С. І. Наконечний
Т. О. Терещенко
Т. П. Романюк

Економетрія

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y$$

1906–2006

До 100-річчя Київського національного економічного університету

ББК 65В6
Н 22

Рецензенти:

В. М. Геєць, д-р екон. наук, проф., акад. НАН України
(Інститут прогнозування НАН України)

І. Г. Лук'яненко, канд. екон. наук, доц.
(Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 1/11-2890 від 10.07.03

Наконечний С. І., Терещенко Т.О., Романюк Т. П.
Н 22 Економетрія: Підручник. — Вид. 3-тє, доп. та переоб. — К.: КНЕУ, 2004. — 520 с.
ISBN 966-574-630-8

У підручнику розглянуто основні методи оцінювання параметрів економетричних моделей з урахуванням особливостей економічної інформації. Подано основи економетричного моделювання й наведено численні приклади найважливіших економетричних моделей, які застосовуються в економічних дослідженнях на макро- та мікрорівні. Описано методи побудови економетричних моделей з допомогою системи одночасних структурних рівнянь.

Підручник розрахований на студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Він буде корисний також для слухачів економічних шкіл, курсів з підготовки та перепідготовки фахівців у галузі економіки, а також усім, хто має намір опанувати економетричні методи та моделі.

ББК 65В6

ISBN 966-574-630-8

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Процес прийняття науково обґрунтованих рішень в економіці тісно пов'язаний з визначенням кількісних співвідношень між економічними показниками. Так, скажімо, щоб з'ясувати, чи доцільно інвестувати придбання нового обладнання (розробку нової технології), потрібно знати, який додатковий дохід можна отримати на кожну одиницю капітальних вкладень у разі реалізації різних проектів інвестування. Або ще один приклад. Обсяг роздрібної торгівлі залежить від доходу населення. Приймаючи рішення про збільшення реалізації товарів, продуктів та послуг, неодмінно потрібно проаналізувати, якою мірою для певних груп населення зростає розмір покупок з підвищенням доходу на одну особу групи.

Можна навести ще багато прикладів на підтвердження такого висновку: ефективність прийманих рішень у підприємництві, комерції, бізнесі та інших сферах діяльності залежить від того, наскільки особа, яка приймає ці рішення, використовує інформацію, що характеризує кількісні зв'язки між економічними процесами та явищами.

Галузь економічної науки, яка вивчає методи кількісного вимірювання взаємозв'язків між економічними процесами та явищами, називають ***економетрією.***

Економетрія як навчальна дисципліна належить до провідних у фундаментальній підготовці бакалаврів з економіки.

У вітчизняній та зарубіжній літературі висловлювалися різні погляди з приводу того, які власне проблеми розв'язує і які методи застосовує саме економетрія. Проте нині коло задач і методів, що належать до економетрії, вже практично повністю сформувалося. Порівняно з підходом, притаманним математичній статистиці, власне економетричний підхід до задач, які вивчаються, полягає не в тому, що приклади й термінологія беруться з економічної галузі, а насамперед у тій увазі, що приділяється питанню про відповідність вибраної моделі економічному об'єктові. Зокрема, ідеться про формулювання гіпотез, серед яких потрібно зробити вибір, щоб далі застосовувати ті чи ті методи оцінювання параметрів моделі.

Зауважимо, що застосувати метод найменших квадратів для оцінювання параметрів економетричної моделі можна лише за певних умов, які далеко не завжди виконуються на практиці для вихідної економічної інформації. Якщо ці умови порушуються, доводиться застосовувати інші методи оцінювання параметрів економетричної моделі. Вивчити методи оцінювання параметрів моделі й особливості економічної інформації для кількісного вимірювання взаємозв'язку між досліджуваними явищами та процесами — ось завдання дисципліни «Економетрія».

Викладаючи матеріал, автори систематично обговорюють умови, за яких доводиться переглядати моделі, уточнювати систему уявлень, на базі яких за допомогою статистичних даних можна конструювати нові кількісно визначені варіанти відповідної моделі.

При цьому поступово відкидаються гіпотези, що дають підстави застосовувати метод найменших квадратів, і розглядаються методи побудови економетричної моделі, які цілковито відповідають особливостям досліджуваної економічної інформації.

Зазначений підхід зумовив і структуру підручника. Спочатку подається застосування класичного регресійного аналізу для побудови економетричної моделі (метод найменших квадратів), а далі розглядаються економетричні задачі, що відповідають реальним економічним умовам. Якщо при цьому порушуються гіпотези застосування регресійного аналізу, то залучаються інші методи оцінювання параметрів моделі.

Пропонований підручник створено колективом авторів кафедри економіко-математичних методів Київського національного економічного університету згідно з програмою курсу «Економетрія» для підготовки бакалаврів з економіки.

Автори вдячні професорові кафедри В. В. Вітлінському, доцентам кафедри П. І. Верченкові, Г. І. Великоіваненко за поради щодо поліпшення викладу матеріалу. Особлива вдячність професорові О. Д. Шарапову, який допоміг удосконалити термінологію та позначення.

Відгуки та побажання щодо підручника
просимо надсилати за адресою
03680, м Київ, проспект Перемоги, 54/1,
Київський національний економічний університет

Розділ 1

ПРЕДМЕТ, МЕТОД І ЗАВДАННЯ КУРСУ «ЕКОНОМЕТРІЯ»

1.1. Предмет і метод курсу

Економетрія — порівняно молода галузь науки, відома під такою назвою лише з 1930 року, коли було засновано Економетричне товариство, яке визначило себе так: «Міжнародне товариство для розвитку економічної теорії і її зв'язку зі статистикою та математикою». З 1933 року це товариство видає журнал «Економетрія».

Термін «економетрія» запропонував львівський учений П. Щемпа, опублікувавши у Львові 1910 року книгу «Нариси економетрії і природної теорії бухгалтерії, яка ґрунтується на політичній економії».

За рубежем перші праці з економетрії, що належали Муру, вийшли друком протягом 1914—1917 рр. У 1928 році було опубліковано дослідження Ч. Кобба і П. Дугласа про виробничу функцію. Ця функція увійшла в економетрію як класичний приклад і досі є важливим інструментом економічного аналізу.

Термін ***«економетрія»*** означає ***вимірювання в економіці,*** і вимірювання справді є важливою частиною економетрії. Але не всі вимірювання в економіці належать до економетрії. Якщо раніше деякі автори майже всі прикладні математичні дослідження в економіці відносили до економетрії, то тепер зміст її тлумачиться значно вужче. Дамо таке означення предмета «Економетрія».

Економетрія вивчає методи кількісного вимірювання взаємозв'язків між соціально-економічними процесами та явищами.

Визначення предмета економетрії в різних виданнях подається дещо по-різному. Сьогодні можна умовно вирізнити ***п'ять*** підходів до визначення предмета економетрії, що характерні для зарубіжної економетричної літератури.

1. *Л. Клейн* [30] визначає економетрію як науку, що вивчає вимірювання зв'язків у відповідному економічному аналізі.

2. *Г. Тінтнер* [25] ототожнює економетрію з економічною статистикою.

3. *Г. Хансен* [5] під економетрією розуміє застосування математичних і статистичних методів у економіці.

4. За іншими визначеннями економетрія є синтезом економічної теорії і математики.

5. Деякі автори під економетрією розуміють економічну теорію, математику і статистику.

Кожне з цих означень предмета економетрії має своє раціональне зерно. Але всі вони частково містять щойно наведене означення предмета економетрії і відповідають тому матеріалу, який вивчається в курсі.

Економетрія не розглядається як галузь математики, але математика відіграє в ній досить важливу роль. Тому методи викладання і вивчення економетрії практично такі самі, як у математичних курсах. Вони передбачають постановку задачі, а також аналіз розв'язків, що базуються на теоремах і основних означеннях. В економетрії не завжди всі твердження строго доводяться, але алгоритми задач неодмінно ґрунтуються на методах математичної статистики, широко використовуються матрична алгебра та інші класичні розділи математики.

1.2. Місце курсу серед дисциплін фундаментальної підготовки бакалаврів з економічних спеціальностей

Економетрія — одна з основних дисциплін у підготовці бакалаврів з економічних спеціальностей. Вона будується на основі математичних та економічних знань. За допомогою економетричних методів можуть бути відхилені економічні гіпотези. У крайньому разі можна показати неможливість застосувати їх у даних конкретних умовах. Хоча засоби економетрії не дають змоги доводити теоретичні твердження, але за допомогою її методів можна показати, що те чи інше твердження не суперечить даним спостережень. Економетричні моделі можуть використовуватися для прогнозування або оцінювання впливу прийнятих рішень чи урядових постанов на подальші зміни цін, податків чи стан справ будь-якої фірми.

Для засвоєння курсу потрібна добра математична підготовка, особливо з ***матричної алгебри, диференціального числення.*** Однаковою мірою потрібно опанувати ***методи математичної статистики.*** Важливо також знати ***економічні категорії і поняття.***

Економетрія — це предмет не для першокурсників. Проте для того, щоб ознайомитися з проблемами, які вивчає економетрія і з якими стикаються ті, хто використовує економетричні методи, немає потреби бути спеціалістом з усіх розділів математики та економіки. Але тут важливо вміти використовувати комп`ютерну техніку, бо висока точність розрахунків та їх громіздкість вимагають комп`ютерної підтримки під час вивчення економетрії.

1.3. Структура дисципліни

Економетрія поділяється на ***дві частини:***

1) економетричні методи;
2) економетричні моделі економічних процесів і явищ.

У цьому курсі вивчатимемо здебільшого матеріал, що належить до першої частини, тобто економетричні методи. Економетричні методи можна умовно розбити на ***п'ять груп***. ***Першу групу*** становлять методи оцінювання параметрів класичної економетричної моделі за методом найменших квадратів, а також їх верифікації. До ***другої групи*** належать методи оцінювання параметрів узагальненої моделі, коли порушуються деякі передумови застосування методу найменших квадратів. ***Третю групу*** утворюють методи оцінювання параметрів динамічних економетричних моделей та їх верифікації. ***Четверта група*** моделей базується на статистичному аналізі часових рядів. ***П'ята група*** охоплює методи оцінювання параметрів економетричних моделей, побудовані на основі системи одночасних структурних рівнянь.

1.4. Коротка історична довідка

На початку XX століття в деяких країнах були спроби скласти так звані *барометри розвитку*. Найвідоміший з них «гарвардський барометр», за допомогою якого в 1920-х роках намагалися передбачити поводження товарного і грошового ринку.

Гарвардська школа вважалася на той час центром економічних досліджень. Тут уперше почали системно вивчати ряди економічних показників з урахуванням взаємозв`язків між ними і на основі цих показників досліджувати тенденції та цикли економічних процесів. Криза 1929—1933 років призвела до критичного перегляду методів аналізу, які застосовувалися в економіці. У дослідженнях почали враховувати випадкові аспекти економічних явищ, що стало початком формування економетрії як галузі економічної науки.

Засновники економетрії — Р. Фріш, Е. Шумпетер, Я. Тінберген. Усі вони перебували під впливом неокласичної школи і кейнсіанства, намагаючись поєднати економічну теорію з математичними й статистичними методами. Спочатку обмежувались вивченням деяких моделей попиту і пропонування. Тільки після Другої світової війни було побудовано комплексні економетричні моделі на макрорівні, в яких основна увага приділялась попиту, фінансовому стану та податкам, прибутку, цінам і т. ін.

Протягом останніх п'ятдесяти років економетрія розвивалася за такими ***двома напрямами***: 1) розроблялися нові методи оцінювання параметрів моделей з урахуванням особливостей економічної інформації; 2) розширювалися економічні дослідження на основі економетричних методів.

Особливі досягнення пов'язані з розвитком економетрії за останні 30 років. Сюди можна віднести такі проблеми:

- вивчення і врахування мультиколінеарності;
- дослідження помилок специфікації;
- коваріаційний аналіз параметрів моделі;
- побудова моделі з фіктивними змінними;
- визначення лагових змінних і побудова та аналіз моделей розподіленого лагу.

1.5. Завдання економетричного дослідження

Економетричні дослідження охоплюють чотири основні напрями:

- специфікацію моделі та формування сукупності спостережень;
- оцінювання параметрів моделі;
- перевірку статичної значущості моделі та оцінювання її параметрів;
- прогнозування на основі економетричної моделі.

Найважливішим завданням економетричного дослідження є оцінювання параметрів і перевірка значущості економетричної моделі. Це завдання виконується поетапно. Перший етап — специфікація моделі в математичній формі. Другий етап — збір і підготовка економічної інформації. На третьому етапі оцінюються параметри моделі. Четвертий етап — перевірка моделі на достовірність, під час якої особливо вагомими стають оцінки дисперсії залишків моделі. Саме вони відіграють вирішальну роль, коли потрібно з'ясувати якість економетричних моделей або визначити надійність обчислених параметрів, або застосувати розроблені моделі у прогнозуванні.

1.6. Стислі висновки

1. Економетрія — порівняно молода галузь економічної науки, відома під такою назвою з 1930 року. Вона вивчає методи оцінювання параметрів моделей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними величинами, а також розглядає основні напрями застосування економетричних моделей в економічних дослідженнях.

2. Економетрія є однією з фундаментальних дисциплін у системі підготовки бакалаврів з економічних спеціальностей. Для засвоєння курсу необхідна ґрунтовна математична підготовка, насамперед опанування математичної статистики, матричної алгебри та диференціального числення.

3. Економетрія поділяється на дві частини:

1) економетричні методи;

2) економетричні моделі економічних процесів та явищ.

4. Економетричні методи можна поділити на чотири групи. До першої належать методи оцінювання параметрів класичної економетричної моделі на основі методу найменших квадратів, а також їх верифікації. Другу групу становлять методи оцінювання параметрів узагальненої моделі, коли порушуються деякі передумови використання методу найменших квадратів. Третя група охоплює методи оцінювання параметрів динамічних економетричних моделей та їх верифікації. Четверта група — методи оцінювання параметрів економетричних моделей, побудовані на основі системи одночасних структурних рівнянь.

5. Розвиток економетрії упродовж останнього десятиліття відбувається у двох напрямах:

1) розробка нових методів оцінювання параметрів моделей з урахуванням особливостей вихідної економічної інформації; 2) розширення економічних досліджень на основі економетричних методів.

6. Головне завдання економетрії полягає в оцінюванні параметрів, перевірці значущості економетричної моделі та прогнозуванні. Щоб розв'язати його, необхідно виконати такі кроки економет-

ричного дослідження: подати специфікацію моделі в математичній формі; зібрати й підготувати економічну інформацію; оцінити параметри моделі та перевірити її на достовірність.

7. Структура економетричних досліджень містить економетричні методи та застосування їх на етапі побудови й аналізу економетричних моделей з урахуванням особливостей вихідної інформації.

1.7. Запитання до розділу

1. Дайте визначення предмета курсу економетрії.
2. Альтернативні підходи до визначення предмета економетрії.
3. Яка роль цього курсу в підготовці бакалаврів з економічних спеціальностей?
4. Охарактеризуйте структуру курсу.
5. Наведіть основні етапи розвитку економетрії як економічної науки.
6. Завдання економетричного дослідження.
7. Характеристика структури економетричних досліджень.

1.8. Основні терміни і поняття

Економетрія • Верифікація • Економетричні методи • Динамічна економетрична модель • Економетрична модель • Система одночасних структурних рівнянь • Оцінювання параметрів • Значущість моделі

Розділ 2
ОСНОВИ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. Особливості економетричних моделей

2.1.1. Роль і місце економетричних моделей в управлінні економічними системами. Сучасні методи управління економічними системами та процесами базуються на широкому використанні математичних методів та ЕОМ. Застосовувати математику для розв'язування певних економічних задач почали дуже давно, сотні років тому. Але протягом останніх 50—60 років, коли економічна наука сягнула певних рубежів у своєму розвитку і в ній постали задачі, які не вдається розв'язати за допомогою традиційних економічних методів, математика посіла в цій науці одне з основних місць. Сформувався напрям теоретично-практичних досліджень — ***економіко-математичне моделювання***. Математичне моделювання є вираженням процесу математизації наукового економічного знання. Математика, проникаючи в сутність економічної науки, приносить із собою точність та універсальність розв'язків, строгість і довершеність наукових концепцій. З розвитком математики, електронно-обчислювальної техніки, загальнометодологічних та економічної наук дедалі ширше використовують математичні моделі.

Математична модель об'єкта (процесу, явища) містить три групи елементів: 1) характеристику об'єкта, яку потрібно визначити (невідомі величини), — вектор $Y = (y_i)$; 2) характеристики зовнішніх (щодо модельованого об'єкта) умов, які змінюються, — вектор $X = (x_j)$; 3) сукупність внутрішніх параметрів об'єкта — A.

Множини умов та параметрів X і A можуть розглядатись як екзогенні величини (тобто такі, які визначаються поза рамками моделі), а величини, що належать вектору Y, — як ендогенні (тобто такі, які визначаються за допомогою моделі).

Математичну модель можна тлумачити як особливий перетворювач зовнішніх умов об'єкта X (входу) на характеристики об'єкта Y (виходу), які мають бути знайдені.

Залежно від способу вираження співвідношень між зовнішніми умовами, внутрішніми параметрами та характеристиками, які мають бути знайдені, математичні моделі поділяються на дві групи: ***структурні*** та ***функціональні***.

Структурні моделі відбивають внутрішню організацію об'єкта: його складові, внутрішні параметри, їх зв'язок із «входом» і «виходом» і т. ін. Розрізняють три види структурних моделей:

1) $Y_j = f_j(A, X)$ $(j \in J)$; (2.1)
2) $\Psi_i(A, X, Y) = 0$ $(i \in I)$; (2.2)
3) імітаційні моделі.

У моделях першого виду всі невідомі величини подаються у вигляді явних функцій від зовнішніх умов і внутрішніх параметрів об'єкта.

У моделях другого виду невідомі визначаються одночасно із системи I рівнянь, нерівностей і т. ін.

В імітаційних моделях невідомі величини визначаються також одночасно із вхідними параметрами, але конкретний вигляд співвідношень невідомий.

Моделі типу (2.1), (2.2) можна розв'язати за допомогою чисельних алгоритмів. Можливості побудови моделей (2.1) практично необмежені. Для розв'язування задачі (2.2), яка не зводиться до задачі (2.1), необхідно мати спеціальний алгоритм, за яким не тільки знаходять розв'язки, а й виявляють загальні властивості розв'язків, що не залежать від конкретних параметрів задачі.

Імітаційні моделі не зводяться до чітко визначених математичних задач, а тому потрібно знаходити особливі способи для відшукання розв'язків. Такі моделі виникають у разі спроб дати математичний опис особливо складних об'єктів (складних систем). Для дослідження цих об'єктів (систем) використовуються порівняно нові математичні методи: теорія випадкових процесів, теорія ігор та статистичних рішень, теорія автоматів і т. ін. Активну роль у процесі такого моделювання відіграють ЕОМ.

Імітаційні моделі не мають чіткого зображення внутрішньої організації (структури) об'єкта, і тому їм належить проміжне місце між структурними та функціональними моделями.

Основна ідея ***функціональних моделей*** — пізнання сутності об'єкта через найважливіші прояви цієї сутності: діяльність, функціонування, поводження. Внутрішня структура об'єкта при цьому не вивчається, а тому інформація про структуру не використовується. Функціональна модель описує поводження об'єкта так, що, задаючи значення «входу» X, можна дістати значення «виходу» Y (без участі інформації про параметри):

$$Y = A(X). \tag{2.3}$$

Побудувати функціональну модель — означає знайти оператор A, який пов'язує X і Y.

Відмінності між структурними та функціональними моделями мають відносний характер. Вивчення структурних моделей дає одночасно цінну інформацію про поводження об'єкта. Водночас вивчення функціональних моделей супроводжується формулюванням гіпотез про внутрішню структуру об'єкта.

Економетричні моделі належать до функціональних моделей. Вони кількісно описують зв'язок між вихідними показниками X економічної системи та результативним показником Y. У загальному вигляді економетричну модель можна записати так:

$$Y = f(X, u), \tag{2.4}$$

де X — вихідні економічні показники; u — випадкова, або стохастична, складова.

