного перерізу; $[\sigma_{FP}]$ – допустимі напруження згину.

Враховуючи коефіцієнт концентрації напружень, дістанемо

$$\sigma_{32} = \frac{6 F_t h_p \cos \alpha'}{b s^2 \cos \alpha} K_\tau;$$

$$\sigma_{32} = -\frac{F_t \sin \alpha'}{b s \cos \alpha} K_\tau$$

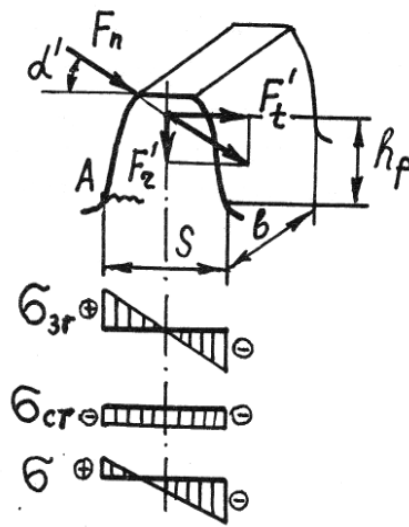


Рис. 3.6

Тоді

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b m} \left(\frac{6 h_p m \cos \alpha'}{s^2 \cos \alpha} - \frac{m \sin \alpha'}{b s \cos \alpha} \right) K_\tau$$

Вираз у дужках, помножений на коефіцієнт концентрації напружень, як встановлено, залежить лише від кількості зубців. Він характеризує форму зубця і називається коефіцієнтом форми зубця Y_F .

Значення цього коефіцієнта в залежності від кількості зубців для зачеплення без зміщення наведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2. Коефіцієнт форми зубця Y_F для зачеплення без зміщення (нормальні, нульові колеса)

z	16	17	20	25	30	40	50	60	80	100
Y_F	4,47	4,3	4,12	3,98	3,85	3,75	3,73	3,73	3,74	3,75

Отже, умова міцності на згин прямозубих циліндричних коліс така:

Частина третя

$$\sigma_F = Y_F \frac{F_t \cdot K_{FP} \cdot K_{FV}}{b \cdot m} \leq [\sigma_{FP}]. \quad (3.19)$$

Як і у випадку на контактну міцність, тут враховані динамічні ефекти шляхом введення коефіцієнта динамічності K_{FV} , а також врахований коефіцієнтом K_{Fb} вплив на міцність при згині нерівномірності розподілу навантаження за довжиною зубця

Формула (3.19) застосовується для перевірки міцності прямозубих передач на згин. Для проектувальних розрахунків, наприклад, для відкритих зубчатих передач, виконаємо наступні перетворення:

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_1}{m \cdot z_1}; \quad b = \psi_{bd} \cdot d_1 = \psi_{bd} \cdot m \cdot z_1,$$

де ψ_{bd} – коефіцієнт ширини зубчатого колеса, який характеризує відношення ширини колеса до діаметра шестерні.

Підставимо у вираз (3.19) визначені параметри і розв'яжемо рівняння відносно модуля

$$m = 12.6 \cdot \sqrt[3]{Y_F \frac{T_1}{z_1^2 \cdot \psi_{bd} \cdot \sigma_{FP}} K_{FV} \cdot K_{Fb}}.$$

Враховуючи зношування зубців, введемо коефіцієнт γ , крім того для відкритих циліндричних передач $K_{FV} = 1,4$, тому остаточно отримаємо:

$$m = 14 \cdot \sqrt[3]{Y_F \frac{T_1 \cdot \gamma}{z_1^2 \cdot \psi_{bd} \cdot \sigma_{FP}} K_{Fb}}. \quad (3.20)$$

3.3.4. Геометрія циліндричних косозубих і конічних коліс

Косозубі циліндричні колеса (рис. 3.7) мають зубці, нахилені під кутом β до твірної ділильного циліндра. Величина цього кута, як правило, знаходиться в межах $\beta = 8 \dots 20^\circ$.

Розрізняють правий і лівий напрямки нахилу зубця. Для зубця правого нахилу його гвинтова лінія в'ється зліва вверху направо. Пара спряжених косозубих зубчатих коліс повинна мати однаковий кут нахилу і різні напрямки нахилу зубців.

Косозубі колеса нарізають тим же інструментом, що і прямозубі, тільки при цьому інструмент спрямовують під кутом β до осі коліс.

Залежно від того, по якому перерізу вимірюватиметься крок зачеплення, матимемо різні його значення (виходячи з визначення модуля зачеплення).

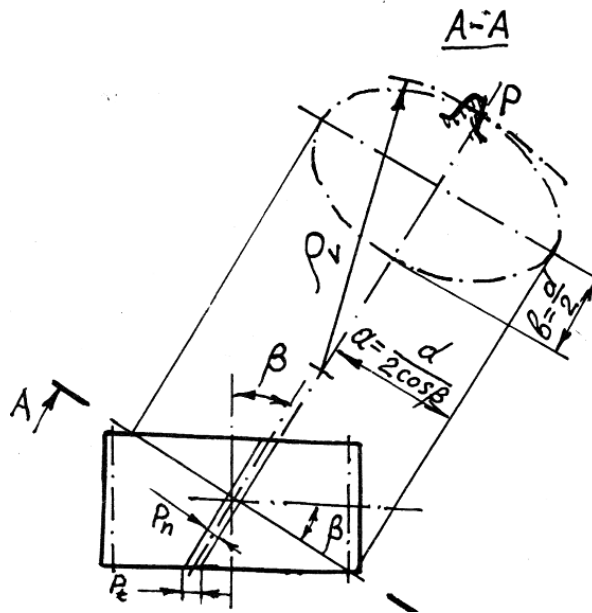


Рис. 3.7

Якщо вимірювати крок p_n по лінії $A-A$ (рис. 3.7), перпендикулярній до осі зубця, одержимо нормальний модуль m_n . А якщо вимірювати крок p_t по лінії, перпендикулярній до осі колеса, то одержимо коловий модуль m_t . Користуючись рис. 3.7, можна отримати:

$$m_t = m_n / \cos \beta \quad (3.21)$$

Нормальний модуль m_n є стандартизованим для косозубих циліндричних коліс. Геометричні розміри косозубих циліндричних передач розраховується за аналогічними формулами прямозубих передач, тільки з урахуванням колового модуля (табл. 3.3).

Міцність зуба циліндричного косозубого колеса залежатиме від кута нахилу зубця, оскільки при цьому змінюватиметься його форма. При розрахунку на міцність косозубих передач розглядають, так звані, **еквівалентні зубчаті колеса**.

Еквівалентне зубчатє колесо – це таке циліндричне прямозубе колесо, міцність якого і довжина зубця дорівнюють косозубому з однаковим нормальним модулем і довжиною зубця.

Для визначення параметрів еквівалентних зубчатих коліс зробимо перетин циліндричного зубчатого колеса по лінії $A-A$ (рис. 3.7), що перпендикулярна до подовжньої осі зубця. В перетині одержимо еліпс з півосями $a = d/2 \cos \beta$ і $b = d/3$. Радіус кривини еліпса ρ_v в точці P дорівнює:

$$\rho_v = a^2/b, \text{ або } \rho_v = \frac{d}{2 \cos^2 \beta}$$

Частина третя

Таблиця 3.3. Основні геометричні співвідношення в циліндричних косозубих передачах без зміщення

Параметри зачеплення	Формули
Міжосьова відстань	$a_w = \frac{(z_1 + z_2) m_n}{2 \cos \beta}$
Висота зуба	$h = 2,25 m_n$
Висота головки зуба	$h = m_n$
Радіальний зазор	$c = 0,25 m_n$
Ділильні діаметри	
Діаметри вершин	$d_1 = m_t z_1; d_2 = m_t z_2;$
Діаметри западин	$d_{a1} = d_1 + 2 m_n; d_{a2} = d_2 + 2 m_n$

Тоді діаметр еквівалентного зубчастого колеса

$$d_v = d / \cos^2 \beta \quad (3.22)$$

Виразивши величину діаметра через модуль $d = z m_t = z m_n / \cos \beta$, із урахуванням того, що $d_v = m_n z_v$, матимемо:

$$z_v = z / \cos^3 \beta \quad (3.23)$$

Конічні зубчаті колеса застосовують для передачі руху між осями, що перетинаються під кутом $\Sigma = 10...170^\circ$. Розглянемо випадок, коли осі конічних коліс перетинаються під прямим кутом (рис. 3.8).

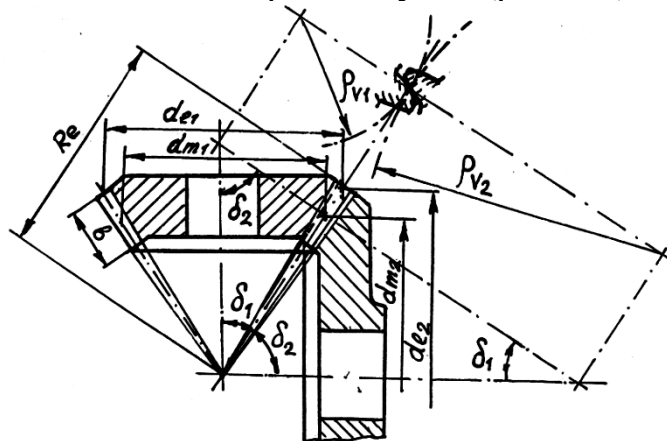


Рис. 3.8

В конічних передачах початкові, ділильні і інші циліндри перетворюються в конуси. Кути при вершинах початкових конусів визначаються із співвідношень

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_1 &= d_{m1}/d_{m2} = 1/U \\ \operatorname{tg} \delta_2 &= d_{m2}/d_{m2} = U \end{aligned}$$

У конічних передачах розрізняють діаметри середніх d_m і зовнішніх d_e початкових кіл. Аналогічно розрізняють середній нормальний m_{nm} і зовнішній нормальний m_{te} модулі зачеплення, величини яких зв'язані між собою співвідношенням:

$$m_{te} = m_{nm} + \frac{b \sin \delta_1}{Z_1}, \quad (3.24)$$

де b – довжина зубця.

У конічних зубчатих передачах стандартизований зовнішній нормальний модуль m_{te} .

Конусна відстань передачі:

$$R_e = \frac{Z_1 m_{te}}{2 \sin \delta_1} \quad (3.25)$$

Розрахунок на міцність конічної передачі, як і циліндричної косозубої, зводиться до розрахунку еквівалентної за міцністю циліндричної прямозубої передачі. Для визначення параметрів еквівалентних коліс виконаємо перетин конічної передачі площиною, перпендикулярною зубцю (рис. 3.8). У перетині матимемо циліндричну передачу з модулем, який дорівнює середньому модулю m_{nm} конічної передачі. З рис. 3.8 знаходимо:

$$\begin{aligned} d_{n1} &= 2 \rho_{n1} = d_{m1} / \cos \delta_1; \quad Z_{n1} = Z_1 / \cos \delta_1; \\ d_{n2} &= 2 \rho_{n2} = d_{m2} / \cos \delta_2; \quad Z_{n2} = Z_2 / \cos \delta_2; \end{aligned}$$

3.3.5. Розрахунок циліндричних косозубих, конічних та черв'ячних передач

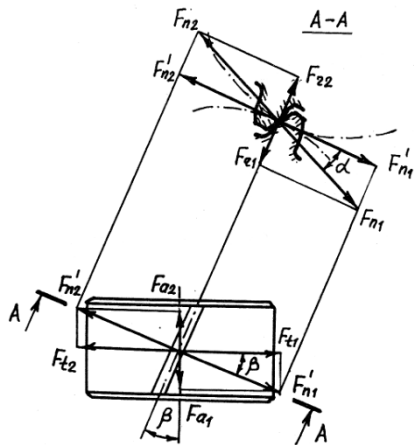
Циліндрична косозуба передача

Розрахунок циліндричної косозубої передачі зводиться до розрахунку циліндричної прямозубої, еквівалентній їй за міцністю. Ці передачі повинні мати однакові модулі зачеплення, довжину зубця, силові фактори, що діють на елементи передачі.

Розглянемо схему сил, які діють у зачепленні циліндричної косозубої передачі (рис. 3.9), з якого випливають залежності між складовими повної сили:

$$\begin{aligned} F_{r1} &= F_{r2} = F_n \sin \alpha; \quad F'_{n1} = F'_{n2} = F_n \cos \alpha; \\ F_{r1} &= F_{r2} = F'_{n1} \cos \beta; \quad F_{a1} = F_{a2} = F'_{n1} \sin \beta; \end{aligned}$$

Частина третя



Порівнюючи косозубі і еквівалентні прямозубі колеса, виявляється, що косозуба передача міцніша за прямозубу внаслідок наступного.

1. У зачепленні косозубої передачі одночасно приймають участь більше однієї пари зубців і тому навантаження розподілятиметься між ними. Цей факт враховується при розрахунках введенням коефіцієнтів $K_{H\alpha}$ та $K_{F\alpha}$.

Рис. 3.9

2. Зубець косозубого колеса товстіший біля ніжки, а кривина його профілю – менша. Це враховується тим, що в розрахунках замість діаметра зубчатого колеса використовують значення діаметра еквівалентного зубчатого колеса.

3. Напрямок нахилу зубця змінює його форму, що враховується коефіцієнтом нахилу зубця Y_β .

Таким чином, при розрахунку на контактну міцність з виразу (3.9) матимемо:

$$q = \frac{F_{t1} K_{H\beta} K_{H\alpha} K_{HV}}{b_2 \varepsilon_\alpha \cos\alpha} \quad (3.26)$$

де $\varepsilon_\alpha = \left[1,88 - 3,2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \right] \cos\beta$ – коефіцієнт перекриття.

Із співвідношення (3.11) з урахуванням попередніх формул маємо:

$$\frac{1}{\rho_{\Sigma\Sigma}} = \frac{2(u+1)}{d_{v1} u \sin\alpha} = \frac{2\cos^2\beta (u+1)}{d_1 u \sin\alpha} \quad (3.27)$$

Підставивши в формулу (3.6) вирази (3.26) та (3.27), і враховуючі, що середні значення $\beta = 12^\circ$, а $\varepsilon_\alpha \approx 1,5$, маємо:

$$\sigma_H = 376 \sqrt{\frac{F_{t1} (u+1) K_{H\beta} K_{H\alpha} K_{HV}}{d_1 b_2 u}} \quad (3.28)$$

Для проектувальних розрахунків при $K_{H\alpha} = 1,1$

$$a_W = 430 (u + 1)^2 \sqrt{\frac{T_1 K_{H\beta}}{\psi_{ba} u \sigma_{Hp}^2}} \quad (3.29)$$

Для розрахунку циліндричних косозубих передач на згин з урахуванням викладеного вище з формули (3.19) одержимо:

$$\sigma_F = Y_\beta Y_F \frac{F_{t1} K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{Fv}}{b m_n} \leq [\sigma_{Fp}] \quad (3.30)$$

Оскільки відкриті циліндричні косозубі передачі на практиці не застосовуються в зв'язку з нерівномірністю входження зубця в зачеплення, і, як наслідок, нерівномірністю зношування зубця, то розрахунки їх з умови міцності на згин не проводяться.

Конічна прямозуба передача

Розрахунок конічної передачі зводиться до розрахунку еквівалентної за міцністю циліндричної прямозубої передачі.

Розглянемо схему сил, які діють у зачепленні конічної прямозубої передачі (рис. 4.10), з якого випливають залежності між складовими повної сили:

$$F_{r1} = F_{r2} = F_n \cos\alpha; F'_{n1} = F'_{n2} = F_n \sin\alpha;$$

$$F_{r1} = F_{a2} = F'_{n1} \cos\delta_1; F_{a1} = F_{r2} = F'_{n1} \cos\delta_2.$$

При розрахунку конічної прямозубої передачі на контактну міцність вираз для погонного навантаження з урахуванням (4.9) матиме вигляд:

$$q = \frac{F_t K_{Hb} K_{HV}}{b \cos\alpha} \quad (3.31)$$

Зведена кривина профілю зубців

$$\frac{1}{\rho_{zv}} = \frac{1}{\rho_{V1}} + \frac{1}{\rho_{V2}} = \frac{2}{\sin\alpha} \left(\frac{\cos\delta_1}{d_{m1}} + \frac{\cos\delta_2}{d_{m2}} \right).$$

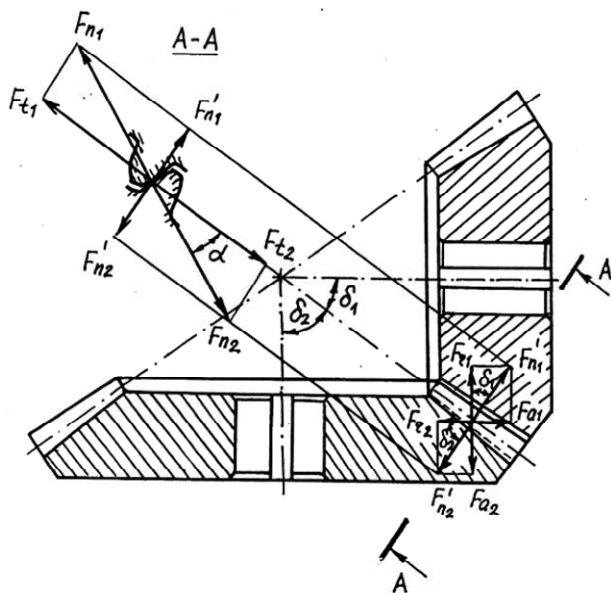


Рис. 3.10

Виконаємо перетворення:

$$\operatorname{tg}\delta_2 = \frac{\sin\delta_2}{\cos\delta_2} = u$$

або $\sin\delta_2 = u \cos\delta_2$

Остаточно матимемо:

$$\cos\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

Аналогічно можна отримати:

$$\cos\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$\frac{1}{\rho_{zv}} = \frac{2\sqrt{u^2 + 1}}{d_{m1} u \sin\alpha} \quad (3.32)$$

Підставимо у формулу (3.7) вирази (3.31 та (3.32) і введемо експериментальний коефіцієнт 0,85, який враховує, що міцність конічної прямозубої передачі складатиме 85% від міцності еквівалентної циліндричної.

Частина третя

$$\sigma_H = 436 \sqrt{\frac{F_{t1} \sqrt{u+1} K_{H\beta} K_{H\nu}}{0,85 d_{m1} b u}} \leq [\sigma_{Hp}] \quad (3.33)$$

Виразимо всі геометричні величини, що входять до формули (3.33), через діаметр d_{m1} , а зусилля F_{t1} – через крутільний момент на ведучому валу T_1 . Розв'яжемо одержане рівняння відносно діаметра d_{m1} .

$$d_{m1} = 770 \sqrt[3]{\frac{T_1 \sqrt{u+1} K_{H\beta}}{0,85 \psi_{bd} u \sigma_{Hp}^2}} \quad (3.34)$$

При розрахунку конічної прямозубої передачі на згин матимемо формули, аналогічні формулам (3.19) та (3.20) з урахуванням коефіцієнта зниження міцності 0,85:

$$\sigma_F = Y_F \frac{F_t K_{F\beta} K_{F\nu}}{0,85 b m_{nm}} \leq [\sigma_{Fp}] \quad (3.35)$$

$$m_{nm} = 14 \sqrt[3]{Y_F \frac{T_1 \gamma K_{F\beta}}{0,85 Z_1^2 \psi_{bd} [\sigma_{Fp}]}} \quad (3.36)$$

Зауважимо, що в даному випадку коефіцієнт форми зубця Y_F приймається залежно від еквівалентної кількості зубців Z_{v1} і Z_{v2} .

Черв'ячна передача

Розглянемо схему сил, які діють у зачепленні черв'ячної передачі. Як впливає з рис. 4.12, співвідношення між складовими повної сили мають вигляд:

$$\begin{aligned} F'_{n1} = F'_{n2} = F_n \cos \alpha; \quad F_{r1} = F_{r2} = F_n \sin \alpha; \\ F_{t1} = F_{a2} = F'_n \sin \beta; \quad F_{t2} = F_{a1} = F'_n \cos \beta; \end{aligned}$$

Для черв'ячної передачі вираз для повного зусилля, що діє в зачепленні, з урахуванням попередніх виразів матиме вигляд:

$$F_n = \frac{F_{t2}}{\cos \alpha \cos \beta},$$

де β – кут підйому витка черв'яка (кут нахилу зубця черв'ячного колеса).

Зробивши заміну $F_{t2} = 2T_2/d_2$, одержимо:

$$F_n = \frac{2T_2}{d_2 \cos \alpha \cos \beta}$$

Довжина лінії контакту, як видно з рис. 3.11, з урахуванням коефіцієнта перекриття і того, що в контакті з черв'яком приймає участь приблизно 75% довжини зубця колеса, становить:

$$l_{\text{кон}} = 0,75 \frac{d_1 \delta}{\cos \beta} \varepsilon_{\alpha}$$

Зведений модуль пружності

$$E_{3\theta} = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

де $E_1 = 2,15 \cdot 10^5$ МПа – модуль пружності сталі (матеріал черв'яка);
 $E_2 = 0,98 \cdot 10^5$ МПа – модуль пружності бронзи (матеріал черв'ячного колеса).

Тоді $E_{3\theta} = 1,3 \cdot 10^2$ МПа.

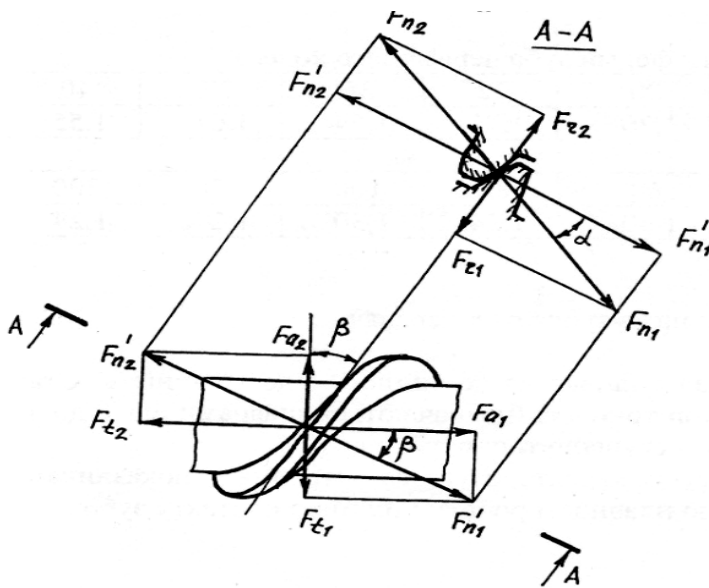


Рис. 3.12

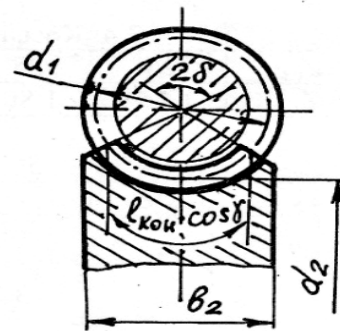


Рис. 3.11

Для зведеної кривини з урахуванням того, що $\rho = \infty$, оскільки профіль черв'яка в осьовому перерізі має трапецеїдальний вигляд, одержимо:

$$\frac{1}{\rho_{3\theta}} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{2 \cos^2 \beta}{d_2 \sin \alpha}$$

З урахуванням представлених виразів формула Герца (3.7) для черв'ячної передачі прийме вигляд:

$$\sigma_H = \frac{4800}{d_2} \sqrt{\frac{10 T_2}{d_1}} K \leq [\sigma_{Hp}] \quad (3.37)$$

де K – коефіцієнт навантаження (за фізичним змістом аналогічний добутку коефіцієнтів $K_{H\beta}$ і $K_{H\alpha}$ для попередньо розглянутих передач).

Для проектувальних розрахунків

$$a_W = 0,01 \left(\frac{Z_2}{q} + 1 \right)^3 \sqrt{\left(\frac{170q}{Z_2 \sigma_{H0}} \right)^2 T_2 K}, \quad (3.38)$$

Частина третя

При розрахунку черв'ячної передачі на згин перевіряють міцність тільки зубця колеса, оскільки матеріал його менш міцний. При цьому враховується, що форма зубця черв'ячного колеса забезпечує приблизно на 30% більшу його міцність порівняно з зубцем циліндричного косозубого колеса. Тому умова міцності на згин зубця черв'ячного колеса матиме вигляд (Y_F – коефіцієнт форми зубця для черв'ячного колеса):

$$\sigma_F = 0,7Y_F \frac{F_{t2}K}{b_2m}, \quad (3.39)$$

де Y_F – коефіцієнт форми зубця для черв'ячного колеса.

3.3.6. Точність зубчатих передач

Точність зубчатих передач впливає на їх міцність і довговічність. Стандартами передбачено 12 ступенів точності (позначаються цифрами від 1 до 12, причому 1 відповідає найвищому ступеню точності).

Кожен ступінь точності характеризується трьома показниками: кінематичною точністю, нормою плавності роботи і плямою контакту зубців.

Кінематична точність – найбільша похибка передаточного числа в межах одного оберту. Збільшення цієї похибки призводить до збільшення коливань та шуму зубчатих передач.

Норма плавності роботи – коливання швидкості, які багаторазово повторюються за один оберт зубчатого колеса. Зменшення плавності призводить до динамічних навантажень.

Пляма контакту зубців – величина плями контакту і її розміщення на поверхні зубця, що визначає працездатність зубчатих передач.

Для запобігання заклинюванню зубців при нагріванні і перекосі має бути боковий зазор між непрацюючими поверхнями зубців.

Стандартом передбачено шість видів спряжень. Вони позначаються латинськими буквами Н (зазор відсутній), Е (малий зазор), Д, С (зменшений зазор), В (нормальний зазор) і А (збільшений зазор).

Ступінь точності вибирають залежно від призначення і умов роботи передачі. Приклад позначення точності зубчатої передачі:

$$6 - 7 - 8 - B,$$

де 6 – ступінь кінематичної точності; 7 – ступінь плавності роботи; 8 – характеризує величину і розміщення плями контакту, В – нормальний боковий зазор.

3.3.7. Виготовлення зубчатих коліс

Конструкція зубчатого колеса залежить від його розміру, виду виробництва і способу з'єднання з валом. Основним фактором у даному

випадку є розмір колеса, його діаметр.

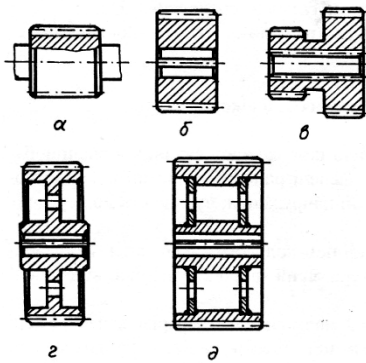


Рис. 3.13

заглиблення (рис. 3.13 б). При більших розмірах ($d = 100 \dots 500$ мм) зубчаті колеса для зменшення маси виготовляють із заглибленнями (з диском) і отворами (рис. 3.13 з).

Товщину вінців приймають, як правило, $(2 \dots 3) m$, товщину дисків – $(0,2 \dots 0,3) b$, діаметри і довжину маточин – $(1,5 \dots 1,8) d_B$ (b – ширина колеса, d_B – діаметр вала). Внутрішні поверхні ободу, зовнішні поверхні маточин, а також поверхні диска, як правило, механічно не обробляють.

При більших діаметрах зубчатих коліс ($d > 500$ мм) їх виготовляють кованими або литими із спицями, або складеними (рис. 3.13 д). Тоді диски з'єднуються з ободом і маточиною за допомогою болтових з'єднань або зварюванням.

У деяких випадках (наприклад, коробки передач) блоки шестерен можуть бути виготовлені з однієї заготовки (рис. 4.13 в).

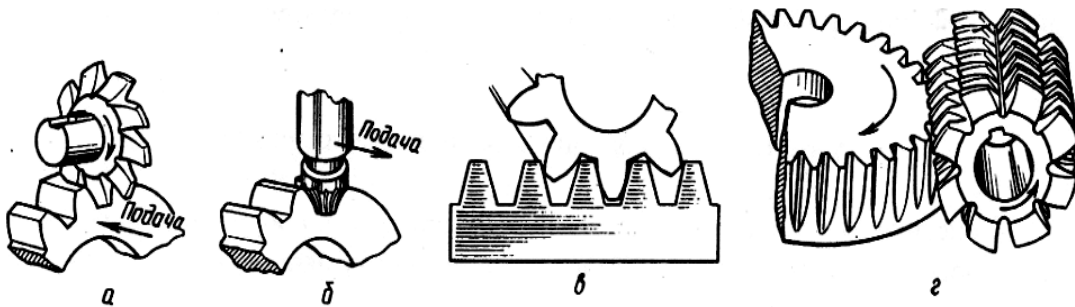


Рис. 3.14

Нарізати зубці зубчатих коліс можна двома способами: копіюванням або обкаткою (рис. 3.14). В першому випадку (рис. 3.14 а, б) інструмент (дисківа або пальцова фреза, протяжка, шліфувальний круг) повинен мати профіль западини. Нарізання обкаткою (рис. 3.14 в, г) відбувається в процесі примусового зачеплення інструмента (рейки, черв'ячної фрези або шестерні-довбача) з заготовкою на зуборізному верстаті. Другий спосіб дає більшу точність, безперервність роботи і тому більш поширений.

3.3.8. Передачі з зачепленням Новікова

Евольвентне зачеплення, яке отримало широке застосування в машинобудуванні, має деякі недоліки: малі зведені радіуси кривини робочих поверхонь і, як наслідок, підвищені контактні напруження; чутливість до перекосу зубців внаслідок лінійного контакту.

Ці недоліки усуваються при використанні колового зачеплення або зачеплення Новікова (названого в честь інженера, який запропонував цей вид зачеплення).

Профілями зубців цього зачеплення в нормальному перерізі є неспряжені криві, наприклад, дуги кіл з близькими значеннями радіусів кривини при внутрішньому дотиканні (рис. 3.15). При цьому, як правило, зуб шестерні випуклий, а колеса угнутий. Необхідною умовою постійності передаточного числа в зубчастих передачах є значення коефіцієнта перекриття $\varepsilon > 1$, тому передача з зачепленням Новікова має бути обов'язково косозубою з кутом нахилу зуба $\beta = 8 \dots 24^\circ$.

Початковий контакт поверхонь зубів відбувається в точці К (рис. 3.15 б). Але внаслідок пружної деформації зубців під навантаженням зона контакту збільшується (заштрихована область на рис. 3.15 б). Завдяки цьому, а також меншому зведеному радіусу кривини передача Новікова має велику контактну міцність (в 1,5 раза більшу за евольвентну передачу при твердості зубців $HV < 350$ і колівій швидкості до 12 м/с).

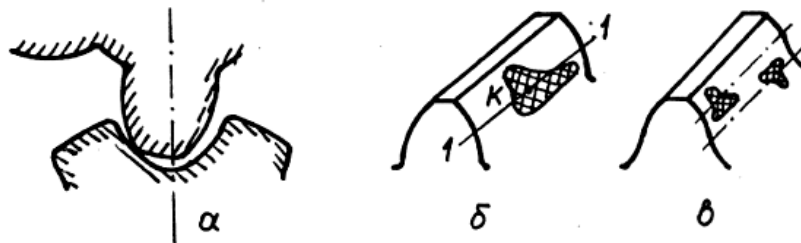


Рис. 3.15

Інша суттєва відмінність передачі Новікова від евольвентних полягає в тому, що перекочування зубців в процесі зачеплення проходить не по висоті, а по їх довжині, тобто лінія зачеплення буде паралельною осі колеса (лінія 1-1 на рис. 3.15 б).

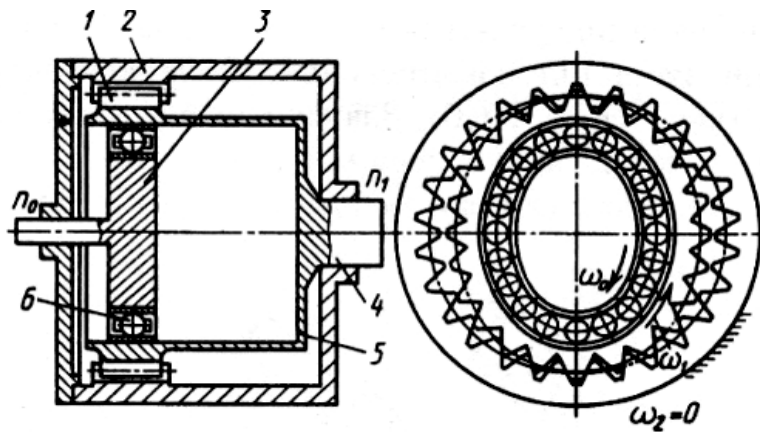
Розрізняють передачі Новікова з однією (ОЛЗ) і двома (ДЛЗ) лініями зачеплення. Останні мають випукло-угнутий профіль зубця і контакт зубців в двох точках одночасно (рис. 3.15 в).

Передачі Новікова з двома лініями зачеплення мають контактну міцність в 1,7 раза більшу, а габарити приблизно на 25...30% менші, ніж аналогічні евольвентні передачі.

Залежності між основними розмірами передачі Новікова і евольвентної передачі однакові.

3.3.9. Хвильова передача

Хвильовими називають механічні передачі, які забезпечують передачу і перетворення руху деформуванням гнучкого елемента. Гнучкий вінець 1 (рис. 4.16) деформується генератором хвиль 3 і входить в зачеплення з центральним жорстким колесом 2, як правило, в двох зонах. Зубці



гнучкого вінця 1 нарізають на кінці тонкої циліндричної оболонки 5, інший кінець якої з'єднаний з вихідним валом 4. Генератор хвиль 3 складається з кулачка профілю еліпсоїда і спеціального

Рис. 3.16

шарикового підшипника б з гнучкими кільцями.

Хвильова передача дозволяє отримувати великі передаточні числа одного ступеня: при зубчатих колесах із сталі $u = 60 \dots 300$ (нижнє значення обмежується міцністю на згин гнучкого колеса, верхнє – мінімально допустимою величиною модуля, яка дорівнює $0,2 \dots 0,15$ мм).

Хвильові передачі порівняно зі звичайними зубчатими передачами мають менші масу і габарити, забезпечують більш високу кінематичну точність, мають високі демпфівальні властивості, працюють з меншим шумом.

При необхідності хвильові передачі дозволяють передавати рух в герметичний простір без застосування ущільнень.

До недоліків хвильових зубчастих передач потрібно віднести складну технологію виготовлення деталей. Але при серійному виробництві вартість їх менша за планетарні зубчаті передачі.

При обертанні генератора хвиль гнучкий зубчатий вінець перекочується по нерухомому колесу (рис. 3.16), обертаючи оболонку і вал. Передаточне число передачі дорівнює:

$$u = \frac{n_0}{n_1} = \frac{z_1}{z_2 - z_1},$$

де n_0 , n_1 частоти обертання ведучої і веденої ланок; z_1 , z_2 – числа зубців гнучкого і жорсткого коліс, відповідно.

Очевидно, що для збільшення передаточного числа різниця кількості $z_2 - z_1$ зубців повинна бути якомога меншою, при цьому кратною числу хвиль для запобігання накладанню зубців (як правило $z_2 - z_1 = 2$).

3.3.10. Основні типи механічних редукторів

Редуктором називається агрегат, який складається з однієї або кількох зубчатих передач, вмонтованих в єдиному закритому корпусі (картері); призначений для зниження кутової швидкості і підвищення крутильного моменту. Зубчаті редуктори виготовляють серійно в одно-, дво-, і триступінчастому виконанні з різними передаточними числами від $u=1$ (конічні і одноступінчасті циліндричні) до $u=3000$ (для планетарних і комбінованих редукторів).

Основними характеристиками редукторів є: передаточне число, допустимі крутильний момент і консольне навантаження на вихідному валу, коефіцієнт корисної дії. Одноступінчасті циліндричні редуктори типу 1ЦУ (рис. 3.17 а) забезпечують передачу крутного моменту на вихідному валу від 250 до 1000 Нм при передаточних числах $u=3...6,3$.

Позначаються редуктори, наприклад, так: 1ЦУ-200, де 200 – міжосьова відстань у мм.

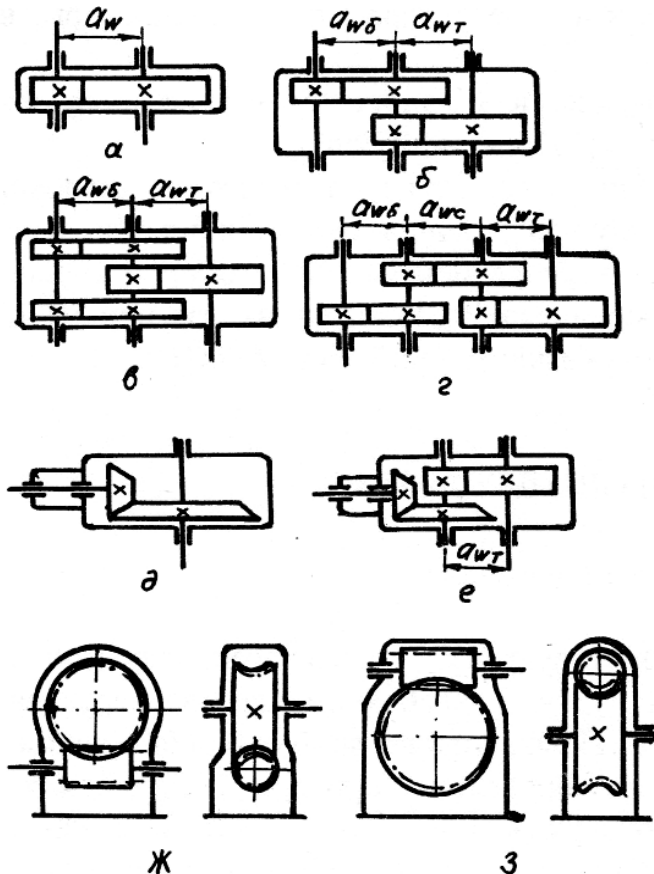


Рис. 4.17

Триступінчасті редуктори (рис. 3.17 з) типу 1ЦЗУ мають передаточні числа від $u=160$ до $u=200$ і можуть використовуватись при крутильних моментах на вихідних валах $T_T=1250...5000$ Нм. Позначаються вони, так: 1ЦЗУ-250, де 250 – міжосьова відстань тихохідного ступеня a_{wT} .

Конічні редуктори (рис. 3.17 д) серійно не випускаються, хоча

Двоступінчасті циліндричні редуктори типу 1Ц2У (рис. 3.17 б) можуть мати передаточні числа $u=8...40$ і здатні передавати крутий момент вихідного вала $T_T=250...10000$ Нм. Випускають редуктори типу 1Ц2Н із зачепленням Новікова. Позначаються ці редуктори, наприклад, так: 1Ц2Н 160, де 160 – міжосьова відстань у мм тихохідного ступеня a_{wT} .

Бувають редуктори з роздвоєним потоком потужності (рис. 3.17 в), в яких навантаження на вали розподіляється симетрично відносно опор, що покращує умови праці зачеплення.

застосовуються у різних областях машинобудування.

Для передачі руху між осями, що перетинаються застосовують конічно-циліндричні редуктори (рис. 3.17 *е*) типу КЦ1.

Швидкісний ступінь цього редуктора – конічний, тихохідний – циліндричний. Ці редуктори мають передаточні числа $u = 6,3...28$. Крутильні моменти, що передаються вихідними валами цих редукторів: $T_T = 500...5000$ Нм.

З черв'ячних редукторів найпоширеніші одноступінчасті редуктори з нижнім (рис. 3.17 *ж*) і верхнім (рис. 3.17 *з*) розміщенням черв'яків типу Ч або РЧ. Діапазон передаточних чисел цих редукторів $u = 8...63$.

Для забезпечення великих передаточних чисел використовують двоступінчасті черв'ячні редуктори типу 2Ч.

Хвильові зубчасті одноступінчасті редуктори загального призначення типу В3 (ДСТУ 23108-78) можуть мати передаточні числа $U = 80...315$ і передавати крутильні моменти на тихохідному валу $T = 22...6300$ Нм. Коефіцієнт корисної дії стандартних хвильових редукторів становить $0,9...0,72$ і зменшується зі збільшенням передаточного числа.

Спосіб мащення зачеплення в зубчастих редукторах залежить від колової швидкості зубців коліс.

При колових швидкостях до $13...15$ м/с застосовують, як правило, картерне мащення: в картер редуктора заливають масло ($0,3...0,7$ л на 1 кВт потужності редуктора).

Циліндричні зубчасті колеса рекомендується занурювати в масло на глибину не менше ($3...4$) m , але не глибше, ніж на $1/3$ діаметра тихохідного колеса. Конічні колеса занурюють у масло на довжину зуба.

Черв'яки черв'ячних передач рекомендується занурювати на висоту витка черв'яка, але рівень масла не повинен бути вищим центра тіла кочення підшипника. У всіх випадках підвищення рівня масла в редукторі призведе до різкого збільшення витрат на перемішування масла.

Зазор між дном редуктора і зубчастим колесом повинен бути не менше 20 мм для запобігання збовтуванню осаду з дна редуктора і потраплянню його в зачеплення і підшипники.

При колових швидкостях зубчастих коліс більших 15 м/с застосовують примусове мащення за допомогою насосів різної конструкції.

В'язкість масла вибирають залежно від матеріалів зубчастих коліс і колової швидкості зубців. Чим міцніший матеріал і менша колова швидкість, тим вища має бути в'язкість масла.

Для редукторів загального призначення найчастіше використовують індустриальні масла 30, 45, 50 (в'язкість при 50°C , відповідно, 30, 45 і 50 сСт) і трансмісійні масла (в'язкість, приблизно, 25 сСт).

3.4.Ланцюгові передачі

3.4.1. Загальна характеристика

Ланцюгові передачі широко використовуються в сільськогосподарських і підйомно-транспортних машинах, транспортних засобах. Ланцюгова передача складається із ведучої і веденої зірочки, а також ланцюга, який охоплює зірочки. Крім цього, вона може мати натяжний і змащувальний пристрої, огороження.

Ланцюгові передачі *широко застосовують* внаслідок: великого діапазону міжосьових відстаней (до 6...8 м) і потужностей (до 100 кВт); менших, ніж у пасових передач, габаритів; відсутності ковзання; достатньо високого коефіцієнта корисної дії ($\eta = 0,96...0,95$); невеликого тиску на вали і опори; можливості передачі руху кільком зірочкам одночасно.

Але ланцюгові передачі мають і *недоліки*: підвищене зношування ланцюга, більш високі вимоги до монтажу передачі і коливання швидкості ланцюга в межах одного кроку.

Ланцюги, що застосовують у машинобудуванні, за призначенням поділяються на *вантажні, тягові і приводні*. Перші використовуються у вантажопідйомних машинах для піднімання і утримання вантажу, тягові – в транспортуючих машинах. *Як приводні*, що використовуються у приводі передачі руху, застосовують *роликові і зубчасті ланцюги* (рис. 3.18).

Роликовий ланцюг складається з широких й вузьких ланок. *Ланка ланцюга* (рис. 3.18 а) складається з валика 1, на який напресовані зовнішні пластини 2. На валик встановлена втулка 3, жорстко з'єднана з внутрішніми пластинами 4, на втулку надітий ролик 5, який вільно обертається і зменшує зношування зубців зірочки. Таким чином, *поворот* ланок між собою відбувається *в шарнірі валик – втулка*.

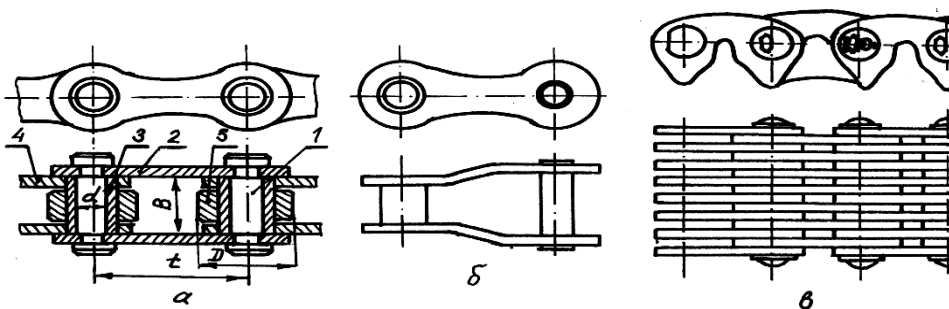


Рис. 3.18

Пластини виготовляють із середньовуглецевих або легованих сталей 45, 50, 40Х, які загартовують до твердості HRC 40...50. Валики і втулки виготовляють із сталей 15, 15Х, 20Х, цементують і загартовують до твердості HRC 50...65.

Основним параметром ланцюга є його *крок t* – відстань між осями двох суміжних роликів. Крок ланцюга вимірюється в частках дюйма і

знаходиться в межах $t = 8,0...50,8$ мм. Із збільшенням кроку ланцюга збільшуються його розміри і, відповідно, силова здатність.

Залежно від відношення кроку ланцюга t до діаметра D ролика розрізняють приводні роликові (ПР) ланцюги легкої (ПРЛ), нормальної (ПР) серії та довголанкові ланцюги (ПРД). Крім однорядних (рис. 3.18 а) випускають також дво- і трирядні ланцюги. Багаторядні ланцюги використовуються при великих навантаженнях або (і) великих швидкостях ланцюга.

Паспортними характеристиками ланцюга (табл. 3.5), крім кроку, є розміри їх складових частин (діаметр валика d , ролика D , відстань між пластинами B), площа опорної поверхні шарніра s , руйнівне навантаження Q і погонна маса ланцюга q . У позначенні ланцюга зазначають тип, крок, руйнівне навантаження, номер ДСТУ. Наприклад, ПР-25,4-5670 ДСТУ 13568-75 – ланцюг приводний роликовий однорядний з дюймовим кроком ($t = 25,4$ мм) і руйнівним навантаженням 56,7 кН.

Зубчасті ланцюги (рис. 3.18 в) застосовують порівняно нечасто. Перевагами їх порівняно з роликовими є більші швидкість, плавність, надійність і міцність. Але вони складні у виготовленні, мають більшу масу і практично не допускають поперечних деформацій.

Зірочки (рис. 3.19). Профіль зуба зірочки утворюється роликами ланцюга при вході і виході їх із зачеплення. Як і в зубчастих колесах, в зірочках розрізняють діаметр виступів d_a , діаметр западин d_f . По ділильному діаметру d розміщені на зірочці центри шарнірів ланцюга, він визначається із прямокутного трикутника OAB : $d = t / \sin \pi / z$.

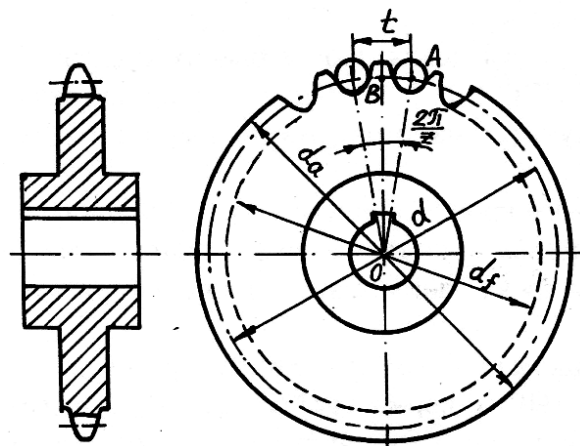


Рис. 3.19

Зірочки малих діаметрів виготовляють суцільними із поковок, а більших діаметрів – складеними із диска з зубцями і маточини, з'єднаних між собою. Зірочки виготовляють із мало- і середньовуглецевої сталі 15, 20Х, 45, 40Х з наступним гартуванням до твердості 45...50.

Табл. 3.4. Витяг із ДСТУ 13568-75.

Позначення	t, мм	d, мм	D, мм	B, мм	s, мм ²	Q, кН	q, кг/м
ПР-8-460*	8,0	2,31	5,0	4,77	11,0	4,6	0,20
ПР-9,525-910*	9,525	3,28	6,35	8,53	28,0	9,1	0,45
ПР-12,7-900-1*	12,7	3,66	7,75	4,9	17,9	9,0	0,30
ПР-12,7-900-2*	12,7	3,66	7,75	5,8	21,0	9,0	0,35
ПР-12,7-1820-1*	12,7	4,45	8,51	8,9	40,0	18,2	0,65
ПР-12,7-1820-2	12,7	4,45	8,51	11,3	50,0	18,2	0,75
ПР-15,875-2270-1*	15,875	5,08	10,16	10,11	55,0	22,7	0,80
ПР-15,875-2270-2	15,875	5,08	10,16	13,28	71,0	22,7	1,0
ПР-19,05-3180	19,05	5,96	11,91	17,75	105,0	31,8	1,9
ПР-25,4-2670	25,4	7,95	15,88	22,61	180,0	56,7	2,6
ПР-31,75-8850	31,75	9,55	19,05	27,46	260,0	88,5	3,8
ПР-38,1-12700	38,1	11,1	22,23	35,46	395,0	127,0	5,5
ПР-44,45-17240	44,45	12,7	25,70	37,19	475,0	172,4	7,5
ПР-50,8-22680	50,8	14,29	28,58	45,21	645,0	226,8	9,7

3. 4.2. Параметри ланцюгових передач

Потужність, що передається ланцюговою передачею:

$$P = F_t v, \quad (3.40)$$

де F_t – колове зусилля; v – швидкість руху ланцюга.

Ланцюгова передача може використовуватись у діапазоні потужностей від часток до 100 кВт.

Швидкість руху ланцюга визначається із співвідношення приблизної рівності довжини ділільного кола зірочки й периметра умовного багатокутника, утвореного центрами шарнірів ($2\pi d_1 \approx Z_1 t$):

$$v = \frac{Z_1 t \omega_1}{2\pi} \quad (3.41)$$

Швидкість ланцюга при розрахунках не повинна перевищувати гранично допустимої, яка визначається за формулою:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{Z_1}{t}} \quad (3.42)$$

Інакше необхідно приймати багаторядні ланцюги з меншим кроком для виконання умови (3.42).

Передаточне число ланцюгової передачі визначається з умови рівності швидкості ланцюга на двох зірочках

$$Z_1 \omega_1 t = Z_2 \omega_2 t$$

Звідки

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (3.43)$$

Як правило, передаточне число ланцюгової передачі $u < 10$.

Кількість зубців зірочок. Мінімальна кількість зубців зірочки обмежена динамічними навантаженнями і зношуванням шарнірів. Із зменшенням кількості зубців збільшується нерівномірність швидкості руху ланцюга. Мінімальна кількість зубців ведучої зірочки рекомендується визначати за формулою:

$$Z_{min} = 29 - 2u \geq 13.$$

Залежно від кутової швидкості ведучої зірочки рекомендується приймати $Z_{1min} = 13 \dots 23$ (менші значення Z_1 відповідають меншим кутовим швидкостям). При цьому для зменшення зношування зірочки і ланцюга рекомендується приймати непарне значення Z_1 . Кількість зубів веденої зірочки

$$Z_2 = Z_1 u \leq Z_{2max},$$

де $Z_{2max} = 100 \dots 120$ – визначається з умови зачеплення ланцюга із зірочкою.

Міжосьова відстань ланцюгової передачі має бути не менша:

$$a_{min} = \frac{d_1 + d_2}{2} + (30 \dots 50) \text{ мм.}$$

Але з міркувань довговічності ланцюга приймають:

$$a = (30 \dots 50) t.$$

При розрахунках додатково проводять перевірку на частоту входження ролика в зачеплення:

$$v = \frac{2 Z_1 \omega_1}{\pi L_t} \leq [v] \quad (3.44)$$

де L_t – кількість ланок ланцюга; $[v] = 60 \dots 15$ м/с для кроків ланцюга, відповідно, $t = 8,0 \dots 50,8$ мм.

Кількість ланок ланцюга (довжина ланцюга в кроках) визначається за міжосьовою відстанню a , кроком t і кількістю зубців Z_1 і Z_2 :

$$L_t = \frac{2a}{t} + \frac{Z_1 + Z_2}{2} + \left(\frac{Z_2 - Z_1}{2\pi} \right)^2 \frac{t}{a} \quad (3.45)$$

Одержане значення L_t округлюють до найближчого цілого (бажано парного) числа. Якщо кількість ланок ланцюга непарна, виникає необхідність застосування перехідної ланки (рис. 3.18 б).

За прийнятним значенням кількості ланок ланцюга визначають уточнене значення міжосьової відстані (без урахування провисання ланцюга):

$$a = \frac{t}{4} \left[L_t - \frac{Z_1 + Z_2}{2} + \sqrt{\left(L_t - \frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)^2 - 8 \left(\frac{Z_2 - Z_1}{2\pi} \right)^2} \right]$$

Для зниження навантаження на вали і опори ланцюг повинен провисати, що забезпечується зменшенням міжосьової відстані на $(0,002...0,004) a$.

3.4.3. Кінематичний і силовий розрахунок ланцюгової передачі

Кінематика передачі

Зірочку ланцюгової передачі можна представити у вигляді многокутника, утвореного ланками ланцюга, розміщеними в зачепленні із зірочкою, рис. 4.20 а, (для наочності кількість зубців зірочки $Z = 6$). Нехай в деякий момент часу точка А знаходиться в положенні, яке визначається кутом повороту φ в межах $-\pi/Z \leq \varphi < \pi/Z$.

Лінійна швидкість точки А спрямована перпендикулярно до радіуса ОА.

При сталій кутовій швидкості $\omega = \text{const}$:

$$v = \omega r = \text{const}$$

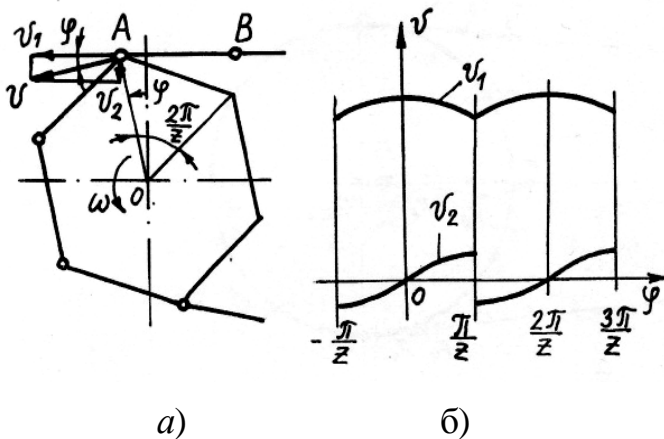


Рис. 3.20

$$v_1 = v \cos \varphi; v_2 = v \sin \varphi$$

Зрозуміло, що ці складові вектора швидкості зубця А не є постійними.

Залежність від часу складової швидкості v_1 має пульсуючий характер (рис. 3.20 б), а складова v_2 змінюється за величиною і знаком. Причому, в момент входження в зачеплення наступного шарніра ($\varphi = \pi/Z + 2\pi n$) графік зміни складової v_2 має розрив, що відповідає миттєвій зміні напрямку руху ланцюга по вертикалі.

Таким чином, при сталій кутовій швидкості швидкість ланцюга в напрямку його руху буде змінною, виникають прискорення, а з ними сили інерції і динамічні навантаження. Крім того, в момент входження наступної ланки в зачеплення ролик ланцюга вдаряється по зубцю зірочки. Із виразів складових швидкості v_1 та v_2 можна побачити, що нерівномірність руху ланцюга залежить від кроку ланцюга і кількості зубців ведучої зірочки. Чим більше крок і менша кількість зубців зірочки, тим більша нерівномірність руху ланцюга і, відповідно, і динамічні навантаження під час роботи ланцюгової передачі.

Динаміка передачі

Колове зусилля передається зачепленням за рахунок тиску ролика на зубець зірочки. Його величина визначається потужністю передачі і швидкістю руху ланцюга: $F_t = P/v$. Це зусилля діє тільки у ведучій вітці ланцюга (рис. 3.21).

Натяг ланцюга від власної ваги залежатиме від погонної маси ланцюга, міжосьової відстані і кута нахилу передачі. Зрозуміло, що для вертикальної передачі зусилля натягу дорівнюватиме вазі ланцюга:

$$F_a = g \cdot q \cdot a$$

де g – прискорення вільного падіння; q – погонна маса ланцюга; a – міжосьова відстань передачі.

При інших кутах нахилу цей натяг можна визначити, користуючись елементами теорії гнучкої нитки:

$$F_q = \frac{g \cdot q \cdot a}{8 f} = K_f \cdot g \cdot q \cdot a,$$

де K_f приймає значення від $K_f = 1$ для вертикальної до $K_f = 6$ для горизонтальної передачі.

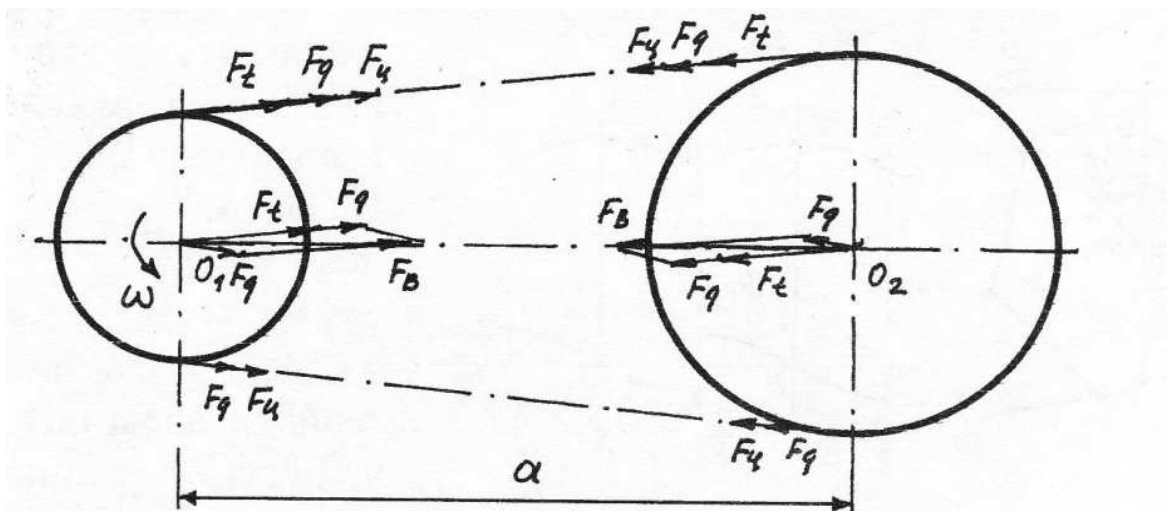


Рис. 3.21

На криволінійних ділянках руху ланцюга виникає відцентрова сила інерції $F_{ц}$, яка також натягує ланцюг, але не викликає суттєвої дії на опори валів. Цю силу можна визначити так:

$$F_{ц} = q \cdot v^2.$$

Відцентрова сила, що діє по всьому контуру ланцюга, визиває додаткове зношування шарнірів.

Таким чином, у ведучій вітці ланцюгової передачі діє таке загальне зусилля:

$$F_1 = F_t + F_q + F_{ц},$$

а у веденій вітці – $F_2 = F_q + F_{ц}$

Частина третя

Оскільки відцентрова сила не передається на вали, а зусилля у ведучій вітці F_1 набагато більше, ніж зусилля у веденій F_2 , то сила, що діє на вали, дорівнює:

$$F_B \approx F_t + 2 F_a$$

Вклад зусилля F_a у навантаження F_B складає від 5 до 15%, тому сила, що діє на вали, можна наближено визначити: $F_B \approx 1,15F_t$

3.4.4. Розрахунок і критерії працездатності ланцюгової передачі

У ланцюговій передачі можуть виникати такі види пошкоджень:

1. зношування шарнірів ланцюга, яке призводить до збільшення кроку;
2. руйнування пластин від втоми матеріалу;
3. викришування і сколювання роликів;
4. зношування зубців зірочки.