Показники X бувають детермінованими і стохастичними. Адитивна складова u — це випадкова змінна, а отже, з огляду на те, що залежна змінна Y залежить від u, вона також стохастична. Звідси випливає висновок: ***економетрична модель є стохастичною.***

Побудова і дослідження економетричних моделей мають певні особливості. Ці особливості пов'язані з тим, що економетричні моделі є стохастичними. Вони описують кореляційно-регресійний зв'язок між економічними показниками. Цей зв'язок кількісно характеризує наявні закономірності економічних процесів та явищ. Отже, щоб побудувати економетричну модель, необхідно:

1) мати достатньо велику сукупність спостережень даних;
2) забезпечити однорідність сукупності спостережень;
3) забезпечити точність вихідних даних.

2.1.2. Економетрична модель і проблеми економетричного моделювання. Економетричне моделювання реальних соціально-економічних процесів і систем, як правило, спрямоване на досягнення двох типів кінцевих прикладних результатів:

- отримання прогнозу економічних показників, що характеризують стан та розвиток економічної системи;
- імітування різних можливих сценаріїв соціально-економічного розвитку економічної системи (багатоваріантний сценарій, розрахунки, ситуаційне моделювання).

У постановці задач економетричного моделювання доцільно визначати їхній ієрархічний рівень і тип. Поставлені задачі можуть належати до макрорівня (країна, міждержавний аналіз), мезорівня (регіони всередині країни) і мікрорівня (підприємства, фірми, сім'я) і бути спрямованими на розв'язок питань інвестиційної, фінансової або соціальної політики, ціноутворення, розподільних відносин і т. ін.

Економетрична модель містить набір регресійних рівнянь, що описують стохастичні зв'язки між досліджуваними економічними показниками, а також певні тотожності, які характеризують співвідношення між економічними показниками.

Найпоширеніший математичний вид досліджуваних взаємозв'язків лінійний (відносно параметрів) і адитивний за формою. При цьому можливі ситуації, коли одні й ті самі показники в одних рівняннях відіграють роль пояснюваних змінних, а в інших — пояснювальних (такі моделі називають системами одночасних рівнянь).

До основних проблем економетричного моделювання належать:

- ідентифікація змінних та висування гіпотези про специфікацію моделі;
- специфікація економетричної моделі;
- методи оцінювання параметрів моделі;
- верифікація моделі;
- прогноз пояснюваних змінних на основі моделі.

Розв'язання цих проблем значною мірою базується на математично-статистичному інструментарії. Велика увага приділяється методам багатовимірного аналізу і, передусім, методам розпізнавання соціально-економічних образів, їх типологізації.

2.1.3. Формування сукупності спостережень. Поняття сукупності спостережень є основою економетричного моделювання. Потрібно розрізняти одиницю спостереження — джерело даних і одиницю сукупності — носія ознак, що підлягають спостереженню. Ці поняття найбільш чітко розрізняються в соціально-економічній статистиці. Наприклад, під час перепису населення одиницею спостереження буде сім'я, а одиницею сукупності — окрема людина. У разі статистичних досліджень із застосуванням методів багатовимірного статистичного аналізу ці поняття часто збігаються. Тому в економетричному моделюванні здебільшого йтиметься про одиницю сукупності.

Сукупність спостережень можна подати у вигляді впорядкованого набору (матриці) даних з параметрами n, m, T, де n — кількість одиниць сукупності $(i=\overline{1,n})$; m — кількість ознак, які описують кожну одиницю $(j=\overline{1,m})$; T — проміжок часу, за який вивчається ознака певного спостереження $(t=\overline{1,T})$. Наприклад, якщо через x позначити певну ознаку спостереження, то потрібно записати так: x_{ij}^{t}, або x_{ijt}, що означає j-та ознака i-го спостереження в період t.

За одиницю сукупності спостережень часто беруть певний економічний об'єкт, що функціонує. Вибрати одиницю сукупності — означає визначити рівень об'єкта моделювання (наприклад, великий технологічний агрегат, цех, підприємство, галузь і т. ін.).

Розрізняють три способи формування вибірки: часову, просторову і просторово-часову.

Якщо сукупність спостережень вивчається у статиці (просторова вибірка), то всі дані можна зобразити у вигляді матриці розміром $n \times m$, в якій кожний рядок несе інформацію про одиницю вибіркової сукупності, а стовпець характеризує певну ознаку.

Часова вибірка містить набір значень ознак функціонування окремого об'єкта в динаміці $m \times T$, тобто по суті складається з двовимірного чи багатовимірного часового ряду.

Просторово-часова вибірка являє собою комбінацію просторової і часової вибірок $n \times m \times T$.

Проблема формування сукупності спостережень та її однорідності досить важлива в економетричному моделюванні, бо економетрична модель кількісно описує закономірність формування економічних процесів та явищ. А ця закономірність доволі повно може проявитись лише тоді, коли сукупність спостережень достатньо велика.

Якщо дослідник задає граничну похибку розрахунків із певною ймовірністю, то на основі такого співвідношення маємо:

$$\Delta = t_{(\alpha)}\sqrt{\frac{\sigma_y^2}{n}}, \qquad (2.5)$$

де Δ — гранична похибка; σ_y^2 — дисперсія результативної ознаки y; $t_{(\alpha)}$ — критерій Стьюдента за рівня значущості α.

Таким чином, обсяг вибірки подається у вигляді:

$$n = \frac{t_{(\alpha)}^2\sigma_y^2}{\Delta^2}. \qquad (2.6)$$

Але якщо граничну похибку можна задати, то σ_y^2 можна дістати лише з розрахунків. Тому визначити розмір необхідної сукупності спостережень можна лише в тому разі, коли σ_y^2 відома із попередніх досліджень.

Зі співвідношення (2.6), яке визначає обсяг вибіркової сукупності спостережень, випливає, що зі зменшенням похибки в k разів сукупність спостережень має бути збільшена в k^2 разів, тобто гранична похибка розрахунків може бути зменшена неістотно, проте значно зросте сукупність спостережень. Це говорить про те, що збільшувати сукупність спостережень доцільно лише тоді, якщо в результаті істотно зростуть точність і достовірність здобутих значень.

2.1.4. Поняття однорідності спостережень. Існує багато різних підходів до аналізу та оцінювання ступеня однорідності сукупності спостережень, на основі якої будується економетрична модель. Проте багато дослідників, хоча й мають неоднакові погляди на цю проблему, одностайні в тому, що економічні сукупності, як правило, неоднорідні.

В економетричному дослідженні ми користуємось поняттям відносної однорідності, і може йтися лише про досягнення розумного ступеня однорідності спостережень, для якого можна було б забезпечити достатню точність економічних висновків. Поняття однорідності сукупності спостережень охоплює якісну і кількісну однорідність. Під першою треба розуміти однорідність, яка визначається однотипністю економічних об'єктів, їх однаковою якістю та певним призначенням, а під другою — однорідність групи одиниць сукупності, що визначається на основі кількісних ознак. При цьому обидва поняття діалектично взаємозв'язані, і кількісна однорідність можлива лише за наявності одноякісності явищ та процесів, що утворюють сукупність спостережень.

Ознаки, які включаються у вибірку для кожної одиниці спостереження, виступатимуть далі як змінні економетричної моделі. Отже, формуючи сукупність спостережень, потрібно забезпечити порівнянність даних у просторі та часі.

Це означає, що дані вихідної сукупності спостережень повинні мати:

1) однаковий ступінь агрегування;
2) однорідну структуру одиниць сукупності;
3) одні й ті самі методи розрахунку показників у часі;
4) однакову періодичність обліку окремих змінних;

5) порівнянні ціни та однакові інші зовнішні економічні умови.

У математичній статистиці запропоновано критерії, згідно з якими можна зробити висновки, чи правомірно різні сукупності спостережень вважати однорідними, а звідси об'єднувати їх в одну сукупність для економетричних досліджень. Нехай сукупність спостережень містить три групи даних.

Регресійну однорідність трьох груп спостережень можна визначити, базуючись на визначенні дисперсій цих груп та сукупності в цілому. Для цього визначимо загальну дисперсію залежної змінної за всіма трьома групами спостережень σ_0^2. Враховуючи, що загальна сукупність спостережень складається з трьох груп, її можна визначити як суму внутрішньогрупової σ_A^2 і міжгрупової σ_B^2 дисперсії: $\sigma_0^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$.

Подавши загальну дисперсію залежної змінної σ_0^2 через внутрішню та міжгрупову дисперсії, дістанемо співвідношення:

$$\sigma_0^2 = \frac{k(n_i - 1)}{kn_i - 1}\sigma_A^2 + \sigma_B^2 = \left(1 - \frac{k-1}{kn_i - 1}\right)\sigma_A^2 + \sigma_B^2, \tag{2.7}$$

де k — кількість груп; n_i — кількість спостережень в i-й групі.

Звідси очевидно, що σ_0^2 завжди буде менше за σ^2, але похибка буде невеликою, якщо $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \to 0$.

Порівнюємо відношення $Z_\sigma = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ з критичним значенням критерію Фішера за ступенів свободи $k-1$ і $kn-1$ та рівня значущості α, і, якщо воно не перевищує $F_{\text{крит}}$, то сукупності спостережень можна об'єднати для проведення економетричних досліджень.

Більш загальним критерієм у розв'язанні питання однорідності сукупності спостережень є критерій Бартлетта

$$K_Б = \frac{A}{B},$$

де $A = kn\ln\sigma_{\text{заг}}^2 - n\sum_i \ln\sigma_i^2$;

$$B = 1 + \frac{k+1}{3nk}. \tag{2.8}$$

Тут k — кількість груп; n — загальна кількість спостережень; σ_0^2 — загальна дисперсія; σ_i^2 — дисперсія i-ї групи спостережень.

Якщо $\frac{A}{B}$ не перевищує χ^2 за вибраного рівня значущості α і $k-1$ ступенів свободи, то можна стверджувати, що дисперсії взяті з однорідної сукупності спостережень.

Тут ми визначили лише деякі аспекти формування сукупності спостережень для економетричних досліджень. Але ці питання є доволі важливими, і докладніше їх вивчення перенесемо до розділу, де досліджуються фіктивні змінні (розд. 5).

2.1.5. Точність вихідних даних. Висновки, які можна зробити в результаті економетричного моделювання, цілком зумовлені якістю вихідних даних — їх повнотою та достовірністю. Це одна з найважливіших особливостей економетричного моделювання, на яку звертають увагу багато видатних економетристів. Наприклад, О. Моргенштерн [7] ступінь точності даних, які необхідні для дослідження, ставить у пряму залежність від тієї конкретної мети, заради якої виконується вимірювання. В економетричних розрахунках постає питання про точність (похибку) економічних показників. Похибки показників виникають і нагромаджуються під час побудови алгоритму розрахунку та формування даних у процесі обчислень. Найістотніші похибки можуть виникати в разі переведення понять економічної теорії в показники. Ці похибки можна назвати похибками, пов'язаними з розрахунком економічних показників. Вони спричинюються неточністю і неповнотою визначення змісту показників, невідповідністю між вимогами і фактичним змістом, коли у принципі не можна точно виміряти економічні процеси та явища.

Усі *похибки поділяються на систематичні та випадкові.*

Систематичні похибки або сталі, або змінюються, підпорядковуючись певній функціональній залежності. Вони завжди однонапрямлені й можуть бути істотними за абсолютною величиною.

Випадкові похибки зумовлюються впливом випадкових чинників під час формування показників. У разі повторних розрахунків економічних показників такі похибки можуть взаємно погашатись. Проте це не означає, що й економічні наслідки випадкових похибок мають ті самі властивості. Формуючи сукупність спостережень для побудови економетричної моделі, потрібно звертати увагу на можливість існування похибок у вихідних даних. Якщо немає змоги позбутись цих похибок (а є впевненість в їх наявності), то слід використовувати спеціальні методи оцінювання параметрів економетричної моделі, про які йтиметься далі.

2.1.6. Вибір змінних і структура зв'язків. Економетричне моделювання базується на професійних знаннях про об'єкт дослідження. До завдань попереднього аналізу належить розв'язання таких основних питань:

1) визначення набору змінних, які описують процес функціонування досліджуваних об'єктів;

2) аналіз взаємозв'язків між окремими змінними;

3) вибір раціонального типу економетричної моделі.

Питання вибору результативних ознак (економічних показників), що моделюються, вирішується порівняно просто. Вони часто задані формулюванням мети дослідження. Вибір незалежних змінних (ознак-факторів) є процесом послідовного уточнення початкової гіпотези. У цьому процесі можна вирізнити такі етапи: формування початкової гіпотези про набір незалежних змінних; експертне оцінювання цього набору; аналіз взаємозв'язків; розширення або звуження кола істотних для моделювання змінних.

В основу формування початкової гіпотези про набір змінних покладено загальну схему функціонування об'єкта, що моделюється. На перелік змінних, які вносяться до початкового набору, впливає призначення моделі, тип дослідження і т. ін.

Звуження початкового набору змінних — процес багатостадійний, який відбувається на всіх етапах побудови моделі: під час проведення апріорного аналізу і формування робочої гіпотези (ще до утворення сукупності), на етапі їх попереднього аналізу й перетворення і навіть на етапі побудови моделі. В основу процесу звуження набору змінних на стадії формування робочої гіпотези покладено результати експертного опитування та змістовні міркування різного типу; можливість і точність вимірювань; трудомісткість збору даних; діапазон варіації і можливість регулювання значень змінних; максимально припустима їх кількість; функціональні зв'язки та ряд інших міркувань.

2.2. Проста економетрична модель

Розглянемо економетричну модель з двома змінними в загальному вигляді:

$$Y = f(X) + u, \qquad (2.9)$$

де Y — залежна змінна; X — пояснювальна змінна; u — випадкова складова.

Це означає, що ми ідентифікували змінну X, яка впливає на змінну Y. Назвемо таку економетричну модель ***простою моделлю***.

На базі простої економетричної моделі розглянемо принципову структуру економетричної моделі та основні методи оцінювання її параметрів. Теоретичні знання про взаємозв'язок між економічними показниками мають підказати його конкретну аналітичну форму. Але оскільки одні й ті самі економічні процеси можуть бути описані різними функціями, то потрібно звернутися до статистичного аналізу і за його допомогою зробити вибір серед можливих альтернативних варіантів.

Найпростішою є лінійна форма зв'язку між двома змінними:

$$Y = a_0 + a_1 X,$$

де a_0 і a_1 — невідомі параметри.

Можливі й інші форми залежностей між двома змінними, наприклад:

$$Y = a_0 e^{a_1 X}; \quad Y = a_0 X^{a_1}; \quad Y = a_0 + \frac{a_1}{X}.$$

Останнє з цих співвідношень є лінійним відносно $\frac{1}{X}$, а перші два можна звести до лінійної форми, якщо прологарифмувати вирази в обох частинах кожного з рівнянь:

$$\ln Y = \ln a_0 + a_1 X;$$

$$\ln Y = \ln a_0 + a_1 \ln X.$$

Навіть побіжне знайомство з економічними показниками, взаємозв'язок між якими вимірюється, показує, що окремі експериментальні значення залежної змінної не можуть міститися строго на прямій лінії, за якою вимірюється зв'язок. Певна частина фактичних спостережень залежної змінної лежатиме вище або нижче від значень, обчислених згідно з вибраною функцією. Якщо фактичні значення залежної змінної містяться на значній відстані від обчислених за допомогою функції, то можна припустити, що формалізація залежності між економічними показниками не адекватна реальному процесу взаємозв'язків у економіці. Проте поняття «значна відстань» не є конкретним, а тому не може бути критерієм для оцінювання адекватності моделі.

Щоб розв'язати задачу наближення розрахованих значень змінної до фактичних, розглянемо стохастичну (випадкову) складову, яка акумулює всі відхилення фактичних спостережень змінної Y від обчислених за моделлю.

Математичний аналіз цієї складової дасть змогу зробити висновок щодо того, чи можна вважати її стохастичною і чи містить вона систематичну частину відхилень, що може зумовлюватися наявністю тих чи інших помилок у моделюванні.

Нехай вектор змінної Y описує витрати на споживання, а вектор X — дохід сім'ї. Очевидно, що для окремих груп сімей існує певна залежність між споживчими витратами і доходом сім'ї. Проте, як уже зазначалося, на розмір споживчих витрат крім доходу можуть впливати інші фактори, частина яких є випадковими. Ці фактори й зумовлюють відхилення фактичних витрат на споживання від обчислених, наприклад, на основі регресійної функції:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X, \tag{2.10}$$

де $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ — оцінки параметрів моделі.

Наблизити обчислені значення до фактичних формально можна введенням до моделі стохастичної складової:

$$Y = a_0 + a_1 X + u. \tag{2.11}$$

де a_0, a_1 — параметри моделі.

Розглянемо приклад простої економетричної моделі на прикладі моделі споживання.

Проста економетрична модель споживання. Метою функціонування виробничих систем є випуск матеріальних благ, які споживаються одразу після їх виробництва або надходять у запаси, щоб споживатися в майбутньому. Тому питання про те, як змоделювати використання матеріальних благ, посідають важливе місце серед проблем математичного моделювання виробничо-технічного рівня економічних систем. Усі види споживання (використання) матеріальних благ можна розбити на дві великі групи: виробниче і невиробниче споживання. Виробниче споживання пов'язане з використанням матеріальних благ у процесі виробництва у вигляді сировини, основних фондів і т. ін. Невиробниче споживання — це задоволення потреб людей (як окремих осіб, так і суспільства в цілому), тобто це насамперед товари народного споживання. Потреба в них великою мірою визначає структуру та обсяг виробництва в цілому.

Мета вивчення обсягу споживання — це пошук закономірностей споживання деякого товару або групи товарів залежно від їх ціни, доходів та інших істотних параметрів. Виявлення закономірностей зміни споживання базується на результатах спостережень. Наприклад, вивчивши споживання окремих родин протягом деякого часу, визначають зміну споживання того чи іншого товару в разі загального підвищення доходів. Ці дослідження використовують деякі гіпотези щодо стабільності залежностей між споживанням і факторами, які його визначають. Постає запитання: чи можна кореляцію, що спостерігається для однієї обмеженої вибірки, інтерпретувати як доказ існування залежності в більш загальному випадку? При цьому гіпотези, які є основою для вивчення споживання, можна зобразити формально за допомогою моделі.

Нехай c_i — споживання деякого продукту i-ю сім'єю, дохід якої дорівнює r_i. Припустимо, що для даного періоду відомі значення c_i і r_i для невеликої кількості сімей. Як вивести звідси закономірність, на підставі якої можна визначити споживання даного продукту кожною сім'єю і в кожний період?

Найпростіший підхід полягає в ствердженні існування деякого функціонального зв'язку між c_i і r_i, який не залежить від часу або від окремих характеристик кожної сім'ї. Тоді модель можна подати у вигляді

$$c_i = f(r_i). \qquad (2.12)$$

Проте неважко констатувати неправильність цієї гіпотези і неадекватність цієї моделі. Насправді допускається, що дві сім'ї з одним і тим самим доходом мають однакове споживання, а це, взагалі кажучи, неправильно, тому від моделі (2.12) потрібно відмовитися.

Перше узагальнення може полягати в тому, щоб крім доходу розглянути й інші незалежні чинники: ціну, склад сім'ї, обсяг наявних коштів і т. ін. Тоді можна повністю описати споживання, але суто функціональний зв'язок лишиться недосяжним навіть за наявності п'яти і більше незалежних змінних. Дві сім'ї з однаковими доходами, структурним складом, заощадженнями тощо щодо споживання тих чи інших товарів поводитимуться по-різному.

Це означає, що в попередніх гіпотезах завжди має місце така фактична ситуація: споживання частково визначається невідомими нам факторами, які ми не можемо врахувати в моделі. Такі фактори є випадковими, і необхідно оцінити їх випадковий вплив. Для цього потрібно змінити модель (2.12), враховуючи в її структурі випадкову складову:

$$c_i = f(r_i) + u_i. \tag{2.13}$$

У моделі споживання випадкова складова містить вплив усіх випадкових чинників, а також тих чинників, які не входять у модель. Ця складова називається ***залишком***.