Найбільш характерним і визначальним з точки зору розрахунків на міцність є зношування шарнірів ланцюга. Воно залежить від питомого тиску в шарнірі і умов експлуатації. Умову міцності можна записати у вигляді:

$$pK_e \leq [p], \quad (3.46)$$

де p – питомий тиск у шарнірі; $K_e = K_d K_{рег} K_n K_{маш} K_{реж} K_a$ – коефіцієнт експлуатації, який залежить від умов роботи:

$K_d = 1 \dots 1,5$ – динамічний коефіцієнт, що враховує режим роботи машини, до привода якої застосовується передача;

$K_{рег}$ – коефіцієнт, який враховує спосіб регулювання провисання ланцюга ($K_{рег} = 1$ для передач з міжосьовою відстанню, яка регулюється; $K_{рег} = 1,1$ для передач з підтримувальним роликом або зірочкою;

$K_{рег} = 1,25$ для передач без регулювання провисання ланцюга); K_n – коефіцієнт нахилу передачі до горизонту;

$K_{маш}$ – коефіцієнт мащення ланцюга ($K_{маш} = 0,8$ при роботі ланцюга в масляній ванні або при мащенні від насоса, $K_{маш} = 1$ при регулярному крапельному мащенні і $K_{маш} = 1,5$ для періодичного мащення);

$K_{реж} = 1 \dots 1,45$ – коефіцієнт режиму роботи передачі;

$K_a = 0,9 \dots 1,25$ – коефіцієнт довжини ланцюга;

$[p]$ – допустимий питомий тиск в шарнірах роликового ланцюга (див. табл. 3.5).

Питомий тиск у шарнірах ланцюга дорівнює (див. рис. 3.19):

$$p = \frac{F_t}{S} = \frac{F_t}{B d}$$

де S – площа опорної поверхні шарніра. Для більшості типорозмірів ланцюгів $B d \approx 0,28 t^2$. З урахуванням формул (3.42) і (3.43) будемо мати для проектувальних розрахунків:

Таблиця 3.5

Кутова швидкість обертання ведучої зірочки, рад/с	Допустимий питомий тиск для кроку t , Мпа			
	12,7...15,875	19,05...25,4	31,75...38,1	44,45...50,8
5	35	35	35	35
20	31,5	30	29	26
40	28,5	26	24	21
60	26	23,5	21	17,5
80	24	21	18,5	15
100	22,5	19	16,5	-
120	21	17,5	15	-
160	18,5	15	-	-
200	16,5	-	-	-
240	15	-	-	-
280	14	-	-	-

$$t \geq 28 \sqrt[3]{\frac{P K_e}{Z_1 \omega_1 [p] k_p'}} \quad (3.47)$$

де k_p – коефіцієнт рядності ланцюга для багаторядних ланцюгів ($k_p=1$ для одно-, $k_p=1,7$ для дво- і $k_p=2,5$ для трирядного ланцюгів).

3.5. Фрикційні передачі і варіатори

3.5.1 Загальна характеристика передачі

Фрикційною передачею називається механізм, призначений для передачі руху від однієї ланки до іншої за допомогою сил тертя, які виникають між притисненими один до одного елементами (дисками, циліндрами, конусами). Такі передачі застосовуються в приладах для забезпечення плавності руху, безшумного та безударного включення і, в основному, при обертальному русі.

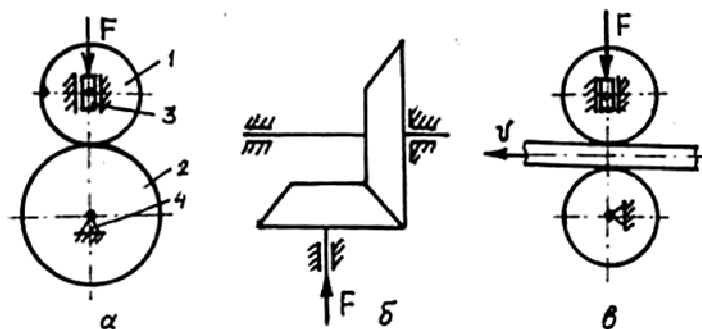


Рис. 3.22

Перевагами фрикційних передач є простота конструкції, плавність і безшумність, зручне регулювання частоти обертання веденої ланки.

Частина третя

Недоліки передач пов'язані з порівняно великими навантаженнями на опори і взаємним ковзанням котків.

Найпростіша передача складається з ведучого 1 і веденого 2 котків (рис. 3.22 а) і двох опор 3 і 4, одна з яких може переміщуватись для створення притискування котків. Ланки передач можуть мати не тільки циліндричну (рис. 3.22 а), але і конічну (рис. 3.22 б), сферичну та інші форми.

В деяких приладах (наприклад, стрічкопротяжних пристроях), транспортуючих машинах використовують фрикційні механізми, які перетворюють обертальний рух ведучого котка в поступальний веденого елемента (рис. 3.22 в).

Притискування котків є необхідною умовою роботи фрикційних передач. Воно може бути реалізовано постійним або змінним зусиллям. Постійне притискування отримують за рахунок попередньої деформації пружних елементів системи (наприклад, котків, пружин, тощо). Регульоване змінне притискування потребує спеціальних притискних пристроїв.

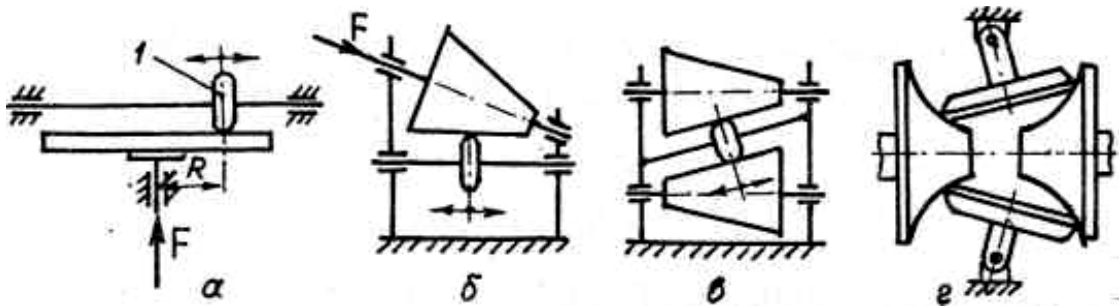


Рис. 3.23

Передачі, зображені на рис. 4.22, мають постійні передаточні числа. Але за допомогою котків можна створити передачу (механізм) із змінним передаточним числом – *варіатор*.

На (рис. 3.23 а) показаний лобовий варіатор, у якого ведучий коток 1 може переміщуватись вздовж осі (показано стрілками). Передаточне число такого механізму буде безперервно змінюватись із зміною радіуса R .

Фрикційні варіатори відрізняються конструктивним виконанням. Їх застосовують достатньо широко для забезпечення безступеневого регулювання швидкості у верстатобудуванні, сільськогосподарських і інших машинах.

Фрикційні варіатори можуть передавати потужність до 10 кВт, оскільки при більших потужностях важко забезпечити необхідне притискування котків.

3.6. Пасові передачі

3.6.1. Загальні відомості

Пасова передача складається з ведучого і веденого шківів, паса, надітого на шків з попереднім натягом, і натяжного пристрою.

За видом поперечного перерізу розрізняють плоскі, клинові, поліклинові, круглі та зубчасті паси. Найпоширенішими в техніці є плоскі та клинові паси. Плоскі паси дозволяють за рахунок ширини змінювати навантажувальну здатність. Клинові паси мають більшу навантажувальну здатність, ніж плоскі. Їх застосовують, як правило, по кілька штук. Використання кількох пасів меншого перерізу замість одного зменшує габарити всієї передачі та напруження згину в пасах. Круглі паси застосовують для передачі малих потужностей, частіше всього у приладобудуванні. Зубчасті паси мають переваги як пасових, так і зубчастих передач, але вони дорожчі від плоских і клинових.

Перевагами пасових передач є:

- 1) можливість передачі руху на значні відстані (до 15 м);
- 2) плавність і безшумність роботи;
- 3) запобігання перевантаженням;
- 4) компенсація ударних навантажень і вібрацій;
- 5) простота конструкції та експлуатації.

До недоліків пасових передач належать:

- 1) підвищені габарити (приблизно в 5 разів більші, ніж у зубчастих передач при тих же потужностях);
- 2) непостійність передаточного числа через пружне ковзання паса; підвищені навантаження на вали і опори (навіть у неробочому стані);
- 3) низька довговічність пасів (до 1000...5000 год.).

Основним критерієм працездатності пасових передач є їх тягова здатність. Додатково паси перевіряють на довговічність, яка залежить від частоти обертання паса навколо шківів.

3.6.2. Конструкція і матеріали пасових передач. Плоскі паси

Найпоширенішими є гумотканинні паси (ДСТУ 23831-79). Вони складаються з кількох шарів (більше 3) бавовняної тканини (бельтінгу), зв'язаних між собою вулканізованою гумою. Тканина паса несе основне навантаження. Гумовий прошарок зв'язує шари, захищає від пошкоджень і підвищує коефіцієнт тертя між пасом і шківом. Ширина пасів знаходиться в межах від 20 до 1200 мм.

За способом укладання шарів у перерізі паса розрізняють тип А (нарізний), Б (пошарово завернутий) і тип В (спірально завернутий) (рис. 3.24 а в). Гумотканинні паси допускають лінійну швидкість руху до 30 м/с.

Частина третя

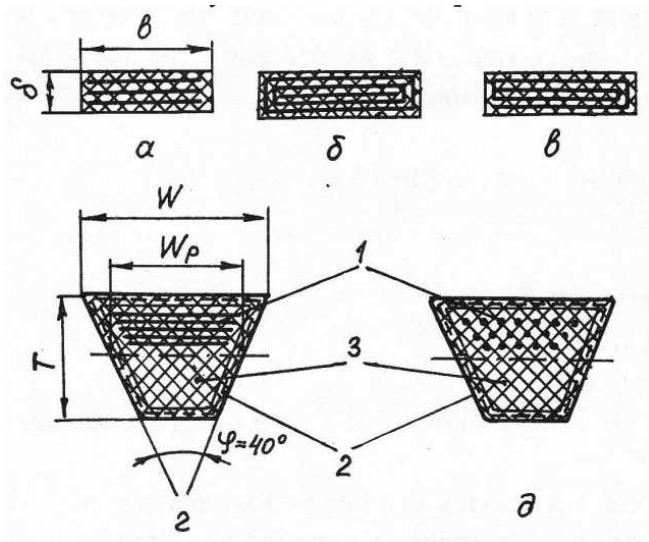


Рис. 3.24

Синтетичні паси мають високу міцність, зносостійкість, допускають швидкості до 50...75 м/с.

Клинові паси виготовляють з кутом профілю $f = 40^\circ$ (рис. 3.24 г). Це забезпечує збільшення зчеплення паси з шківом приблизно в 3 рази. Клинові паси складаються (рис. 3.24 г,д):

1 – корд у вигляді шнурів з віскози, капрону (кордшнурові паси) чи тканини (кордтканинні паси), розміщений по нейтральній лінії перерізу. Корд сприймає основне навантаження.

2 – обкладка паси у вигляді кількох шарів прогумованої тканини.

3 – гума.

Умовно переріз клинового паси поділяється на шар розтягу (верхня частина перерізу) і шар стиску (нижня частина перерізу). У цих шарах мають місце відповідні напруження при згині паси.

Клинові паси (ДСТУ 1284.1-80 і ДСТУ 1284.3-80) випускають семи перерізів (табл. 3.6). При цьому переріз Е приймати при проектуванні нових передач не рекомендується.

Клинові паси випускають безконечними зі стандартною довжиною по нейтральному шару паси від 400 мм (тип 0) до 10600 мм (для типів В, Г, Д).

Таблиця 3. 6. Розміри перерізу клинових пасів

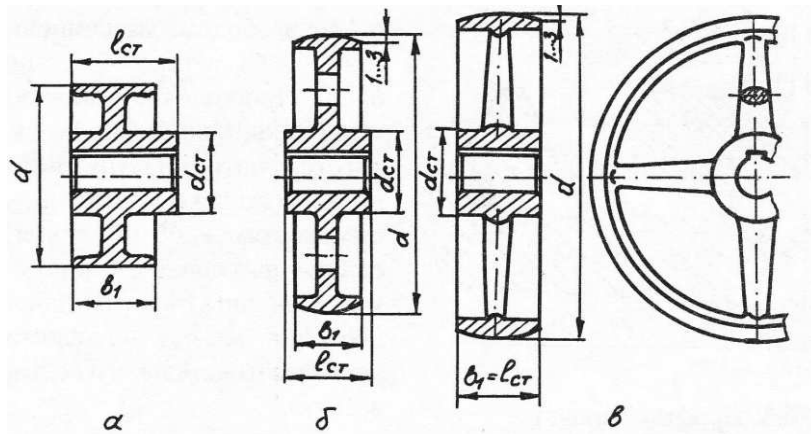
Тип паси	W_p , мм	W , мм	T , мм	A , мм ²	ϕ
0	8,5	10,0	6,0	47	$40^\circ \pm 1^\circ$
А	11,0	13,0	8,0	81	
Б	14,0	17,0	10,5	133	
В	19,0	22,0	13,5	230	
Г	27,0	32,0	19,0	476	
Д	32,0	38,0	23,5	692	
Е	42,0	50,0	30,0	1172	

A – площа поперечного перерізу пасу

Шкіряні плоскі паси мають досить добрі експлуатаційні властивості, вони довговічні, допускають швидкість руху до 40...45 м/с, але їх застосування обмежено через дефіцитність матеріалу.

Бавовняні плоскі паси використовують для передач у приладобудуванні за невеликих потужностей. Перспективними є синтетичні паси на основі поліаміду (СТУ 17-969-84).

Шків пасових передач складається з обода, який безпосередньо контактує з пасом, маточини, і диска (рис. 3.25 а б) чи спиць (рис. 3.25 в), які з'єднують між собою маточину і шків. При цьому спиці (4 або 6 шт.), еліптичного перерізу, виготовляють у шківках з діаметрами більше 400...500 мм.



Діаметри шківів мають відповідати стандартному ряду.

Рис. 3.25

Для запобігання сповзанню паса зі шківів під час роботи один із шківів плоско пасової передачі, як правило більший, виготовляють по робочій поверхні випуклим зі стрілою випуклості 1...3 мм (див. рис. 3.25).

Розміри канавок шківів для клинових пасів (рис. 4.26) представлені в довідниках конструктора залежно від типорозміру паса. При цьому кут канавки шківка приймається 34° для малих шківів та 36°, 38° і 40° для шківів більшого діаметра. Це пов'язано з тим,

що при огинанні пасом шківка нижні шари

перерізу паса стискаються, верхні розтягуються, і кут перерізу паса зменшується.

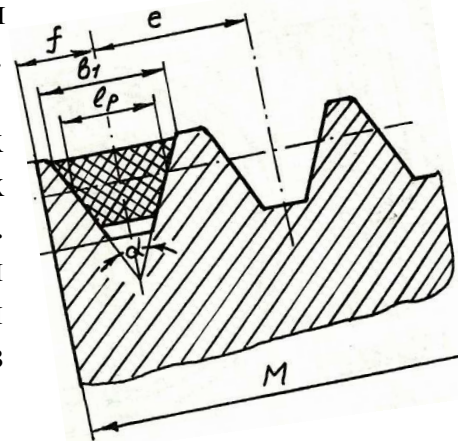


Рис. 3.26

Шківні клинопасових передач виготовляються монолітними з ободом, маточиною і диском, а також із спицями. При колових швидкостях точок обода до 30 м/с шківні, як правило, виготовляють із чавуну. Зварні сталеві шківні із сталі Ст.3 застосовуються при швидкостях до 60 м/с, шківні із легких сплавів на основі алюмінію виготовляють при швидкостях до 80...100 м/с. Для виготовлення шківів малих діаметрів можна використовувати і неметалеві матеріали (полімери, композити).

3.6.3. Механіка пасових передач

Розглянемо схему пасової передачі (рис. 3.27) з діаметрами шківів d_1 і d_2 розміщених на відстані a . Лінійні швидкості паса у ведучій та веденій вітках визначаються так:

$$v_1 = d_1 \omega_1 / 2 = d_2 \omega_2 / 2 \quad (3.48)$$

Частина третя

де ω_1 і ω_2 – кутові швидкості ведучого і веденого шківів, відповідно.
Внаслідок пружного ковзання паса ці швидкості будуть різними:

$$v_2 = v_1 (1 - \varepsilon), \quad (3.49)$$

де ε – коефіцієнт пружного ковзання паса (при розрахунках приймають $\varepsilon=0,01\dots0,02$).

Виходячи з визначення передаточного числа і з урахуванням виразів (3.48) і (3.49), можна записати:

$$U = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1/d_1}{v_2/d_2} = \frac{d_2}{d_1 (1-\varepsilon)} \quad (3.50)$$

Розглянемо детальніше причини і фізичний зміст пружного ковзання паса.

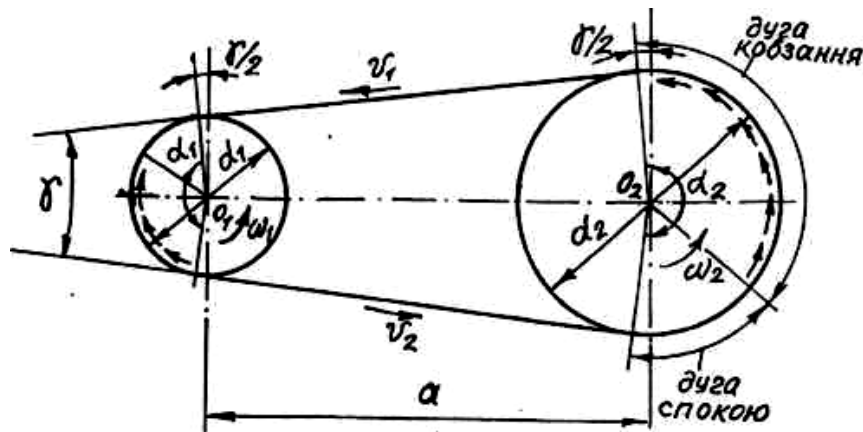


Рис. 3.27

У ведучій вітці передачі зусилля розтягу паса буде більше, ніж у веденій (більш детально про це буде сказано далі). Тому видовження паса у ведучій вітці також буде більше, ніж у веденій. Зміна довжини паса відбуватиметься протягом дуг обхвату, α_1 і α_2 . Причому на цих дугах можна відмітити, так звані, дуги спокою, де різниця у натягу паса не перевищує зусилля тертя між пасом і шківом (ковзання паса відсутнє), і дугу ковзання, де пас змінює своє видовження.

При проектуванні пасових передач визначаються такі геометричні параметри передачі: кут γ між вітками паса; кути обхвату α_1 і α_2 . довжина паса L і міжосьова відстань a .

З геометричних міркувань можна одержати:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{d_2 - d_1}{2a}$$

Тоді, з урахуванням того, що кут γ малий, можна записати:

$$\gamma \approx \frac{d_2 - d_1}{a} \text{ (рад)} = 57^\circ \frac{d_2 - d_1}{a} \text{ (град)}$$

Кути обхвату α_1 і α_2 для передач без натяжних або відтяжних роликів:

$$\alpha_1 = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 57^\circ \frac{d_2 - d_1}{a}$$

$$\alpha_2 = 180^\circ + \gamma = 180^\circ + 57^\circ \frac{d_2 - d_1}{a} \quad (3.51)$$

Геометрична довжина паса:

$$L = 2 a \cos \frac{\gamma}{2} + \pi \frac{d_2 + d_1}{2} + \gamma \frac{d_2 - d_1}{2}$$

З урахуванням того, що $\cos \frac{\gamma}{2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$, матимемо:

$$L \approx 2 a + \pi \frac{d_2 + d_1}{2} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4 a} \quad (3.52)$$

У разі використання нескінчених пасів довжиною L у передачах без роликів міжосьову відстань визначимо із формули:

$$a = \frac{1}{4} \left[L - \pi d_{cp} + \sqrt{(L - \pi d_{cp})^2 - 8 \Delta^2} \right] \quad (3.53)$$

$$d_{cp} = (d_2 + d_1)/2; \Delta = (d_2 - d_1)/2.$$

Визначимо сили, що діють у пасовій передачі (рис. 3.28).

Колова сила у пасовій передачі:

$$F_t = \frac{2 T_1}{d_1} = \frac{P}{v} \quad (3.54)$$

де T_1 – крутильний момент на ведучому валу;

P – потужність передачі.

Колове зусилля викликає в пасі напруження σ_t , яке називається корисним, оскільки воно передає крутильний момент від ведучого шківів до веденого:

$$\sigma_t = F_t / A, \quad (3.55)$$

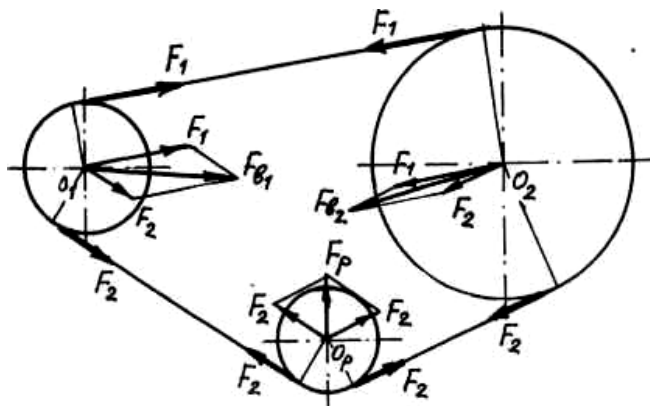


Рис. 3.28

Частина третя

де A – площа перерізу паса.

З умови рівноваги одного із шківів (суми моментів відносно осі шківа), одержимо:

$$(F_1 - F_2) \frac{d}{2} = F_t \frac{d}{2}; \quad F_1 - F_2 = F_t, \quad (3.56)$$

де F_1 і F_2 – зусилля натягу паса у ведучій і веденій вітках, відповідно.

З другого боку, геометрична довжина паса залишається незмінною, і можна записати:

$$F_1 + F_2 = 2 F_0 \quad (3.57)$$

Де F_0 – зусилля попереднього натягу паса, необхідне для утворення робочої сили тертя в передачі.

Розв'язавши систему рівнянь (3.56) і (3.57), отримаємо:

$$F_1 = F_0 + F_t/2; \quad F_2 = F_0 - F_t/2; \quad . \quad (3.58)$$

Зусилля F_0, F_1, F_2 викликають напруження розтягу паса по всій його довжині:

$$\sigma_0 = F_0/A; \quad (3.59)$$

$$\sigma_{p1} = F_1/A; \quad \sigma_{p2} = F_2/A. \quad (3.60)$$

Напруження попереднього натягу, як правило, приймають $\sigma_0 = 1,6 \dots 2,4$ МПа залежно від типу паса, умов роботи і способу натягу. Напруження від зусиль F_1 і F_2 умовно показані на рис. 3.29.

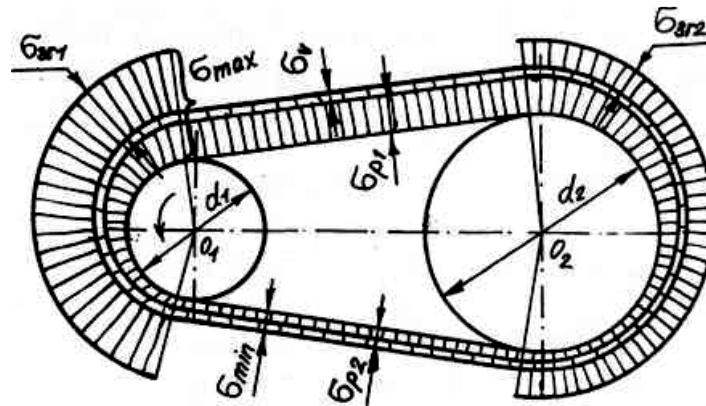


Рис. 3.29

На криволінійних ділянках паса, як і в ланцюговій передачі, діють відцентрові сили інерції:

$$F_v = m v^2, \quad (3.61)$$

де m – погонна маса паса; v – швидкість паса.

Для пасових передач це зусилля буде значним лише при швидкостях, більших 20 м/с. Сила інерції F_v викликає напруження розтягу паса, яке поширюється на всю його довжину (рис. 3.29):

$$\sigma_v = \frac{F_v}{A} = mv^2 / A = qv^2 \quad (3.62)$$

де q – питома вага матеріалу паса.

Пас, огинаючи шків, згинається до радіуса кривини, який дорівнює радіусу шківа. При цьому в пасі виникають напруження згину, що залежать від товщини паса і діаметра шківа:

$$\sigma_{зг} = E \frac{\delta}{d} \quad (3.63),$$

де E – модуль пружності паса; δ – товщина паса; d – діаметр шківа.

З формули (3.63) видно, що напруження згину є більшими на ведучому (меншому) шківі (рис. 3.30).

Максимальні напруження, які діють у пасовій передачі, дорівнюють:

$$\sigma_{max} = \sigma_{p1} + \sigma_v + E \frac{\delta}{d_1}$$

Мінімальні напруження

$$\sigma_{min} = \sigma_{p2} + \sigma_v$$

За для порівняння абсолютних величин напружень у пасовій передачі, наведемо приклад. Як вже відмічалось, напруження попереднього натягу паса $\sigma_0 = 1,6 \dots 2,4$ МПа залежно від умов роботи.

Напруження від відцентрових сил інерції для прогумованих пасів $\sigma_v \approx 0,1$ МПа при швидкості паса $v = 10$ м/с і $\sigma_v \approx 0,4$ МПа при $v = 20$ м/с. Напруження згину $\sigma_{зг} = 1,6$ МПа при співвідношенні $d/\delta = 40$ і $\sigma_{зг} = 8$ МПа при $\frac{d}{\delta} = 8$. Як видно, напруження згину достатньо великі і залежать від співвідношення між діаметром шківа і товщиною паса.

Щоб обмежити величину напружень згину, отже, збільшити довговічність паса, рекомендується при проектуванні плоскопасових передач приймати таке співвідношення

$$d/\delta \geq 30 \dots 40. \quad (3.64)$$

Для клинопасових передач з тих же міркувань рекомендується вибирати мінімальний діаметр шківа залежно від типу паса (висоти його перерізу), табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Переріз паса	0	А	Б	В	Г	Д
Найменший діаметр шківа, мм	63	90	125	200	315	500

3.6.4. Критерії працездатності і розрахунок пасових передач

Основний розрахунок пасових передач на тягову здатність паса базується на кривих ковзання (рис. 3.30), які показують графічну залежність відносного ковзання від коефіцієнта тяги φ .

Частина третя

Коефіцієнт тяги

$$\varphi = \frac{F_t}{2 \times F_0} = \frac{\sigma_t}{2 \times \sigma_0} \quad (3.65)$$

характеризує ту частину попереднього натягу, яка використовується для передачі навантаження або характеризує рівень завантаження передачі. Криві ковзання отримують експериментально. При цьому до певного критичного значення φ_k відносно ковзання паса є пропорційне коефіцієнту тяги. Далі величина пружного ковзання різко збільшується і при $\varphi = \varphi_{\max}$ настає повне буксування паса. На рис. 3.30 також зображена залежність к.к.д. передачі від коефіцієнта тяги. Максимального значення к.к.д. досягає при φ_k . Далі він різко падає і теоретично при $\varphi = \varphi_{\max}$ дорівнює нулю.

Дослідження тягової здатності пасових передач проводять при типових умовах: швидкості паса $v = 10$ м/с, куті обхвату $\alpha = 180^\circ$ (передаточне число передачі $u=1$), горизонтальній передачі та рівномірному навантаженні.

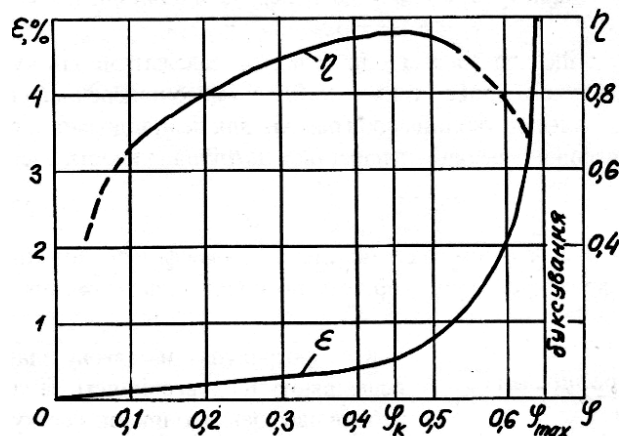


Рис. 3.30

При цьому визначається корисне напруження σ_t . Для плоскопасової передачі воно дорівнює:

$$\sigma_t = C_1 + C_2 \frac{\delta}{d}; \quad (3.66)$$

де C_1 і C_2 – коефіцієнти, які залежать від попереднього натягу σ_0 ;

δ – товщина паса; d – діаметр шківа.

При реальних умовах роботи дійсне корисне напруження у пасі

$$\sigma_{dt} = \sigma_t C_\alpha C_v C_0 C_p \quad (3.67)$$

де $C_\alpha = 1 - 0,003 (180^\circ - \alpha_1)$ – коефіцієнт кута обхвату ведучого шківа;

$C_v = 1,04 - 0,0004 v^2$ – коефіцієнт, що враховує швидкість паса;

C_0 – коефіцієнт, що враховує спосіб натягу паса і розташування передачі (для передач з автоматичним натягом $C_0 = 1$, з періодичним перетягуванням паса

при куті нахилу передачі до горизонту до $60^\circ - C_0 = 1$, при $60...80^\circ - C_0 = 0,9$ і при куті $80...90^\circ - C_0 = 0,8$; C_P – коефіцієнт режиму роботи ($C_P < 1$), який залежить від типу машини, до якої застосовується передача, і кількості змін роботи на добу.

Виходячи з отриманого значення σ_{dt} , для плоскопасової передачі визначають ширину паса:

$$b = \frac{F_t}{\sigma_{dt} \delta} \quad (3.68)$$

де δ , як правило, визначається з умови (3.64).

У зв'язку з тим, що існує сім типорозмірів клинових пасів, то для кожного з них визначена потужність на підставі виразів (3.54) і (3.55), яку може передати один пас:

$$P_0 = F_{t0} v = \sigma_t A \omega_1 d_1 / 2.$$

Величина P_0 , що передається одним пасом, залежить від кутової швидкості, діаметра ведучого шківів і типу паса (площі його поперечного перерізу). Ці дані наводяться у вигляді таблиць або графіків для певної довжини паса.

Для клинопасової передачі визначається потрібна кількість пасів:

$$Z = \frac{P_1}{P_0 C_\alpha C_L C_Z C_P} \quad (3.69)$$

де P_1 – потужність на ведучому валу передачі; C_L – коефіцієнт довжини паса; C_Z – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу навантаження між пасами (табл. 3.8).

Таблиця 4.8

Кількість пасів у комплекті	C_Z
2...3	0,95
4...5	0,90
6	0,85

Крім розрахунку на тягову здатність, паси перевіряють на довговічність за кількістю перебігів паса навколо шківів за секунду:

$$i = v/L < i_{\max},$$

де $i_{\max} = 3...5$ 1/с – для плоских пасів, $i_{\max} = 10...20$ 1/с – для клинових пасів.

3.7. Розрахунок і конструювання валів механічних передач

3.7.1 Загальні відомості

Вали призначені для передачі крутного моменту вздовж своєї осі та підтримання деталей, що обертаються (зубчастих коліс, шківів, зірочок, напівмуфт тощо). Під час роботи вони підлягають деформаціям кручення, згину і розтягу (стиску). Силowymi факторами, що викликають вказані деформації, є зосереджені сили і моменти. Працездатність валів

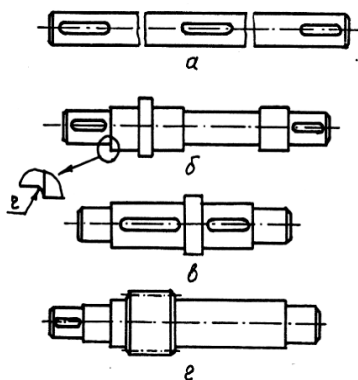


Рис. 3.31

визначається їх міцністю і жорсткістю, які, в свою чергу, залежать від матеріалу, його термообробки, конструкції вала і режимів навантаження.

Залежно від виду деформації, якій піддаються вали, їх умовно поділяють на прості (працюють в умовах кручення, згину, розтягу-стиску – вали передач); торсійні (працюють лише на кручення); осі (працюють лише на згин – підтримуючі вали).

Для передачі крутного моменту між агрегатами зі зміщеними в просторі осями вхідного і вихідного валів застосовують спеціальні гнучкі вали, які мають криволінійну геометричну вісь, що змінює свою форму в процесі роботи. Основна їх властивість – велика жорсткість на кручення і мала на згин, можливість передачі руху на значні відстані.

За геометричною формою осі вали поділяють на прямі і колінчасті. Колінчасті вали застосовують для перетворення зворотно-поступального руху в обертальний, наприклад, у двигунах внутрішнього згоряння.

Прямі вали можуть бути постійного діаметра (наприклад, трансмісійні, рис. 3.31 а), ступінчасті (рис. 3.31 б в) і виготовлені разом з зубчастими колесами (черв'яком) (рис. 3.31 г). Частици валів і осей, призначені для опор, називаються цапфами. Місця переходу від одного діаметра до іншого в ступінчастих валах виконують у вигляді галтелей (рис. 3.31 б).

3.7.2. Матеріали валів. Визначення допустимих напружень

Вибір матеріалу для виготовлення вала залежить від технологічних, конструктивних і експлуатаційних факторів. До технологічних належать хороша оброблюваність (механічна і термічна); до конструктивних – тип підшипників, відстань між опорами тощо; до експлуатаційних – режим роботи, наявність або відсутність ударних навантажень тощо.

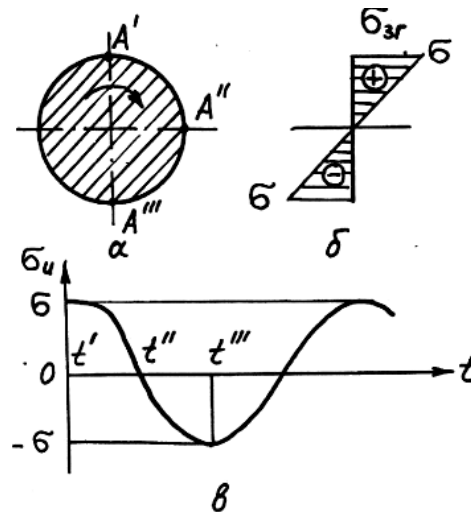


Рис. 3.32

Основними вимогами, які ставляться до матеріалів валів: можлива оброблюваність різанням, здатність сприймати динамічні навантаження, мінімальна чутливість до концентрації напружень і дешевизна. Цим вимогам задовольняють (див. табл. 3.1) вуглецеві сталі звичайної якості Ст4, Ст5, Ст6, вуглецеві конструкційні сталі Сталь 40, 45, 50, вуглецеві хромисті і хромонікелеві сталі Сталь 40Х, 40ХН та ін.

У деяких випадках для виготовлення валів (колінчасті вали) застосовують високоміцні чавуни з кулястим графітом.

Розглянемо зміну за часом нормальних напружень у валах. Під час роботи валів силові фактори, що діють на нього, практично в усіх випадках не змінюють свого напрямку. Тому розподіл нормальних напружень згину по перерізу вала (рис. 3.32 б) залишається постійним. Нехай у початковий момент часу точка A знаходиться в положенні A' . У цей момент нормальні напруження згину додатні і дорівнюють $+\sigma$.

При повороті вала на 90° точка A займе положення A'' , яке відповідає другому моменту часу. В цей момент точка A'' лежить на нейтральній осі вала (нейтральний шар), де нормальні напруження $\sigma = 0$.

При повороті вала ще на 90° у положення A''' напруження стиску дорівнюватиме $-\sigma$.

Таким чином, при обертанні вала нормальні напруження згину в ньому не постійні і змінюються за симетричним знакозмінним циклом (рис. 3.32 в).

У цьому випадку матимуть місце явище втоми матеріалу, і за небезпечні напруження при розрахунку валів потрібно приймати величину межі витривалості матеріалу σ_{-1} . Допустимі напруження в цьому випадку:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{-1}}{n_{-1}},$$

Частина третя

де $n_{-1} = 3,2 \dots 3,5$ – коефіцієнт запасу міцності при симетричному циклі зміни напружень.

3.7.3. Розрахунок валів передач

Залежно від наявності вихідних даних, ступеня відповідальності вузла (машини), що проектується, потрібної достовірності розрахунків на різних етапах проектування, можуть використовуватись такі різновидності розрахунків валів: орієнтовний, розрахунок за еквівалентним моментом (еквівалентними напруженнями), розрахунки на витривалість, жорсткість і коливання. При цьому вал розглядають як балку, розміщену на двох опорах (підшипниках), У процесі роботи вали підлягають деформаціям кручення, згину і розтягу (стиску). Напруження розтягу (стиску) враховується дуже рідко, оскільки їх внесок невеликий порівняно з іншими деформаціями.

Орієнтовний розрахунок валів

Як відомо, для визначення згинальних моментів необхідно мати такі вихідні дані: розрахункову схему навантаження вала, величини силових факторів (зусиль і моментів), а також відстані між характерними точками. Якщо необхідно визначити діаметр вала, використовують орієнтовний розрахунок. Він, як правило, застосовується на ранніх стадіях проектування. У цьому випадку для розрахунку використовують умову міцності вала на кручення:

$$\tau_{кр} = T/W_p \leq [\tau'_{Tp}], \quad (3.70)$$

де T – крутильний момент, що передається валом; W_p полярний момент опору перерізу вала; $[\tau'_{Tp}]$ – занижені допустимі напруження на кручення. Заниженням допустимих напружень враховується згинальний момент, що діє на вал. При розрахунках приймають $[\tau'_{Tp}] = 30$ МПа для вихідних кінців валів і $[\tau'_{Tp}] = 20$ МПа для інших ділянок вала.

Як відомо, для круглого перерізу полярний момент опору:

$$W_p = \pi d^3/16 \quad (3.71)$$

Якщо підставити в рівняння (3.72) значення W_p відповідно (3.73) і розв'язати його відносно діаметра вала, одержимо ;

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 T}{\pi [\tau'_{Tp}]}}$$

або з врахуванням того, що $\pi/16 \approx 0,2$, маємо:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2 [\tau'_{Tp}]}} \quad (3.72)$$

Одержане значення діаметра вала округлюють до найближчого більшого стандартного значення.

Розглянутий розрахунок носить допоміжний характер і не може бути остаточним, оскільки величина згинального моменту, що діє на вал, не може бути точно врахована в такому випадку.

Розрахунок вала за еквівалентним моментом

Більш точний розрахунок вала за еквівалентним моментом (еквівалентними напруженнями) проводиться, якщо відомі всі необхідні дані для визначення згинального моменту, що діє на вал.

В практиці проектування валів існує два, на наш погляд, рівноправні підходи до розрахунку в такому випадку. Перший полягає в тому, що спочатку проектують вал, тобто назначають з яких-небудь міркувань (наприклад, за результатами орієнтовного розрахунку) діаметри всіх ділянок вала і далі перевіряють міцність цього вала за еквівалентними напруженнями. За другим методом визначають діаметр вала в небезпечному перерізі, виходячи з величин силових факторів, що діють на вал, і далі проектують вал. В основі обох підходів лежить умова міцності при складному напруженому стані:

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{(\sigma_{\text{зг}} + \sigma_{\text{ст}})^2 + 3 \tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma_p] \quad (3.73)$$

де $\sigma_{\text{екв}}$ – еквівалентні напруження; $\sigma_{\text{зг}}$ – напруження згину; $\sigma_{\text{ст}}$ – напруження стиску; $\tau_{\text{кр}}$ – напруження кручення; $[\sigma_p]$ – допустимі напруження.

Таким чином, побудувавши епюри згинального і крутного моментів, що діють на вал, а також епюри подовжніх сил, перевіряють міцність вала в небезпечному перерізі за формулою (3.73). Напруження стиску, як відмічалось вище, можуть не враховуватись, так як їх внесок в еквівалентні напруження дуже малий. У разі не виконання умови (3.73) збільшують діаметр вала або змінюють матеріал для його виготовлення (термічну чи термохімічну обробку).

Нехтуючи напруженнями стиску, і з урахуванням того,

$$\text{що } \sigma_{\text{зг}} = \frac{M}{W}; \tau_{\text{кр}} = T/W_p$$

де $W \approx 0,1 d^3$, $W_p = 2W \approx 0,2 d^3$, а також, приймаючи, що $\sigma_{\text{екв}} = M_{\text{екв}}/W$, де $M_{\text{екв}}$ – еквівалентний згинальний момент, можна від виразу (3.73) перейти до наступного:

$$\sigma_{\text{екв}} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75 T^2}}{W} \leq [\sigma_p]$$

Звідки маємо, що:

$$M_{\text{екв}} = \sqrt{M^2 + 0,75 T^2} \quad (3.74)$$

Частина третя

а також

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{екв}}}{\pi [\sigma_p]}} \quad (3.75)$$

Якщо силові фактори, що діють на вал, не лежать в одній площині, під M розуміють сумарний згинальний момент, який визначається як геометрична сума моментів у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Розрахунок вала на витривалість

У процесі роботи валів напруження згину (а інколи і напруження кручення) мають змінний характер за часом. А тому на певному етапі роботи можуть виникати ознаки руйнування від втоми. Як правило, це поява в місцях концентрації напружень тріщин, які, збільшуючись у розмірах, призводять до руйнування вала. Найпоширенішими концентраторами напружень на валах є галтелі (рис. 3.33 а), виточки (рис. 3.33 б), наскрізні отвори (рис. 3.33 в), шпонкові пази (рис. 3.33 г), різьби або місця посадки деталей з натягом. На довговічність роботи валів впливає шорсткість поверхні, так як при більш "грубій" обробці тріщини втоми виникають на ранніх етапах експлуатації.

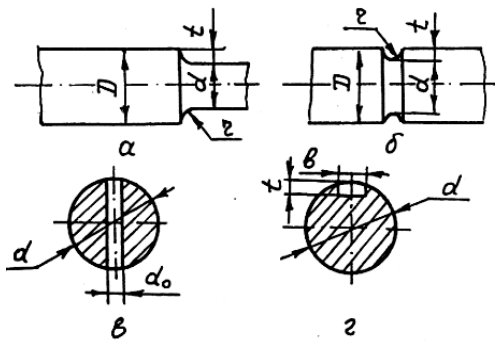


Рис. 3.33

Всі ці фактори враховують при розрахунку вала на витривалість (уточнений розрахунок). Його виконують після завершення конструювання вала, коли остаточно встановлені його форма, розміри і технічні умови на виготовлення.

Розрахунок зводиться до визначення в небезпечних перерізах (місцях концентрації напружень) дійсних запасів міцності n і порівнянні їх з допустимими:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n] \quad (3.76)$$

де n_σ і n_τ – коефіцієнти запасу міцності відповідно за нормальними і дотичними напруженнями.

Коефіцієнт запасу міцності $[n]$ приймають 1,3... 1,5 при високій точності розрахунків і достовірності результатів та 1,5...2,1 при недостатньо високій точності розрахунків, відсутності надійних статистичних даних про діючі навантаження і точного контролю механічних властивостей матеріалу.

Коефіцієнти n_σ і n_τ визначаються за формулами:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1\sigma}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} \quad (3.77)$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1\tau}}{\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\sigma} \beta} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} \quad (3.78)$$

де $\sigma_{-1\sigma}$ і $\tau_{-1\tau}$ – межі витривалості при симетричному циклі зміни відповідно нормальних і дотичних напружень; σ_a, τ_a – амплітудні значення відповідно нормальних і дотичних напружень; σ_m, τ_m – середні напруження циклів зміни навантажень; $\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$ – коефіцієнти, які характеризують чутливість матеріалу до асиметрії циклу ($\psi_{\sigma} = (2\sigma_{-1} - \sigma_0)/\sigma_0$). Як правило, приймають для вуглецевих м'яких сталей $\psi_{\sigma} = 0,05, \psi_{\tau} = 0$, для середньовуглецевих – $\psi_{\sigma} = 0,1, \psi_{\tau} = 0,05$, для легованих – $\psi_{\sigma} = 0,15$ і $\psi_{\tau} = 0,1$; K_{σ}, K_{τ} – ефективні коефіцієнти концентрації напружень відповідно на згин і кручення; $\varepsilon_{\sigma}, \varepsilon_{\tau}$ – масштабні коефіцієнти, що враховують вплив розміру перерізу вала (табл. 3.9); β – коефіцієнт, що враховує шорсткість поверхні вала.

Напруження згину у валах і осях, що обертаються, змінюються за симетричним циклом, для якого $\sigma_m = 0, \sigma_{\max} = \sigma_{\text{зг}} = M/W$. При постійному напрямку обертання вала з урахуванням зупинок і пусків машини можна вважати, що напруження кручення змінюється за пульсуючим циклом. У цьому випадку $\tau_m = \tau_a = 0,5 \tau_k = 0,5 T/W_p$. Для реверсивних валів приймають $\tau_m = 0, \tau_a = \tau_k = T/W_p$. Тут під $\sigma_{\text{зг}}$ і τ_k розуміють номінальні напруження.

3.9. Значення масштабних коефіцієнтів впливу розміру перерізу

Вид деформації	Значення ε для діаметра вала*							
	15	20	30	40	50	70	100	120
Згин (ε_{σ}) для вуглецевої сталі	0,95	0,92	0,88	0,85	0,81	0,76	0,70	0,61
Згин (ε_{σ}) для легованої сталі і кручення (ε_{τ}) для всіх сталей	0,87	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59	0,52

Для вала, який має поперечний отвір чи шпонкову канавку, напруження $\sigma_{\text{зг}}$ та τ_k визначаються за нетто-перерізом.

За наявності в одному і тому ж перерізі кількох концентраторів напружень у розрахунок приймається один з них, який має більше значення K_{σ} і K_{τ} .

Якщо після перевірки міцності умова (4.76) не виконується, зменшують концентрацію напружень у розглянутому перерізі за рахунок

Частина третя

зміни розмірів концентратора або змінюють матеріал чи параметрами термообробки.

Розрахунок вала на жорсткість

Крім міцності вала у багатьох випадках необхідно забезпечити його достатню жорсткість, оскільки від цього залежить працездатність розміщених на валу деталей (зубчастих коліс, підшипників, зірочок тощо).

Розрізняють жорсткість вала на згин і кручення. Перевірка жорсткості вала на згин зводиться до визначення прогинів f і кутів нахилу його пружної лінії (повороту перерізу) θ і порівнянні цих значень з допустимими величинами $[f]$ і $[\theta]$:

$$f \leq [f] \gg \theta \leq [\theta] \quad (3.79)$$

Прогини і кути повороту пружної лінії визначають за формулами опору матеріалів. При цьому вал розглядається як стрижень постійного перерізу діаметром $d_{зв}$. E – модуль пружності (для сталей $E = 2,15 \cdot 10^5$ МПа); J – момент інерції перерізу зведеного діаметра вала.

Для ступінчастого вала:

$$d_{зв} = \sqrt[4]{L / \sum_k L_k / d_k^4}$$

де L – загальна довжина вала; L_k і d_k – довжина і діаметр k -ї ділянки вала.

При визначенні прогинів і кутів повороту в разі одночасної дії декількох силових факторів використовують принцип суперпозиції, тобто, визначають f та θ від кожного навантаження окремо і додають їх з урахуванням напрямку.

Допустимий прогин вала, наприклад, у місці встановлення зубчастих коліс $[f] = (0,01 \dots 0,03) m$, де m – модуль зачеплення зубчастих коліс. Допустимі значення кута нахилу пружної лінії в місці посадки зубчастих коліс і на опорах ковзання $[\theta] = 0,001$ рад, в місцях посадки радіальних підшипників – 0,01 рад, сферичних шарикопідшипників – 0,05 рад.

Розрахунок на жорсткість при крученні зводиться до визначення відносного кута закручування вала:

$$\varphi = \frac{T}{G J_p} \leq [\varphi] \quad (3.80)$$

де T – крутильний момент; G – модуль пружності при зсуві; J_p – полярний момент інерції перерізу зведеного діаметра вала; $[\varphi]$ – допустимий відносний кут закручування.

Величини $[\varphi]$ в різних галузях машинобудування різні. У верстатобудуванні, наприклад, для довгих ходових валів важких станків приймають $[\varphi] = 5'$ на 1 м довжини вала, для трансмісійних валів

механізмів пересування мостових кранів – $[\varphi] = 15 \dots 20'$ на 1 м. У деяких випадках, наприклад, для карданних валів автомобілів, кут $[\varphi]$ приймають рівним декільком градусам на 1 м довжини.

Розрахунок вала на коливання

У процесі роботи машини реально відбуваються коливання її вузлів, пов'язані з дією зовнішніх навантажень, незбалансованістю деталей тощо. Тому в деяких випадках виникає необхідність розрахунку вала на коливання. Будь-яка механічна система має власну частоту коливання, яка залежить від конструкції, жорсткості та маси системи. Для двоопорних валів частота власних коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{f_{cm}}}, \quad (3.81)$$

де c – жорсткість вала на згин; m – зведена маса вала; f_{cm} – статичний прогин вала.

У випадку, коли частота зовнішньої збурювальної сили збігається з частотою власних коливань системи, виникає явище резонансу, при якому різко збільшується амплітуда коливань всієї системи, що може призвести до руйнування.

Частіше за все збурювальною силою, що викликає поперечні коливання вала, є відцентрова сила інерції, яка виникає внаслідок зміщення відносно осі вала центра ваги посадженої деталі. Частота зміни напрямку сили інерції дорівнює частоті обертання вала. Тому для забезпечення надійної роботи машини рекомендується робочу частоту обертання вала обирати в інтервалі $(0,7 \dots 1,3) \omega_0$. Тут ω_0 – частота вільних (власних) коливань вала (резонансна частота). Для валів, які працюють в дорезонансному режимі, частоту власних коливань системи намагаються зробити максимальною, збільшуючи жорсткість коливальної системи вал – опори, а для валів, що працюють у зарезонансному режимі (наприклад, вали центрифуг) – зменшують жорсткість, щоб вал проходив резонанс на якомога меншій частоті, що знижує динамічні навантаження при переході резонансної частоти.

3.7.4. Основи конструювання валів

Форма вала залежить від його призначення. Вона повинна забезпечувати зручність складання вузла, технологічність виготовлення вала, повинна передбачати ділянки для опор, посаджених деталей тощо. Вали частіше всього виготовляють ступінчастими, що зручно при складанні вузла, бо уступи валів можуть сприймати великі осьові зусилля.

Бажано, щоб кожна нерознімна деталь, яка закріплюється на валу, проходила по валу до своєї посадочної поверхні без натягу, щоб запобігти пошкодженню поверхонь і послабленню посадок.

Частина третя

Діаметри посадочних поверхонь під маточини зубчастих коліс, шківів, зірочок, півмуфт та інших деталей вибирають із стандартного ряду діаметрів, діаметри під підшипники кочення – із стандартного ряду внутрішніх діаметрів підшипників. Перепад діаметрів ступенів вала повинен бути мінімальний, але достатній для сприйняття осьових зусиль при заданих радіусах заокруглень і розмірів фасок. Перепад діаметрів ступенів вала за наявності призматичних шпонок бажано вибирати таким, щоб мати можливість розбирати вузол без видалення шпонок із вала

Якщо ступінчастий вал по довжині має декілька шпонкових канавок, то для зручності його виготовлення канавки розміщують в одній площині і по можливості приймають однакового перерізу.

Цапфи (шийки) валів для підшипників кочення виготовляють, як правило, циліндричними, інколи з різьбою або іншими засобами для кріплення кілець підшипника. Шорсткість поверхні цапфи – (1,25...0,63) Ra. Поле допуску на виготовлення цапф (при обертанні внутрішнього кільця підшипника) приймають кб.

Посадочні поверхні під маточини деталей, посаджених на вал, виконують циліндричними (рідко конічними). Зубчасті, черв'ячні колеса та зубчасті муфти встановлюються на валах з посадками H7/p6, H7/g6 (при важких навантаженнях ударного типу – H7/g6, H/s6); шків та зірочки – з посадками H7/js6, H7/h6; розпірні втулки – H7/js6, H7/h6, H7/h7. Шорсткість поверхні під ці деталі – (2,5...1,25) Ra.

Місця переходу від одного діаметра до іншого в ступінчастих валах виконують з канавкою для виходу шліфувального круга (шириною 3 мм і глибиною 0,25 мм для діаметрів 10...50 мм) або з галтеллю. Канавки створюють значну концентрацію напружень і знижують міцність валів. При конструюванні треба враховувати, що чим більший радіус галтелі r і менша різниця діаметрів ступенів вала, тим менша концентрація напружень у галтелі.

3.8. Підшипники ковзання і підшипники кочення

3.8.1 Розрахунок і застосування підшипників ковзання

Підшипники є опорами для валів і осей, що обертаються. За видом тертя вони поділяються на підшипники ковзання і кочення.

Підшипники ковзання в сучасному машинобудуванні застосовують у тих випадках, коли підшипники кочення використовувати недоцільно або взагалі неможливо:

- а) при необхідності застосування рознімних підшипників, наприклад, для колінчастих валів; при великих колових швидкостях ($V > 30$ м/с);
- б) при роботі у воді, інших агресивних середовищах тощо;

в) у машинах, які потребують особливої точності та можливості регулювання зазорів. Залежно від напрямку зусиль, що сприймаються підшипником, розрізняють радіальні (рис. 3.34 а), радіально-упорні та упорні (рис. 3.34 б) підшипники ковзання.

Під час роботи підшипника виникає тертя між його елементами, яке перетворюється у теплову енергію і підвищує температуру підшипника. Для нормальної роботи підшипника ковзання

необхідно виконання умови балансу тепловиділення та енергії, яка відводиться, тому що основною причиною руйнування підшипників ковзання є перегрівання.

Робота підшипника ковзання супроводжується зношуванням його елементів. Інтенсивність зношування, яка визначає довговічність роботи підшипника, залежить від питомого тиску і умов експлуатації. Тому підшипники ковзання розраховують за умовним тиском:

$$p = \frac{F}{A} \leq [p], \quad (3.82)$$

де F – зусилля, що діє на підшипник (рис. 3.35); A – площа опорної поверхні. Проте, для радіального підшипника, представленого на рис. 3.35 а, $A = d l$, тобто, в розрахунок приймається площа проекції опорної поверхні; для упорного підшипника (рис. 3.34 б)

$A = \pi \frac{(D^2 - d^2)}{4}$; $[p]$ – допустимий тиск у підшипнику (залежно від матеріалу підшипника ковзання $[p] = 5 \dots 15$ МПа).

Умова балансу теплової енергії в підшипниковому вузлі у спрощеному вигляді:

$$p v \leq [p v], \quad (3.85)$$

де v – колова швидкість ковзання.

Величина $p v$ залежно від матеріалу знаходиться в межах $[p v] = 10 \dots 15$ МПа м/с.

Цей розрахунок дозволяє запобігти перегріванню і заїданню підшипника.

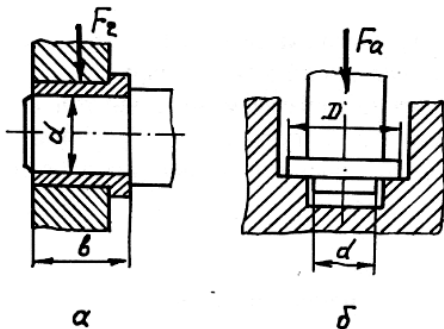


Рис. 3.34

Матеріали вкладишів підшипників ковзання мають мати: малий коефіцієнт тертя; достатню зносостійкість; високі механічні властивості, особливо опір крихкому руйнуванню.

Такими матеріалами є бронзи, чавуни, бабіти, пластмаси, металокераміка. Бронзи мають хороші антифрикційні властивості. Для виготовлення вкладишів застосовують олов'яні (Бр О10Ф1) і олов'яно-цинково-свинцеві (Бр 04Ц4С17, Бр 04Ц7С5) бронзи. Недоліками бронзи є велика зношуваність і можливість корозії.

Антифрикційні чавуни (АСЧ1...АСЧ6) застосовують для

Частина третя

середньонавантажених тихохідних підшипників. Ці матеріали погано припрацьовуються, тому потребують більш точного монтажу і постійного мащення.

Бабіти (сплави на основі олова або свинцю) добре зарекомендували себе як матеріали для підшипникових вузлів тертя ковзання внаслідок хороших антифрикційних властивостей і припрацьовування. Недоліками бабітів є їх крихкість, яка обмежує застосування у машинах ударної дії, і висока вартість.

Вкладиші легконавантажених і тихохідних механізмів можуть виготовлятися із металокераміки (матеріал, який отримують із порошків пресуванням і спіканням) і різних пластмас. Перевагою цих матеріалів є можливість їх роботи в умовах недостатнього мащення.

3.8.2. Класифікація і характеристики підшипників кочення

Підшипники кочення дуже поширені внаслідок низьких втрат на тертя (коефіцієнт тертя $f=0,0015\dots 0,006$), які на порядок нижчі за втрати в підшипниках ковзання. Крім того, підшипники кочення достатньо надійні і зручні. До того ж при масовому виробництві вони досить дешеві.

Як правило, підшипники кочення (рис. 3.35) складаються з внутрішнього 1 і зовнішнього 2 кілець з біговими доріжками, тіл кочення 3 і сепараторів 4, які розділяють і спрямовують тіла кочення. У деяких випадках одне або обидва кільця можуть бути відсутніми.

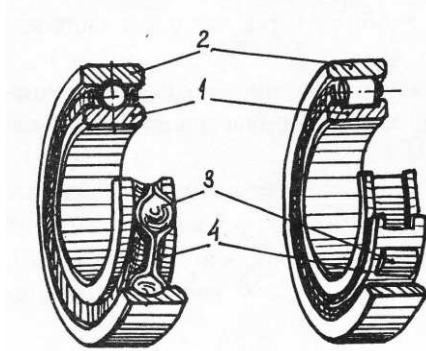


Рис. 3.35

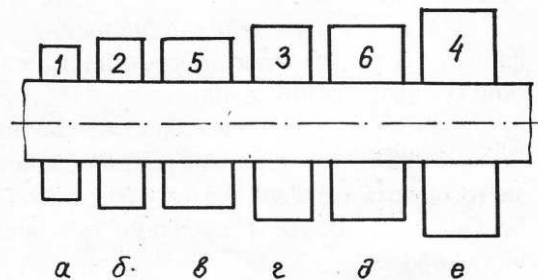


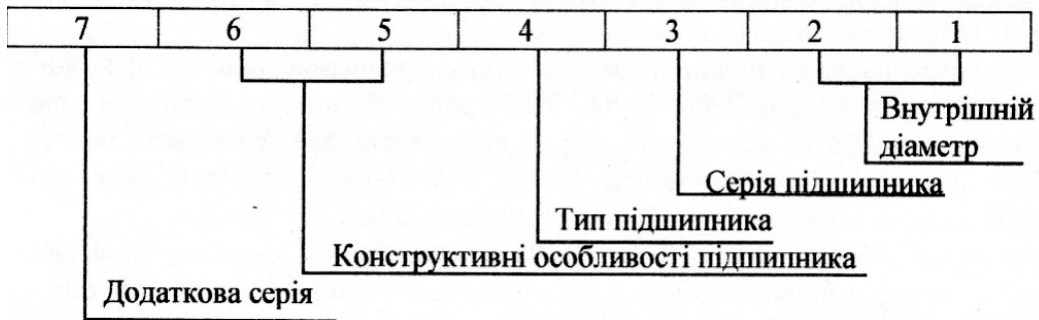
Рис. 3.36

При цьому тіла кочення котяться по канавках на валу або в корпусі. В підшипнику може бути відсутній і сепаратор.