Загальний вигляд моделі споживання залежно від доходу сім'ї такий:

$$C = f(r) + u. \tag{2.14}$$

Якщо сукупність спостережень (кількість досліджуваних сімей) буде достатньою, щоб забезпечити достовірність моделі (2.11), то її можна використати для прогнозування рівня споживання певної групи населення країни. При цьому потрібно пам'ятати, що специфікація та методи оцінювання параметрів моделі також впливають на достовірність зв'язку, що описується економетричною моделлю.

2.3. Випадкова складова економетричної моделі

У моделі (2.11) символом u позначено змінну, яка може набувати додатних та від'ємних значень, оскільки вона вимірює відхилення витрат на споживання кожної окремої сім'ї від обчисленого значення згідно з (2.10).

Зауважимо, що в моделі (2.11) a_0 і a_1 — оцінювані параметри, а в моделі (2.10) $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$ — їх оцінки.

Стохастичну складову (u) економетричної моделі називають ***залишком, збуренням, відхиленням.***

Введення до моделі (2.11) стохастичної складової має три підстави, кожна з яких не виключає решти двох.

1. Розмір витрат на споживання визначається не лише рівнем доходів, а й іншими об'єктивними чинниками, наприклад розміром сім'ї, середнім віком і т. ін.

2. На обсяг споживання впливають випадкові чинники, наприклад схильність до ощадливості, стриманість чи навпаки — надмірність у витратах і т. ін.

3. Частина факторів, які впливають на розмір споживчих витрат, не оцінюються кількісно, вони не квантифікуються. Крім того, можлива помилка вимірювання змінних.

Отже, замість залежності

$$Y = f(X_1, X_2, X_3 \ldots X_{m-1}),$$

де $m - 1$ — досить велике число, яке характеризує кількість пояснювальних змінних; розглядається модель з невеликою кількістю незалежних змінних, причому Y є функцією від найважливіших із $X_j = (j = \overline{1, m-1})$, тоді чистий сумарний ефект від впливу всіх інших чинників надає змінна u. Зрештою, якщо залишається одна незалежна змінна, маємо:

$$Y = f(X, u).$$

У класичній лінійній економетричній моделі змінна u інтерпретується як випадкова змінна, яка має розподіл з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, і сталою дисперсією σ_u^2. Це дає змогу розглядати змінну u як стохастичне збурення (похибку, відхилення). З огляду на те, що u охоплює вплив багатьох чинників, які можна вважати незалежними, на підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей доходимо висновку: стохастична складова економетричної моделі розподілена за нормальним законом.

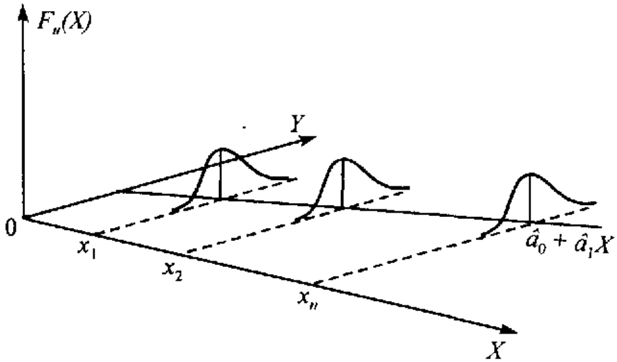


Рис. 2.1. Розподіл залишків

Щодо нашого прикладу, коли витрати на споживання перебувають у лінійній залежності від доходу сімей, а змінна u є випадковою складовою, можна графічно зобразити цю залежність за умови, що розмір доходів упорядкований від меншого значення до більшого (рис. 2.1).

Розподіл ймовірностей $F_u(X)$ групуватиметься при цьому навколо лінії регресії $\hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$. Можливо, у цьому прикладі доцільніше було б припускати, що дисперсія відхилення u зростає зі збільшенням доходу X. Цю особливість розглянемо пізніше, бо вона може бути притаманна й іншим економічним залежностям (наприклад, залежності заощаджень від доходу, дивідендів від прибутку і т. ін.). З рис. 2.1 випливає, що дисперсія залишків u є сталою. Пізніше (розд. 7) буде розглянуто випадки, коли дисперсія залишків u зростає (або спадає) зі збільшенням X, і з'ясовано, як це явище впливає на оцінки регресійної функції.

В економетричній моделі (2.10) оцінки параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ невідомі. На підставі вибіркових спостережень X і Y потрібно не лише статистично оцінити ці параметри, а й перевірити виконання щодо них деяких гіпотез:

1. Чи можна вважати споживання пропорційними до доходу ($\hat{a}_0 = 0$)?
2. Чи буде гранична схильність до споживання ($\hat{a}_1$) більша за половину одиниці?
3. Чи виправдана для цієї вибіркової сукупності гіпотеза про сталу дисперсію залишків для всіх значень X?

Усі наведені щойно запитання є типовими задачами економетричних досліджень, і основна мета економетрії — вивчити класичні методи розв'язування поставлених задач, а також опанувати нові методи розв'язування складніших економічних задач, які максимально наближені до реальних умов.

2.4. Оцінювання параметрів моделі методом найменших квадратів (1МНК)

Звернемося до прикладу простої економетричної моделі, де потрібно кількісно оцінити зв'язок між витратами на споживання та доходами сім'ї (див. підрозд. 2.2). Щоб оцінити параметри моделі (2.10), необхідно сформувати сукупність спостережень, кожна одиниця якої характеризуватиметься витратами на споживання і доходами сімей. Припустимо, що економетрична модель споживання будується для тієї групи людей, в якій зі збільшенням доходів зростають витрати на споживання, тобто модель має вигляд (2.10).

Подамо кожну пару спостережень у системі координат, де розмір витрат на споживання відкладається на осі ординат, а доходів — на осі абсцис. У результаті дістанемо кореляційне поле точок (рис. 2.2).

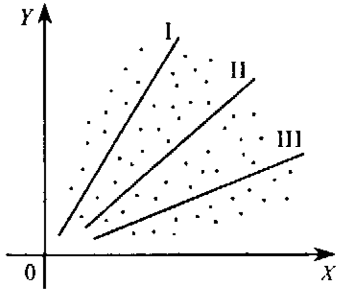


Рис. 2.2. Кореляційне поле точок

На підставі гіпотези про лінійність зв'язку між витратами на споживання і доходом сімей (див. рис. 2.2) через кореляційне поле точок можна провести безліч прямих, які різняться оцінками параметрів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$. Так, якщо витрати на споживання описуються прямою I, то відхилення їх фактичних значень від розрахункових матимуть переважно знак «мінус». Якщо вони описуються прямою III, то ці відхилення будуть переважно додатними, а якщо прямою II, то кількість від'ємних і додатних відхилень буде приблизно однаковою. Наявність серед відхилень переважно від'ємних чи додатних значень підтверджує, що вони мають невипадковий характер. А це означає: певна пряма неадекватно описує фактичну залежність між витратами на споживання і доходом сімей. Звідси постає задача — застосувати метод найменших квадратів для оцінювання параметрів моделі, щоб відхилення фактичних витрат від розрахункових, що лежать на прямій, мали приблизно однакову суму від'ємних і додатних значень, а також були б найменшими. Останнє свідчитиме про те, що розрахункові значення витрат на споживання максимально наближені до фактичних, а це дуже важливо, щоб дістати достовірну модель.

Недоцільно знаходити параметри економетричної моделі, мінімізуючи суму лінійних відхилень фактичних витрат на споживання від розрахункових, бо вона може дорівнювати нулю, якщо сума від'ємних і додатних відхилень буде однаковою. Тому мінімізації підлягає сума квадратів відхилень, і величина її залежатиме безпосередньо від розсіювання точок навколо лінії регресії, а саме:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right\} = \psi(\hat{a}_0, \hat{a}_1).$$

Принцип найменших квадратів відхилень полягає в знаходженні таких $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$, для яких $\sum_{i=1}^{n} u_i^2$ найменша. Необхідною умовою для цього є рівність нулю частинних похідних цієї функції за кожним із параметрів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$. Метод, який реалізує цей принцип, називається ***методом найменших квадратів (1МНК)***. Зауважимо, що 1МНК доцільно застосовувати тоді, коли залишки розподілені нормально, тобто середнє їх значення дорівнює нулю і дисперсія стала. Оскільки

$$\min \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)^2,$$

$$\text{то} \begin{cases} \dfrac{\partial \left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2\right)}{\partial a_0} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i) = 0; \\ \dfrac{\partial \left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2\right)}{\partial a_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i) = 0. \end{cases}$$

Виконавши елементарні перетворення, дістанемо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \\ \hat{a}_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \hat{a}_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \quad (2.15)$$

Підставимо в систему (2.15) значення $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, які обчислені на основі сукупності спостережень, і розв'яжемо її відносно невідомих оцінок параметрів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}; \quad \hat{a}_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Оскільки оцінки найменших квадратів такі, що лінія регресії обов'язково проходить через точку середніх значень $(\bar{x}, \bar{y})$, то оцінки параметрів моделі можна знайти дещо інакше.

Поділивши перше рівняння системи (2.15) на n, дістанемо:

$$\bar{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\bar{x} . \qquad (2.16)$$

Віднімемо (2.16) від (2.10):

$$\hat{y}_i - \bar{y} = \hat{a}_1(x_i - \bar{x}) .$$

Нехай $y_i - \bar{y} = y_i^*$, $x_i - \bar{x} = x^*$, і $\hat{y}_i - \bar{y} = \hat{y}_i^*$, тоді $\hat{y}^*{}_i = \hat{a}_1 x_i^*$, а відхилення фактичних значень від розрахункових будуть такі: $u_i^* = y_i^* - \hat{y}_i^* = y_i^* - \hat{a}_1 x_i^*$.

Сума квадратів залишків при цьому

$$\sum_{i=1}^{n} u^{*2}_i = \sum_{i=1}^{n}(y_i^* - \hat{a}_1 x_i^*)^2 .$$

Мінімізація цієї суми за невідомою оцінкою параметра $\hat{a}_1$ дає співвідношення

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i^*}{\sum_{i=1}^{n} x^{*2}_i} . \qquad (2.17)$$

Крім того, можна помітити, що $\dfrac{\partial^2 \left(\sum_{i=1}^{n} u^{*2}_i \right)}{\partial \hat{a}_1^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x^{*2}_i$, тобто друга похідна за параметром $\hat{a}_1$ від суми квадратів відхилень додатна. Отже, знайдене значення $\hat{a}_1$ відповідає мінімуму суми квадратів відхилень.

Оцінку параметра $\hat{a}_0$ можна обчислити, використавши співвідношення (2.16):

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x} . \qquad (2.18)$$

Співвідношення (2.18) можна було б дістати також, записавши друге рівняння системи (2.15) через відхилення кожної змінної від її середнього арифметичного значення, згадавши при цьому, що сума таких відхилень завжди дорівнює нулю.

✓***Приклад 2.1.*** Побудувати економетричну модель залежності витрат на одиницю продукції від рівня фондомісткості продукції. Вихідні дані в грошових одиницях і відповідні розрахунки для оцінювання параметрів наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

№ з/п	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y})$	$\hat{y}_i$	u_i	u_i^2	$(y_i - \bar{y})^2$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
1	50	90	8100	4500	–10,8	–4,2	116,64	45,36	48,8	1,2	1,44	17,64
2	40	75	5625	3000	–25,8	–14,2	665,64	336,36	41,3	–1,3	1,69	201,64
3	65	120	14400	7800	29,2	10,8	368,64	207,36	63,8	1,2	1,44	116,64
4	55	100	10000	5500	–0,8	0,8	0,64	–0,64	53,8	1,2	1,44	0,64
5	45	80	6400	3600	–20,8	–9,2	432,64	181,36	43,8	1,2	1,44	84,64
6	42	78	6084	3276	–22,8	–12,2	519,64	278,16	42,8	–0,8	0,64	148,84
7	56	110	12100	6160	9,2	1,8	84,64	16,56	58,8	–2,8	7,84	3,24
8	60	115	13225	6900	14,2	5,8	201,64	82,36	61,3	–1,3	1,69	33,64
9	64	115	13225	7350	14,2	9,8	201,64	139,16	61,3	2,7	7,29	96,04
10	65	125	15625	8125	24,2	10,8	585,64	261,26	66,3	–1,3	1,69	116,64
$\sum$	542	1008	104 784	56221			3376	1587,5			26,6	819,6

Нехай залежність між витратами на одиницю продукції і рівнем фондомісткості подається прямою

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

де Y — вектор витрат на одиницю продукції; X — вектор рівня фондомісткості; u — вектор залишків.

Розрахункові значення витрат на одиницю продукції можна знайти, скориставшись такою моделлю:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X.$$

Щоб оцінити параметри моделі $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$ методом 1МНК, запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} y_i; \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^{10} x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i. \end{cases}$$

Коефіцієнти для цих рівнянь системи знаходимо за табл. 2.1:

$$\begin{cases} 10\,\hat{a}_0 + 1008\,\hat{a}_1 = 542; \\ 1008\,\hat{a}_0 + 104\,784\,\hat{a}_1 = 56221. \end{cases}$$

Розв'язком системи є параметри $\hat{a}_0 = 3{,}8$; $\hat{a}_1 = 0{,}5$. Економетрична модель має вигляд

$$Y = 3{,}8 + 0{,}5\,X + u.$$

Скориставшись альтернативним способом обчислення параметрів за допомогою відхилень середніх арифметичних (див. табл. 2.1, стовпці 6—9), на підставі (2.9) і (2.10) дістанемо

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})\,(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1587{,}5}{3776} \approx 0{,}5,$$

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x} = 54{,}2 - 0{,}5 \cdot 100{,}8 = 3{,}8.$$

Зауважимо, що оцінки параметрів моделі за методом 1МНК є досить чутливими до точності розрахунків та адекватності аналітичної форми моделі. Оскільки вільний член моделі $\hat{a}_0 = 3{,}8 \neq 0$, то рівень витрат на одиницю продукції не є строго пропорційним до рівня фондомісткості. Кількісна оцінка параметра $\hat{a}_1 = 0{,}5$ показує, що граничне збільшення витрат зі зростанням фондомісткості продукції на одну грошову одиницю становить 0,5 гр. од. Еластичність витрат щодо фондомісткості продукції визначається коефіцієнтом еластичності

$$E_{\frac{y}{x}} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} : \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = 0{,}5 : \frac{54{,}2}{100{,}8} = 0{,}5 : 0{,}54 = 0{,}93.$$

Значення цього коефіцієнта потрібно тлумачити так: у разі збільшення фондомісткості продукції на 1 % витрати на одиницю гранично зростуть на 0,93 %.

2.5. Оцінювання параметрів моделі методом максимальної правдоподібності

Для того, щоб оцінити достовірність економетричної моделі, потрібно насамперед мати дисперсію залишків σ_u^2. Оцінюючи параметри моделі методом 1МНК, висуваємо гіпотезу про те, що дисперсія залишків є незмінною для всіх спостережень. Знайдемо її значення.

Фактичні значення залежної змінної за моделлю (2.11) можна подати так:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t. \tag{2.19}$$

Запишемо цю модель для середніх значень, знайдених на підставі спостережень:

$$\overline{y} = a_0 + a_1 \overline{x} + \overline{u}. \tag{2.20}$$

Віднімемо співвідношення (2.20) від (2.19):

$$y_t - \overline{y} = a_1(x_t - \overline{x}) + (u_t - \overline{u}).$$

Замінивши $y_t - \overline{y} = y_t^*$ на $x_t - \overline{x} = x_t^*$, дістанемо:

$$y_t^* = a_1 x_t^* + (u_t - \overline{u}).$$

Оскільки розрахункові значення залежної змінної розраховуються так: $\hat{y}_t^* = \hat{a}_1 x_t^*$, то залишки можна подати у вигляді:

$$u_t^* = y_t^* - \hat{y}_t^* = a_1 x_t^* + (u_t - \overline{u}) - \hat{a}_1 x_t^* = (a_1 - \hat{a}_1) x_t^* + (u_t - \overline{u}).$$

Величина залишків u_t^* в даному разі визначає відхилення розрахункового значення залежної змінної $\hat{y}_t^*$ від фактичного за умови, що всі змінні моделі (y_t і x_t) взяті як відхилення від свого середнього значення.

Сума квадратів залишків визначатиметься у вигляді

$$\sum_{t=1}^{n} u_t^{*2} = (a_1 - \hat{a}_1)^2 \sum_{t=1}^{n} x_t^{*2} + \sum_{t=1}^{n} (u_t - \overline{u})_t^2 + 2\,(a_1 - \hat{a}_1) \sum_{t=1}^{n} x_t^* (u_t - \overline{u}).$$

Знайдемо математичне сподівання для кожної складової правої частини суми квадратів залишків:

$$1)\ M\left[(a_1 - \hat{a}_1)^2 \sum_{t=1}^{n} x_t^{*2}\right] = \sigma_u^2;$$

$$2)\ M\left[\sum_{t=1}^{n} (u_t - \overline{u})^2\right] = M\left[\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t\right)^2\right] = (n-1)\,\sigma_u^2;$$

$$3)\ M\left[(a_1 - \hat{a}_1) \sum_{t=1}^{n} x_t^* (u_t - \overline{u})\right] = M\left[\frac{\sum_{t=1}^{n} u_t x_t^*}{\sum_{t=1}^{n} x_t^{*2}}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t x_t^* - \overline{u} \sum_{t=1}^{n} x_t^*\right)\right] =$$

$$= M\left[\frac{\left(\sum_{t=1}^{n} u_t x_t^*\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^{*2}}\right] = \sigma_u^2.$$

Остаточно маємо:

$$M\left(\sum_{t=1}^{n} u_t^2\right) = \sigma_u^2 + (n-1)\,\sigma_u^2 - 2\sigma_u^2 = (n-2)\,\sigma_u^2.$$

Запишемо дисперсію залишків

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}{n-2},$$

де $\hat{\sigma}_u^2$ — незміщена оцінка істинного значення σ_u^2.

Раніше ми не робили інших припущень про розподіл залишків u_t, крім того, що середнє значення його дорівнює нулю, дисперсія є сталою і коваріації також дорівнюють нулю:

$$M(u_i)=0;$$

$$M\left(u_i u_j\right)=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq j,\ i=\overline{1,n}, \\ \sigma_u^0 & \text{при } i=j,\ j=\overline{1,n}.\end{cases}$$

У (2.19) параметри a_0, a_1 і σ_u^2 були невідомими, і за методом 1МНК спочатку знайдено оцінки параметрів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$, а далі, маючи значення залишків u_i, обчислено їхню дисперсію $\hat{\sigma}_u^2$.

Якщо задати певну функцію закону розподілу залишків, то, скориставшись методом максимальної правдоподібності, можна одночасно знайти оцінку всіх трьох параметрів a_0, a_1 і $\tilde{\sigma}_u^2$.

Нехай залишки розподілені за нормальним законом. Тоді функція правдоподібності подається у вигляді

$$F(u)=\frac{1}{\left(\sigma_u^2 2\pi\right)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right).$$

Оскільки співвідношення $y_i=a_0+a_1x_i+u_i$ задає лінійне перетворення залишків u_i в y_i, де $u_i=y_i-\tilde{a}_0-\tilde{a}_1x_i$, то функція правдоподібності буде така:

$$F(u)=\frac{1}{\left(\tilde{\sigma}_u^2\ 2\pi\right)^{\frac{n}{2}}}\exp\left[\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_u^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\tilde{a}_0-\tilde{a}_1x_i\right)^2\right]$$

і

$$\ln F(u)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\tilde{\sigma}_u^2-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_u^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\tilde{a}_0-\tilde{a}_1x_i\right)^2. \qquad (2.21)$$

Дана функція (2.21) містить невідомі параметри $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{\sigma}_u^2$. Тильда «~» над оцінками цих параметрів відрізняє їх від оцінок $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і $\hat{\sigma}_u^2$, знайдених методом 1МНК, а також від істинних значень параметрів a_0, a_1 і σ_u^2.