За типом тіл кочення підшипники поділяються на кулькові (рис. 3.37 а,б,ж,і), роликові (рис. 3.37 в,г,е,з,к), голчаті, як різновидність роликових (рис. 3.37 д). Залежно від напрямку зусиль, що сприймаються, підшипники поділяються на радіальні (сприймають, в основному, радіальне зусилля, рис. 3.37 а-е); радіально-упорні (сприймають як радіальне, так і осьове зусилля, рис. 3.37 ж,з) і упорні підшипники

(сприймають осьове зусилля, рис. 3.37 і,к).

Позначення підшипників кочення в загальному випадку складається із семи цифр: останні дві цифри номера підшипника вказують на його внутрішній діаметр (діаметр вала), причому для діаметрів від 20 до 495 мм цю цифру можна отримати діленням діаметра вала в міліметрах на 5.



Третя цифра справа вказує на серію підшипника.

Порівняльна характеристика розмірів підшипників різних серій представлена на рис. 3.36, де 1...6 відповідає третій цифрі номера підшипника.

Четверта цифра номера підшипника означає його тип. Якщо вона 0 або відсутня (це, наприклад, типи 000, 60000, 80000, де замість останніх трьох нулів може стояти будь-яка цифра відповідно згаданому позначенню) – це відповідає кульковому радіальному підшипнику (рис. 3.37 а).

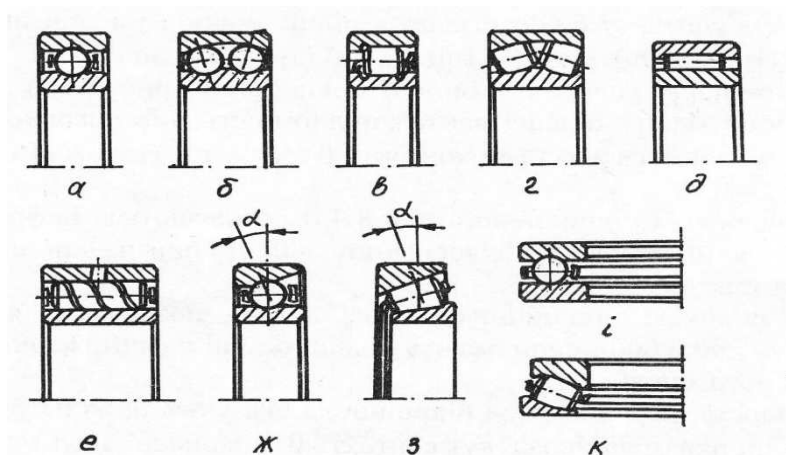


Рис. 3.37

Згадані підшипники сприймають, в основному, радіальне навантаження, але частково можуть сприймати й осьове величиною до 70% від невикористаного радіального. Перекоси одного кільця підшипника відносно іншого допускаються до $15'$.

Цифра 1 (типи 1000, 11000, 111000) відповідає кульковому

Частина третя

радіальному сферичному дворядному підшипнику (рис. 3.37 б), який може працювати при великих перекосах одного кільця відносно іншого (до $2...3^{\circ}$), сприймати радіальні та дуже незначні осьові зусилля.

Радіальні роликові підшипники з короткими роликами (рис. 3.37 в) позначаються цифрою 2 (типи 2000, 12000, 32000 тощо). Вони сприймають значно більші радіальні зусилля (приблизно в 1,7 раз), ніж кулькові, але допускають меншу частоту обертання. Перекоси кілець в цих підшипниках дуже впливають на розподіл тиску по довжині ролика, тому вони практично не застосовуються.

Цифрою 3 (типи 3000, 13000, 113000) позначаються радіальні роликові сферичні дворядні підшипники (рис. 3.37 г), які за характеристикою подібні кульковим радіальним сферичним підшипникам, але допускають більші радіальні навантаження і менші частоти обертання.

Радіальні роликові з довгими роликами або голчасті підшипники (рис. бю38 д) позначаються цифрою 4 (типи 24000, 74000). Їх застосовують при малих радіальних габаритах. Вони мають велику вантажопідйомність, але не сприймають осьових навантажень. Ролики цих підшипників виготовляють діаметрами $d = 1,6...6$ мм і довжиною $l_p = (4...10) d$.

Радіальні роликові підшипники з витими роликами (рис. 3.37 е) позначаються цифрою 5 (це типи 5000, 35000, 45000) і застосовують при великих радіальних навантаженнях ударної дії. Ролики цих підшипників звиті із сталльної смуги і мають, таким чином, більшу податливість, що і призводить до компенсації ударних навантажень.

Цифрою 6 позначаються кулькові радіально-упорні підшипники (рис. 3.38 ж). Зовнішнє кільце їх виконано у вигляді конуса, так що при дії радіальних і осьових навантажень точка контакту кульки і зовнішнього кільця відхиляється на умовний кут контакту. Розрізняють підшипники з умовними кутами контакту $\beta = 12^{\circ}$ (тип 36000), $\beta = 26^{\circ}$ (тип 46000) і $\beta = 36^{\circ}$ (тип 66000).

Радіально-упорні роликові (конічні) підшипники (рис. 4.37 з) позначаються цифрою 7. Вони мають більшу вантажопідйомність, ніж шарикові радіально-упорні і виготовляються з кутами контакту $\beta = 10...16^{\circ}$ (тип 7000) і $\beta = 25...30^{\circ}$ (тип 27000).

Упорні кулькові підшипники (рис. 3.37 і) позначаються цифрою 8 (це, наприклад, однорядні типу 8000 і здвоєні типу 38000) і призначені для сприйняття осьових навантажень.

Упорні роликові підшипники (рис. 3.37 к) позначаються цифрою 9 (наприклад, тип 9019000), вони сприймають більші осьові навантаження при невеликих частотах обертання.

П'ята і шоста цифри номера підшипника вказують на конструктивні особливості підшипника (наприклад, інший кут контакту β , особливості виконання і т.д.).

Додаткова серія позначається сьомою цифрою в номері підшипника.

Перед номером підшипника вказується через розподільний знак клас точності підшипника.

Для виготовлення кілець і тіл кочення підшипників застосовуються високовуглецеві хромисті сталі ШХ15 і ШХ15СГ, які містять 1...1,1% вуглецю і 1,5% хрому. Сталь ШХ15СГ містить також до 1% кремнію і марганцю.

Для виготовлення підшипників можуть також застосовуватись цементовані сталі 18ХГТ і 20Х2Н4А. Твердість кілець і тіл кочення доводять термообробкою до 60...65 HRC.

3.8.3. Несуча здатність підшипників кочення

Для малорухомих навантажених підшипників характерним видом пошкоджень є місцеві пластичні деформації (вм'ятини, лунки), які утворюються при довгостроковій дії контактних напружень в одній якій-небудь точці. Для таких підшипників необхідно обмежити величину зусиль, що діють на них, виходячи з умови відсутності пластичних деформацій.

Для підшипників кочення вводиться поняття статичної вантажопідйомності.

Статичною вантажопідйомністю підшипника C_0 називається таке **статичне навантаження**, яке викликає залишкову деформацію тіл кочення і кілець, що дорівнює 0,0001 діаметра тіла кочення. При цьому під навантаженням розуміють радіальне навантаження для радіальних і радіально-упорних підшипників і осьове – для упорних підшипників. Значення статичної вантажопідйомності конкретних підшипників наведені в довідковій літературі.

Для підшипників, що обертаються з кутовою швидкістю $\omega > 1$ рад/с характерним видом пошкоджень є викришування робочих поверхонь (тіл кочення і бігових доріжок) від втоми металу, які виникають внаслідок дії контактних напружень.

Природа викришування підшипників від втоми аналогічна такому ж явищу в зубчастих передачах. У цьому випадку необхідно обмежити навантаження на підшипник, виходячи з його довговічності.

Динамічною вантажопідйомністю підшипника C називається таке **постійне навантаження**, яке можуть витримати 90% підшипників із партії випробуваних протягом **1 млн обертів** при обертанні внутрішнього кільця підшипника без ознак руйнування від втоми.

Величина цього навантаження наводиться в довідковій літературі для конкретного підшипника.

Інші види відказів (руйнування кілець і сепараторів, абразивне зношування) пов'язані з порушенням умов експлуатації або дефектами виготовлення підшипників.

Частина третя

3.8.4. Підбір підшипників кочення

Перевірка підшипника на статичну вантажопідйомність полягає в перевірці умови:

$$F_0 K_6 \leq C_0 \quad (3.83)$$

де F_0 – еквівалентне статичне навантаження; K_6 коефіцієнт безпеки (табл. 3.10).

Еквівалентне навантаження визначається за умови навантаження підшипника за формулою:

$$F_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a,$$

де F_r та F_a – відповідно радіальне та осьове навантаження на підшипник; X_0 та Y_0 – коефіцієнти радіального та осьового навантажень, відповідно (табл. 4.11)

Перевірка потрібної працездатності підшипника за динамічною вантажопідйомністю полягає в виконанні умови:

$$C_{ном} = \quad , \quad (3.84)$$

де F – еквівалентне навантаження на підшипник; L – довговічність підшипника в млн обертів; $\alpha = 3$ для шарикопідшипників і $\alpha = 3,33$ для роликопідшипників.

Таблиця 3.10. Значення коефіцієнта безпеки K_6

Тип машини	Вид	K_6
Ручні приводи, приводи керування, стрічкові конвеєри	Спокійна без поштовхів	1,0
Електродвигуни, станки з обертальним рухом	Легкі поштовхи, перевантаження до 120% від номінального	1,0...1,2
Зубчасті передачі, редуктори, коробки зміни передач, механізми кранів	Помірні поштовхи. Перевантаження до 150% від номінального	1,3...1,5
Центрифуги, сепаратори, механізми дорожніх машин,	Те ж, при підвищеній надійності	1,5...1,8
Дробарки, копри, кривошипно-шатунні механізми	Значні поштовхи. Перевантаження до 200% від номінального	1,8...2,5

Таблиця 3.11. Коефіцієнти радіального X_0 та

осьового Y_o навантажень для однорядних підшипників

Тип підшипника		
Шарикові радіальні		
Шарикові радіально-упорні		
3 кутом $\beta=12^\circ$		
$\beta=26^\circ$		
$\beta=36^\circ$		
Роликові радіально-упорні		

Еквівалентне навантаження на підшипник визначається для радіальних і радіально-упорних підшипників

$$F = (X V_r F_r + Y F_{a\Sigma}) k_\delta k_T.$$

І для упорних підшипників

$$F = F_a k_\delta k_T.$$

де V_r – коефіцієнт обертання ($V_r = 1$ при обертанні внутрішнього і $V_r = 1,2$ при обертанні зовнішнього кілець); X і Y – коефіцієнти відповідно радіального і осьового навантажень (табл. 4.11); F_r – радіальне навантаження; $F_{a\Sigma}$ – сумарне осьове навантаження на підшипник; k_δ – коефіцієнт безпеки (табл. 4.10); k_T – температурний коефіцієнт ($k_T = 1$ при температурі підшипникового вузла 100°C).

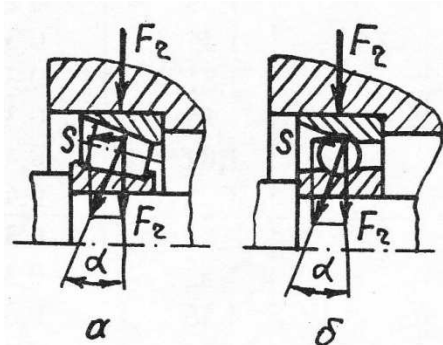


Рис. 3.38

Довговічність підшипника

$$L = \frac{3600 \omega L_h}{2 \pi 10^6} \quad (3.85)$$

де ω – кутова швидкість обертання вала, рад/с; L_h – довговічність роботи підшипника, год.

При визначенні сумарного осьового навантаження для радіально-упорних підшипників необхідно враховувати, що в них при радіальному навантаженні силою F_r виникає осьова складова S (рис. 3.38), яка залежить від кута контакту тіла кочення з зовнішнім кільцем і визначається як $S = e F_r$ для кулько- і $S = 0,83 e F_r$

Частина третя

для роликотидшипників. Тут e – параметр осьового навантаження, величина якого визначається з табл. 3.11.

Причому для шарикових тидшипників цей параметр залежить вiд спiввiдношення F_a/C_0 , оскiльки при збiльшеннi осьової сили F_a збiльшуватиметься i кут контакту. При вiдсутностi зовнiшнього осьового навантаження на вал за сумарне осьове навантаження приймають те, яке бiльше з двох осьових зусиль тидшипників, на якi опирається вал.

Якщо на вал дiє зовнiшне осьове навантаження F_a (рис. 3.39), то значення $F_{a\Sigma}$, що дiє на кожний тидшипник, можна визначити таким чином. Прикладемо невiдоме навантаження F_x для рiвноваги системи сил S_1, S_2 та F_a . Тодi

$$F_x = F_a + S_x - S_2$$

i невiдомi осьовi сили дорiвнюватиме:

$$F_{a\Sigma 1} = S_1 + F_x; \quad F_{a\Sigma 2} = S_2 \quad \text{якщо } F_x > 0;$$

$$F_{a\Sigma 1} = S_1; \quad F_{a\Sigma 2} = S_2 + F_x \quad \text{якщо } F_x < 0.$$

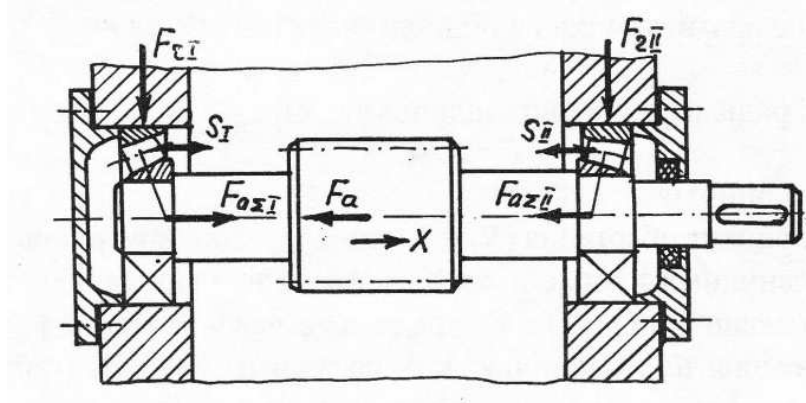


Рис. 3.39

iногда при вiборi тидшипників виникає питання про довговiчнiсть його роботи за тих чи iнших умов навантаження. В цьому випадку розрахункову довговiчнiсть тидшипника L_{hp} можна легко визначити iз спiввiдношення (3.84) з урахуванням (3.85):

$$L_{hp} = \frac{2 \pi 10^6}{3600 \omega} \left(\frac{C}{F} \right)^\alpha, \quad \text{ГОД.} \quad (3.86)$$

Таблиця 3.12. Коефіцієнти радіального і осевого навантаження

Тип підшипника	Кут контакту	F_a/C_0	X	Y	X	Y	e
			при $F_a/VF_r < e$		при $F_a/VF_r > e$		
Шарикові радіальні	0	0,014	1	0	0,56	2,30	0,19
		0,028				1,99	0,22
		0,056				1,71	0,26
		0,084				1,55	0,28
		0,11				1,45	0,30
		0,17				1,31	0,34
		0,28				1,15	0,38
		0,42				1,04	0,42
		0,56				1,00	0,44

3.9. Механічні з'єднання

3.9.1. Загальні відомості

Механічними з'єднаннями у машинобудуванні називають вузли, утворені із деталей, зв'язаних між собою. З'єднання дозволяють скласти з окремих деталей ланку механізму, вузол, машину.

За можливістю розбирання з'єднання поділяються на нерознімні та рознімні. До перших належать зварні, паяні, заклепочні та клейові з'єднання, які неможливо розібрати, не руйнуючи який-небудь із елементів з'єднання. До рознімних з'єднань належать шпонкові, шліцьові, нарізні, клемові, клинові, штифтові та з'єднання з натягом.

3.9.2. Зварні з'єднання

Зварні з'єднання належать до нерознімних з'єднань, що утворюються за рахунок міжатомних зв'язків між звареними деталями при нагріванні або деформуванні і є найбільш досконалими, оскільки краще за інші наближають з'єднання до суцільних деталей.

За видом джерела енергії, способом розігрівання металу існують різні способи зварювання. Найпоширеніші газове, електродугове, контактне, дифузійне зварювання.

Контактне електрозварювання відбувається за рахунок розігрівання стику деталей невеликої товщини теплотою, яка виділяється при проходженні електричного струму деталлю і електродом.

Газове зварювання супроводжується оплавленням матеріалу деталей і дроту присадного металу високотемпературним газовим полум'ям. Воно застосовується для зварювання деталей невеликої товщини або при ремонті виробів з чавуну, бронзи, алюмінієвих та інших сплавів.

Електродугове зварювання – це різновидність зварювання

Частина третя

оплавленням. Джерелом енергії в цьому випадку є електрична дуга. При електродуговому зварюванні з'єднання відбувається за рахунок металу електрода або металу з'єднуваних деталей.

За технологічним використанням дугове електрозварювання поділяється на автоматичне (сила струму 1000...3000 А), яке використовується в загальному машинобудуванні, напівавтоматичне і ручне (сила струму 200...500 А), що застосовується в ремонтному та індивідуальному виробництві.

Широке використання зварювання деталей у машинобудуванні пояснюється його перевагами порівняно з іншими видами нерознімних з'єднань:

- менша (приблизно на 20%) витрата матеріалу порівняно з заклепочними єднаннями;
- мала трудомісткість і висока продуктивність зварювальних робіт;
- низька вартість (в 1,5...2 рази дешевше порівняно з литими деталями і поковками);
- можливість автоматизації процесу.

До недоліків зварних з'єднань належать залишкові температурні напруження, які знижують здатність чинити опір при вібраціях і ударному навантаженні, і нестабільність якості шва, яка зменшується при автоматизації процесу.

Залежно від взаємного розміщення зварених деталей з'єднання дуговим або газовим зварюванням розрізняють стикові (рис. 3.40 а), кутові (рис. 4.30 б), таврові (рис. 3.40 в) з'єднання і з'єднання внапуск (рис. 4.30 г). У свою чергу, кожний вид з'єднань залежно від кількості швів, форми розробки кромки з'єднуваних деталей тощо, поділяються на: стикові С1-С25, кутові У1-У15, таврові Т1-Т16, внапуск Н1-Н8 (рис. 3.40).



Рис. 3.40

Основними параметрами швів є його довжина і товщина (для стикового шва) та довжина і катет шва $k = \delta$ (рис. 3.43) для кутового шва. Електрозварні з'єднання позначають на кресленнях лінією з однобічною стрілкою, яка вказує на шов. Позначення включає тип шва (лінійний, замкнутий і т.п.), номер ДСТУ (ДСТУ 5264-80), вид зварного з'єднання (наприклад, У8, Т3), розмір катета (наприклад, 18, М) і конструктивні особливості шва (може бути відсутній).

Розрахунок зварних з'єднань

Розглянемо спочатку розрахунок стикових зварних з'єднань. При роботі стикового з'єднання можливі такі види руйнувань з'єднання (рис. 3.41): 1) по самому шву (лінія 1-1); 2) по місцю сплавлення шва з

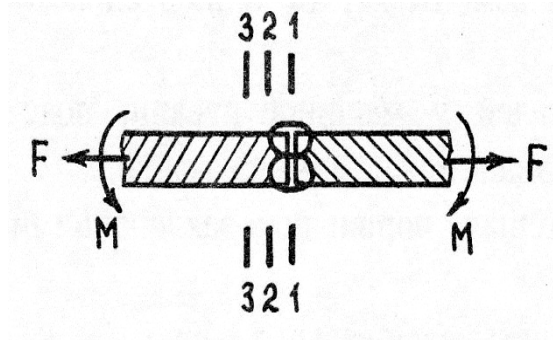


Рис. 3.41

основним металом (лінія 2-2); 3) по лінії 3-3 у зоні термічного впливу, в якій в результаті нагрівання при зварюванні можуть змінюватись механічні властивості матеріалу.

Практикою експлуатації зварних стикових з'єднань встановлено, що їх руйнування відбувається переважно в зоні термічного впливу. Тому розрахунок на міцність таких з'єднань прийнято виконувати за розмірами перерізу деталі в цій зоні. Розрахунок стикового зварного з'єднання проводять як суцільної деталі з тією різницею, що за допустимі приймають допустимі напруження $[\sigma']$ для зони термічного впливу:

$$[\sigma'] = (0,9 \dots 1,0) [\sigma]_p, \quad (3.87)$$

де $[\sigma]_p$ – допустимі напруження розтягу основного металу.

Таким чином, розрахунок стикового з'єднання, зображеного на рис. 3.41, зводиться до наступного.

Напруження розтягу (стиску):

$$\sigma = \frac{F}{\delta l} \leq [\sigma'].$$

де l – довжина шва; δ – товщина з'єднаних деталей.

Напруження згину:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6M}{l\delta^2} \leq [\sigma'].$$

Зварні з'єднання внапуск виконують, як правило, кутовими швами. За розміщенням шва відносно навантаження розрізняють флангові, лобові, косі і комбіновані шви.

Внаслідок нерівномірності розподілу напружень по довжині шва (рис. 3.42 а, б) їх довжина повинна бути обмежена (наприклад, для

Частина третя

флангових швів $l \leq (50...60) k$, де k – катет шва).

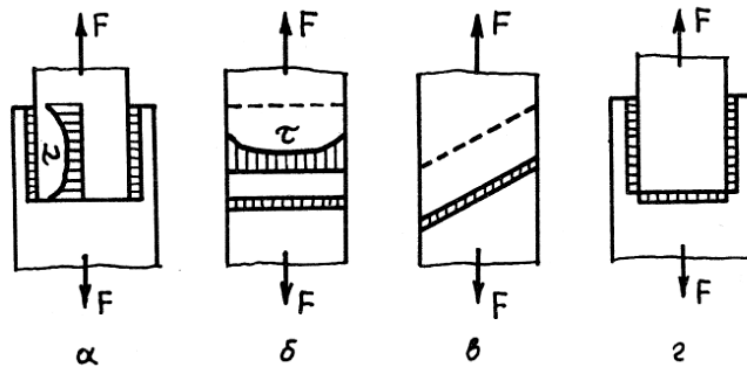


Рис. 3.42

Флангові шви з'єднання внапуск працюють на зріз (рис. 3.43 а). При цьому руйнування відбувається по лінії $m-m$, де площа зрізу найменша. Висота шва $h \approx 0,7 k$. Розрахунок таких з'єднань ведеться за формулою:

$$\tau = \frac{F}{0,7 \cdot k \cdot l} = [\tau']; \quad (3.88)$$

де l – довжина шва; $[\tau'] = (0,5...0,65)$;

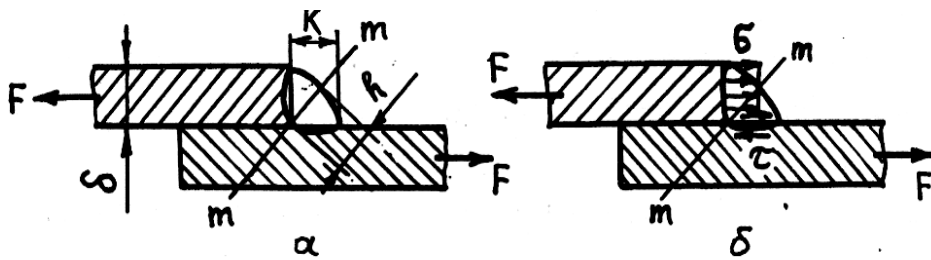


Рис. 3.43

$[\sigma]_p$ – допустимі напруження зварного шва на зріз.

Розглянемо кутник (рис. 3.44), приварений двома швами довжиною l_1 і l_2 до пластини і навантажений зусиллям F , прикладеним по центра ваги перерізу кутника. Необхідно підібрати довжину зварних швів з умови рівномірності. Запишемо умову міцності для двох швів довжиною l_1 і l_2

$$\tau_1 = \frac{F_1}{0,7 \cdot k \cdot l_1} \leq [\tau'];$$

$$\tau_2 = \frac{F_2}{0,7 \cdot k \cdot l_2} \leq [\tau'];$$

де через F_1 та F_2 позначені зусилля зрізу у швах довжиною l_1 і l_2 відповідно.

Звідси маємо:

$$F_1 = 0,7 \cdot k \cdot l_1 \cdot [\tau']; \quad F_2 = 0,7 \cdot k \cdot l_2 \cdot [\tau'] \quad (3.89)$$

З рівняння рівноваги з'єднання відносно осі O:

$$F_1 a_1 = F_2 a_2 \quad (3.90)$$

З виразів (3.91) і (3.92):

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Сумарну довжину швів можна знайти з умови міцності:

$$\tau = \frac{F}{0,7 k (l_1 + l_2)} \leq [\tau']$$

У лобових швах зварного з'єднання внапуск (рис. 3.43 б) виникають нормальні напруження розтягу σ на площадках, перпендикулярних до напрямку дії зусилля, і дотичні напруження зрізу τ . Але, виходячи із практики експлуатації зварних з'єднань, прийнято проводити розрахунок цих з'єднань по перерізу $m-m$, тобто, умова міцності цих з'єднань буде мати вигляд (3.90).

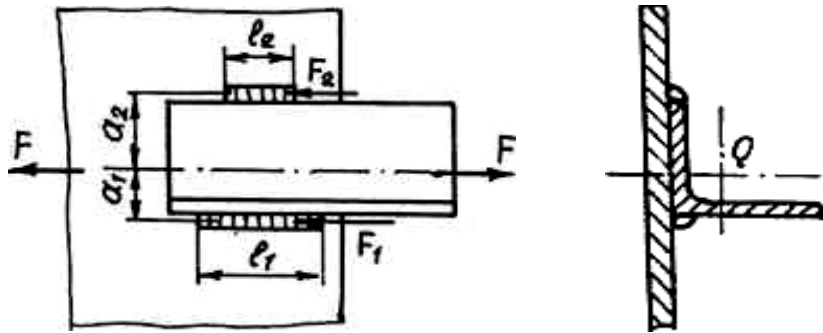


Рис. 3.44

Для прикладу наведемо розрахунок зварного з'єднання двох зварених смуг, навантажених зосередженою силою F і моментом M (рис. 3.45). Виходячи з умовного розрахунку з'єднання на зріз, матимемо умову міцності у такому вигляді:

$$\tau = \frac{M}{W_{III}} + \frac{F}{A_{III}} \leq [\tau'],$$

де $W_{III} = 0,7 \cdot k \cdot h^2 / 6$ – момент опору небезпечного перерізу шва;

$A_{III} = 0,7 \cdot k \cdot h$ – площа небезпечного перерізу шва.

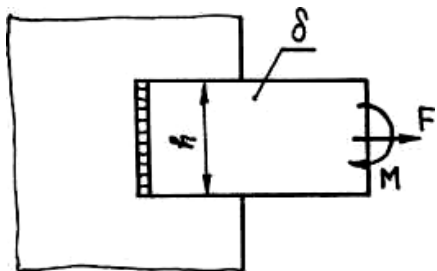


Рис. 3.45

Зварне таврове з'єднання може бути виконане двома типами швів: **стиковим** (рис. 3.46 а) і **кутовим** (рис. 3.46 б). Залежно від виду шва умови міцності матимуть різний вигляд. Для **зварного з'єднання**, виконаного **стиковим швом**, умова міцності на розтяг матиме вигляд: $\sigma = \frac{F}{S} \leq [\sigma']$.

Умова міцності на згин є наступною: $\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6M}{\delta l^2} \leq [\sigma']$.

Частина третя

Для з'єднання, виконаного *кутовим швом*, умови міцності на розтяг і на згин, відповідно, приймуть вигляд:

$$\tau = \frac{F}{A_{\text{ш}}} = \frac{F}{2 \cdot 0,7 \cdot k \cdot l} \leq [\tau']; \quad \tau = \frac{M}{2W_{\text{ш}}} = \frac{M}{2 \cdot 0,7 \cdot k \cdot l^2} \leq [\tau'].$$

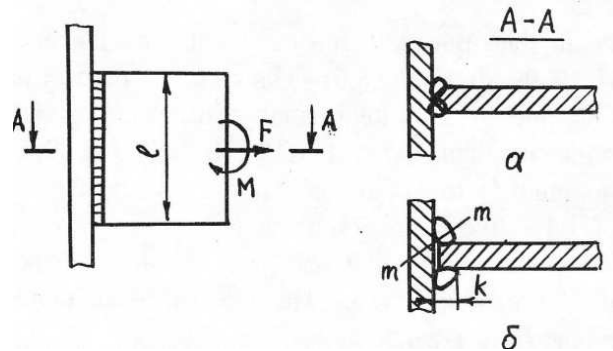


Рис. 3.46

3.9.3. Заклепочні з'єднання

Заклепочним називається нерознімне з'єднання, як правило, листових деталей, за допомогою заклепки – стрижня з головками на кінцях. Одну з головок, яка називається закладною, виготовляють на заклепці раніше, а другу (замикальну) формують при клепанні (рис. 3.47 а). Заклепочні з'єднання застосовують у тих випадках, коли не відбувається нагрівання деталей або для з'єднання незварних деталей (елементи літальних апаратів, металоконструкцій тощо).

Матеріал заклепок має бути достатньо пластичний (для формування замикаючої головки) і міцний. Для виготовлення заклепок застосовують сталі Ст2, Ст3, 09Г2, а також сплави В65, Д15 тощо.

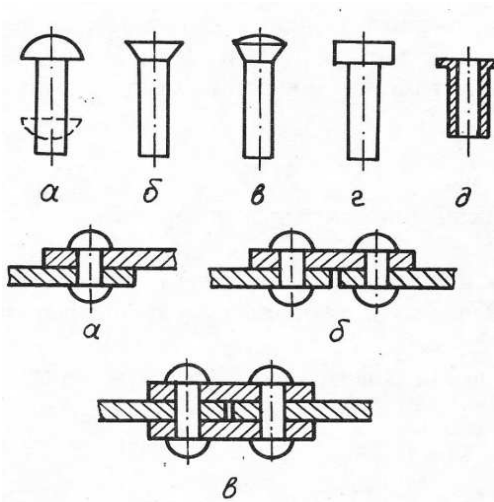


Рис. 3.47. Основні типи заклепок

Рис. 3.48. Види заклепочних з'єднань

У практиці машино- і приладобудування застосовують різні види заклепок: з напівкруглою головкою (ДСТУ 10299-80, рис. 3.47 а) – для

силових швів; з потайною головкою (ДСТУ 10300-80, рис. 3.47 б) – якщо недопустимий виступ частин за межі з'єднаних деталей; з плоскою головкою (ДСТУ 14801-85, рис. 3.47 г) – для роботи в корозійних середовищах. Існують також напівпорожністі та порожністі (ГОСТ 12638-870; ДСТУ 12640-80, рис. 3.48 д) заклепки.

Листи з'єднують між собою заклепками внапуск (рис. 4.48 а) і встик з однією (рис. 3.48 б) і двома (рис. 3.48 в) накладками. Недоліками заклепочних з'єднань є великі витрати металу і вартість з'єднання.

Досвід експлуатації конструкцій, які мають заклепочні з'єднання, показав, що можливі такі види руйнувань заклепочного з'єднання:

- руйнування стержня заклепки;
- зминання стінок отворів і стержня заклепки;
- руйнування листів, ослаблених отворами.

У заклепочному з'єднанні при дії сили F (рис. 3.49) у тілі заклепки виникають напруження зрізу:

$$\tau_{зр} = \frac{F}{A_{зр}} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2 \cdot Z} \leq [\tau_{зр}] \quad (3.91)$$

де $A_{зр}$ – площа зрізу; d – діаметр стержня заклепки; Z – кількість заклепок; $[\tau_{зр}]$ – допустимі напруження зрізу.

Необхідно враховувати, що для з'єднання з двома накладками площа зрізу збільшується вдвічі.

При проектуванні з'єднання з умови (3.93) визначається діаметр заклепки:

$$d \geq 2 \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot Z \cdot [\tau_{зр}]}} \quad (3.92)$$

Напруження зминання на стержні заклепки і стінках отворів:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} = \frac{F}{d \cdot \delta \cdot Z} \leq [\sigma_{зм}] \quad (3.93)$$

де $A_{зм}$ – мінімальна площа зминання; δ – мінімальна товщина листів; $[\sigma_{зм}]$ – допустимі напруження зминання.

Якщо прийняти достатньо велику кількість заклепок, тобто, крок t заклепок обрати малий, виникне можливість руйнування листів по ослабленому перерізу 1-1. Умова міцності в цьому випадку матиме вигляд:

$$\sigma_p = \frac{F}{A_{нетто}} = \frac{F}{\delta (l - d \cdot Z)} \leq [\sigma_p] \quad (3.94)$$

де $A_{нетто}$ – площа нетто-перерізу по лінії 1-1; l – довжина з'єднання;

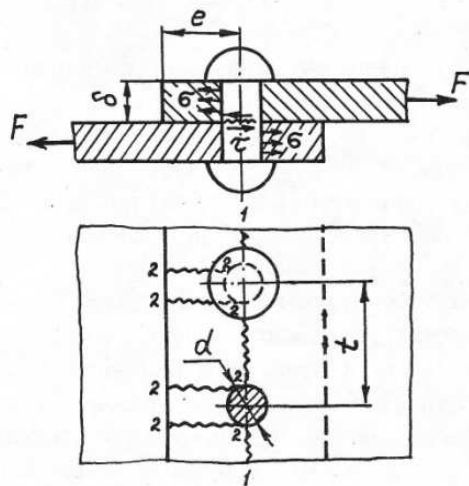


Рис. 3.49

Частина третя

$[\sigma_p]$ – допустимі напруження розриву для матеріалу листів.

У випадку, коли заклепки розміщені достатньо близько до краю листів, тобто, відстань e (рис. 3.49) мала, можливе руйнування з'єднання по лінії 2-2. Умова міцності матиме вигляд:

$$\tau_{зр}^L = \frac{F}{A_{зр}^L} = \frac{F}{2(e-d/2) \cdot \delta \cdot z} \leq [\tau_{зр}^L], \quad (3.95)$$

де $A_{зр}^L$ – площа зрізу листа; e – відстань до краю листа; $[\tau_{зр}^L]$ – допустимі напруження зрізу для матеріалу листа.

При проектуванні заклепочного з'єднання рекомендується досягати рівноміцності його за всіма критеріями, бо в цьому випадку забезпечується мінімальна металоємність з'єднання. Наведемо співвідношення для умови рівноміцності заклепки на зріз і зминання в зоні контакту заклепки і отвору, яку можна отримати з умов (3.92) і (3.93):

$$\delta = \frac{\sqrt{\frac{\pi \cdot F \cdot [\sigma_{зр}]}{z}}}{[\sigma_{зм}]}$$

3.9.4. Паяні та клейові з'єднання

Паяні з'єднання – це нерознімне з'єднання за рахунок сил молекулярної взаємодії між деталями і припоєм. Припій – це сплав або метал, який вводиться в розплавленому стані між деталями і має нижчу температуру плавлення, ніж з'єднувані деталі. Відмінність паяння від зварювання – у відсутності розплавлення деталей, що з'єднуються.

Міцність паяного шва вища за міцність припою за рахунок розчинення (дифузії) в ньому металу деталей і внаслідок стиснення деформацій у шві.

Пайкою з'єднують деталі різної форми (листи, стрижні, труби тощо) з однорідних або різнорідних матеріалів (чорних і кольорових металів, сплавів, кераміки, скла тощо). Неметалічні матеріали при цьому попередньо покривають шаром срібла або графіту з наступним покриттям шаром міді гальванічним способом.

Тип паяного з'єднання визначається формою і розміщенням деталей та навантажень і може виконуватись: внапуск, встик, втавр, вдотик тощо.

Припої повинні бути легкоплавкими, мати достатньо високі міцність, пластичність, непроникність. Коефіцієнти лінійного розширення з'єднуваних деталей і припою не повинні сильно різнитися. Найпоширенішими з них є: сплави олова і свинцю ПОС 61, ПОС 40, ПОС 50, ПОС 10 тощо; олова, свинцю і кадмію (ЛОСК); олова, свинцю і сурми (ГОСТ 21930-76*); срібні, олов'яні та олов'яно-свинцеві з вмістом срібла до 10% (ГОСТ 19738-74); мідно-цинкові сплави.

Розрахунок паяних з'єднань проводять за номінальними

напруженнями. Межа міцності на зріз для олов'яно-свинцевих припоїв залежно від матеріалу деталей $\tau_{зр} = 22...32$ МПа, на розтяг для більшості марок сталей – на 30...40% вище $\tau_{зр}$.

Клейові з'єднання – це з'єднання неметалічною речовиною за рахунок поверхневого зчеплення (адгезії) і внутрішніх міжмолекулярних зв'язків (когезії) в шарі клею.

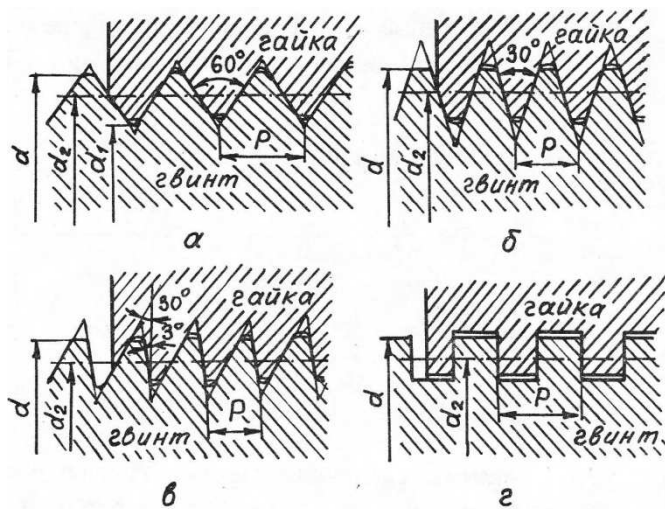
Перевагами цих з'єднань є: можливість з'єднання деталей з різнорідних матеріалів, з'єднання тонких листів, менша концентрація напружень, можливість забезпечення герметичності. Основний недолік клейових з'єднань – низька теплостійкість, для більшості клеїв не перевищує 60° С.

Вибір клею залежить від матеріалів, які потрібно склеїти, і робочих температур. Метали і сплави склеюються між собою і різними неметалевими матеріалами клеями БФ2, БФ4 (розчини синтетичних смол у спирті чи ацетоні), які забезпечують мажу міцності при зсуві $\tau_{в} > 10$ МПа. Епоксидні клеї ЗД-5, ЗД-6 ($\tau_{в} > 4...5$ МПа) застосовують для склеюванім сталі, міді, алюмінію та його сплавів, пластмас. Для склеювання інструмента застосовують клеї на епоксидній основі ТКЛ-75 і ВК-28 ($\tau_{в}$ дорівнюють 22,0 та 12,0 МПа, відповідно); на основі епоксидних смол, кремнію та органічних матеріалів: ТКМ-75, ВК-13 та інші.

Якість клейового з'єднання значною мірою залежить від способу і якості підготування поверхні. Застосовують механічну, хімічну або одночасно обидві обробки.

3.9.5. Нарізні з'єднання

Нарізними з'єднаннями називаються рознімні з'єднання деталей за допомогою різьби. Нарізні з'єднання дуже поширені в сучасному машинобудуванні. Понад 60% від загальної кількості деталей складають деталі з різьбою.



Широке застосування нарізних з'єднань пояснюється їх перевагами: можливістю отримання великих осьових зусиль; фіксацією в будь-якому положенні внаслідок самостопоріння; малими габаритами; простотою виготовлення та експлуатації.

Рис. 3.50

Різьба може виготовлятися на циліндричній (циліндрична різьба) і

Частина третя

конічній (конічна різьба) поверхнях. Крім кріплення деталей (кріпильні різьби), гвинтові пари можуть застосовуватись у машинобудуванні для перетворення обертального руху в поступальний (*ходові різьби*). За кількістю витків різьби, які в'ються паралельно один одному і утворюють нарізну поверхню, *розрізняють одно-, дво- і багатозахідну різьби*. За напрямом гвинтової лінії розрізняють *праву і ліву різьби* (остання використовується в дуже обмежених обгрунтованих випадках). За формою профілю розрізняють *трикутну* (метричну і трубну, рис. 3.50 а), *трапецеїдальну* (рис. 3.50 б), є основною для передачі гвинт-гайка), *упорну* (рис. 3.50 в), прямокутну (рис. 3.50 г) і *круглу різьби*. Основною кріпильною різьбою є метрична різьба з крупним і дрібним кроками. Профілі їх геометрично подібні. Метричну різьбу з крупним кроком (основна різьба) позначають літерою М і числом, що виражає діаметр різьби в міліметрах, наприклад М16, а для метричної різьби з дрібним кроком додатково вказують крок у міліметрах, наприклад, М20х1,5.

Розглянемо основні параметри різьби. Зовнішній діаметр різьби d (для гвинта) або D для гайки (рис. 4.50) є номінальним діаметром, який вказується в позначенні різьби. Розрізняють внутрішній (d_1, D_1) і середній (d_2, D_2) діаметри різьби.

Кут профілю різьби α – це кут між суміжними боковими сторонами профілю різьби.

Крок різьби p (рис. 3.50) – відстань між однойменними точками профілю різьби в осьовій площині.

Для *багатозахідних різьб* вводять поняття *хід гвинта* – p_h (тобто, відстань, на яку переміститься гвинт вздовж своєї осі при повороті болта на один оберт відносно нерухомої гайки), який *дорівнює добутку кроку на число заходів*. Для однозахідної різьби величина кроку і ходу збігаються.

Кут підйому різьби ψ утворений дотичною до гвинтової лінії і площиною, перпендикулярною до осі різьби. Можна легко встановити, що:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{p_h}{\pi d_2}$$

Існують основні три типи нарізних з'єднань. *З'єднання болтами* (рис. 3.51 а) застосовується для скріплення деталей не дуже великої товщини при наявності місця для розташування головки болта і гайки, для скріплення деталей з матеріалів, які не забезпечують достатню міцність і надійність різьби, і при необхідності частого загвинчування і розгвинчування.

З'єднання гвинтом (рис. 3.51 б) застосовують при достатній міцності матеріалу деталі, в яку загвинчується гвинт, *з'єднання шпилькою* (рис. 3.51 в) – у тих випадках, коли матеріал з'єднуваних деталей не забезпечує достатню довговічність різьби при частих розбиранні і складанні з'єднання.

Глибину загвинчування шпильки і гвинта у сталевий корпус вибирають $(1...1,25) d$, у чавунний – $(1,25...1,5) d$, у корпус із алюмінієвих сплавів – $(1,5...2) d$, де d – діаметр різьби. Болти і гвинти можуть мати головку різної форми (найбільш поширені – шестигранні головки нормальної висоти $0,7 d$).

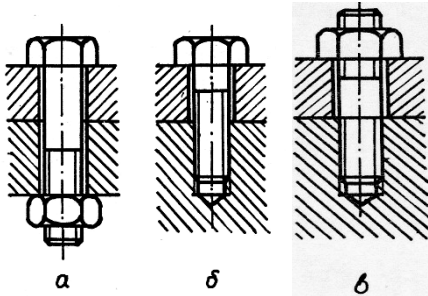


Рис. 3.51

Основним типом гайок також є шестигранні з висотою для нормальних гайок $0,8 d$. Інколи застосовують гайки зменшеної висоти, високі та особливо високі гайки.

Сталеві болти, гвинти і шпильки виготовляють різних класів міцності (табл. 3.12). Клас міцності позначається двома числами. Перше, помножене на 100, вказує мінімальне значення межі міцності (МПа), друге, поділене на 10 – на відношення межі текучості і міцності.

Таблиця 3.12. Механічні характеристики нарізних деталей (ДСТУ 1759-82)

Клас міцності	σ_B МПа		σ_T МПа	Марка сталі
	min	max		
3.6	300	490	200	Ст.3; Сталь 10
4.6	400	550	240	Сталь 20
5.6	500	700	300	Сталь 30; 35
6.6	600	800	360	Сталь 353; 45;
8.8	800	1000	640	Сталь 35X;
10.9	1000	1200	900	Сталь 40X; 40Г2; 16ХСН

Момент загвинчування, к.к.д. і умови самогальмування

Розглянемо прямокутну різьбу. Зробимо розгортку різьби (рис. 3.52 а) по середньому діаметру d_2 в похилу площину і замінимо гайку повзуном (рис. 3.52 б). Сила взаємодії F_n об'єднує собою рівнодійну нормальної сили і сили тертя і відхиляється від нормалі до похилої на кут тертя φ . Тоді з рис. 3.52 б

$$F_t = F \operatorname{tg}(\psi + \varphi); \quad (3.96)$$

де F_t – колова сила; F – осьова сила на гвинті; ψ – кут підйому різьби.

Частина третя

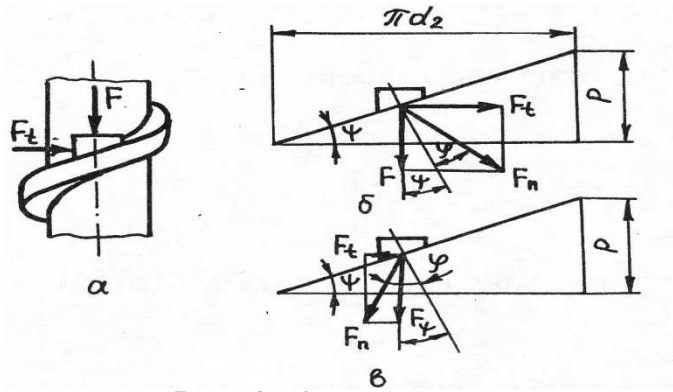


Рис. 3.52

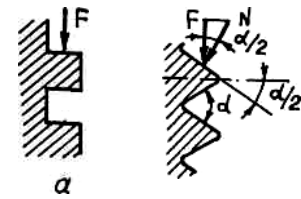


Рис. 3.53

Розглянемо порівняльну характеристику різьб з прямокутним (рис. 3.53 а) і трикутним (рис. 3.53 б) профілями. Для прямокутної різьби сила тертя

$$F_T = F \cdot f;$$

для трикутної з кутом профілю α

$$F_T = N \cdot f = \frac{F \cdot f}{\cos \frac{\alpha}{2}} = F \cdot f_{зв};$$

Звідки зведений коефіцієнт тертя:

$$\frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}} = f_{зв}.$$

Аналогічне співвідношення має місце між кутами тертя:

$$\varphi_{зв} \approx \frac{\varphi}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Для визначення колової сили в трикутній різьбі можна користуватись виразом (3.96) підставивши замість дійсного зведений кут тертя.

Момент загвинчування гайки в нарізному з'єднанні складатиметься з моментів тертя в різьбі та на торці гайки:

$$M_{загв} = M_p + M_T. \tag{3.97}$$

Момент тертя в різьбі

$$M_p = F_t \cdot \frac{d_2}{2} = F \cdot \frac{d_2 \cdot \text{tg}(\psi + \varphi_{зв})}{2}. \tag{3.98}$$

Опорну поверхню гайки розглядають у вигляді кільця із зовнішнім діаметром, що дорівнює розміру під ключ S і внутрішнім діаметром, що дорівнює діаметру отвору під гайку d_0 . Тоді момент тертя на торці гайки

$$M_T = F \cdot f \cdot \frac{d_{cp}}{2}; \tag{3.99}$$

де f – коефіцієнт тертя між гайкою та опорною поверхнею,

$$d_{cp} = \frac{S + d_0}{2} \text{ – середній діаметр опорної поверхні.}$$

Тоді остаточно матимемо:

$$M_{\text{загв}} = F \cdot \frac{d_2 \left[\text{tg}(\psi + \varphi_{\text{зв}}) + f \cdot \frac{d_{\text{сп}}}{d_2} \right]}{2} \quad (3.100)$$

Для метричної різьби з крупним кроком $\psi = 2^\circ 30'$; $d_2 \approx 0,9 d$;
 $d_{\text{сп}} \approx 1,4d$; $f_{\text{зв}} \approx 0,15$. Тоді

$$F \approx 0,2 F d$$

Якщо прийняти, що середня довжина гайкового ключа дорівнює $14d$, то можна отримати співвідношення між силами затяжки рукоятки ключа F_p та гвинта F

$$F \approx 70 F_p$$

Тобто, застосовуючи кріпильну різьбу, можна отримати вигреш в зусиллі приблизно в 70 разів.

Коефіцієнт корисної дії різьби можна визначити як відношення корисної роботи на гвинті (роботи по стисканню з'єднаних деталей) до затраченої роботи на ключі при повороті на довільний кут (для розрахунків приймемо малий кут $d\gamma$).

Тоді без урахування тертя на торці гайки

$$\eta = \frac{F dh}{M_p d\gamma}$$

де dh – осьове переміщення гайки при її повороті на кут $d\gamma$. Можна встановити, що

$$dh = \frac{d_2 \text{tg}\psi}{2} d\gamma.$$

Остаточо матимемо:

$$\eta = \frac{\text{tg}\psi}{\text{tg}(\psi + \varphi_{\text{зв}})} \quad (3.101)$$

Для середніх значень $\psi = 2^\circ 30'$ і $f_{\text{зв}} \approx 0,15$ матимемо $\eta \approx 0,3$.

Для визначення умови самогальмування запишемо вираз для моменту відгвинчування. Цей вираз буде подібний до (3.102) з тією різницею, що нахил різьби спонукає відгвинчування гайки, тому у виразі (3.102) необхідно поставити знак "–" перед кутом ψ .

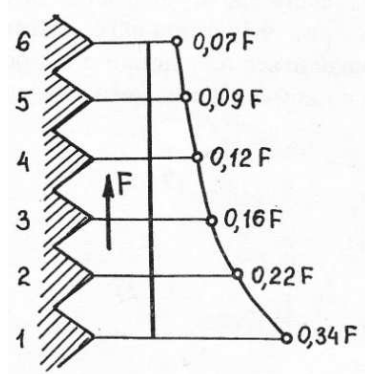


Рис. 3.54

$$M_{\text{відг}} = \frac{F d_2}{2} \left[\text{tg}(\varphi_{\text{зв}} - \psi) + f \frac{d_{\text{сп}}}{d_2} \right]$$

Без урахування сил тертя на торці гайки (воно піде в запас зчеплення) умова самогальмування нарізного з'єднання матиме вигляд:

Частина третя

$M_{вдг} > 0$, що призводить до співвідношення $\varphi_{зв} > \psi$. Для середніх параметрів метричної різьби умова самогальмування, навіть без урахування сил тертя на торці, забезпечуватиметься при $f > 0,045$. Таким чином, при статичній дії навантаження такі різьби мають великий запас надійності по самогальмуванню.

У зв'язку з тим, що податливість тіла болта і гайки співрозмірні з податливістю самої різьби, осьове навантаження F розподіляється нерівномірно між витками різьби.

Задача про розподіл сил між витками є статично невизначеною. Розподіл зусиль між витками за результатами розв'язання задачі М.Е. Жуковським для пружного випадку, якщо гайка має шість витків, наведений на рис. 3.54.

З графіка видно, що перший виток сприймає понад 1/3, а шостий виток – 7% всього навантаження.

Для прикладу аналогічне розв'язання для десяти витків дає навантаження на десятий виток менше 1% від загального навантаження. Тому при подібній нерівномірності розподілу зусилля між витками збільшення висоти гайки виявляється марним у зв'язку з тим, що перший виток зруйнується раніше і спричинить руйнування решти витків різьби.

Крім руйнування різьби (зрізу або зминання), одним із можливих видів руйнувань гвинтів і болтів можуть бути розрив стрижня по різьбі або біля головки гвинта.

Оскільки стандартні різьби проектують з умови рівномірності, то при розрахунках можна обмежитись тільки одним критерієм у нарізному з'єднанні – міцністю тіла гвинта на розтяг.

Розрахунок нарізних з'єднань

При розрахунку гвинта на розтяг приймають, що гвинт має форму стрижня з розрахунковим діаметром $d_p = d - 0,94 p$, де p – крок різьби. Цей діаметр дещо більший за внутрішній діаметр d_b , так як міцність гвинта приблизно на 10% вища за міцність стрижня діаметром d_f .

При загвинчуванні нарізного з'єднання в тілі гвинта виникатимуть напруження розтягу від зусилля затяжки F

$$\sigma_p = \frac{4 F}{\pi d_p^2} \quad (3.102)$$

і дотичне напруження кручення від моменту M_p у нарізній парі $\tau_k = M_p / W_p$.

Еквівалентні напруження в гвинті від розтягу і кручення:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3 \tau_k^2} = \sigma_p \sqrt{1 + 12 \left[\frac{d_2}{d_p} \operatorname{tg}(\psi + \varphi_{зв}) \right]^2}. \quad (3.103)$$

Приймаючи середні значення параметрів різьби $\psi = 2^\circ 30'$; $f_{зв} = 0,15$; $d_2/d_p \approx 1,1$, матимемо:

$$\sigma_{\text{екв}} = 1,3 \sigma_p = 5,2 \cdot \frac{F}{\pi d_p^2} \leq [\sigma_p] \quad (3.104)$$

Таким чином, розрахунок гвинтів, що працюють при значних зусиллях затяжки, можна виконувати за напруженнями розтягу, збільшивши їх в 1,3 раз. З останньої формули:

$$d_p \geq \sqrt{5,2 \frac{F}{\pi [\sigma_p]}} \quad (3.105)$$

У деяких випадках (застосування болтів з костильною головкою, рис. 3.55 б або при перекосі опорних поверхонь, рис. 3.54 а) виникає ексцентричне навантаження гвинта зусиллям F , яке знаходиться на відстані e від осі гвинта. У цьому випадку, крім напружень розтягу і кручення, виникатимуть напруження згину, що дорівнюють $\sigma_{зг} = M/W$,

де $M = F e$; $W = \pi \frac{d_p^3}{32}$. Остаточо

$$\sigma_{зг} = \frac{32 F e}{\pi d_p^3} = \sigma_p \frac{8 e}{d_p} \quad (3.106)$$

Тоді сумарні напруження при загвинчуванні

$$\sigma = 1,3 \sigma_p + \sigma_{зг} = \sigma_3 \left(1,3 \pm \frac{8 e}{d_p} \right). \quad (3.107)$$

Ексцентричне навантаження болтів

а)

б)

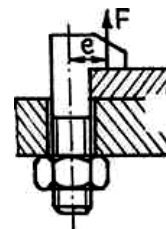
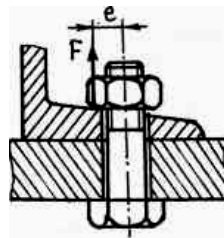
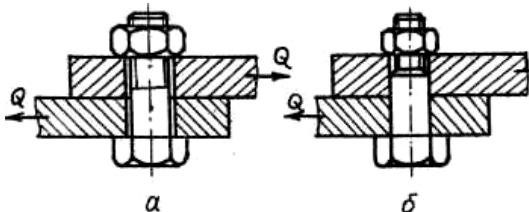


Рис. 3.55



б)

Рис. 3.56. З'єднання працює на зсув

З формули (3.107) витікає, що при ексцентричному навантаженні болта сумарні напруження в багато разів перевищують напруження розтягу (наприклад, при $e \approx d_p$ отримаємо напруження $\sigma \approx 9,3 \sigma_p$).

Тому потрібно запобігати ексцентричному навантаженню болтів встановленням косих шайб, виконанням цекування тощо.

Розглянемо болтове з'єднання, навантажене зусиллями зсуву в площині стику. Розрізняють такі їх види: болт встановлено в отвір з зазором (рис. 3.56 а) і болт встановлено в отвір, виконаний розверткою, без зазору (рис. 3.56 б).

Частина третя

У першому випадку для нормальної роботи стику сила тертя на поверхні стику повинна перевищувати силу, що працює на зсув.

Необхідна сила затяжки болта в цьому випадку:

$$F = k \cdot \frac{Q}{i f}$$

де Q – сила зсуву; i – число стиків, які стягуються болтом; f – коефіцієнт тертя ковзання між деталями стику; $k=1,5...2$ – коефіцієнт запасу зчеплення.

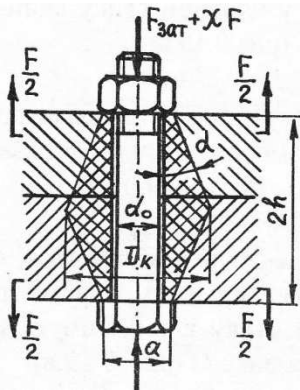
У разі встановлення болта без зазору тіло болта розраховують на зріз. Умова міцності болта має вигляд:

$$Q = \pi d_0^2 i [\tau]_{зр} / 4,$$

де d_0 – діаметр стрижня гвинта в небезпечному перерізі, $[\tau]_{зр}$ – допустимі напруження матеріалу болта на зріз.

Розглянемо болтове з'єднання, навантажене центральною відривною силою F (рис. 3.57). У цьому випадку затягнуте з'єднання буде додатково навантажуватись частиною зусилля χF , а друга частина – $(1-\chi)F$ піде на розвантаження стику (χ – коефіцієнт осьового навантаження).

Задача про розподіл навантаження між болтом і стиком є статично невизначеною. Для визначення коефіцієнта χ необхідно додатково скласти рівняння сумісності деформацій. Під дією зовнішнього навантаження болт видовжиться настільки, наскільки збільшиться розмір деталей:



$$\Delta = \chi F \lambda_{б} = (1 - \chi) F \lambda_{д},$$

де $\lambda_{б}$ – податливість болта; $\lambda_{д}$ – податливість деталей і стику.

Звідки
$$\chi = \frac{\lambda_{д}}{\lambda_{б} + \lambda_{д}}.$$

Податливість болта і деталей

$$\lambda_{б} = \frac{l}{E_{б} A_{б}}; \lambda_{д} = \frac{l}{E_{д} A_{д}}.$$

Рис. 3.57

де l – довжина болта між опорними поверхнями; $E_{б}$ і $E_{д}$ – модулі пружності матеріалу болта і деталей з'єднання, відповідно; $A_{б}$ і $A_{д}$ – площі перерізів болта і деталей, відповідно.

Податливість з'єднаних деталей, як правило, визначають, припускаючи, що деформація поширюється на, так звані, конуси тиску (рис. 3.57), для яких з дослідів приймають $\operatorname{tg} \alpha = 0,4...0,5$.

Тоді

$$A_{д} = \frac{\pi (D_k^2 - d_0^2)}{4} = \frac{\pi [(a+h \operatorname{tg} \alpha) - d_0^2]}{4}.$$

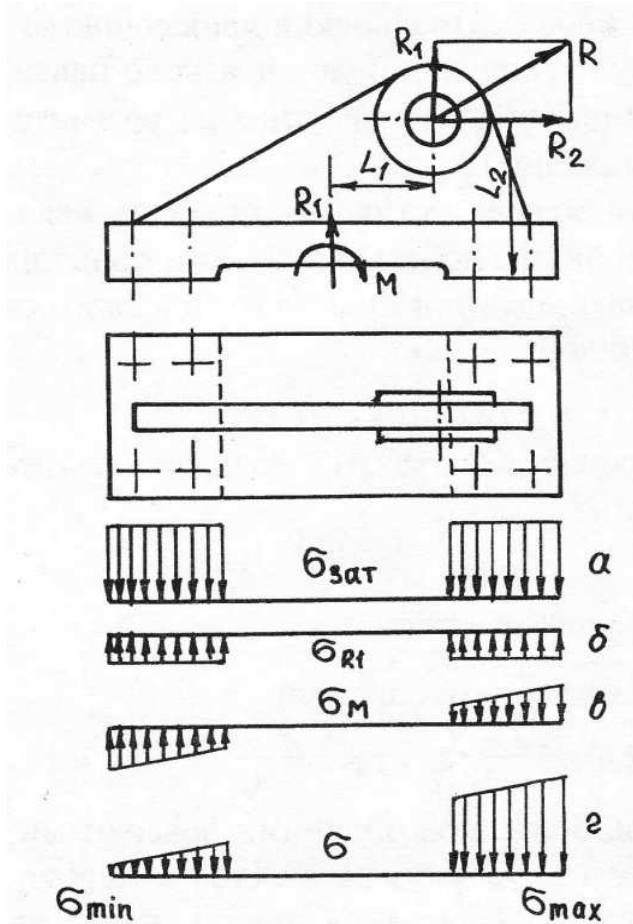


Рис. 3.58

Залишкове зусилля стику:

$$F_{cm} = F_{зам} - (1 - \chi) F$$

Розглянемо розрахунок групового болтового з'єднання з декількома болтами. Розрахунок групових з'єднань зводиться до визначення найбільш навантаженого болта і оцінки його міцності.