Продиференціюємо цю функцію за невідомими параметрами $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{\sigma}_u^2$, тобто знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial\left(\ln F(u)\right)}{\partial\tilde{a}_0}=\frac{1}{\tilde{\sigma}_u^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\tilde{a}_0-\tilde{a}_1x_i\right)=0;$$

$$\frac{\partial\ (\ln F(u))}{\partial\ \widetilde{a}_1}=\frac{1}{\widetilde{\sigma}_u^2}\sum_{i=1}^{n}x_i\left(y_i-\widetilde{a}_0-\widetilde{a}_1x_i\right)=0;$$

$$\frac{\partial\ (\ln F(u))}{\partial\ \widetilde{\sigma}_u^2}=-\frac{n}{2\widetilde{\sigma}_u^2}+\frac{1}{2\widetilde{\sigma}_u^4}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\widetilde{a}_0-\widetilde{a}_1x_i\right)^2=0.$$

Після елементарних перетворень система рівнянь запишеться так:

$$\begin{cases} n\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i; \\ \widetilde{a}_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\widetilde{a}_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i; \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\widetilde{a}_0-\widetilde{a}_1x_i\right)^2=\widetilde{\sigma}_u^2. \end{cases} \tag{2.22}$$

Порівнюючи систему (2.22) із системою (2.15), здобутою за методом 1МНК, бачимо, що перші два рівняння (2.22) такі самі, як рівняння системи (2.15), а третє рівняння системи (2.22) дає формулу оцінки дисперсії залишків.

У даному разі неважко переконатися, що оцінки параметрів $\widetilde{a}_0$ і $\widetilde{a}_1$ за методом максимальної правдоподібності повністю збігаються з оцінками 1МНК.

Отже, якщо параметри моделі $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$ є лінійними функціями від залишків u_i, які задовольняють багатовимірний нормальний розподіл, то оцінки їх за методами 1МНК і максимальної правдоподібності збігаються. Тому оцінки $\widetilde{a}_0$ і $\widetilde{a}_1$ також є нормально розподіленими, і математичним сподіванням їх є параметри a_0 і a_1.

Параметр, який характеризує співвідношення між невідомою оцінкою дисперсії за методом максимальної правдоподібності та істинним значенням дисперсії, запишеться у вигляді:

$$\frac{n\widetilde{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2}.$$

Він має розподіл χ^2 з $n-2$ ступенями свободи і розподілений незалежно від $\widetilde{a}_0$ і $\widetilde{a}_1$. Пізніше ми звернемося до параметра $\dfrac{n\widetilde{\sigma}_u^2}{\sigma_u^2}$, коли йтиметься про існування інтервалів довіри для параметрів моделі.

2.6. Стислі висновки

1. Методи управління економічними системами та процесами базуються на широкому застосуванні математичних методів і комп'ютерної техніки. Математика, проникаючи в сутність економічної науки, приносить із собою точність та універсальність розв'язків, строгість формалізації наукових концепцій.

2. Математична модель містить три групи елементів:

1) характеристику об'єкта, який потрібно визначити (невідомі величини), — вектор Y;

2) характеристики зовнішніх умов щодо об'єкта, який моделюється, — вектор X;

3) сукупність внутрішніх параметрів об'єкта — A.

Множина умов та параметрів X і A можуть розглядатися як екзогенні величини, тобто такі, що визначаються за межами моделі, а величини, що входять до вектора Y, — як ендогенні, тобто такі, що визначаються за допомогою моделі.

3. Усі математичні моделі поділяються на дві групи: структурні та функціональні. Структурні моделі відбивають внутрішню організацію об'єкта, його складові, внутрішні параметри, їх зв'язок із «входом» та «виходом» і т. ін. Функціональні моделі описують сутність об'єктів, що моделюються, через найважливіші прояви цієї сутності: діяльність, функціонування, поводження.

4. Розрізняють три види структурних моделей:

1) $Y_j = f_j(A, X)$;

2) $\psi_i(A, X, Y) = 0$;

3) імітаційні моделі.

У моделях першого виду всі невідомі величини подаються у вигляді явних функцій від зовнішніх умов і внутрішніх параметрів об'єкта.

У моделях другого виду невідомі визначаються одночасно із систем співвідношень i-го виду.

В імітаційних моделях невідомі величини визначаються також одночасно із вхідними параметрами, але конкретний вигляд співвідношень невідомий.

5. Функціональні моделі описують поводження об'єкта так, що, задаючи значення «входу» X, можна дістати значення «виходу» Y без залучення інформації про параметри A, тобто $Y = A(X)$. Побудувати функціональну модель — означає знайти оператор A, який пов'язує X і Y.

6. Якщо функціональна модель поряд з екзогенними змінними X містить стохастичну складову u, тобто $Y = f(X, u)$, то вона належить до класу економетричних моделей. Оскільки величина Y залежить від стохастичної змінної u, то вона є стохастичною, а отже, економетрична модель також є стохастичною.

7. Побудова економетричної моделі можлива за таких умов:

1) наявність достатньо великої сукупності спостережень вхідних даних;

2) однорідність сукупності спостережень;

3) точність і достовірність вихідних даних;

4) висування гіпотези про набір змінних і структуру зв'язків.

8. Сукупність спостережень можна подати у вигляді упорядкованого набору (матриці) даних з параметрами n, m, T, де n — кількість одиниць сукупності $(i = \overline{1,n})$; m — кількість ознак, які описують кожну одиницю $(j = \overline{1,m})$; T — проміжок часу, за який вивчається ознака певного спостереження. За способом формування розрізняють три види вибірок: часову, просторову і просторово-часову. Просторова сукупність спостережень вивчається в статиці, її можна зобразити у вигляді матриці розміром $n \times m$. Часова вибірка містить набір значень ознак функціонування окремого об'єкта в динаміці, тобто по суті складається з дво- чи багатовимірного часового ряду. Просторово-часова вибірка є комбінацією просторової і часової вибірок.

9. Поняття однорідності сукупності спостережень охоплює якісну і кількісну однорідність. Під першою треба розуміти однорідність, яка визначається однотипністю економічних об'єктів, їх однаковою якістю та певним призначенням, а під другою — однорідність групи одиниць сукупності, що визначається на підставі кількісних ознак.

10. Щоб забезпечити порівнянність ознак спостережень у просторі та часі, необхідно мати:

1) однаковий ступінь агрегування;

2) однакову структуру одиниць сукупності;

3) одні й ті самі методи розрахунку показників у часі;

4) однакову періодичність обліку окремих змінних;

5) порівнянні ціни та інші однакові економічні умови.

11. Формуючи сукупність спостережень для побудови економетричної моделі, необхідно звертати увагу на можливість існування помилок в економічній інформації. Якщо немає змоги позбутися цих помилок, то необхідно застосувати спеціальні методи оцінювання параметрів економетричної моделі.

12. Вибір змінних моделі передбачає:

1) визначення набору змінних, які описують процес функціонування досліджуваних об'єктів;

2) аналіз структурних зв'язків між окремими змінними;

3) вибір раціонального типу економетричної моделі.

13. Економетричні моделі описують вплив багатьох чинників на економічні процеси та явища. При цьому для відображення цих зв'язків може використовуватись не одне рівняння, а їх система. Якщо економетрична модель характеризує зв'язок двох змінних, одна з яких є результативною (залежною), то така модель називається *простою*. Важливою задачею є вибір раціонального типу економетричної моделі.

14. Конкретна аналітична форма взаємозв'язку між економічними показниками вибирається на підставі змістовного тлумачення цього зв'язку. Найпростішою є лінійна форма між двома змінними:

$$Y = a_0 + a_1X,$$

де a_0 і a_1 — невідомі параметри; Y — залежна змінна; X — незалежна змінна.

Можливі й інші форми залежності між двома змінними, наприклад:

$$Y = a_0e^{a_1X};\ \ Y = a_0X^{a_1};\ \ Y = a_0 + \frac{a_1}{X}.$$

15. Наведені форми залежності кількісно описують взаємозв'язок між економічними показниками лише в середньому, а кожне індивідуальне значення відрізнятиметься від обчисленого за допомогою функції, оскільки на цей зв'язок впливають й інші фактори, серед яких є випадкові, не враховані у вимірюванні.

16. Щоб урахувати вплив факторів, що не входять до економетричної моделі, вводиться стохастична складова. Математичний аналіз цієї складової дає змогу зробити висновок про те, чи можна вважати її випадковою величиною, чи вона містить систематичну частину відхилень, яка може бути зумовлена наявністю тих чи інших помилок у моделюванні. Економетрична модель у такому разі має вигляд

$$Y = a_0 + a_1X + u.$$

17. У класичній лінійній економетричній моделі змінна u інтерпретується як випадкова змінна, що має розподіл з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, і сталою дисперсією σ_u^2. Це дає

змогу розглядати змінну u як стохастичне збурення (залишки помилки, відхилення). Згідно з центральною граничною теоремою стохастична складова економетричної моделі розподілена за нормальним законом.

18. Якщо економетрична модель вимірює зв'язок між двома змінними, то кожну пару спостережень над цими змінними можна подати у двовимірній системі координат. У результаті дістаємо кореляційне поле точок. Згідно з гіпотезою про лінійність зв'язку через кореляційне поле точок можна провести безліч прямих ліній, які різняться своїми параметрами a_0 і a_1.

19. Щоб певна пряма адекватно описувала фактичну залежність, необхідно застосувати такий метод оцінювання параметрів моделі $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$, щоб відхилення фактичних значень від розрахункових були мінімальними.

У цьому разі мінімізації підлягає сума квадратів відхилень (залишків):

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right\} = \psi\left(\hat{a}_0, \hat{a}_1\right).$$

Це є сутністю методу найменших квадратів (1МНК).

20. Необхідною умовою мінімізації залишків є рівність нулю частинних похідних цієї функції за кожним із параметрів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$. У результаті маємо систему ***нормальних рівнянь***

$$\begin{cases} n\,\hat{a}_0 + \hat{a}_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,; \\ \hat{a}_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \hat{a}_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases}$$

розв'язком якої є оцінки параметрів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$.

21. Оскільки оцінки параметрів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$ за методом найменших квадратів такі, що лінія регресії проходить обов'язково через точку середніх значень $(\bar{x}, \bar{y})$, то оцінки цих параметрів моделі можна дістати так:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^* y_i^*}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{*2}}\,; \quad \hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x}\,;$$

$$y_i^* = y_i - \bar{y}\,; \quad x_i^* = x_i - \bar{x}.$$

22. Для фактичних значень незалежної змінної модель має вигляд:

$$Y = a_0 + a_1X + u,$$

а для розрахункових:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X.$$

Тому вектор залишків обчислюється так:

$$u = Y - \hat{Y}.$$

Незміщена оцінка дисперсії залишків подається так:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n-2}.$$

23. Задаючи певну функцію закону розподілу залишків, оцінки параметрів моделі $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і $\hat{\sigma}_u^2$ можна знайти за методом максимальної правдоподібності. Якщо залишки розподілені за нормальним законом, то функція правдоподібності запишеться так:

$$F(u) = \frac{1}{\left(\sigma_u^2 2\pi\right)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right).$$

24. Підставивши в цю функцію значення залишків u_i $(u_i = y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)$, продиференціюємо її за невідомими параметрами $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{\sigma}_u^2$ і прирівняємо перші похідні до нуля. У результаті дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} n\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ \tilde{a}_0\sum_{i=1}^{n} x_i + \tilde{a}_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i\right)^2 = \tilde{\sigma}_u^2. \end{cases}$$

25. Якщо оцінки параметрів моделі $\tilde{a}_0$ і $\tilde{a}_1$ є лінійними функціями від залишків u_i, які задовольняють багатовимірний нормальний розподіл, то оцінки їх за методами 1МНК і максимальної

правдоподібності збігаються. Тому оцінки $\tilde{a}_0$ і $\tilde{a}_1$ також будуть нормально розподіленими, і математичним сподіванням їх будуть параметри $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$.

26. Співвідношення між невідомою оцінкою дисперсії згідно з методом максимальної правдоподібності та істинним значенням дисперсії подається так:

$$n\tilde{\sigma}_u^2/\sigma_u^2.$$

Воно має розподіл χ^2 з $n-2$ ступенями свободи і розподілене незалежно від $\tilde{a}_0$ і $\tilde{a}_1$.

2.7. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. З яких елементів складається математична модель?
2. Назвіть типи математичних моделей. Чим вони різняться?
3. До якого типу математичних моделей належить економетрична модель?
4. Які особливості має економетрична модель?
5. Як треба розуміти сукупність спостережень та її однорідність?
6. Чим забезпечується порівнянність даних у просторі та часі?
7. Як визначається набір змінних для побудови економетричної моделі?
8. Наведіть кілька прикладів економетричних моделей.
9. Дайте тлумачення випадкової складової економетричної моделі.
10. Які методи застосовуються для оцінювання параметрів класичної регресійної моделі?
11. У чому сутність методу найменших квадратів (1МНК)?
12. Запишіть альтернативні варіанти оцінювання параметрів моделі методом 1МНК.
13. Як можна інтерпретувати параметри простої економетричної моделі?
14. Визначте дисперсію залишків економетричної моделі.
15. Чим відрізняється метод максимальної правдоподібності від методу найменших квадратів?
16. Запишіть функцію правдоподібності за умови, що залишки розподілені за нормальним законом.
17. Запишіть співвідношення між оцінкою дисперсії за методом максимальної правдоподібності та істинним значенням дисперсії.

18. Знайдіть оцінки параметрів моделі $Y = a_0 + a_1X + u$ 1МНК, якщо задані такі значення Y і X:

Y	10	11	12	15	16	18	20	21	23	23
X	3	4	4	5	6	7	9	9	10	11

19. Визначте залишки u_t економетричної моделі з попереднього завдання.

20. Знайдіть дисперсію залишків завдання 19.

21. Використовуючи дані завдання 18, знайдіть оцінки параметрів моделі за методом максимальної правдоподібності. Порівняйте ці оцінки з оцінками, знайденими за методом 1МНК.

2.8. Основні терміни і поняття

Математична модель • Економетрична модель • Екзогенні змінні • Ендогенні змінні • Проста економетрична модель • Стохастична складова • Сукупність спостережень • Метод найменших квадратів • Функція правдоподібності • Метод максимальної правдоподібності • Оцінка дисперсії залишків • Система нормальних рівнянь

Розділ 3
ЕЛЕМЕНТИ МАТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

3.1. Означення матриці. Основні види матриць

Розглянемо множину $m \times n$ дійсних чисел, записаних у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

Означення 3.1. ***Матрицею*** *називають таблицю елементів a_{ij}, яка складається з m рядків і n стовпців.*

Позначаються матриці літерами A, B, C тощо.

Числа a_{ij} називаються її елементами. Індекси i та j елемента a_{ij} позначають відповідно номер рядка та стовпця, на перетині яких міститься даний елемент. Наприклад, елемент a_{23} міститься у другому рядку і третьому стовпці.

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

яка має два рядки ($m = 2$) і три стовпці ($n = 3$), тобто розміром 2×3. Загалом, якщо матриця має m рядків і n стовпців, розмір такої матриці є ($m \times n$).

Означення 3.2. *Якщо в матриці A кількість рядків m дорівнює кількості стовпців n ($m = n$), її називають* ***квадратною порядку m (або n)****. Якщо $m \neq n$, то матриця A є* ***прямокутною розміром (m ? n)****.*

Матриця A в (3.2) є прямокутною розміру 2×3.

Розглянемо основні види матриць.

Означення 3.3. ***Матриця-стовпець*** *— це прямокутна матриця порядку* $m \times 1$:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Означення 3.4. ***Матриця-рядок*** *— це прямокутна матриця порядку* $1 \times n$:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Матриці (3.3) і (3.4) можна розглядати як вектори.

Означення 3.5. *Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається* ***нульовою***:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо квадратну матрицю порядку $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Елементи $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці A; елементи $a_{1n}, a_{2n-1} \dots a_{n1}$ — побічну діагональ матриці A.

Означення 3.6. *Квадратна матриця, в якої всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається* ***діагональною****, тобто*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Скорочено: квадратна матриця $A = (a_{ij})$ є діагональною, якщо $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$.

Означення 3.7. *Квадратна матриця E_n є* ***одиничною n-го порядку****, якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а решта елементів — нулю, тобто*

$$A = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.7)$$

Скорочено: квадратна матриця $I = (a_{ij})$ є одиничною, якщо $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$ та $a_{ij} = 1$ для $i = j$.

Означення 3.8. *Квадратна матриця $A = (a_{ij})$ є* ***трикутною****, якщо всі її елементи над головною діагоналлю ($a_{ij} = 0$, коли $i < j$) або під цією діагоналлю ($a_{ij} = 0$, коли $i > j$) дорівнюють нулю:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

Означення 3.9. *Якщо в матриці A* (3.1) *поміняємо місцями відповідно елементи рядків на елементи стовпців (або навпаки), дістанемо* ***транспоновану*** *матрицю (позначається A' або A^T):*

$$A' = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.9)$$

Транспонуючи вектор-стовпець, дістанемо вектор-рядок і навпаки, а саме:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \; A' = (a_{1j} \; a_{2j} \; \dots \; a_{nj})$$

і

$$A = (a_{1j} \; a_{2j} \; \dots \; a_{nj}), \; A' = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Означення 3.10. *Матрицю A називають* ***симетричною,*** *якщо $A = A'$, тобто матриця A дорівнює її транспонованій матриці A'.*

Очевидно, що симетрична матриця має бути квадратною і $a_{ij} = a_{ji}$.

✓***Приклад 3.1.***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \; A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

тобто $A = A'$.

Неважко показати, що $A'A$ і AA' — симетричні матриці.

Зауважимо, що справджується тотожність $(A')' = A$.

3.2. Дії з матрицями

Дві матриці $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ одного й того самого порядку ($m \times n$) вважаються рівними, якщо всі відповідні елементи цих матриць рівні між собою, тобто

$$A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}).$$

Отже, матриці різних порядків завжди не рівні між собою.

Матриці можна додавати, віднімати, множити матрицю на число та матрицю на матрицю.

Додавання і віднімання виконуються лише для матриць одного й того самого порядку. Якщо $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ мають порядок $m \times n$, то

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} & \dots & a_{3n} \pm b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & a_{m3} \pm b_{m3} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

або $C = (c_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$.

Очевидно, що

$$A + B = B + A; \quad (A + B)' = A' + B'; \quad A + (B - A) = B.$$

Для додавання матриць A, B і C одного й того самого порядку справджується закон асоціативності:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Добутком скаляра λ на матрицю $A = (a_{ij})$ порядку $(m \times n)$ називається матриця, елементи якої дорівнюють $\lambda\, a_{ij}$, тобто

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \dots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

У разі множення матриці A на скаляр λ виконуються такі закони:

а) $\lambda A = A\lambda$;

б) $(\lambda A)' = \lambda A'$;

в) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

г) $(\lambda + \gamma)A = \lambda A + \gamma B$;

д) $(\lambda\gamma)A = \lambda(\gamma A) = \gamma(\lambda A)$.

Дві матриці A і B можна помножити одна на одну, тобто визначити $C = AB$, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

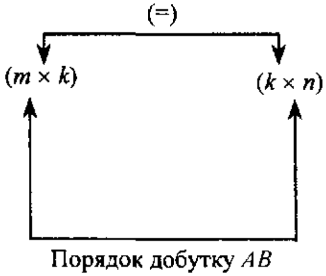


Рис. 3.1. Схема множення матриць

Нехай маємо матрицю A порядку $m \times k$ і матрицю B — $k \times n$. Добуток двох матриць $C = AB$ існує, бо матриця A має k стовпців і стільки ж рядків має матриця B. Матриця-добуток $C = AB$ матиме порядок $m \times n$, тобто стільки рядків, скільки має перша матриця A, і стільки стовпців, скільки їх має матриця B. Цей висновок унаочнює рис. 3.1.

Правило множення двох матриць A на B: кожний елемент матриці c_{ij} є сумою добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на елементи j-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}\ b_{2j} + \ldots + a_{ik}\ b_{kj} = \sum_{e=1}^{k} a_{ie}\ b_{ej}.$$

✓***Приклад 3.3.*** Знайти добуток $C = AB$, коли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \text{— порядок } 2 \times 3;$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \qquad \text{— порядок } 3 \times 2.$$

Добуток цих двох матриць існує, оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює трьом, стільки ж рядків має матриця B, тобто виконується умова множення двох матриць. Перемноживши ці матриці, дістанемо:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + a_{13}\,b_{31} & a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} + a_{13}\,b_{32} \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} + a_{23}\,b_{31} & a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} + a_{23}\,b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Порядок матриці C, яка є добутком A і B, дорівнює 2×2.

Для множення матриць діють такі закони:

а) $AB \neq BA$, тобто добуток матриць не є комутативним.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Отже, $AB \neq BA$;

б) $(AB)\,C = A\,(BC)$;

в) $(A+B)\,C = AC + BC$;

г) $C\,(A+B) = CA + CB$;

д) $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B)$;

е) $AE = EA = A$, де E — одинична матриця того самого порядку, що й матриця A — квадратна матриця;

є) $(AB)' = B'A'$;

ж) $(ABC)' = C'B'A'$.

Як окремий випадок добуток матриці розміру $1 \times p$ (вектор-рядок) на матрицю порядку $p \times 1$ (вектор-стовпець) дає скаляр, а саме:

$$A = (a_1,\ a_2,\ a_3\ \dots\ a_p);\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix};\quad C = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_p b_p).$$

Якщо вектор $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$,

то
$$A'A = (a_1\ \ a_2\ \dots\ a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

і

$$AA' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1\ \ a_2\ \dots\ a_n) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \dots & a_2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

Означення 3.11. *Два вектори A і B, для яких скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $A'B = 0$ або $B'A = 0$ і $A'A \neq 0$, $B'B \neq 0$, називаються* ***взаємно ортогональними****.*

Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, тоді $A'B = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = 0$, $B'A = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$, отже, вектори A і B — взаємно ортогональні.

Означення 3.12. *Квадратна матриця A, яка задовольняє умову $A^2 = A$ ($A^2 = A \cdot A$), тобто квадратна матриця, яка внаслідок множення сама на себе не змінюється, називається* ***ідемпотентною****.*

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix};\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

тобто $A^2 = A$, матриця A є ідемпотентною.

3.3. Скалярні характеристики матриць

Кожна матриця A має скалярну характеристику, яка називається рангом матриці A ($\mathrm{rg}\,A$). Крім неї, квадратні матриці мають ще дві скалярні характеристики: слід матриці A ($\mathrm{tr}\,A$) і її детермінант, або визначник, який позначають ($\det A$ або $|A|$).

Розглянемо докладніше ці характеристики.

Для визначення рангу матриці введемо поняття лінійної комбінації векторів і їх лінійної залежності (незалежності). Для n векторів $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лінійна комбінація векторів визначається як $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n$, де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — дійсні числа.

Означення 3.13. *Якщо вектор А подається у вигляді*

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n, \tag{3.13}$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вектори одного й того самого простору, то говорять, що вектор A є лінійною комбінацією векторів $A_1, A_2, \ldots, A_n$. *Числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *називають коефіцієнтами лінійної комбінації.*

Означення 3.14. *Вектори* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *n-вимірного простору є лінійно незалежними, якщо*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0 \text{ (нуль-вектор)}, \tag{3.14}$$

лише у випадку, коли

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

тобто в разі лінійної незалежності векторів нульовий вектор 0 (0, 0, ... 0) *має вигляд* ***тривіальної лінійної комбінації*** *векторів* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Означення 3.15. *Вектори* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***лінійно залежні****, якщо існує хоча б одне* $\alpha_i \neq 0$ *в лінійній комбінації (3.14) нульового вектора.*

Іншими словами, в разі лінійної залежності векторів нуль-вектор можна подати у вигляді нетривіальної лінійної комбінації векторів $A_1, A_2, \ldots, A_n$, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = 0,$$

коли $\alpha_i \neq 0$ хоча б для одного i.

Означення 3.16. *Максимальну кількість лінійно незалежних векторів-стовпців (рядків) матриці A називають рангом стовпців (рядків) цієї матриці.*

Оскільки ранг стовпців збігається з рангом рядків матриці A, то можна говорити просто про ранг матриці A.

Зрозуміло, що

$$\operatorname{rg} A \le \min(m, n),$$

де m — кількість рядків матриці A; n — кількість її стовпців.

Говорять, що матриця A має повний ранг, коли

$$\operatorname{rg} A = \min(m, n).$$

Означення 3.17. *Квадратну матрицю повного (неповного) рангу називають відповідно невиродженою (виродженою) і регулярною (сингулярною) матрицею.*

Прикладом невиродженої матриці є одинична матриця E_n (n-го порядку), ранг якої дорівнює n, тобто

$$\operatorname{rg} E_n = n.$$

Для рангу виконуються такі співвідношення:

а) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$;

б) $\operatorname{rg} A'A = \operatorname{rg} A$;

в) $\operatorname{rg} AB \le \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$.

Означення 3.18. ***Слідом** матриці A порядку n є сума елементів її головної діагоналі, тобто*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Для сліду виконуються такі співвідношення:

а) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$;

б) $\operatorname{tr}(\lambda A + \gamma B) = \lambda \operatorname{tr} A + \gamma \operatorname{tr} B$, де A і B — квадратні матриці одного й того самого порядку; λ і γ — дійсні числа;

в) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

г) $\operatorname{tr}(AA') = \operatorname{tr}(A'A)$;

д) $\operatorname{tr} E_n = n$.

Означення 3.19. ***Детермінантом (визначником)** квадратної матриці A порядку n називається алгебраїчна сума n! членів, кожний з яких містить n співмножників, узятих по одному з кожного рядка (стовпця) матриці з певним знаком.*

Позначається:

$$\det A \text{ або } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (3.15)$$

Властивості визначників.

1. У разі транспонування матриці її визначник не змінюється, тобто $|A| = |A'|$.

2. Якщо всі елементи рядка (стовпця) матриці дорівнюють нулю, то її визначник також дорівнює нулю.

3. У разі переставлення двох будь-яких стовпців (рядків) визначника його знак змінюється на протилежний, а абсолютна величина не змінюється.

4. Визначник з двома однаковими стовпцями (рядками) дорівнює нулю.

5. У разі множення будь-якого стовпця (рядка) на довільне число $\lambda \neq 0$ значення визначника множиться на це саме число.

6. Спільний множник всіх елементів стовпця (рядка) можна винести за знак визначника.

7. Якщо два стовпці (рядки) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

8. Визначник не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати елементи другого стовпця (рядка), попередньо помноживши їх на певний множник.

Розглянемо визначник матриці n-го порядку квадратичної матриці A:

$$|A| = \left| \begin{array}{ccccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|. \qquad (3.16)$$

Викреслимо в ньому i-й рядок і j-й стовпець, на перетині яких міститься елемент a_{ij}. У результаті залишиться визначник матриці $(n-1)$-го порядку

$$M_{ij} = \det\left|A^*\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,j-1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2,j-1} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3,j-1} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \ldots & a_{i-1,j-1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{n,j-1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.17)$$

Означення 3.20. *Визначник одержаної матриці* $(n-1)$*-го порядку має назву* ***мінора елемента*** a_{ij} *і позначається* M_{ij}.

Мінор M_{ij}, який береться зі знаком $(-1)^{i+j}$ (i — номер рядка; j — номер стовпця елемента a_{ij}), є ***алгебраїчним доповненням*** цього елемента, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого його стовпця (рядка) на відповідні їх алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + \ldots + a_{2n}A_{2n} = \\ &= \ldots = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ця властивість дає змогу розкласти визначник за елементами стовпця (рядка). Нехай потрібно знайти визначник $|A|$. Розкладемо його за елементами другого рядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -24 + 20 = -4.$$

Зауважимо, що детермінант другого порядку обчислюють відніманням добутку елементів побічної від добутку елементів головної діагоналі:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Обчислити детермінант матриці A розміром 3×3 можна згідно з властивістю (8) або за правилом Сарруса (Sarrus):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \; - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + \; + \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Визначимо $|A|$ за правилом Сарруса:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 16 - 0 + 4 - 30 = -4.$$

Правило Сарруса часто називають ***правилом трикутника***. Далі поступово проілюструємо обчислення всіх членів визначника $|A|$.

Члени зі знаком «плюс»:

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}}^{0}; \quad \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}}^{16}; \quad \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}}^{16}.$$

Члени зі знаком «мінус»:

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}}^{0}; \quad \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}}^{-4}; \quad \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}}^{-30}.$$

Користуючись поняттям детермінанта, дамо інше означення рангу матриці.

Означення 3.21. *Рангом матриці А називається найвищий порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.*

Якщо rg $A = r$, то це означає, що серед мінорів матриці є, зрештою, хоча б один мінор r-го порядку, відмінний від нуля, тоді коли всі мінори вищого порядку: $r + 1$, $r + 2$ і т. д. дорівнюють нулю.

Нехай потрібно знайти ранг матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Згідно з означенням рангу матриці його значення не може перевищувати 3.

Обчислимо один із визначників третього порядку матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці A дорівнює 3.

3.4. Обернена матриця. Обернення (інвертування) матриці

Поняття оберненої матриці є одним із центральних у матричних перетвореннях. Дамо означення оберненої матриці та розглянемо її знаходження.

Означення 3.22. *Матрицю A^{-1} **називають оберненою до матриці А**, якщо виконується рівність*

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n, \tag{3.19}$$

де E_n — одинична матриця порядку n.

Зазначимо, що умова невиродженості (несингулярності) матриці A є необхідною і достатньою для існування оберненої матриці A^{-1}. Процес знаходження A^{-1} називають ***інвертуванням матриці А***

$$A \xrightarrow{\text{Інвертування}} A^{-1}$$

Таким чином, інвертуватись можуть тільки квадратні матриці, визначник яких відмінний від нуля.

• ***Теорема 3.1.*** *Якщо визначник* (det A) *не дорівнює нулю, то матриця A має обернену:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} J, \qquad (3.20)$$

де $|A|$ — визначник матриці A; J — матриця, приєднана до A. Вона складається з алгебраїчних доповнень A_{ij} до елементів a_{ij} матриці A, а саме:

$$J = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \left(A_{ij}\right)'. \qquad (3.21)$$

Наведемо основні властивості оберненої матриці:

а) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

б) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$;

в) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

г) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$;

д) $A^{-1}A = E$;

е) $|E| = |A^{-1}A| = |A^{-1}|\,|A|$,

де A, B, C — квадратні матриці.

Дамо означення ще одного типу матриць. Якщо $A^{-1} = A'$, матрицю називають ***ортогональною***.

✓***Приклад 3.2.*** Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$|A| = -4$ (див. підрозд. 3.3).

Визначимо приєднану матрицю J:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8;\; A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9;\; A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4;\; A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;\; A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Отже,
$$J=\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}.$$

Тоді
$$A^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4}\\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи справді матриця A^{-1} є оберненою до матриці A. Знайдемо $A^{-1}A$ або AA^{-1}; у результаті має бути одинична матриця E. Отже, перевіряється рівність $A^{-1}A=AA^{-1}=E$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4}\\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1+6-4 & -2+0+2 & 1+4-5\\ 7/4-27/4+20/4 & 14/4+0-10/4 & -7/4-18/4+25/4\\ -3/2-15/2+12/2 & 6/2+0-6/2 & -3/2-10/2+15/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3.5. Блочні матриці. Дії з блочними матрицями

3.5.1. Визначення блочних матриць. У багатьох випадках доцільно великі матриці розбивати вертикальними і горизонтальними прямими на кілька частин. Наприклад, нехай матриця A має порядок 5×6:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \end{array}\right)\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \end{array}}\right\} r \text{ — рядків} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \end{array}}\right\} m-r \text{ — рядків} \end{array} \tag{3.22}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{s\text{ — стовпців}}\quad\underbrace{\qquad\qquad}_{n-s\text{ — стовпців}}$$

Розіб'ємо її на чотири підматриці:

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}; \qquad A_{12}=\begin{pmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{pmatrix};$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}; \qquad A_{22}=\begin{pmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}.$$

Тоді матрицю A запишемо:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Отже, маємо два різні записи однієї і тієї самої матриці A. У (3.22) матриця A складається з блоків елементів, або підматриць, тому таку матрицю часто називають *блочною*. Розбиття матриці роблять так, щоб підматриці, які стоять поруч (A_{11} –A_{12}; $A_{21}-A_{22}$), мали однакову кількість рядків (відповідно r; $m-r$), а підматриці, які розміщені одна під одною ($A_{11}-A_{12}$; $A_{21}-A_{22}$), — рівну кількість стовпців, а саме: s; $n-s$ (3.22).

3.5.2. Дії з блочними матрицями. А. Додавання матриць. Нехай маємо блочні матриці A і B одного і того ж порядку та однаково розбиті:

$$A=\left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right); \quad B=\left(\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right).$$

Матриця $C=A\pm B$ є також блочною матрицею того ж порядку, що й матриці A і B:

$$C=\left(\begin{array}{c:c} A_{11}\pm B_{11} & A_{12}\pm B_{12} \\ \hdashline A_{21}\pm B_{21} & A_{22}\pm B_{22} \end{array}\right). \qquad 3.24$$

Таким чином, під час додавання (віднімання) блочних матриць насамперед має виконуватись умова, що відповідні матриці-доданки мають однаковий порядок.

Зауважимо, що коли матриці розбиті таким чином, що можна виконати дію подібно тому, як це зроблено в разі додавання матриць A і B в (3.23), то таке розбиття має назву «відповідне».

Б. Множення матриць.

Нехай A — матриця порядку $m \times k$, а B — матриця порядку $k \times n$. У такому разі існує добуток $C = AB$ (див. рис. 3.1). Нехай матрицю A розбито на дві підматриці:

$$A = (\underbrace{A_{11}}_{s\text{ — стовпців}} \mid \underbrace{A_{12}}_{k-s\text{ — стовпців}}) \quad m\text{ — рядків} \tag{3.25}$$

Другу матрицю B розбито на дві підматриці B_{11}, B_{21}:

$$B = \underbrace{\left(\frac{B_{11}}{B_{21}}\right)}_{n\text{ — стовпців}} \begin{matrix} \}\ s\text{ — рядків} \\ \}\ k-s\text{ — рядків} \end{matrix} \tag{3.26}$$

Добутком двох матриць є матриця $C = AB = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$, де A_{11} має порядок m ? s; B_{11} — $s \times n$; A_{12} — $m \times (k-s)$; B_{21} — $(k-s) \times n$.

Нехай матриці A і B розбито відповідно на чотири підматриці:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{A_{11}}_{} & \underbrace{A_{12}}_{} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \begin{matrix} \}\ r\text{ — рядків} \\ \}\ m-r\text{ — рядків} \end{matrix} \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \begin{matrix} \}\ s\text{ — рядків} \\ \}\ k-s\text{ — рядків} \end{matrix}$$

s — стовпців $k-s$ — стовпців $\qquad$ p — стовпців $n-p$ — стовпців

Тоді відповідні підматриці мають розміри:

A_{11} — r ? s; $\qquad$ A_{21} — $(m-r)$? s;
A_{12} — r ? $(k-\text{s})$; $\qquad$ A_{22} — $(m-r)$? $(k-\text{s})$;
B_{11} — s ? p; $\qquad$ B_{21} — $(k-\text{s})$? p;
B_{12} — s ? $(n-p)$; $\qquad$ B_{22} — $(k-\text{s})$? $(n-p)$.

Добуток $C = AB$ складається з чотирьох підматриць C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ \hline \underbrace{C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}}_{p\text{ — стовпців}} & \underbrace{C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22}}_{n-p\text{ — стовпців}} \end{array}\right) \begin{matrix} \}\ r\text{ — рядків} \\ \}\ m-r\text{ — рядків} \end{matrix}$$

Розміри підматриць відповідно дорівнюють:

C_{11} — $r \times p$; C_{12} — $r \times (n-p)$;

C_{21} — $(m-r) \times p$; C_{22} — $(m-r) \times (n-p)$.

Отже, у разі множення блочних матриць має існувати відповідність між кількістю стовпців першої матриці A і кількістю рядків другої матриці B, тобто вони мають бути рівними.

Далі з блочними матрицями виконують операцію множення за тими самими правилами, що й зі звичайними матрицями.

✓**Приклад 3.3.** Знайти добуток $C = AB$ двох блочних матриць A і B:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&3&4&5&6\\4&2&0&1&5\\\hline 2&1&-1&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\\end{array}\right\}\text{2 рядки}\\\left.\begin{array}{c}\\\end{array}\right\}\text{1 рядок}\end{array}\qquad B=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\2&0&2&5\\1&5&1&1\\2&1&3&6\\\hline 4&1&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\\end{array}\right\}\text{3 рядки}\\\left.\begin{array}{c}\\\end{array}\right\}\text{2 рядки}\end{array}\\ \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{3 стовпці}}\ \underbrace{\quad}_{\text{1 стовпець}}\end{array}$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&3&4\\4&2&0\end{pmatrix};\ A_{12}=\begin{pmatrix}5&6\\1&5\end{pmatrix};\qquad B_{11}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&2\\1&5&1\end{pmatrix};\ B_{12}=\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix};$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}2&1&-1\end{pmatrix};\ A_{22}=\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix};\qquad B_{21}=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&1&2\end{pmatrix};\ B_{22}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}.$$

Обчислюємо добуток $C = AB$:

$$C=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}=A\cdot B=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}C_{11}=A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21}&C_{12}=A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22}\\\hline C_{21}=A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21}&C_{22}=A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22}\end{array}\right);$$

$$C_{11}=\begin{pmatrix}1&3&4\\4&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&2\\1&5&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11&21&10\\8&4&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}34&17&21\\22&11&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45&38&31\\30&15&12\end{pmatrix};$$

$$C_{12}=\begin{pmatrix}1&3&4\\4&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\26\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}36\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}59\\37\end{pmatrix};$$

$$C_{21}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 0 & 4\end{pmatrix};$$

$$C_{22}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}=12+13=25.$$

Запишемо блочну матрицю-добуток $C = AB$:

$$C = AB = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c}45 & 38 & 31 & 59\\ 30 & 15 & 12 & 37\\ \hline 11 & 0 & 4 & 25\end{array}\right)\\ \underbrace{\hphantom{45\quad 38\quad 31}}_{\text{3 стовпці}}\;\underbrace{\hphantom{59}}_{\text{1 стовпець}}\end{array}\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ 1\end{array}}\right\}\text{2 рядки}\\ \left.\vphantom{1}\right\}\text{1 рядок}\\ \vphantom{1}\end{array} \tag{3.27}$$

Отже, блочна матриця $C = AB$ має стільки рядків, скільки їх має блочна матриця A ($m = 3$), і стільки стовпців, скільки їх має блочна матриця B ($n = 4$).

Існує поняття ***прямого***, або ***кронеккерового***, добутку двох матриць. Якщо матриця A має порядок $m \times n$, а матриця B — розмір $p \times q$, то їх прямий добуток позначається $A \otimes B$ і обчислюється так:

$$A \otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{mn}B\end{pmatrix}.$$

Порядок матриці $A \otimes B$ є $mp \times nq$.

✓***Приклад 3.4.*** Знайти прямий добуток $A \otimes B$, якщо:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

A має порядок 2×3; B — порядок 2×2; $A \otimes B$ — порядок 4×6.

$$A \otimes B=\begin{pmatrix}2B & 3B & 1B\\ 4B & 2B & 1B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 3 & 9 & 1 & 3\\ 8 & 4 & 12 & 6 & 1 & 2\\ 4 & 12 & 2 & 6 & 1 & 3\\ 16 & 8 & 8 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Якщо матриці A та B квадратні й невироджені, а також мають один і той самий розмір, то справджується властивість: $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ (на відміну від $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

Для блочної матриці $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

існує таке правило транспонування:

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix};$$

множення блочної матриці на число виконується так:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{pmatrix}.$$

3.6. Обернення блочних матриць (формула Фробеніуса). Детермінант блочної матриці

Нехай A — невироджена матриця, яка є блочною

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Обернена до A матриця — також блочна, причому

$$A^{-1} = \boxed{\begin{gathered}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + FQ^{-1}F' & -FQ^{-1} \\ -Q^{-1}F' & Q^{-1} \end{pmatrix}, \\ \text{де } Q = A_{22} - A_{21}A_{22}^{-1}A_{12}; \quad F = A_{11}^{-1}A_{12}.\end{gathered}} \tag{3.28}$$

Вираз (3.28) відомий в літературі як формула Фробеніуса. Для оберненої матриці A^{-1} виконується рівність:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де E — одинична підматриця.