Для прикладу розглянемо кріплення кронштейна за допомогою восьми болтів, навантаженого силою R (рис. 3.58). Розкладемо зусилля R на складові R_1 та R_2 . Замінімо дію цих сил силою R_1 і моментом який дорівнює: $M = R_2 L_2 - R_1 L_1$. Зусилля R_1 і момент M розкривають стик, зусилля R_2 зсуває деталі. При зтяжці болтів силою F у площині стику виникають напруження (рис. 3.58 а):

$$\sigma_{зам} = F \cdot Z / A_{cm};$$

де Z – кількість болтів; A_{cm} – площа стику.

Зусилля R_1 зменшує зусилля зтяжки стику на величину (рис. 3.58 б):

$$\sigma_{R1} = R_1(1 - \chi) / A_{ст}$$

Якщо має місце податливість деталей за наявності декількох пружних прокладок, коефіцієнт $\chi \approx 1$, тоді майже все зовнішнє навантаження передається на болт.

При жорсткості деталей, яка набагато перевищує жорсткість болта, тоді $\chi \approx 0$, тому майже все зовнішнє навантаження задіяне на розвантаження стику.

Характерне значення даного коефіцієнта χ для з'єднання металевих деталей без прокладок $\chi = 0,2 \dots 0,3$.

Остаточно, повна сила, що діє на болт, дорівнює:

$$F_{\sigma} = F_{зам} + \chi F.$$

Частина третя

При роботі з'єднання вважається, що стик повертається відносно осі симетрії, тому в площині стику виникають напруження від моменту M (рис. 3.58 в):

$$\sigma_M = \frac{M}{W_{cm}},$$

де W_{cm} – момент опору площу стику відносно осі симетрії.

Тоді еюра сумарних напружень в стику матиме вигляд, зображений на рис. 3.58 г. Умови працездатності стику полягають у тому, що:

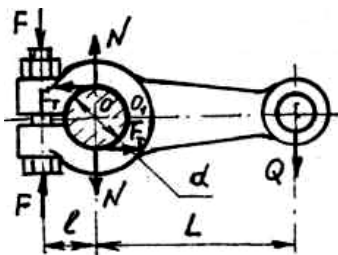
1) мінімальні напруження в стику $\sigma_{min} = \sigma_{зам} - \sigma_{R1} - \sigma_M > 0$ (умова нерозкриття стику);

2) максимальні напруження не мають перевищувати допустимих напружень змінання деталей: $\sigma_{max} = \sigma_{зам} - \sigma_{R1} + \sigma_M \leq [\sigma]_{зм}$. З цих умов визначаються напруження затяжки $\sigma_{зам}$ і потрібний діаметр болта.

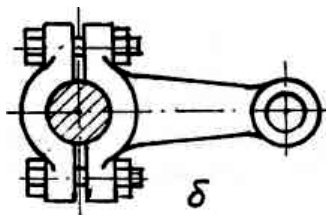
3.9.6. Клемові з'єднання

Клемові з'єднання (рис. 3.59 а б) є фрикційними, в яких необхідний притиск отримують за допомогою гвинтів. Застосовують їх для закріплення на валах та інших круглих стрижнях деталей переважно при необхідності їх періодичного переставлення або регулювання.

Перевагами клемових з'єднань є можливість плавного регулювання і встановлення деталей під будь-яким кутом та в змінному положенні по довжині гладенької ділянки вала, самозапобігання від перевантажень, менша концентрація напружень порівняно із шпонковими та шліцьовими з'єднаннями. Але клемові з'єднання непридатні для передачі великих моментів та осьових сил, потребують періодичного затягування гвинтів, мають великі габарити і дисбаланс.



а



б

З'єднання виготовляють з рознімною маточиною (рис. 3.59 б) і маточиною, яка має розріз (рис. 3.59 а). З'єднання з рознімною маточиною складніші, їх застосовують при необхідності монтажу без знімання інших деталей на валу.

Клемові з'єднання розраховують за умови передачі крутильного моменту або осьової сили. Необхідно також проводити розрахунок гвинтів.

Розглянемо розрахунок з'єднання, зображеного на рис. 3.59 а.

Умова рівноваги сил відносно точки O :

$$Q \cdot L - F_T \cdot d = Q \cdot L - N \cdot f \cdot d = 0.$$

Рис. 3.59

Звідки необхідна сила нормального притиску N

$$N = QL/(fd). \quad (3.108)$$

Умова рівноваги сил відносно точки O_1

$$F(l + d/2 - Nd/2). \quad (3.109)$$

З урахуванням (3.110) з (3.111) маємо:

$$F = \frac{QL}{2f(l+d/2)}. \quad (3.110)$$

3.9.7. Шпонкові з'єднання

У машинобудуванні для передачі обертального руху від вала до посаженої на нього деталі і навпаки поширені шпонкові та шліцьові з'єднання, за допомогою яких з'єднують вали з зубчастими колесами, шківками пасових передач, маховиками, зірочками ланцюгових передач тощо. Ці з'єднання широко застосовують у трансмісіях тракторів, автомобілів, будівельних, сільськогосподарських та інших машин.

Шпонкові з'єднання належать до рознімних з'єднань, від роботоздатності яких багато в чому залежить довговічність інших деталей. Це зумовлює необхідність правильного їх вибору і розрахунку на міцність.

Шпонки передають крутильний момент від вала до маточини деталі (зубчастого колеса, шківки тощо) або, навпаки, від маточини до вала. В окремих випадках, крім передачі крутильного моменту, шпонки можуть фіксувати в осьовому напрямку посаджені на вал деталі (клинові шпонки) або спрямовувати їх рух (напрявні шпонки).

Розглянемо найпоширеніші у машинобудуванні з'єднання призматичними, сегментними і клиновими шпонками.

Призматичні шпонки (рис. 3.60 *a*) виготовляють прямокутного перерізу з відношенням висоти до ширини (h, b) від 1:1 для валів малих діаметрів до 1:2 для валів великих діаметрів (ДСТУ 23360-78).

Кінці шпонок виконують плоскими або округленими. Призматична шпонка є врізною, тобто, заходить у паз вала на величину, дещо меншу половини своєї висоти. Робочими гранями призматичних шпонок є їх бокові, більш вузькі, грані. При цьому на цих гранях виникають напруження зминання $a_{зм}$, а в подовжньому перерізі шпонки – напруження зрізу $i_{зр}$. Для спрощення і полегшення збирання шпонкових з'єднань між шпонкою і маточиною передбачено радіальний зазор.

Розміри поперечних перерізів шпонок, а також пазів для них стандартизовані (ДСТУ 23360-78) і визначаються залежно від діаметра вала (табл. 3.13). Довжину шпонки приймають дещо меншу (на 3...7 мм) за довжину маточини, узгодивши її зі стандартним рядом довжин (див. примітку 1 до табл. 3.13).

Частина третя

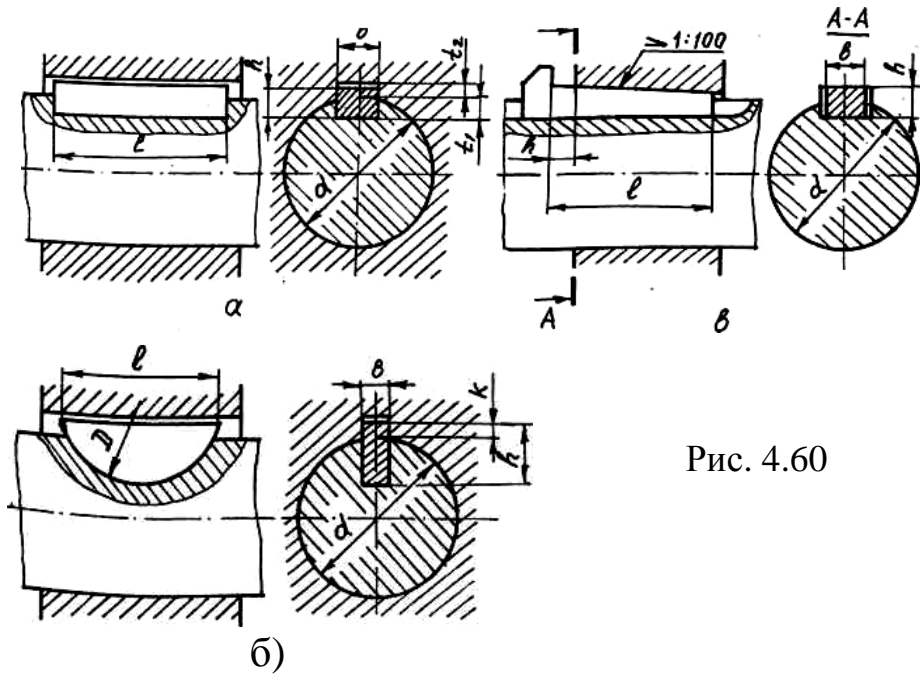


Рис. 4.60

3.13. Розміри шпонок і перерізів пазів для призматичних шпонок, мм

Діаметр вала	Переріз		Глибина паза		Інтервал довжини
	b	h	t ₁	t ₂	
Від 6 до 8	2	2	1,	1,0	6...20
Більше 8	3	3	1,	1,4	6...36
Більше 10	4	4	2,	1,8	8...45
Більше 12	5	5	3,	2,3	10...56
Більше 17	6	6	3,	2,8	14...70
Більше 22	8	7	4,	3,3	18...90
Більше 30	10	8	5,	3,3	22... 110
Більше 38	12	8	5,	3,3	28 140
Більше 44	14	9	5,	3,8	36... 160
Більше 50	16	10	6,	4,3	45... 180
Більше 58	18	її	7,	4,4	50...200
Більше 65	20	12	7,	4,9	56...220
Більше 75	22	14	9,	5,4	63...250
Більше 85	25	14	9,	5,4	70...280

Примітки: 1. Довжини шпонок повинні вибиратися з ряду: 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200; 220; 250; 280 мм.

2. Матеріал шпонки – сталь для шпонок за ДСТУ 8787-68 з межею міцності на розтяг не менше 590 МПа.

Для ступінчастих валів допускається застосовувати менші розміри перерізів шпонок на валах більших діаметрів за винятком вихідних кінців валів. Це пов'язано з тим, що з точки зору міцності і працездатності шпонкових з'єднань немає сенсу призначати для ступеня більшого діаметра шпонку більшу, ніж для ступеня меншого діаметра того ж вала. Навпаки, чим більший діаметр ступеня ступінчастого вала, тим менший з точки зору міцності для неї може бути переріз шпонки, бо при однаковому крутильному моменті в шпонковому з'єднанні на ступені більшого діаметра діють менші зусилля, ніж на ступені меншого діаметра. Проте, наявність на одному валу шпонкових пазів однакових перерізів покращує технологічність виготовлення вала. Таким чином, рекомендується призначати однакові за перерізом шпонки для всіх ступенів вала, виходячи зі шпонкового пазу найменшого діаметра вала.

Розглянемо позначення шпонки. Наприклад, шпонка виконання *A* розмірами $b=18$ мм, $h=11$ мм, $l=100$ мм позначається:

Шпонка 18 x 11 x 100 ГОСТ 23360-78.

Те ж, виконання *B*:

Шпонка В 18 x 11 x 100 ГОСТ 23360-78.

Для спрощення розрахунків приймають, що шпонка врізана у вал на половину своєї висоти, і напруження зминання розподіляються рівномірно за висотою і довжиною шпонки. Тоді умову міцності шпонкового з'єднання на зминання можна записати у вигляді

$$\sigma_{зм} = \frac{F_{зм}}{A_{зм}} = \frac{4T}{hl_p d} \leq [\sigma_{зм}] \quad (3.111)$$

де $F_{зм}$ – зусилля зминання ($F_{зм} = 2\frac{T}{d}$; d – діаметр вала); $A_{зм} = h\frac{l_p}{2}$ – площа зминання; T – крутильний момент, що передається; h – висота шпонки; l_p – робоча довжина шпонки (довжина прямолінійної ділянки шпонки, $l_p = l - b$ для шпонок виконання *A*, $l_p = l$ для виконання *B*), $[\sigma_{зм}]$ – допустимі напруження на зминання.

Допустимі напруження в нерухомих шпонкових з'єднаннях при спокійному навантаженні рекомендується приймати:

- при сталій маточині і посадці з гарантованим натягом у з'єднанні вал – маточина $[\sigma_{зм}] = 150...200$ МПа; $[\sigma_{зм}] = 60...100$ МПа при чавунній маточині;

- за відсутності гарантованого натягу у з'єднанні вал – маточина $[\sigma_{зм}] = 100...150$ МПа і $[\sigma_{зм}] = 60...80$ МПа при чавунній маточині.

Ці значення допустимих напружень знижують на 1/3 при роботі зі слабкими поштовхами і на 2/3 – при ударному навантаженні.

Якщо при розрахунку умова (3.113) не виконується, то у з'єднанні

Частина третя

передбачають дві, а інколи й три, шпонки, які встановлюють під кутом 180° або 120° відповідно. Якщо і при цьому не забезпечується міцність з'єднання, то шпонкове з'єднання замінюють на шліцьове.

У стандартних шпонках розміри b і h підбрані так, що навантажувальну здатність з'єднання при постійному моменті обмежують напруження зминання, а не зрізу. Тому при розрахунках, як правило, обмежуються перевіркою міцності шпонкового з'єднання на зминання.

Розрахунок шпонок на зріз проводять тільки у випадку дії короточасних перевантажень, якщо такі мають місце, за формулою:

$$\tau_{зр} = \frac{F_{зр}}{A_{зр}} = \frac{2T}{bld} \leq [\tau_{зр}]; \quad (3.112)$$

де $F_{зр} = 2T/d$ – сила, яка зрізує шпонку; $A_{зр} = bl$ – площа зрізу; b – ширина шпонки; $[\tau_{зр}] = 60 \dots 90$ МПа – допустимі напруження зрізу.

Використання сегментних шпонок (рис. 3.49 б) зумовлено технологічністю з'єднання (не потребує ручної підгонки), а також стійким положенням шпонки на валу, що виключає її перекіс і зменшує нерівномірність напружень. Але вони забезпечують меншу точність посадки маточини на вали і вриваються у вал на більшу глибину, що зменшує міцність вала. Тому сегментні шпонки використовуються не так широко, як призматичні.

Шпонки при коротких маточинах встановлюють по одній, при довгих – по дві (інколи навіть три) вздовж довжині маточини. Сегментні шпонки характеризуються шириною b , діаметром заготовки D , висотою h (або довжиною l , рис. 3.60 б).

Розміри шпонок і перерізів пазів вибирають залежно від діаметра вала (ДСТУ 24071-80). Розглянемо сегментної шпонки. Наприклад, шпонка розмірами $b = 6$ мм, $h = 10$ мм позначається:

Шпонка 6 x 10 ГОСТ 24071 -80.

Як і для призматичної шпонки, міцність з'єднання сегментною шпонкою перевіряють за напруженнями зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{2T}{d l k} \leq [\sigma_{зм}] \quad (3.113)$$

де $k = h - t_1$ – висота шпонки, що контактує з маточиною. Допустимі напруження зминання $[\sigma_{зм}]$ приймаються такими самими, як і для призматичних шпонок.

З'єднання клиновою шпонкою (рис. 3.60 в) – це напружене з'єднання, тому крім крутильного моменту може передавати і осьову силу. На відміну від призматичних і сегментних шпонок робочими гранями у клинової шпонки є широкі грані, по бокових гранях є зазор. Клинові шпонки викликають радіальні зміщення осі маточини відносно осі вала, збільшуючи биття посадженої деталі. Тому область використання клинових шпонок обмежується невеликими частотами обертання вала.

Розміри клинових шпонок вибирають залежно від діаметра вала і довжини маточини посадженої деталі (ДСТУ 24068-80). Клинові шпонки позначають так, наприклад, клинова шпонка з розмірами $b = 18$ мм, $h = 11$ мм, $l = 100$ мм: Шпонка 18 x 11 x 100 ДСТУ 24068-80.

У клиновому шпонковому з'єднанні тиск між шпонкою, валом і маточиною розподіляється нерівномірно. Крутий момент частково передаватиметься силами тертя у з'єднанні. Наближено розрахунок клинової шпонки проводять за напруженнями зминання за формулою:

$$\sigma_{зм} = \frac{12 T}{l_1 b (b + 6 f d)} \leq [\sigma_{зм}], \quad (3.114)$$

Де l_1 – довжина шпонкового з'єднання; b – ширина шпонки; d – діаметр вала; f – коефіцієнт тертя між маточиною і шпонкою (для сталевих маточин $f = 0,15$; для чавунних $f = 0,2$).

3.9.8. Шліцьові з'єднання

Шліцьові (зубчасті) з'єднання широко застосовують у машинобудуванні (в автотракторній промисловості, станкобудуванні, сільськогосподарському машинобудуванні тощо) внаслідок ряду переваг порівняно із шпонковими: суттєве підвищення міцності з'єднання, особливо при динамічних навантаженнях внаслідок збільшення площі робочої поверхні зубців; краще центрування деталей на валах і спрямовування при осьовому переміщенні.

За формою профілю зубців розрізняють три типи з'єднань: прямобічні (рис. 3.61 а), евольвентні (рис. 3.60 б) і трикутні (рис. 3.60 в). З'єднання з трикутними зубцями не стандартизовані і застосовуються лише для нерухомих з'єднань при передачі невеликих моментів при тонкостінних втулках. Тому зупинимось на прямобічних і евольвентних шліцьових з'єднаннях.

Прямобічні шліцьові з'єднання найпоширеніші. Розміри з'єднань вибирають залежно від діаметра вала за ДСТУ 1139-80. Стандартом передбачені три серії з'єднань: легка, середня і важка, які відрізняються висотою і кількістю зубців.

З'єднання з прямобічними шліцями виготовляють із центруванням по бокових гранях розміру b (рис. 3.60 г), внутрішньому d (рис. 3.61 д) і зовнішньому D (рис. 3.61 е) діаметрах.

Центрування по бокових гранях забезпечує більш рівномірний розподіл навантаження по зубцях, тому його застосовують при важких умовах роботи (ударні навантаження, великі напруження в з'єднанні).

Частина третя

Центрування по діаметрах забезпечує більш високу співвісність вала і маточини. Діаметр центрування вибирають, виходячи з технології.

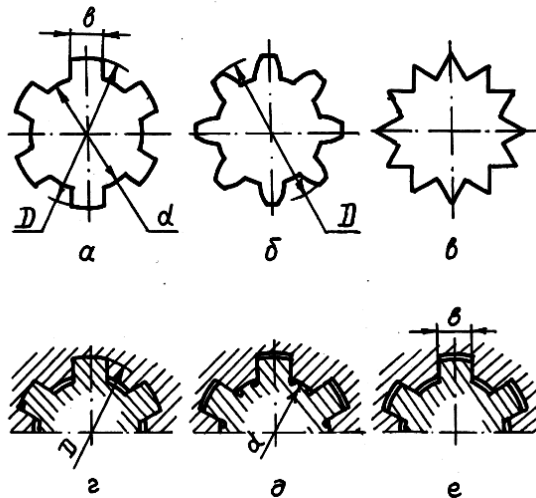


Рис. 3.61

Якщо твердість матеріалу втулки дозволяє виготовлення пазів протяжкою ($HV < 350$), то рекомендують центрування по зовнішньому діаметру; при високій твердості втулки – по внутрішньому діаметру.

Позначення валів і втулок шліцьових з'єднань повинні мати: літеру, яка означає вид поверхні центрування; число зубців і номінальні розміри d , D і b з'єднання; позначення полів допусків або посадок діаметрів, а також ширини зуба, які розміщуються після відповідних розмірів.

Допускається не вказувати в позначенні допуски тих діаметрів, що не центруються.

Евольвентні шліцьові з'єднання (ДСТУ 6033-80) розрізняють із центруванням по бокових сторонах (найпоширеніші), зовнішньому і внутрішньому діаметрах. Розмірний ряд евольвентних шліцьових з'єднань наведений в ДСТУ 6033-80 залежно від номінального (зовнішнього) діаметра D . Порівняно з прямобічними евольвентні шліцьові з'єднання міцніші, простіші й дешевші у виготовленні, що стало причиною більш широкого їх застосування у машинобудуванні.

Позначення валів і втулок евольвентних шліцьових з'єднань повинні мати: номінальний діаметр з'єднання D , модуль m , позначення посадок з'єднання, розміщених після розмірів елементів, що центруються; номер стандарту.

Розрахунок шліцьових з'єднань на зминання і зношування

Навантажувальна здатність шліцьових з'єднань визначається як не менше з двох значень, отриманих із розрахунків на зминання і зношування. Для визначення навантажувальної здатності необхідно знати допустимі напруження у з'єднанні.

На змінання шліцьові з'єднання розраховують за формулою:

$$\sigma_{зм} = T/S_F \leq [\sigma_{зм}] \quad (3.115)$$

де T – розрахунковий крутильний момент на валу (найбільший з довгостроково діючих моментів); S_F – сумарний статичний момент площі робочих поверхонь зубців з'єднання відносно осі вала; $[\sigma_{зм}]$ – допустимі напруження при розрахунку на змінання.

Для прямобічних і евольвентних шліцьових з'єднань:

$$S_F = 0.5 d_{cp} \cdot h \cdot l \cdot Z$$

де d_{cp} – середній діаметр зубчастого з'єднання: для прямобічних шліцьових з'єднань $d_{cp} = 0,5 (D + d)$; для евольвентних – $d_{cp} = m Zh$ – робоча висота зубців (для прямобічних шліцьових з'єднань визначається за таблицями, для евольвентних – $h = m$ при центруванні по бокових поверхнях і $h = 0.9m$ – при центруванні по діаметрах); l – робоча довжина з'єднання; Z – кількість зубців.

Допустимий тиск у з'єднанні з розрахунку на змінання визначається за формулою:

$$[\sigma_{зм}] = \frac{\sigma_T}{nK_D K_{зм}}, \quad (3.116)$$

де σ_T – межа текучості для матеріалу зубців меншої твердості; n – коефіцієнт запасу міцності при розрахунку на змінання, приймається в межах 1,25...1,4 (менші значення для незагартованих робочих поверхонь і невідповідальних з'єднань); $K_D = 1...2,5$ – коефіцієнт динамічності навантаження; $K_{зм}$ – загальний коефіцієнт концентрації навантаження при розрахунку на змінання.

Розрахунок шліцьових з'єднань на зношування слід проводити для періоду припрацювання за формулою:

$$\sigma = \frac{T}{S_F} \leq [\sigma_{знош}] \quad (3.117)$$

де T і S_F – ті ж значення, що і при розрахунку на змінання; $[\sigma_{знош}]$ – допустимий середній тиск на зношування.

Допустимий тиск на зношування $[\sigma_{знош}]$ визначається за формулою:

$$[\sigma_{знош}] = \frac{[\sigma]_{умов}}{K_{знош} K_p K_{довг}} \quad (3.118)$$

$$\sigma = T/S_F \leq [\sigma_{знош}] \quad (3.119)$$

Клиновими називають різні з'єднання за допомогою деталі, яка

Частина третя

має форму клина (рис. 3.62 а). Клинові з'єднання застосовують, наприклад, для регулювання положення підшипників валків прокатних станів, для з'єднання штока з повзуном насоса. З'єднання клиновими шпонками, які розглянуті раніше, також можна віднести до клинових.

Переваги клинових з'єднань: простота і надійність конструкції, можливість утворення і сприйняття великих зусиль, швидке складання і розбирання з'єднання.

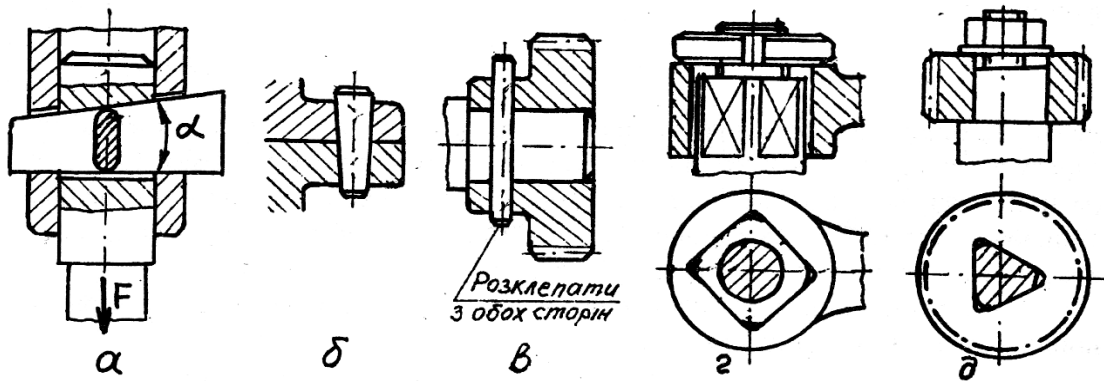


Рис. 3.62

Для забезпечення самогальмування з'єднання необхідно, щоб кут клина був менший за подвоєний кут тертя, тобто, $\alpha < 2 \varphi$. Критерієм працездатності клинового з'єднання є міцність. Клин розраховують на згин, стрижень з'єднання – на зріз з урахуванням ослаблення отвором, поверхні контакту клина зі стрижнем і втулкою – на зминання.

Штифтовими називають з'єднання деталей за допомогою штифта (рис. 3.62 б,в). Ці з'єднання застосовують для передачі порівняно невеликих крутильних моментів, фіксації взаємного розташування деталей. Як приклад, можна навести фіксацію двома штифтами взаємного положення корпусу і кришки редуктора (рис. 3.61 б), що є необхідним при спільній механічній обробці отворів під підшипники і подальшому складанні редуктора. Перевагами штифтових з'єднань є простота, технологічність і низька вартість, недоліками – концентрація напружень в місці отвору і пов'язане з цим послаблення перерізу вала.

Конструкція штифтів може бути різноманітною: конічний і циліндричний гладенький (рис. 3.62 б,в); конічний і циліндричний з насічкою, різьбою тощо. Циліндричні штифти ставлять в отвори з натягом, конічні виготовляють з конусністю 1:50, що забезпечує самогальмування і багатократне складання і розбирання з'єднання.

Критерієм працездатності штифтового з'єднання є міцність. Тіло штифта розраховують на зріз, місця контакту штифта з деталями – на зминання.

Профільними називають з'єднання, в яких маточина (втулка) посаджена на вал, який має певний відмінний від колового профіль

(рис. 3.62 г,д). Найпоширенішим прикладом такого з'єднання є посадка ручки чи маховичка на вал (вісь) з профілем квадратного перерізу (рис. 3.62 г). Більш досконалим є овальний профіль з'єднання (рис. 3.62 д). Переваги профільних з'єднань порівняно зі шпонковими і шліцьовими: менша концентрація напружень, краще центрування деталей. Недоліками є значні напруження змінання і виникнення розпірних зусиль в маточині. Розрахунок профільних з'єднань на міцність зводиться до перевірки міцності робочих поверхонь на змінання і міцності маточини.

3.10. Муфти

3.10.1. Призначення і класифікація муфт

Муфтами в техніці називають пристрої для з'єднування кінців валів,



стрижнів, труб, електричних проводів тощо. Приводні муфти призначені для передачі крутильного моменту між валами. Крім того, окремі види приводних муфт можуть виконувати додаткові функції.

В машинобудуванні застосовують різноманітні приводні муфти (див. схему на попередній сторінці).

В електричних і гідравлічних муфтах використовують принципи зчеплення за рахунок електромагнітних і гідродинамічних сил, що в курсі не розглядається.

Інколи довгі вали виготовляють складеними, виходячи з міркувань

Частина третя

технології виготовлення, складання або транспортування. Такі вали з'єднують між собою глухими муфтами постійної дії.

При складанні приводів з окремих агрегатів практично неможливо забезпечити ідеальну співвісність з'єднаних валів.. Для компенсації цих неспіввісностей застосовують компенсуючі жорсткі та пружні муфти. Останні також мають властивості демпферів.

Для регулювання руху (пуску, зупинки, зміни напрямку обертання) застосовують керовані зчпні кулачкові та фрикційні муфти.

Для запобігання перевантаженню машини призначені самодіючі запобіжні муфти, які не передають крутільний момент, що перевищує розрахунковий. Існують також самодіючі муфти за напрямом обертання (муфти вільного ходу) і частотою обертання (відцентрові), які відключаються (включаються) при досягненні певної частоти обертання.

Силовим фактором, який передають муфти, є крутільний момент. Для кожної муфти основною паспортною характеристикою є допустимий крутільний момент, який вона може передати. Вибір муфт полягає у визначенні розрахункового крутільного моменту $T_{роз}$ і порівнянні його з паспортним значенням $T_{доп}$

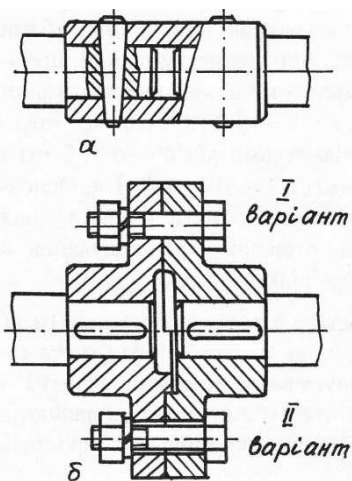
$$T_{роз} = K T \leq T_{доп}$$

де $K=1...2,3$ – коефіцієнт запасу (залежить від характеру навантаження в приводі та ступеня небезпеки виходу з ладу муфти); T – момент, який діє довготривало.