Запам'ятайте такий вираз:

$$(A + BDB')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\,(B'A^{-1}B + D^{-1})^{-1}B'A^{-1}, \tag{3.29}$$

де A і D — невироджені матриці відповідно розміру $m \times n$ і $n \times n$; матриця B — порядку $m \times n$.

Детермінант (визначник) квадратної блочної матриці A визначається як

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot \left| A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \right| = \\ = |A_{22}| \cdot \left| A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21} \right|. \qquad (3.30)$$

Нехай матриця A — невироджена і має блочно-діагональний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \ A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \qquad (3.31)$$

Визначник такої блочної матриці:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} = |A_{11}|.$$

Визначник блочно-діагональних матриць:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22}| \qquad (3.32)$$

і

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & E \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22}|. \qquad (3.33)$$

3.7. Системи лінійних рівнянь

Запишемо систему рівнянь у матричному вигляді

$$AX = B, \qquad (3.34)$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Матриця A є квадратною порядку n; вектор-стовпець X має розмір $n \times 1$; вектор-стовпець B — порядок $n \times 1$.

Якщо матриця A невироджена, тобто $\operatorname{rg} A = n$ (або $|A| \neq 0$), то система лінійних рівнянь (3.34) має єдиний розв'язок виду

$$X = A^{-1}B. \tag{3.35}$$

✓***Приклад 3.5.*** Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11; \\ 5x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

У матричному вигляді:

$$AX = B;$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix},$$

отже,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$|A| = -2 - 15 = -17 \neq 0$ — матриця невироджена.

! Запам'ятайте: для матриці $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/17 & 3/17 \\ 5/17 & -2/17 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} 1/17 & 3/17 \\ 5/17 & -2/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь:

$$AX = 0. \tag{3.36}$$

Нехай A — квадратна матриця n-го порядку; X — вектор-стовпець розміру $n \times 1$.

Тривіальний розв'язок має вигляд: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Нетривіальний розв'язок може існувати лише за умови, що визначник матриці A дорівнює нулю:

$$|A| = 0.$$

Коли це так, то система матиме безліч розв'язків. Їх можна нормувати, вимагаючи, наприклад, щоб виконувалася рівність

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \tag{3.37}$$

✓***Приклад 3.6.*** Знайти нетривіальні розв'язки однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} \tag{3.38}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$|A| = 0$ — це означає, що задана система має нетривіальні розв'язки.

Матрицю A можна записати як систему трьох векторів:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Систему (3.38) подамо як лінійну комбінацію вектора $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Неважко побачити, що $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1$; розв'язками системи (3.38) будуть і ці самі значення, помножені на будь-які числа, які задовольняють рівняння (3.39). Отже, система векторів A_1, A_2, A_3 є лінійно залежною, причому розв'язки системи лінійних рівнянь (3.38) є коефіцієнтами лінійної комбінації вектора $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$A_1 - 2A_2 - A_3 = 0\,. \tag{3.40}$$

3.8. Характеристичні (власні) корені і власні вектори матриць

Розглянемо систему рівнянь

$$A\,X = \lambda\,X, \tag{3.41}$$

де λ — скаляр; A — квадратна матриця порядку n, X — розміром $n \times 1$.

Систему (3.41) запишемо у вигляді

$$A\,X - \lambda\,X = 0$$

або

$$(A - E\lambda)X = 0. \tag{3.42}$$

Остання система n рівнянь з n невідомими має нетривіальний розв'язок, коли

$$\det\,(A - E\,\lambda) = 0 \quad \text{або} \quad \left|A - E\,\lambda\right| = 0. \tag{3.43}$$

Означення 3.21. *Рівняння* $\det\,(A - E\,\lambda) = 0$ *відносно* λ *називають **характеристичним рівнянням матриці A**.*

Корені цього рівняння λ є ***характеристичними коренями (характеристичними числами, власними значеннями)*** матриці A.

Візьмемо будь-який корінь λ_k характеристичного рівняння (3.43) і підставимо в систему рівнянь (3.42). Дістанемо рівняння

$$(A - E\,\lambda_k)X = 0, \tag{3.44}$$

яке має нетривіальний розв'язок, оскільки $\det\,(A - E\,\lambda) = 0$.

Нехай цим розв'язком є вектор X_k. Такий вектор X_k є *характеристичним, або власним вектором матриці* A, який відповідає *характеристичному кореню* λ_k.

Якщо матриця A має n різних характеристичних коренів, то вона має і *n різних власних векторів*.

Власні вектори визначаються з точністю до множення на скаляр. Це не завжди зручно. Тому часто розглядають нормовані власні вектори, тобто такі, що:

$$X_i' X_i = 1 .$$

Зауважимо, що коли матриця A в рівнянні (3.42) — симетрична (тобто $A' = A$), а X — матриця, кожний стовпець якої є власним вектором цієї матриці, то добуток

$$X'AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda . \qquad (3.45)$$

Отже, якщо власні вектори матриці A розміщені у вигляді стовпців матриці X, то добуток $X'AX$ *дорівнює діагональній матриці,* яка має *характеристичні корені* λ на головній діагоналі.

✓***Приклад 3.7.*** Знайти характеристичні корені матриці A.

Запишемо рівняння $AX = \lambda X$, або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - \lambda x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda x_1) + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.46)$$

Запишемо характеристичне рівняння $\det(A - E\lambda) = 0$ для системи (3.46):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \qquad (3.47)$$

Отже,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\right]. \qquad (3.48)$$

Нехай матриця A — симетрична, тоді $a_{12} = a_{21}$ і характеристичні корені цієї матриці

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right]. \qquad (3.49)$$

Підставивши поступово λ_i в систему (3.46), знайдемо власні вектори X_1, X_2 матриці A.

✓***Приклад 3.8.*** Знайти характеристичні корені λ_i і власні вектори X_1, X_2 матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця A симетрична. Для визначення λ_i застосуємо (3.49):

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(4 + 1) \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 2^2}\right] = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25}) = \frac{1}{2}(5 \pm 5);$$

$$\lambda_1 = 5; \;\; \lambda_2 = 0.$$

Щоб знайти власні вектори $X_1(x_{11};\; x_{12})$ і $X_2(x_{21};\; x_{22})$, розв'яжемо для кожного λ_i систему рівнянь (3.46).

Нехай $\lambda_i = 5$, тоді

$$\begin{cases}(4-5)x_{11} + 2x_{12} = 0 \\ 2x_{11} + (1-5)x_{12} = 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-x_{11} + 2x_{12} = 0 \\ 2x_{11} - 4x_{12} = 0\end{cases} \rightarrow x_{11} = 2x_{12}. \qquad (3.50)$$

Нормалізуємо вектор $X_1(x_{11};\; x_{12})$, зводячи його довжину до 1, тобто:

$$x_{11}^2 + x_{12}^2 = 1. \qquad (3.51)$$

Підставимо (3.50) у (3.51):

$$(2x_{12})^2 + x_{12}^2 = 4x_{12}^2 + x_{12}^2 = 5x_{12}^2 = 1 \rightarrow x_{12}^2 = \frac{1}{5} \rightarrow x_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Звідси $x_{11} = 2x_{12} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Власний вектор

$$X_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}} \right). \tag{3.52}$$

Для знаходження власного вектора $X_2(x_{21}; x_{22})$ покладемо $\lambda_2 = 0$.

Система (3.46) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} 4x_{21} + 2x_{22} = 0 \\ 2x_{21} + x_{22} = 0 \end{cases} \to\ x_{22} = -2x_{21}. \tag{3.53}$$

Нормалізуємо вектор $X_2(x_{21}; x_{22})$, звівши його довжину до 1, тобто:

$$x_{21}^2 + x_{22}^2 = 1 \to x_{21}^2 + 4x_{21}^2 = 1 \to 5x_{21}^2 = 1 \to x_{21}^2 = \frac{1}{5} \to x_{21} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{3.54}$$

Підставивши (3.54) у (3.53), дістанемо:

$$x_{22} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Власний вектор

$$X_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \right). \tag{3.55}$$

Зауважимо, що оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то власні вектори X_1 і X_2 ортогональні, тобто лінійно незалежні:

$$X_1 X_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)' = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0.$$

Перевіримо, чи виконується (3.45):

$$X'AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5}} & \frac{5}{\sqrt{5}} \\ 0 & -0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{5} + \frac{5}{5} & \frac{10}{5} - \frac{10}{5} \\ 0 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, співвідношення $X'AX$ справді переводить матрицю A в діагональну матрицю $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Це підтверджує правильність наведених обчислень.

3.9. Квадратичні форми

3.9.1. Означення квадратичної форми. **Означення 3.22.** ***Квадратичною формою*** *$Q(x_1, x_2 \ldots x_n)$ від n невідомих $x_1, x_2 \ldots x_n$ називається сума, кожний доданок якої є квадратом одного з цих невідомих або добутком двох різних невідомих:*

$$Q(x_1, x_2 \ldots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots$$
$$\ldots + a_{22}x_2^2 + \ldots + 2a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \tag{3.56}$$

Коефіцієнти членів x_i^2 розміщені на головній діагоналі матриці A, а інші елементи матриці симетричні і дорівнюють відповідно половинам коефіцієнтів за x_ix_j:

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

Симетричну матрицю $A = (a_{ij})$ ***називають матрицею квадратичної форми***. У векторно-матричній формі квадратична форма має вигляд $X'AX$, де $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, A — симетрична матриця.

Розглянемо, наприклад, два випадки.

1. Матриця A має розмір 2×2, а саме $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тоді квадратична форма

$$X'AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 +$$
$$+ a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

2. Матриця A діагональна, тобто

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

У такому разі

$$X'AX=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix}=$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$

— вагова сума квадратів.

Означення 3.23. *Квадратичну форму і відповідну їй матрицю A називають **додатно визначеною** тоді й тільки тоді, коли $X'AX>0$ для всіх дійсних $x \neq 0$.*

Означення 3.24. *Квадратичну форму і відповідну їй матрицю називають **додатно напіввизначеною**, коли $X'AX \geq 0$ для всіх X.*

Запам'ятайте важливу властивість додатно визначених матриць.

Матриця A додатно визначена тоді й тільки тоді, коли її характеристичні корені (власні значення) λ_i додатні, а саме:

$$X'AX=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}=\Lambda. \qquad (3.57)$$

Рівняння (3.57) можемо використати для знаходження іншого результату, який корисний для вивчення узагальненого методу найменших квадратів.

Оскільки всі λ_i додатні, можемо задати діагональну матрицю D такого виду:

$$D=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}. \qquad (3.58)$$

Неважко побачити, що добуток (3.57) на матрицю D ліворуч і праворуч дає одиничну матрицю:

$$(XD)' A (XD) = E_n. \qquad (3.59)$$

Нехай $Z = XD$, тоді

$$Z'AZ = E_n. \qquad (3.60)$$

Оскільки матриці X і D — невироджені, то Z — також невироджена. Виконавши відповідні перетворення, дістанемо:

$$A = (Z^{-1})'Z^{-1}. \qquad (3.61)$$

Отже, коли матриця A додатно визначена, то можна знайти таку невироджену матрицю $P = (Z^{-1})'$, що $A = PP'$.

3.9.2. Випадкові квадратичні форми. Нехай d — випадковий вектор, A — детермінована симетрична матриця.

*Добуток $d'Ad$ називають **випадковою квадратичною формою,** коли коваріаційна матриця d дорівнює $\operatorname{cov} d = \sigma_d^2 E$ і математичне сподівання $M(d) = 0$.*

Застосувавши оператор математичного сподівання до випадкової квадратичної форми $d'Ad$, дістанемо:

$$M(d'Ad) = \sigma_d^2 \operatorname{tr}(A), \qquad (3.62)$$

де $\operatorname{tr}(A)$ — слід матриці A.

Наведемо властивості випадкової квадратичної форми.

Нехай $d \approx N(\mu, \sigma^2 E)$:

1. Квадратична форма $d'Ad$ має розподіл χ^2 із k ступенями свободи, коли A — ідемпотентна матриця (тобто $A^2 = A$) і $\operatorname{rg} A = \operatorname{tr} A = k$, якщо $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

2. Нехай B — детермінована матриця, така, що $B'A = 0$ і $d \approx N(\mu, \sigma^2 E)$. Тоді Bd і Ad — незалежні.

3. Якщо $A = PP'$ — симетрична матриця, то слід матриці A є сумою її власних значень

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A.$$

4. Усі характеристичні корені ідемпотентної матриці A дорівнюють нулю або одиниці, а саме:

якщо $AX = \lambda X$, то $A^2 X = \lambda AX = \lambda^2 X$; проте $A^2 X = AX = \lambda X$, тобто $\lambda^2 X = \lambda X$, оскільки $X \neq 0$, то $\lambda^2 - \lambda = 0$. Звідси $\lambda = 0$ або $\lambda = 1$.

5. Якщо матриця Z має таку властивість, що $(Z'Z)$ — квадратна симетрична невироджена матриця $\mathrm{rg} Z = m$, то матриця $A = E_n - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'$ є ідемпотентною і $\mathrm{rg}\, A = n - n_1$.

✓***Приклад 3.9.*** Нехай $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; тоді $Z'Z = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$;

$$\left|Z'Z\right| = 42 - 36 = 6 \neq 0,$$

отже, матриця $Z'Z$ — невироджена.

$$\left(Z'Z\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{6} & -1 \\ -1 & \frac{3}{6} \end{pmatrix};$$

$$Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z' = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Визначимо нову матрицю A так:

$$A = E_n - Z(Z'Z)^{-1} Z' = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Матриця A — симетрична та ідемпотентна, оскільки $A^2 = A$. Зауважимо, що ранг матриці A дорівнює 1.

Знайшовши характеристичні корені цієї матриці, тобто розв'язавши рівняння $|A - \lambda E| = 0$, дістанемо $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = 0$, що ілюструє виконання властивості 4.

3.10. Диференціювання функції багатьох змінних градієнт функції *f* (*x*)

Розглянемо операцію диференціювання функції багатьох змінних $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, коли змінні задано у формі матриці-рядка, або, що те саме, вектора, тобто $X = (x_1, x_2 \ldots x_n)'$.

Означення 3.25. *Градієнтом функції* $f(X)$ (*позначається*: $\nabla f(x) = \dfrac{\partial f(X)}{\partial (X)}$) *називається вектор, який складається з частинних похідних функції* $f(x)$ *за* $x_1, x_2 \ldots x_n$:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_2} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

Нехай потрібно визначити градієнт функції $f(X) = \beta' X$, коли $\beta = (\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n)'$ і $X = (x_1, x_2 \ldots x_n)'$.

Тоді $f(X) = (\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$.

Отже, градієнт функції

$$\frac{\partial (\beta' X)}{\partial X} = \beta_i \quad (i = \overline{1,n}). \tag{3.64}$$

Узявши до уваги, що $\beta'X = X'\beta$, градієнт можна визначити як

$$\frac{\partial(\beta'X)}{\partial X} = \frac{\partial(X\beta)}{\partial X} = \beta = (\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n)'. \tag{3.65}$$

Далі розглянемо функцію $f(X) = X'AX$, де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця порядку n і $X = (x_1, x_2 \ldots x_n)'$ — n-вимірна матриця-стовпець. Функцію такого типу визначають як квадратичну форму (див. підрозд. 3.9).

Визначимо градієнт квадратичної форми. Для цього подамо $f(X) = X'AX$ як скалярний добуток:

$$X'AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n;\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n + \ldots$$

$$\ldots + a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \tag{3.66}$$

$$= x_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n) +$$
$$+ \ldots + x_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n).$$

Знайдемо компоненти вектора-градієнта.

Перший компонент:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = \frac{\partial(X'AX)}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + (\underbrace{a_{12} + a_{21}}_{2a_{12}})x_2 + \ldots + (\underbrace{a_{1n} + a_{n1}}_{2a_{1n}})x_n =$$

$$= 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_n = 2\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j.$$

Другий компонент:

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial x_2} = (a_{12} + a_{21})x_1 + 2a_{22}x_2 + (a_{23} + a_{32})x_3 + (a_{2n} + a_{n2})x_n =$$
$$= 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_n = 2\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j.$$

n-й компонент:

$$\frac{\partial\,(X'AX)}{\partial\,x_n} = (a_{1n} + a_{n1})\,x_1 + (a_{n2} + a_{2n})\,x_2 +$$
$$+ (a_{3n} + a_{n3})\,x_3 + \ldots + 2a_{nn}x_n = 2\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\,.$$

Отже, градієнт від квадратичної форми $f(x) = x'Ax$ має вигляд

$$\frac{\partial\,(X'AX)}{\partial\,X} = 2\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = 2AX. \quad (3.67)$$

Або, скорочено

$$\frac{\partial\,(X'AX)}{\partial\,X} = 2AX\,. \quad (3.68)$$

3.11. Стислі висновки

1. ***Матрицею*** називається таблиця чисел, яка складається з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Кількість рядків і стовпців матриці визначає ***її розмір*** $m \times n$.

3. Якщо $m \neq n$, то матриця — ***прямокутна***; якщо $m = n$ — матриця ***квадратна порядку n*** (або ***m***).

4. Якщо матриця має один стовпець або рядок, то її називають відповідно: матрицею-стовпцем або матрицею-рядком. Загалом такі матриці називають ***векторами***, а саме:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

5. Якщо матриця A має всі нульові елементи, то вона ***є нульовою***:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Квадратна матриця, усі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

7. Якщо в діагональній матриці по головній діагоналі стоять одиниці, а саме

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то така матриця називається ***одиничною n-го порядку***.

8. Якщо в матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

поміняти місцями елементи рядків на відповідні елементи стовпців (або навпаки), то дістанемо ***транспоновану*** матрицю

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

9. Квадратна матриця A називається ***симетричною***, якщо $A' = A$.

10. Додавання і віднімання виконується тільки для матриць одного й того самого порядку. Якщо $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ мають однаковий порядок, то матриця суми (різниці) $C = (a_{ij} \pm b_{ij})$.

11. Матриця будь-якого порядку A може бути помножена на скаляр λ:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для множення матриці A на скаляр виконуються такі закони:

а) $\lambda A = A\lambda$;

б) $(\lambda A)' = \lambda A'$;

в) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;

г) $(\lambda + \gamma)A = \lambda A + \gamma A$;

д) $(\lambda\gamma)A = \lambda(\gamma A) = \gamma(\lambda A)$.

12. Дві матриці A і B можна помножити одна на одну, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Кожний елемент c_{ij} матриці-добутку $C = AB$ є сумою добутків відповідних елементів a_{ij} i-го рядка на відповідні елементи j-го стовпця:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

13. Для множення матриць справджуються такі закони:

а) $AB \neq BA$;

б) $(AB)C = A(BC)$;

в) $(A + B)C = AC + BC$;

г) $C(A + B) = CA + CB$;

д) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

е) $AE = EA = A$;

є) $(AB)' = B'A'$.

14. Добуток матриці $A = (a_1, a_2, a_3 \dots a_p)$ на $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$ дає скаляр

$$C = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_pb_p).$$

Якщо вектор $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$, то $$A'A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

і $$AA' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \dots & a_2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

15. Квадратна матриця, що задовольняє умову $A^2 = A$, називається ***ідемпотентною.***

16. Кожна матриця має скалярну характеристику — ранг матриці. Рангом матриці називається максимальна кількість лінійно незалежних векторів-стовпців (рядків) матриці A. Існує й інше означення: найвищий порядок мінору матриці A, який відрізняється від нуля:

$$\text{rg} A \le \min(m, n),$$

m, n — кількість відповідно рядків і стовпців матриці A.

17. Якщо $\text{rg}\, A = \min(m, n)$, то матриця A має повний ранг. Для рангу виконуються такі співвідношення:

а) $\text{rg}\, A = \text{rg}\, A'$;
б) $\text{rg}\, A'A = \text{rg}\, A$;
в) $\text{rg}\, AB \le \min(\text{rg}\, A, \text{rg}\, B)$;
г) $\text{rg}\, E_n = n$.

18. Для квадратної матриці існують також скалярні характеристики: слід матриці і її визначник (детермінант).

Слідом матриці розміру $(n \times n)$ є сума елементів, що містяться на її головній діагоналі, тобто

$$\text{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Для сліду виконуються такі співвідношення:

а) $\text{tr}\, A = \text{tr}\, A'$;

б) $\text{tr}\,(\lambda A + \gamma B) = \lambda\, \text{tr} A + \gamma\, \text{tr} B$;

в) $\text{tr}\,(AB) = \text{tr}\,(BA)$;

г) $\text{tr}(AA') = \text{tr}(A'A) = \text{tr}(A^2)$;

(A і B — матриці однакового порядку);

д) $\text{tr} E_n = n$.

19. Детермінантом (визначником) квадратної матриці A n-го порядку називається алгебраїчна сума n членів, кожний з яких містить n співмножників, узятих по одному і лише по одному з кожного рядка (стовпця) визначника. Позначається:

$$\det A \text{ або } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

20. Визначник $(n-1)$-го порядку, в якому викреслені i-й рядок і j-й стовпець, називається ***мінором елемента*** a_{ij} і позначається M_{ij}.

21. Мінор M_{ij}, який береться зі знаком $(-1)^{i+j}$, де i — номер рядка, j — номер стовпця елемента a_{ij}, називається ***алгебраїчним доповненням цього елемента***, а саме:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

22. Визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого стовпця (рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in};$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

23. Квадратна матриця, для якої $|A| \neq 0$, називається ***невиродженою***. Кожна невироджена матриця має єдину обернену матрицю, для якої виконується умова:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n.$$

Обернена матриця обчислюється так:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}J = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

де J — приєднана матриця.

24. Основні властивості оберненої матриці:

1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

2) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$;

3) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

4) $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$;

5) $A^{-1}A = E$;

6) $|E| = \left|A^{-1}A\right| = \left|A^{-1}\right|\left|A\right|$.

25. Матриця, для якої $A^{-1} = A'$, називається ***ортогональною***.

26. Матриці, в яких елементами є окремі підматриці, називаються ***блочними***:

$$A = \begin{pmatrix} (A_{11}) & (A_{12}) \\ (A_{21}) & (A_{22}) \end{pmatrix}.$$

Розбиваючи матрицю на підматриці, слід додержувати таких правил:

• підматриці, що стоять поруч (A_{11}), (A_{12}) і (A_{21}), (A_{22}) — повинні мати однакову кількість рядків;

• підматриці, які стоять одна під одною (A_{11}), (A_{21}) і (A_{12}), (A_{22}), повинні мати однакову кількість стовпців.

27. У разі додавання (віднімання) блочних матриць має насамперед виконуватись умова, що порядок відповідних матриць-доданків однаковий.

У разі множення двох блочних матриць кількість стовпців першої матриці має дорівнювати кількості рядків другої матриці. З блочними матрицями операцію множення виконують за тими самими правилами, що й зі звичайними матрицями.

28. Кронеккеровий добуток двох матриць $A \otimes B$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix},$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$.

Якщо матриця $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ блокова, то $A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix}$.

29. Обернену блочну матрицю знаходимо за формулою Фробеніуса:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+FQ^{-1}F' & -FQ^{-1} \\ -Q^{-1}F' & Q^{-1} \end{pmatrix},$$

де $Q=A_{22}-A_{21}A_{22}^{-1}A_{12}$; $F=A_{11}^{-1}A_{12}$.

30. Детермінант блочної матриці A

$$|A|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}=|A_{11}|\,|A_{22}-A_{21}\ A_{11}^{-1}\ A_{12}|=$$
$$=|A_{22}|\,|A_{11}-A_{12}\ A_{22}^{-1}\ A_{21}|.$$

31. Система лінійних рівнянь у матричному вигляді записується $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо A — невироджена матриця, то розв'язок системи $AX=B$ знаходиться як

$$X=A^{-1}B.$$

32. Система лінійних рівнянь $AX=0$ називається однорідною. Вона має нетривіальні розв'язки, якщо $|A|=0$. Система рівнянь $AX=\lambda X \to AX-\lambda X=0 \to (A-E\lambda)X=0$ має нетривіальний розв'язок, якщо $|A-E\lambda|=0$. Останнє рівняння ***називають характеристичним рівнянням*** матриці A.

33. Корені рівняння $|A-E\lambda|=0$ є ***характеристичними коренями*** (***характеристичними числами, власними значеннями***) матриці A.

34. Вектори X_k, які є розв'язком системи $(A-E\lambda_k)X=0$ для відповідного характеристичного кореня λ_k, називаються

власними векторами матриці A. Якщо A симетрична, то добуток

$$X'AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda,$$

де X — матриця власних векторів A; λ_i — характеристичні корені матриці A.

35. Квадратична форма $Q(x_1, x_2 \ldots x_n)$ від n невідомих $x_1, x_2 \ldots x_n$ записується у вигляді:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots$$
$$\ldots + a_{22}x_2^2 + \ldots + 2a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

У векторно-матричному записі квадратичну форму можна подати як $X'AX$,

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, A — симетрична матриця.

36. Якщо d — випадковий вектор, для якого виконується: $\text{cov}\, d = \sigma_d^2 E$; $M(d) = 0$, то $d'Ad$ називається ***випадковою квадратичною формою***. Для випадкової квадратичної форми

$$M(d'Ad) = \sigma_d^2 \text{ tr } A.$$

37. Якщо $A = PP'$ — симетрична матриця, то ***слід матриці A*** є сумою її власних значень:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{tr } (X'AX) = \text{tr } (AXX') = \text{tr } A.$$

Усі власні значення ідемпотентної матриці A дорівнюють або нулю, або одиниці. Матриця $A = E_n - Z(Z'Z)^{-1}Z'$ ідемпотентна, причому ранг її дорівнює $n - m$.

38. ***Градієнтом функції f (x)***, коли $X = (x_1, x_2 \ldots x_n)$, є вектор

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_2} \\ \dots \\ \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

39. Якщо функція $f(X) = \beta' X = X'\beta$, то градієнт її

$$\nabla f(x) = \frac{\partial(\beta' X)}{\partial X} = \frac{\partial(X'\beta)}{\partial X} = \beta.$$

40. Градієнт квадратичної форми $f(x) = x'Ax$ дорівнює

$$\nabla f(X) = 2AX.$$

3.12. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матриці суми (різниці): $A \pm D$; $C \pm K$; $B \pm F$; $A \pm E$. Поясніть, чому не існує суми (різниці) матриць: $A \pm B$; $B \pm C$; $C \pm D$; $D \pm K$; $E \pm K$.

2. Для матриць із завдання 1 знайдіть добутки: BA; CF; CK; AE; DE. Поясніть, чому не існує добутків AB; CD; FC; FB; KA; KE.

3. Для матриць із завдання 1 знайдіть транспоновані до них матриці.

4. Із множини матриць завдання 1 знайдіть симетричні. Яка ознака симетричної матриці?

5. Покажіть, що для матриць із завдання 1 справджується тотожність $(A')' = A$.

6. Яка матриця називається ідемпотентною? Покажіть, що матриця $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ є ідемпотентною.

7. Назвіть скалярні характеристики матриць.

8. Покажіть, що для матриць A і C із завдання 1 $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$; $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} C'$.

9. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Чому дорівнює слід ($\operatorname{tr} A$) матриці A?

10. Для матриці A із завдання 9 покажіть, що $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$.

11. Дано симетричну матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Покажіть, що $\operatorname{tr}(AA') = \operatorname{tr}(A'A) = \operatorname{tr}(A^2)$.

12. Знайдіть визначник матриці A із завдання 11.

13. Для матриці A із завдання 11 покажіть, що $|A| = |A'|$.

14. Яка матриця має обернену матрицю? Які з поданих далі матриць мають обернені:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

15. Наведіть основні властивості оберненої матриці.

16. Задано матрицю A^{-1}, обернену до матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Покажіть, що $(A^{-1})^{-1} = A$; $A^{-1}A = E$; $|E| = |A^{-1}||A|$; $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

17. Покажіть, що матриця $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ є ортогональною.

18. Задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Матриця, обернена до матриці системи,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть розв'язок даної системи рівнянь.

19. Яка матриця називається блочною?

20. Задано по чотири блоки блочних матриць A і B:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \; A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \; A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \; B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \; B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть суму (різницю) блочних матриць $A \pm B$.

21. Яка умова множення блочних матриць? З відповідних блоків матриць A і B з попереднього завдання складіть дві матриці, які можна було б помножити одна на одну.

22. Задано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матрицю Кронеккер-добутку (прямого множення) $A \otimes B$.

23. Задано блочну невироджену матрицю

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Знайдіть обернену матрицю A^{-1}.

24. Яке рівняння має назву характеристичного рівняння матриці A?

25. Яку назву мають корені характеристичного рівняння?

26. Чому дорівнює добуток $X'AX$, де X — власні вектори матриці A?

27. Знайдіть характеристичні корені й власні вектори матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

28. Дайте означення квадратичної форми. Запишіть її у розгорнутому вигляді й у матричній формі.

29. Коли квадратична форма є додатно визначеною і напіввизначеною?

30. Яка квадратична форма має назву випадкової квадратичної форми?

31. Чому дорівнює математичне сподівання випадкової квадратичної форми?

32. Сформулюйте властивості випадкової квадратичної форми.

3.13. Основні терміни і поняття

Матриця • Прямокутна матриця • Квадратна матриця • Транспонована матриця • Діагональна матриця • Симетрична матриця • Одинична матриця • Матриця-стовпець • Матриця-рядок • Ідемпотентна матриця • Ранг матриці • Слід матриці • Детермінант (визначник) • Скаляр • Мінор • Алгебраїчне доповнення • Кронеккерове (пряме) множення матриць • Приєднана матриця • Обернена матриця • Блочна матриця • Характеристичне рівняння • Характеристичні корені • Власні вектори матриці • Квадратична форма • Випадкова форма

Розділ 4

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ЗАГАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ

4.1. Поняття моделі та етапи її побудови

Перша принципова задача, з якою стикається кожний, хто вивчає економіку, — це задача про встановлення взаємозв'язків між економічними величинами. Так, попит на деякий товар, що формується на ринку, залежить від ціни цього товару та ціни конкуруючих товарів, споживчого доходу і т. ін. Витрати, що пов'язані з виготовленням будь-якої продукції, залежать від обсягу виробництва, технології, зовнішніх і внутрішніх умов, від цін на основні виробничі ресурси. Можна було б навести ще багато прикладів про взаємозв'язки між економічними показниками. Адже вони не є ізольованими, автономними, а мають між собою прямі і зворотні зв'язки. Звідси, щоб ефективно керувати економічними процесами та явищами, треба вміти вимірювати ці зв'язки кількісно.

Цю проблему економіки можна вирішити, побудувавши економетричну модель.

Означення 4.1. ***Економетрична модель*** *— це функція чи система функцій, що кількісно описує залежність між соціально-економічними показниками, один чи кілька з яких є залежною змінною, інші — незалежними.*

У загальному вигляді економетрична модель запишеться так:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3 \ldots X_{m-1}, u),$$

де Y — залежна змінна; $X_j\,(j = \overline{1, m-1})$ — незалежні змінні; u — стохастична складова, або на основі системи рівнянь:

$$Y_s = f(X_{s1}, X_{s2}, X_{s3} \ldots X_{sm-1}\; u_s),$$

де u_s — стохастична складова s-го рівняння, $s = \overline{1, k}$, тобто ця економетрична модель складається з k функцій.

Незалежні змінні моделі називаються ***пояснювальними***, наперед заданими змінними. Залежні змінні називаються ***пояснюваними*** змінними.

Економетрична модель, що будується на основі системи рівнянь, крім регресійних функцій, може містити тотожності.

Побудова будь-якої економетричної моделі, незалежно від того, на якому рівні і для яких показників вона будується, здійснюється як послідовність певних кроків.

Крок 1. Знайомство з економічною теорією, висунення гіпотези взаємозв'язку. Чітка постановка задачі.

Крок 2. Специфікація моделі. Використовуючи всі ті види функцій, які можуть бути застосовані для вивчення взаємозв'язків, необхідно сформулювати теоретичні уявлення і прийняті гіпотези у вигляді математичних рівнянь. Ці рівняння встановлюють зв'язки між основними визначальними змінними, припускаючи, що решта змінних є випадковими.

Крок 3. Формування масивів вихідної інформації згідно з метою та завданнями дослідження.

Крок 4. Оцінка параметрів економетричної моделі методом найменших квадратів. Аналіз залишків дає змогу відповісти на запитання: чи не суперечить специфікація моделі застосуванню 1МНК.

Крок 5. Якщо деякі передумови застосування 1МНК не виконуються, то для подальшого аналізу треба замінювати специфікацію або застосовувати інші методи оцінювання параметрів.

Крок 6. Верифікація моделі та її оцінок параметрів.

Крок 7. Прогноз на основі моделі.

Схематично всі кроки можна зобразити так:

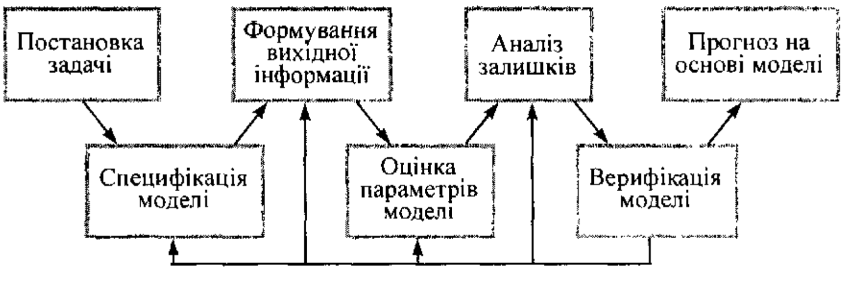


Рис. 4.1. Етапи побудови моделі

4.2. Специфікація моделі

Економетрична модель базується на єдності двох аспектів — теоретичного, якісного аналізу взаємозв'язків та емпіричної інформації. Теоретична інформація знаходить своє відображення у специфікації моделі.

***Специфікація моделі** — це аналітична форма економетричної моделі на основі досліджуваних чинників. Вона складається з певного виду функції чи функцій, що використовуються для побудови моделей, має ймовірнісні характеристики, які притаманні стохастичним залишкам моделі.*

З досвіду економетричних досліджень, а також на підставі якісного теоретичного аналізу взаємозв'язків між економічними показниками, можна навести клас функцій, які можуть описувати ці взаємозв'язки:

1) лінійна функція:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m;$$

2) степенева функція:

$$y = a_0\ x_1^{a_1}\ x_2^{a_2} ... x_m^{a_m} \rightarrow \ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + ... + a_m \ln x_m;$$

3) гіпербола:

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + ... + \frac{a_m}{x_m} \rightarrow y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + ... + a_m z_m,$$

де $z_j = \frac{1}{x_j}$;

4) квадратична функція:

$$y = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + ... + a_m x_m^2 \Rightarrow y = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2 + ... + a_m t_m,$$

де $t_j = x_j^2$.

У цих функціях:

y — залежна (пояснювана) змінна;

$x_j,\ j = \overline{1, m-1}$ — незалежні, або пояснювальні, змінні;

$a_j,\ j = \overline{0, m}$ — параметри функцій.

Серед наведених видів функцій три останні є нелінійними. Але за допомогою перетворення залежної і незалежних змінних ці функції можна звести до лінійного виду.

Лінійні функції найпоширеніші в економетричному моделюванні, тому обґрунтування економетричних методів розглянемо на базі лінійних моделей.

Маючи на увазі, що вибір аналітичної форми економетричної моделі не може розглядатись без конкретного переліку незалежних змінних, ***специфікація моделі передбачає добір чинників для економетричного дослідження.***

При цьому в процесі такого дослідження можна кілька разів повертатись до етапу специфікації моделі, уточнюючи перелік незалежних змінних та вид функції, що застосовується. Адже коли вид функції та її складові не відповідають реальним процесам, то йдеться про похибки специфікації.

Похибки специфікації моделі можуть бути трьох видів:

1) ігнорування при побудові економетричної моделі істотної пояснювальної змінної;

2) введення в модель незалежної змінної, яка не є істотною для вимірюваного зв'язку;

3) використання не відповідних математичних форм залежності.

Перша з цих помилок призводить до зміщення оцінок, причому зміщення буде тим більшим, чим більша кореляція між введеними та не введеними до моделі змінними, а напрям зміщення залежить від знака оцінок параметрів при введених змінних і від характеру кореляції між введеними та навіть не введеними змінними. Оцінки параметрів також будуть зміщеними (в цьому випадку вони вищі), тому застосування способів перевірки їх значущості може призвести до хибних висновків щодо значень параметрів генеральної сукупності.

Для відшукання цього джерела помилок специфікації досить важко запропонувати будь-які загальні міркування, оскільки незалежна змінна, що не враховується (або незалежні змінні), може бути одним із багатьох можливих пояснень. Про необхідність введення до моделі цих незалежних змінних можна лише здогадуватись на підставі апріорних міркувань. Проте відомі й більш формалізовані процедури, які дають змогу з'ясувати, наскільки істотним є введення до моделі будь-якої змінної. Так, наприклад, якщо побудувати економетричну модель на базі покрокової регресії (метод покрокової регресії розглянемо пізніше), то можна досить чітко ранжувати пояснювальні змінні за величиною їх впливу на залежну змінну. Про відсутність основної змінної свідчить зміна поведінки випадкового відхилення у помилково специфікованій моделі.

Друга помилка специфікації. У випадку, коли до моделі вводиться змінна, яка неістотно впливає на залежну змінну, то (на відміну від першої помилки специфікації) оцінки параметрів моделі будуть незміщеними. При цьому за допомогою звичайних процедур можна дістати також незміщені оцінки дисперсій цих параметрів. Проте це не означає, що економетричну модель можна беззастережно розширювати за рахунок «неістотних» змінних. Адже існує ненульова ймовірність того, що в результаті використання вибіркових даних змінна, яка зовсім не стосується моделі, покаже істотний зв'язок із залежною змінною. А це означає, що кількісний зв'язок між змінними буде виміряно неправильно.

Третя помилка специфікації. Припускається, що залежна змінна є лінійною функцією від деякої пояснювальної змінної, а насправді йдеться про квадратичну, кубічну чи якусь поліноміальну залежність вищого порядку. У цьому разі наслідки такі самі, як і за першої помилки специфікації: оцінки параметрів моделі матимуть зміщення.

Питання про вибір найкращої форми залежності має базуватися на перевірці ступеня узгодженості виду функції з вихідними даними спостережень.

Адекватність побудованої моделі можна встановити, проаналізувавши залишки моделі. Вони обчислюються як різниця між фактичними значеннями залежної змінної і розрахованими за моделлю. Щоб перевірити, чи має розподіл залишків невипадковий характер, можна скористатися критерієм Дарбіна—Уотсона. Тоді перевірка моделі на існування автокореляції першого порядку аналогічна перевірці того, наскільки вдало вибрано форму економетричної моделі.

4.3. Передумови застосування методу найменших квадратів (1МНК)

Нехай економетрична модель у матричній формі має вигляд

$$Y = XA + u, \qquad (4.1)$$

де Y — вектор значень залежної змінної; X — матриця пояснювальних змінних розміром $n \times m$ (n — кількість спостережень, m — кількість змінних); A — вектор параметрів моделі; u — вектор залишків.

Застосовуємо 1МНК для оцінювання параметрів моделі, якщо виконуються наведені далі умови.

1) Математичне сподівання залишків дорівнює нулю:

$$M(u) = 0; \qquad (4.2)$$

2) значення u_i вектора залишків u незалежні між собою і мають сталу дисперсію:

$$M(uu') = \begin{cases} \sigma_u^2 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases} \qquad (4.3)$$

3) пояснювальні змінні моделі не пов'язані із залишками:

$$M(X'u) = 0; \qquad (4.4)$$

4) пояснювальні змінні моделі утворюють лінійно незалежну систему векторів, або, іншими словами, пояснювальні змінні не повинні бути мультиколінеарними, тобто матриця X має повний ранг.