3.10.2. Глухі муфти

Глухі муфти утворюють жорсткі з'єднання валів, які не компенсують неспіввісності валів і потребують точного їх центрування. Основними типами глухих муфт, які застосовують у машинобудуванні, є втулкові (рис. 3.63 а) і фланцеві (рис 3.63 б).

Втулкова муфта (ДСТУ 4246-80), найпростіша за конструкцією,



уявляє собою втулку, посаджену на кінці валів, що з'єднуються, і призначена для передачі крутільного моменту від 0,3 до 12500 Нм. Вона кріпиться на валу за допомогою штифтів (рис. 4.63 а), призматичних або сегментних шпонок, шліцьових з'єднань та стопорних гвинтів. Муфта має малі габарити, але застосовується рідко внаслідок складності монтажу і високої жорсткості з'єднання. Міцність втулкової муфти визначається міцністю її з'єднання з валом і міцністю втулки.

Фланцеві муфти (ДСТУ 20761-80) є основним видом глухих муфт, які застосовують у машинобудуванні. Вони можуть передавати

Рис. 3.63

крутильний момент від 8 до 40000 Нм. Фланцева муфта (рис. 3.63 б) складається з двох напівмуфт, з'єднаних болтами. Крутильний момент може передаватися силами опору на зріз кріпильних болтів (варіант 1 на рис. 3.63 б), коли болти встановлені без зазору, або силами тертя між фланцями (варіант 2). У другому випадку муфта повинна мати центральний пояс.

Міцність фланцевої муфти обмежена міцністю болтового з'єднання. Розрахунок таких з'єднань див. в п. 5 попередньої глави.

3.10.3. Компенсуючі муфти

Внаслідок неточності виготовлення і монтажу завжди виникають деякі неточності взаємного розміщення осей валів (рис. 3.64). Розрізняють осьове (Δa), радіальне (або ексцентриситет Δr) і кутове (перекіс $\Delta \alpha$) зміщення. На практиці при складанні приводів частіше за все мають місце всі види зміщень одночасно. Щоб компенсувати ці зміщення при складанні і зменшити зусилля у з'єднанні при роботі застосовують жорсткі та пружні компенсуючі муфти.

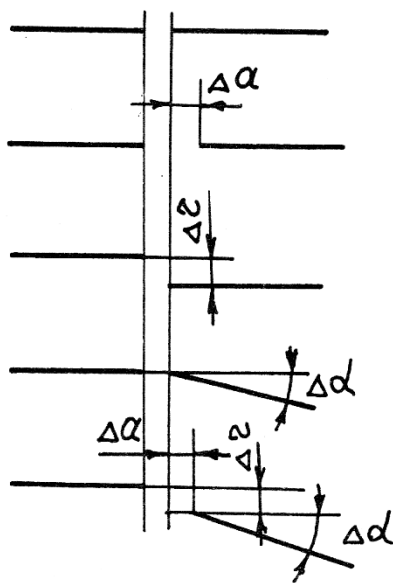


Рис. 3.64

Принцип дії жорстких компенсуючих муфт полягає в тому, що в цих муфтах конструктивно закладається можливість зміщення з'єднаних між собою півмуфт.

Зубчаста муфта (ДСТУ 5006-83*) складається із двох втулок з зовнішніми зубцями (рис. 3.65) і надітих на них обойм з внутрішніми зубцями. Найпоширенішим є евольвентний профіль зубців з кутом зачеплення $\alpha=20^\circ$ і коефіцієнтом висоти головки зуба $h_a=0,8$. Кількість зубців 30...80. Муфта компенсує всі види неспіввісності за рахунок зазорів між зубами та їх сферичної форми.

Допустиме зміщення визначається умовою обмеження кута повороту між валом і віссю півмуфти ($\Delta \alpha < 0^\circ 30'$). Муфта може допускати з'єднання валів діаметрами від 40 до 560 мм і передавати крутильний момент $T = 700 \dots 10^6$ Нм. Основний критерій працездатності муфти – зношування зубців. Для зменшення інтенсивності зношування в обойму муфти заливають рідке мастило.

Ланцюгова муфта (ДСТУ 20742-81*) складається з двох зірочок (рис. 3.66), посаджених на вали, і ланцюга, який охоплює обидві зірочки. Муфта може також мати захисний кожух. Ланцюгові муфти допускають перекося валів до 1° і радіальні зміщення до 1,2 мм за рахунок зазорів між

Частина третя

зубами зірочок і ланцюга. Для цих муфт характерні простота конструкції, невеликі габарити, простота монтажу і демонтажу.

До жорстких компенсуючих муфт також належать кулачково-дискові, шарнірні муфти, муфти з проміжною призматичною деталлю (сухарем).

Застосування пружного елемента в муфтах дає можливість крім компенсації неспіввісностей валів знизити ударні навантаження, зменшити жорсткість системи з метою усунення резонансних коливань. Як пружні елементи частіше всього застосовуються гумові елементи різноманітної форми (можливе застосування і сталевих пружних елементів).

Втулково-пальцьові муфти МПВП (ДСТУ 21424-75) широко

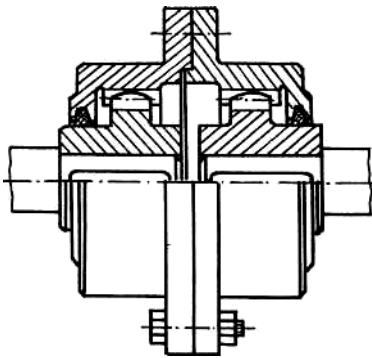


Рис. 3.65

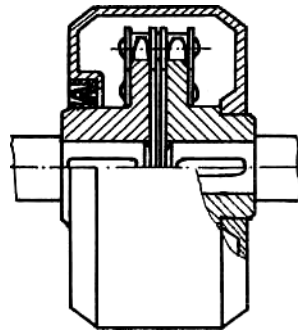


Рис. 3.66

використовуються у машинобудуванні завдяки простоті та невеликій вартості виготовлення. Крутильний момент у цій муфті (рис. 4.67) передається через пальці (4... 10 шт.) і посаджені на них пружні елементи у

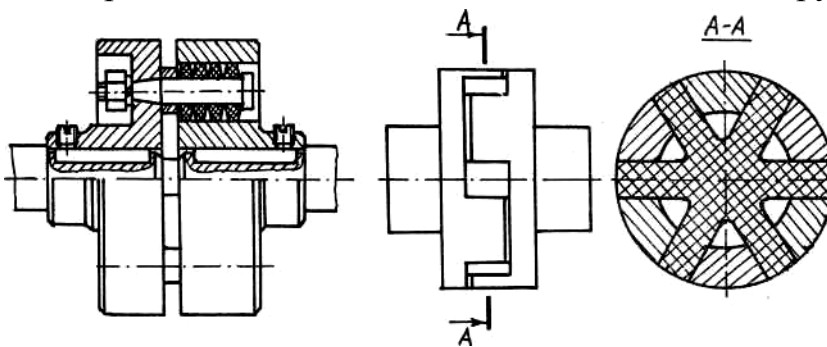


Рис. 3.67

Рис. 3.68

формі втулок. Пальці кріпляться конічними частинами в одній півмуфті та входять в отвори другої півмуфти. Фланці півмуфт не торкаються один одного, тому металевого контакту між ними немає. Це, крім плавної роботи муфти, забезпечує електричну ізоляцію валів. Муфти залежно від розміру можуть допускати осьові (1...5 мм) та радіальні (0,3...0,6 мм) зміщення, а також перекося валів до 1° . Для перевірки міцності муфти необхідно розрахувати пальці на згин і гумові втулки – на зминання. Муфти можуть з'єднувати вали діаметром до 150 мм і передавати

крутильний момент до 15000 Нм.

Муфта з гумовою зірочкою (ДСТУ 14084-76) складається із двох півмуфт з виступами на торцях (рис. 4.67) і гумової зірочки, зубці якої розміщені між виступами півмуфт. Муфта застосовується для з'єднання валів діаметрами 12...45 мм і може передавати крутний момент 3...120 Нм. Муфта допускає за рахунок деформації зубців зірочки радіальні зміщення до 0,2 мм і перекус валів до 30°. Вона може працювати в повітряному або масляному середовищі при температурі $-40...+50^{\circ}\text{C}$. Основний критерій працездатності – незминання зубців зірочки.

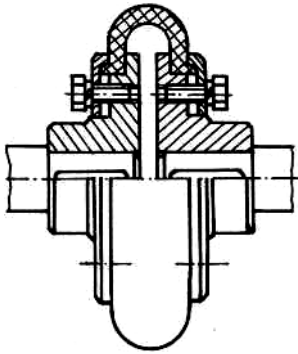


Рис. 3.69

Муфта з тороподібною оболонкою (ДСТУ 20884-82*) складається з двох півмуфт (рис. 3.69), пружної оболонки у вигляді частини тора і фланців, які затискають оболонку. Для більшої міцності оболонку, як правило, виготовляють армованою. Пружний елемент цієї муфти працює на кручення. Муфта допускає радіальні зміщення до 2,6 мм, кутові зміщення валів $2...6^{\circ}$, кут закручування до $5...30^{\circ}$. Залежно від розміру муфти допускають з'єднання валів діаметрами 14...200 мм і можуть передавати крутильний момент 20...25000 Нм.

Крім розглянутих видів пружних компенсуючих муфт існує ще цілий ряд конструкцій муфт, які містять пружні елементи і виконують аналогічні функції.

4.10.4. Керовані і самодіючі муфти

Керовані зчіпні муфти можуть з'єднувати або роз'єднувати вали в рухомому або нерухомому стані за допомогою спеціальних механізмів керування. Їх використовують у коробках швидкостей та інших механізмах при необхідності зміни режиму роботи. Крутильний момент у цих муфтах передається за рахунок зачеплення (кулачкові муфти) або сил тертя (фрикційні муфти).

Кулачкові муфти складаються з нерухомої 1 (рис. 3.70) і рухомої 2 півмуфт. У робочому положенні виступи (кулачки) 3 однієї півмуфти входять у западини іншої. Рухому півмуфту пересувають за допомогою вилки (на рисунку не показана), розміщеної у пазу 4. Кільце 5 призначене для центрування валів. Профіль кулачків (у перерізі циліндричною поверхнею) може бути прямокутний, трапецеїдальний або трикутний. Симетричні трапецеїдальні профілі застосовують для реверсивних муфт, а несиметричні – для нереверсивних. Частіше всього кулачкові муфти розміщують на одному валу і застосовують для переключення швидкостей. Працездатність кулачкових муфт визначається зношуванням кулачків, яке залежить від тиску на поверхнях контакту.

Частина третя

Фрикційні зчіпні муфти (рис. 3.71) передають крутний момент між півмуфтами за рахунок сил тертя на робочих поверхнях. Тиск на поверхнях контакту отримують за рахунок різноманітних пристроїв і механізмів включення.

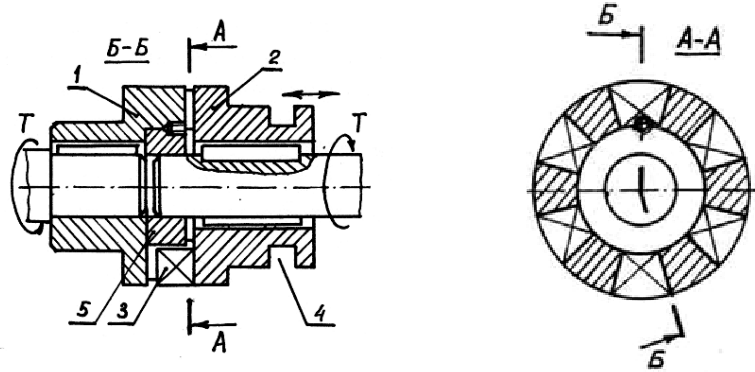


Рис. 3.70

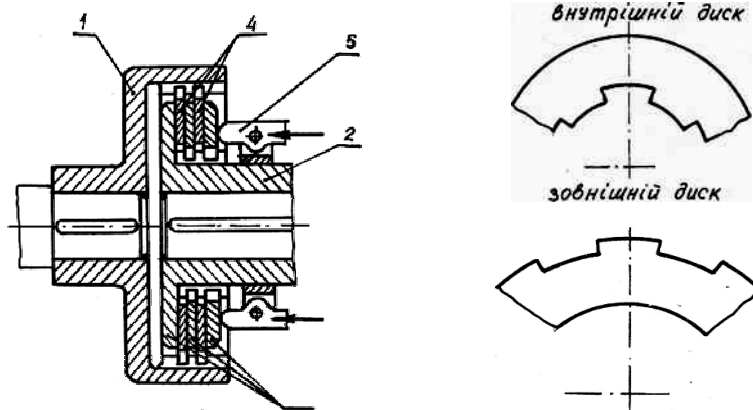


Рис. 3.71

При включенні фрикційних муфт під навантаженням у початковий момент виникає буксування, яке забезпечує плавний розгін веденого вала. Для прикладу, на рис. 3.71 зображена конструкція такої муфти. Вона складається з барабана 1, який посаджений на вал і має внутрішні шліці, шліцьової втулки 2, внутрішніх 3 і зовнішніх 4 дисків, які входять у зачеплення з барабаном і втулкою, притискного пристрою 5. Для передавання малих крутильних моментів внутрішні та зовнішні диски можуть бути виготовлені з металу. Для передачі більших моментів одні із дисків облицьовують фрикційним матеріалом, що дає можливість збільшити тертя на робочих поверхнях і, таким чином, зменшити силу, необхідну для включення муфти. До таких матеріалів належить азбестова тканина з добавкою латунного дроту (фередо). Фрикційні муфти повинні забезпечувати надійність зчеплення, високу зносо- і теплостійкість дисків. Тому диски цих муфт перевіряють на питомий тиск і баланс теплової енергії.

Самодіючі муфти призначені для автоматичного роз'єднування валів

у тих випадках, коли параметри роботи машини стають недопустимими за тими чи іншими показниками. Вони поділяються на запобіжні (самодіючі за величиною моменту), обгінні (за напрямом обертання) і відцентрові (за величиною кутової швидкості).

Запобіжні муфти захищають машини від перевантажень. Будь-яка фрикційна муфта, відрегульована на передачу граничного моменту, може виконувати функцію запобіжної. Сили притиску в цих муфтах, як правило, забезпечуються постійно діючими пружинами.

Іншими представниками запобіжних муфт є муфти зі спеціальними елементами, що руйнуються. Схема одного із варіантів конструкції такої муфти зображена на рис. 3.71. Крутильний момент між півмуфтами 1 і 2 передається через штифт 3, який зрізується при перевантаженні. Загартовані втулки 4 полегшують заміну штифтів після зрізу, бо запобігають зминанню штифтом менш міцного матеріалу півмуфт.

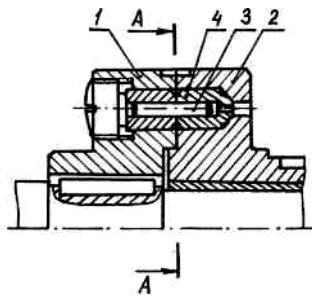


Рис. 3.71

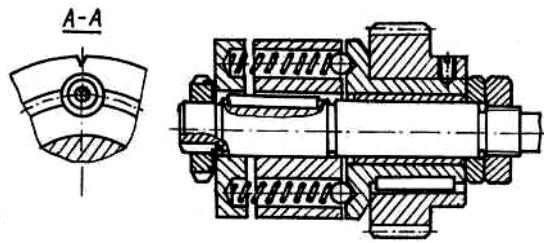


Рис. 3.72

Частина третя

На рис. 3.72 показана пружинно-кулькова муфта (ГОСТ 15621-77). При досягненні граничної величини крутільного моменту під дією осьових зусиль, які виникають внаслідок трапецієдної форми западин у півмуфті, кульки зміщуються в осьовому напрямку і розмикають муфту з наступним провертанням. Ці муфти використовують при діаметрах валів від 8 до 48 мм, крутільних моментах 4...400 Нм. На практиці застосовують також пружинно-кулачкові та інші типи запобіжних муфт.

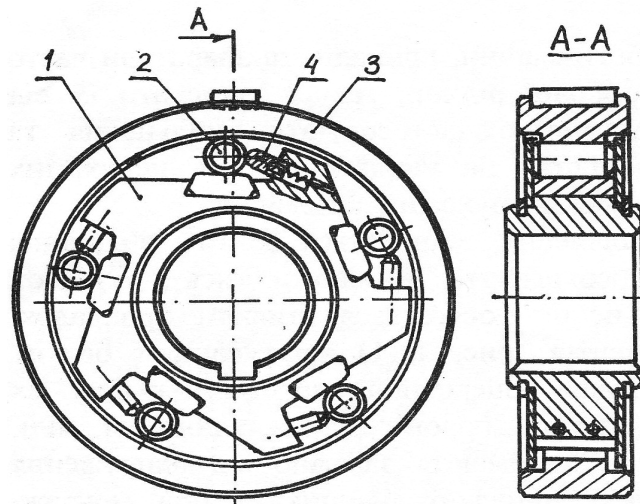


Рис. 3.73

Обгінні муфти (муфти вільного ходу) призначені для передачі крутільного моменту тільки в одному напрямі. Досить поширеними є фрикційні обгінні муфти, які передають крутільний момент за рахунок роликів, що заклинюються між півмуфтами (рис. 3.73). При обертанні зірочки 1 за ходом годинникової стрілки ролики 2 заклинюються між зірочкою та зовнішнім кільцем 3 і передають обертання з'єднаному з ним веденому валу. Притискні пристрої 4 зменшують "мертвий" хід і сприяють рівномірному розподілу навантаження між роликами.

При обертанні зірочки у поворотному напрямі ролики не заклинюються і обертання веденої частини не відбувається.

Такі муфти безшумні, компактні, можуть працювати при високих кутових швидкостях. Вони застосовуються при діаметрах валів 10...90 мм і для передачі крутільних моментів до 750...800 Нм. Муфта вільного ходу дозволяє веденій ланці обертатися по інерції при зупиненій ведучій ланці. Цей ефект використовують у передачах велосипедів, мотоциклів, верстатів, автомобілів.

Відцентрові муфти автоматично з'єднують (роз'єднують) вали тільки тоді, коли кутова швидкість вала перевищить деяку задану величину (самодіючі муфти за величиною кутової швидкості). Відцентрові муфти застосовують для автоматичного включення і відключення виконавчого

механізму за допомогою регулювання кутової швидкості двигуна; розгону машини з великою маховою масою при використанні двигуна з малим пусковим моментом; підвищення плавності пуску; відключення при перевантаженнях і т.п.

3.11. Ущільнення, мастильні матеріали та пристрої

3.11.1. Ущільнення

Для забезпечення нормальної роботи машин, приладів та апаратури часто виникає потреба запобігати витоку робочої рідини, газу і захистити їх від навколишнього середовища. З цією метою застосовують ущільнення та ущільнюючі пристрої, які можна поділити на ущільнення для нерухомих деталей (з'єднань) та пристрої для ущільнення рухомих деталей.

До з'єднань, які потребують ущільнення, відносяться болтові з'єднання корпусів різноманітних апаратів високого та низького тиску, кришок редукторів, двигунів тощо. Їх ущільнення досягається стиском прокладок, кілець та інших ущільнюючих елементів (рис. 3.74) шляхом затягування болтів.

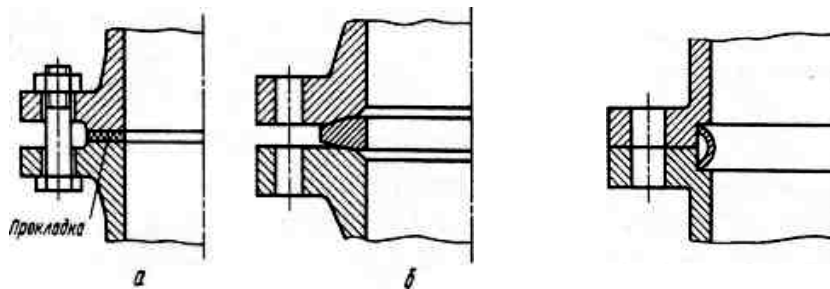


Рис. 3.74

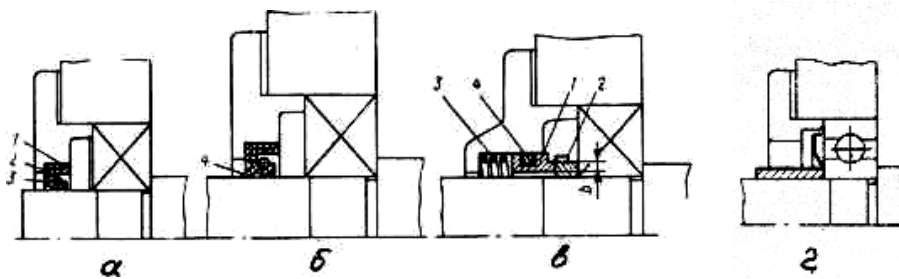


Рис. 3.75

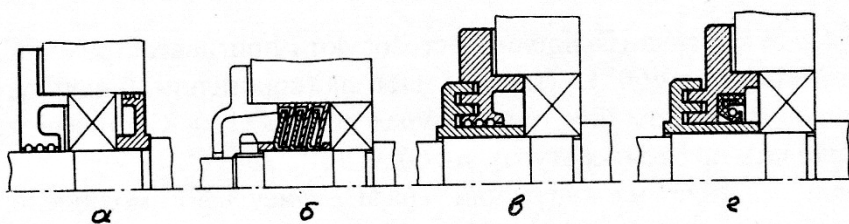


Рис. 3.76

Прокладки і кільця можуть мати різний поперечний переріз та форму. Їх виготовляють з листових матеріалів (картону, пароніту, гуми, алюмінію, міді, сталі тощо). Матеріал для ущільнення приймають залежно від напруження стиску, яке виключає витік. В деяких випадках, наприклад, при монтажі підшипників, прокладки також виконують регулюючу роль. Для підвищення герметичності інколи прокладку (стик) перед постановкою змащують фарбою, пастою чи мастикою.

Ущільнення рухомих деталей

На практиці частіше всього виникає необхідність ущільнення валів, які обертаються і виступають з корпусів. У вузлах, де робоча рідина чи мастило не знаходиться під тиском, а колова швидкість вала не перевищує 5...7 м/с, застосовують *контактні ущільнення* у вигляді манжет (рис. 3.75 а,б). Манжета складається із корпуса 1, виготовленого із бензиностійкої гуми, сталюого каркаса Г-подібного перерізу 2 і пружини, яка стягує ущільнюючу частину манжети. При роботі в засміченому середовищі використовують манжету з додатковою робочою кромкою (рис. 3.75 б).

Отримали розповсюдження ущільнення торцевих поверхонь (рис. 3.75 в). Ущільнення включає кільце 1 із антифрикційного матеріалу АМС-1, ущільнююче кільце 2 із загартованої сталі марок 40Х або ШХ15, пружини 3 і а додаткове статичне ущільнення 4 у вигляді гумового кільця круглого перерізу. Для ущільнення вихідних кінців валів, які обертаються із коловою швидкістю до 6 м/с, застосовують пружні сталюні шайби (рис. 3.76 г) товщиною 0,3...0,5 мм.

Безконтактні пристрої застосовують для ущільнення деталей, які обертаються з великими швидкостями. Найпростішим ущільненням такого типу є щільове (рис. 3.76 а). Зазор між кришкою і валом заповнюють пластичним мастилом, яке захищає підшипник від попадання вологи і пилу. Отримали розповсюдження також лабіринті ущільнення (рис. 3.76 б), у яких ефект ущільнення досягається за рахунок довгої щілини, яка утворена рядами радіальних і осьових зазорів. Використовують в конструкціях також і інші типи ущільнень, принципи роботи яких базуються на використанні відцентрових сил, а також комбіновані ущільнення (рис. 3.76 в,г).

3.11.2. Мастильні матеріали та пристрої

Мащення деталей машин, що труться (зубчастих коліс, підшипників тощо), проводять переважно рідкими мінеральними або синтетичними маслами, пластичними (консистентними) та твердими мастилами.

Як рідкі використовують мінеральні масла (індустріальне, турбінне, трансформаторне, циліндрове тощо), які зберігають свої властивості до

температури 120 °С при довгостроковій роботі.

Кальцієві мастила (солідоли) застосовують при довгостроковій роботі деталей до температури 60 °С.

Натрієві мастила (консталіни) більш тугоплавкі, їх можна використовувати при температурах до 100.. 120 °С. Літієві мастила можуть працювати при температурах від 60 до 150...200 °С.

Тверді мастила (колоїдальний графіт, дисульфід молібдену, фтористі з'єднання тощо) використовують для деталей, які працюють у вакуумі, в умовах дуже низьких (нижче мінус 100°С) або дуже високих (вище 300°С) температур, при роботі в агресивних середовищах.

Залежно від умов роботи застосовують різні способи подачі мастильних матеріалів до деталей та вузлів.

Разове або періодичне закладання або мащення застосовують для шарнірів, ланцюгів передач, підшипників ковзання з низькою частотою обертання, підшипників кочення з коловими швидкостями обертання вала не більше 10... 15 м/с тощо.

Пластичне мастило закладають у корпуса підшипників (в об'ємі 1/3...1/2 вільного простору), мастять при складанні або подають періодично через індивідуальні мастильні пристрої (ковпачкову маслянку, прес-маслянку під шприц (рис. 3.77 а) тощо).

Занурюванням у масляну ванну змащують зубчасті колеса редукторів, коробок передач, закритих високошвидкісних ланцюгових передач, а також не швидкісних шарикопідшипників.

Для зменшення втрат на перемішування і розбризування масла тихохідні зубчасті колеса занурюють на величину не більше 1/6 радіуса, а швидкісні – на одну або дві висоти зубця

Масло в корпус підшипника (при горизонтально розташованій осі вала) заливають до рівня, який відповідає положенню центра нижнього тіла кочення.

Подачу мастила гнітами чи дозуючими маслянками (рис. 3.77 б,в,г) проводять в основному для мащення швидкісних малогабаритних підшипників, ланцюгових передач.

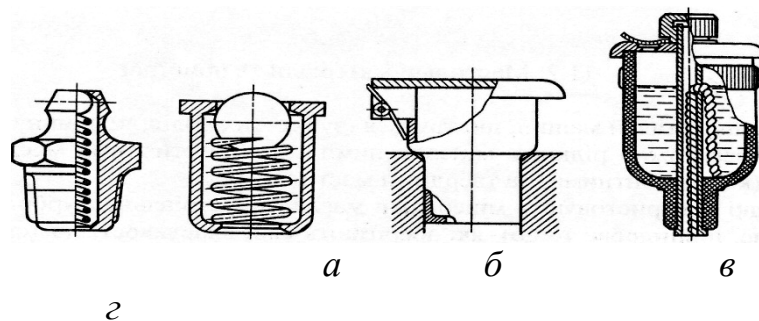


Рис. 3.77

Частина третя

Черв'ячні передачі (при нижньому розташуванні черв'яка), і підшипники редукторів, коробок передач змащують розбризкуванням масла із загальної масляної вали. Розбризкування і «масляний туман» створюються зубчастими колесами, маслорозбризувальними кільцями, які занурені в масло.

Мащення підшипників ковзання в режимі роботи рідинного тертя, підшипників кочення потужних високошвидкісних редукторів, центрифуг, зубчастих коліс при коловій швидкості більше 15 м/с проводять примусово циркуляційною подачею масла. При цьому масло за допомогою насоса доставляється по маслопроводам до деталей і розбризкується.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. Изд.15-е. / Н.М. Беляев – М.: «Наука», 1976. – 607 с.
2. Биргер И.А.,. Сопротивление материалов. / И.А. Биргер, Р.Р. Мамотов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
3. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов. Учебник. / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др. – К.: «Вища школа», 1986. – 725 с.
4. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. / Ю.Н Работнов. – М.: Физматгиз, 1962.– 455 с.
5. Цурпал І.А. Механіка матеріалів і конструкцій. Навчальний посібник. / І.А. Цурпал. – К.: Вища освіта, 2005. – 357 с.
6. Серенсен С.В. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович. – М.: Машгиз, 1963. – 452 с.
7. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов. / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: «Наукова думка», 1988. – 725 с.
8. Тимошенко С.П. Механика материалов. / С.П. Тимошенко, Д.Ж. Гере. – М.: «Мир», 1976. – 670 с.
9. Жуков К.П. Расчет и проектирование машин. – М.: Высшая школа, 1980.- 247 с.
10. Мовнин М.С., Израелит А.Б. Техническая механика. Часть II. Сопротивление материалов. - Л.: Изд-во ЛТА, 1972. – 65 с.
11. Иванов М.Н. Детали машин. / М.Н. Иванов, В.А. Финогенов. – М.: Высш. шк., 2008. – 408 с.
12. Мерхель І.І. Деталі машин. / І.І. Мерхель. – К: «Альтера». 2005.– 342 с.
13. Решетов Д.Н. Детали машин. / Д.Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1989. – 496 с.
14. Заблонский К.И. Детали машин. / К.И. Заблонский. – К.: Вища шк., 1985. – 518 с.
15. Иосилевич Г.Б. Прикладная механика. / Г.Б. Иосилевич, Г.Б. Строганов, Г.С. Маслов. – М.: Высш. шк. 1989.– 351 с.
16. Эрдеди А.А. Техническая механика. / А.А. Эрдеди, Н.А. Эрдеди. – М.: Высш. шк., 1992. – 272 с.
17. Заблонский К.И. Прикладная механика. / К.И. Заблонский. – К.: Вища шк. 1984. – 280 с.

Навчальне видання

Литвинов Олег Іванович

Мороз Любов Іванівна

ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Редактор Литвинов О.І.
Макетування Литвинов О.І.