Перша умова, здавалося б, є очевидною. Адже коли математичне сподівання залишків не дорівнює нулю, то це означає, що існує систематичний вплив на залежну змінну і до модельної специфікації не введено всіх основних пояснювальних змінних. Якщо ця передумова не виконується, то йдеться про помилку специфікації.

Друга умова передбачає наявність сталої дисперсії залишків та відсутність кореляції між ними. Наявність сталої дисперсії називають ***гомоскедастичністю***. Проте вона може виконуватись лише тоді, коли залишки u є похибками вимірювання. Якщо залишки акумулюють загальний вплив змінних, які не враховано в моделі, то звичайно дисперсія залишків не може бути сталою величиною, вона змінюється для окремих груп спостережень. У такому разі йдеться про явище ***гетероскедастичності***, яке впливає на методи оцінювання параметрів. Якщо між залишками існує залежність (автокореляція), то вона також впливає на методи оцінювання параметрів.

Третя умова передбачає незалежність між залишками і пояснювальними змінними, яка порушується насамперед тоді, коли економетрична модель будується на базі одночасних структурних рівнянь або має лагові змінні. Тоді для оцінювання параметрів моделі використовується, як правило, дво- або трикроковий методи найменших квадратів.

Четверта умова означає, що всі пояснювальні змінні, які входять до економетричної моделі, мають бути незалежними між собою. Проте очевидно, що в економіці дуже важко вирізнити такий масив пояснювальних змінних, які були б зовсім не пов'язані між собою. Тоді щоразу необхідно з'ясовувати, чи не впливатиме залежність пояснювальних змінних на оцінку параметрів моделі.

Це явище називають ***мультиколінеарністю*** змінних, що призводить до ненадійності оцінки параметрів моделі, підвищує їхню чутливість до вибраної специфікації моделі та до конкретного набору даних. Знижується рівень довіри до результатів верифікації моделей за допомогою 1МНК. Отже, це явище з усіх поглядів є, звичайно, небажаним. Але воно досить поширене, тому методи виявлення мультиколінеарності й способи її врахування за допомогою специфікації моделі чи спеціальних методів оцінювання параметрів є важливою економетричною проблемою.

4.4. Оператор оцінювання 1МНК

Оцінимо методом 1МНК параметри моделі (4.1), для якої виконуються чотири розглянуті щойно умови.

Рівняння (4.1) подамо у вигляді: $u = Y - XA$. Тоді суму квадратів залишків u можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u'u = (Y - X\hat{A})'(Y - X\hat{A}) = Y'Y - 2\hat{A}'X'Y + \hat{A}'X'X\hat{A}. \quad (4.5)$$

Продиференціюємо цю умову за $\hat{A}$ і прирівняємо похідні до нуля:

$$\frac{\partial\,(u'u)}{\partial\,\hat{A}} = -2X'Y + 2X'X\hat{A} = 0,$$

або

$$X'X\hat{A} = X'Y. \quad (4.6)$$

X' — матриця, транспонована щодо матриці пояснювальних змінних X.

Звідси

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y. \quad (4.7)$$

Рівняння (4.6) дає матричну форму запису **системи нормальних рівнянь**, а формула (4.7) показує, що вектор $\hat{A}$ є розв'язком системи таких рівнянь.

Формули (4.6) і (4.7) можна дістати й інакше.

Так, помноживши рівняння (4.1) зліва спочатку на X', а потім на матрицю $(X'X)^{-1}$, дістанемо:

$$(X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'X\hat{A} + (X'X)^{-1}X'u.$$

Оскільки $(X'X)^{-1}X'X = E$, то справджується рівність

$$(X'X)^{-1}X'Y = \hat{A} + (X'X)^{-1}X'u.$$

Згідно з (4.4), коли $n \to \infty$, $M(X'u) = 0$, отже,

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y.$$

Неважко показати, що оцінки $\hat{A}$, обчислені за (4.7), мінімізують суму квадратів залишків u.

Згідно з цим значення вектора $\hat{A}$ є розв'язком системи нормальних рівнянь

$$(X'X)\hat{A} = X'Y.$$

Якщо незалежні змінні в матриці X взяті як відхилення кожного значення від свого середнього, то матрицю $X'X$ називають ***матрицею моментів***.

У цьому разі числа, розміщені на її головній діагоналі, характеризують величину дисперсій незалежних змінних, інші елементи відповідають взаємним коваріаціям.

Отже, структура матриці моментів відбиває зв'язки між пояснювальними змінними. Чим ближчі показники коваріацій до значень дисперсій, тим ближчий визначник матриці $X'X$ до нуля і тим гірші оцінки параметрів $\hat{A}$. Далі буде показано, що стандартні *похибки параметрів* $\hat{A}$ *прямо пропорційні до значень, розміщених на головній діагоналі* матриці $(X'X)^{-1}$.

Розглянемо приклад оцінювання параметрів моделі 1МНК.

✓***Приклад 4.1.*** Оцінити параметри економетричної моделі, що характеризує залежність між тижневими витратами на харчування, загальними витратами та розміром сім'ї. Вихідні дані наведено в табл. 4.1.

Розв'язання. Запишемо економетричну модель:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + u,$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X_1 + \hat{a}_2X_2,$$

де $Y, \hat{Y}$ — відповідно фактичні та розрахункові значення за моделлю тижневих витрат на харчування;

X_1 — загальні витрати;

X_2 — розмір сім'ї;

u — залишки;

$\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ — оцінки параметрів моделі.

Таблиця 4.1

№ з/п	Витрати на харчування Y, гр. од.	Загальні витрати X_1, гр. од.	Розмір середньої сім'ї X_2, кількість членів
1	22	45	1,5
2	34	75	1,6
3	50	125	1,9
4	67	223	1,8
5	47	92	3,4
6	66	146	3,6
7	81	227	3,4
8	106	358	3,5
9	70	135	5,5
10	95	218	5,4
11	119	331	5,4
12	147	490	5,3
13	93	175	8,5
14	133	305	8,3
15	169	468	8,1
16	197	749	7,3

Оператор оцінювання параметрів моделі за 1МНК має вигляд:

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y,$$

де $\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 1 & 45 & 1{,}5 \\ 1 & 75 & 1{,}6 \\ 1 & 125 & 1{,}9 \\ 1 & 223 & 1{,}8 \\ 1 & 92 & 3{,}4 \\ 1 & 146 & 3{,}6 \\ 1 & 227 & 3{,}4 \\ 1 & 358 & 3{,}5 \\ 1 & 135 & 5{,}5 \\ 1 & 218 & 5{,}4 \\ 1 & 331 & 5{,}4 \\ 1 & 490 & 5{,}3 \\ 1 & 175 & 8{,}5 \\ 1 & 305 & 8{,}3 \\ 1 & 468 & 8{,}1 \\ 1 & 749 & 7{,}3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 22 \\ 34 \\ 50 \\ 67 \\ 47 \\ 66 \\ 81 \\ 106 \\ 70 \\ 95 \\ 119 \\ 147 \\ 93 \\ 133 \\ 169 \\ 197 \end{pmatrix}$;

X' — матриця, транспонована до матриці X.

Матриця X крім двох векторів незалежних змінних містить вектор одиниць. Він дописується в цій матриці ліворуч тоді, коли економетрична модель має вільний член. Не дописуючи вектора одиниць, вільний член можна обчислити, скориставшись рівністю:

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x}_1 - \hat{a}_2\bar{x}_2,$$

де $\bar{y}$ — середнє значення залежної змінної; $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ — середні значення незалежних змінних x_1 і x_2.

Згідно з оператором оцінювання знайдемо:

1) $$(X'X) = \begin{pmatrix} 16 & 416{,}2 & 74{,}5 \\ 416{,}2 & 1601562 & 23271{,}2 \\ 74{,}5 & 23271{,}2 & 436{,}69 \end{pmatrix};$$

2) $$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}314 & -0{,}00017 & -0{,}0446 \\ -0{,}00017 & 0{,}00003 & -0{,}00012 \\ -0{,}0446 & -0{,}00012 & 0{,}0165 \end{pmatrix};$$

3) $$X'Y = \begin{pmatrix} 1495 \\ 520090 \\ 8367{,}9 \end{pmatrix};$$ 4) $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 8{,}8 \\ 0{,}2 \\ 6{,}97 \end{pmatrix}.$$

Отже, економетрична модель має вигляд

$$\hat{Y} = 8{,}8 + 0{,}2X_1 + 6{,}97X_2.$$

Знайдені методом 1МНК оцінки параметрів такі: $\hat{a}_0 = 8{,}8$; $\hat{a}_1 = 0{,}2$; $\hat{a}_2 = 6{,}97$, звідки

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 8{,}8 \\ 0{,}2 \\ 6{,}97 \end{pmatrix}.$$

Тобто, коли за всіх однакових умов незалежна змінна X_1 (загальні витрати) збільшується (зменшується) на одиницю, то залежна змінна $\hat{Y}$ (оцінка витрат на харчування) збільшується (зменшується) на 0,2 одиниці. Якщо за інших незмінних умов незалежна змінна X_2 (розмір сім'ї) збільшується (зменшується) на одиницю, то залежна змінна $\hat{Y}$ (оцінка витрат на харчування) збільшується (зменшується) на 6,97 одиниці.

4.5. Властивості оцінок параметрів

Оцінки параметрів $\hat{A}$ є вибірковими характеристиками, що мають такі властивості:

1) незміщеності;
2) обґрунтованості;
3) ефективності;
4) інваріантності.

Означення 4.2. *Вибіркова оцінка $\hat{A}$ параметра A називається* ***незміщеною,*** *якщо вона задовольняє рівність*

$$M(\hat{A}) = A. \tag{4.8}$$

Застосовуючи оператор математичного сподівання до (4.7), дістаємо:

$$M(\hat{A}) = A + (X'X)^{-1} X' M(u).$$

Оскільки за першою умовою $M(u) = 0$, то $M(\hat{A}) = A$. Отже, оцінка параметрів 1МНК є ***незміщеною.***

Незміщеність — це мінімальна вимога, яка ставиться до оцінок параметрів $\hat{A}$. Якщо оцінка незміщена, то за багаторазового повторення випадкової вибірки навіть тоді, коли для окремих вибірок, можливо, оцінки були з похибкою, середнє значення цих похибок дорівнює нулю.

Різниця між математичним сподіванням оцінки і значенням оціненого параметра

$$\theta = M(\hat{A}) - A \tag{4.9}$$

називається ***зміщенням оцінки.***

Не можна плутати похибку оцінки з її зміщенням. Похибка дорівнює $\hat{A} - A$ і є випадковою величиною, а зміщення — величина стала.

Другою важливою властивістю оцінки є її ***обґрунтованість.***

Означення 4.3. *Вибіркова оцінка $\hat{A}$ параметрів A називається* ***обґрунтованою,*** *якщо для довільного $\varepsilon > 0$ справджується співвідношення*

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ \left| \hat{A} - A \right| < \varepsilon \right\} = 1. \tag{4.10}$$

Іншими словами, оцінка обґрунтована, коли вона базується на законі великих чисел. Обґрунтованість оцінки означає, що чим більші будуються вибірки, тим більша ймовірність того, що похибка оцінки не перевищуватиме достатньо малого значення ε.

Для обґрунтованості оцінок, здобутих на основі 1МНК за умови, що X детермінована, має виконуватися співвідношення:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} X' X = Q,$$

де Q — додатно визначена матриця.

Третя властивість оцінок $\hat{A}$ — ***ефективність*** — пов'язана зі значенням дисперсії оцінок.

Тут доречно сформулювати важливу теорему Гаусса—Маркова, що стосується ефективності оцінки 1МНК.

• **Теорема Гаусса—Маркова.** Функція оцінювання за методом 1МНК покомпонентно мінімізує дисперсію всіх лінійних незміщених функцій вектора оцінок $\hat{A}$:

$$\sigma^2_{\hat{A}} \le \sigma^2_{A^*},$$

де $\sigma^2_{\hat{A}}$ — дисперсія оцінок $\hat{A}$, визначених згідно з 1МНК; $\sigma^2_{A^*}$ — дисперсія оцінок A^*, визначених іншими методами.

Отже, функція оцінювання 1МНК $\hat{A}$ у класичній лінійній моделі є найкращою (мінімально дисперсійною) лінійною незміщеною функцією оцінювання. (Цю властивість називають BLUE.)

З означення дисперсії випливає, що $\text{var}(\hat{A})$ — параметр розподілу випадкової величини $\hat{A}$, яка є мірою розсіювання її значень навколо математичного сподівання.

Означення 4.4. *Вибіркову оцінку $\hat{A}$ параметрів A називають **ефективною**, коли дисперсія цієї оцінки є найменшою в класі незміщених оцінок.*

Нехай $\hat{A}$ — ефективна оцінка параметрів A, а A^* — деяка інша оцінка цих параметрів. Тоді

$$\frac{\text{var}(\hat{A})}{\text{var}(A^*)} = k, \tag{4.11}$$

причому саме це відношення називається ***ефективністю оцінки***. Очевидно, що $0 < k \le 1$; чим ближче k до одиниці, тим ефективнішою є оцінка. Цікаво, що відношення може бути функцією сукупності спостережень n, причому зі збільшенням n може швидко змінюватися.

Означення 4.5. *Незміщену оцінку $\hat{A}$, дисперсія якої при $n \to \infty$ задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{var}(\hat{A})}{\operatorname{var}(A^*)} = 1$ для всіх A^*, називають* ***асимптотично ефективною*** *оцінкою.*

Пошук ефективних оцінок параметрів — досить складна справа. Проте оскільки дисперсія середнього арифметичного значення оцінки, яка має m вимірів, дорівнює $\frac{\operatorname{var}(\hat{A})}{m}$, то можна довести, що $M(\hat{A})$ дає ефективну оцінку параметрів A.

Ще одна важлива властивість оцінок — їх *інваріантність.*

Означення 4.6. *Оцінку $\hat{A}$ параметрів A називають* ***інваріантною,*** *якщо для довільно заданої функції g оцінка параметрів функції $g(A)$ подається у вигляді $g(\hat{A})$.*

Іншими словами, інваріантність оцінки базується на тому, що в разі перетворення параметрів A за допомогою деякої функції g таке саме перетворення, виконане щодо $\hat{A}$, дає оцінку $g(\hat{A})$ нового параметра.

Інваріантність оцінок має велике практичне значення. Наприклад, якщо відома оцінка дисперсії генеральної сукупності і вона інваріантна, то оцінку середньоквадратичного відхилення можна дістати, добувши квадратний корінь із оцінки дисперсії вибіркової сукупності спостережень. Коефіцієнт кореляції R є інваріантною оцінкою до коефіцієнта детермінації R^2.

Розглянемо ще один приклад побудови економетричної моделі методом найменших квадратів, використавши дві специфікації моделі, які базуються на адитивному та мультиплікативному законах формування економічних показників.

✓***Приклад 4.2.*** Визначити кількісну залежність між прибутком фірми і основними видами ресурсів, які вона вкладає у свою господарську діяльність:

- інвестиції;
- основні виробничі фонди;
- фонд робочого часу.

Для побудови економетричної моделі використаємо статистичну інформацію, що наведена в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Місяць	Прибуток Y, гр. од.	Інвестиції X_1, гр. од	ОВФ X_2, гр. од.	ФРЧ X_3, людино–днів
1-й	39	62	22	104
2-й	41	65	25	109
3-й	38	57	17	99
4-й	42	66	27	114
5-й	44	69	28	116
6-й	49	58	20	110
7-й	44	72	32	119
8-й	45	70	30	116
9-й	48	75	34	114
10-й	51	79	35	120
11-й	49	77	33	124
12-й	54	82	37	119
13-й	55	80	37	129
14-й	57	75	39	129
15-й	56	83	38	132
16-й	54	81	36	130
17-й	59	87	40	124
18-й	61	92	42	134
19-й	62	95	43	137
20-й	64	97	42	139

1. Ідентифікуємо змінні моделі.

Y — вектор прибутку, залежна або пояснювана змінна;

X_1 — вектор інвестицій (незалежна або пояснювальна змінна);

X_2 — вектор основних виробничих фондів, незалежна або пояснювальна змінна;

X_3 — вектор фонду робочого часу (незалежна або пояснювальна змінна).

2. Специфікуємо економетричну модель.

У лінійній формі:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + u;$$

у степеневій формі:

$$Y = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} u\ .$$

У цих функціях a_j, $j = \overline{0,3}$ — параметри економетричної моделі; u — стохастична або випадкова складова, яка визначає вплив усіх випадкових чинників на прибуток.

Подамо степеневу функцію в лінійно-логарифмічній формі:

$$\mathrm{Ln}Y = \ln a_0 + a_1 \ln X_1 + a_2 \ln X_2 + a_3 \ln X_3 + \ln u.$$

Запишемо розрахункові економетричні моделі на основі заданої статистичної інформації:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_1 + \hat{a}_2 X_2 + \hat{a}_3 X_3 ,$$

$$\ln \hat{Y} = \ln \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \ln X_1 + \hat{a}_2 \ln X_2 + \hat{a}_3 \ln X_3 .$$

У цих розрахункових моделях $\hat{a}_j$, $j = \overline{0,3}$ — оцінки параметрів моделі за сукупністю спостережень.

Вектор стохастичної складової визначається як різниця між векторами фактичного і розрахункового прибутку залежної змінної (надалі послуговуватимемося терміном «залишки»):

$$u = Y - \hat{Y}.$$

3. Оцінимо параметри цих економетричних моделей методом найменших квадратів, матричний оператор якого $\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y$.

Запишемо матрицю пояснювальних змінних:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 62 & 22 & 104 \\ 1 & 65 & 25 & 109 \\ 1 & 57 & 17 & 99 \\ 1 & 66 & 27 & 114 \\ 1 & 69 & 28 & 116 \\ 1 & 58 & 20 & 110 \\ 1 & 72 & 32 & 119 \\ 1 & 70 & 30 & 116 \\ 1 & 75 & 34 & 114 \\ 1 & 79 & 35 & 120 \\ 1 & 77 & 33 & 124 \\ 1 & 82 & 37 & 119 \\ 1 & 80 & 37 & 129 \\ 1 & 75 & 39 & 129 \\ 1 & 83 & 38 & 132 \\ 1 & 81 & 36 & 130 \\ 1 & 87 & 40 & 124 \\ 1 & 92 & 42 & 134 \\ 1 & 95 & 43 & 137 \\ 1 & 97 & 42 & 139 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю X:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 62 & 65 & 57 & 66 & 69 & 58 & 72 & 70 & 75 & 79 & 77 & 82 & 80 & 75 & 83 & 81 & 87 & 92 & 95 & 97 \\ 22 & 25 & 17 & 27 & 28 & 20 & 32 & 30 & 34 & 35 & 33 & 37 & 37 & 39 & 38 & 36 & 40 & 42 & 43 & 42 \\ 104 & 109 & 99 & 114 & 116 & 110 & 119 & 116 & 114 & 120 & 124 & 119 & 129 & 129 & 132 & 130 & 124 & 134 & 137 & 139 \end{pmatrix}.$$

Виконавши множення матриць $X'X$, дістанемо:

$$X'X = \begin{pmatrix} 20 & 1522 & 657 & 2418 \\ 1522 & 118344 & 51584 & 186283 \\ 657 & 51584 & 22681 & 80898 \\ 2418 & 186203 & 80898 & 294628 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю, обернену до $X'X$:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 19{,}42461 & -0{,}05314 & 0{,}3391671 & -0{,}21896 \\ -0{,}05314 & 0{,}004713 & -0{,}005385 & -0{,}00106 \\ 0{,}339167 & -0{,}00538 & 0{,}0124069 & -0{,}00279 \\ -0{,}21896 & -0{,}00106 & -0{,}002787 & 0{,}003238 \end{pmatrix}.$$

Помножимо $X'Y$:

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1012 \\ 78578 \\ 34271 \\ 123859 \end{pmatrix}.$$

Запишемо вектор $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -15{,}008 \\ 0{,}283307 \\ 0{,}06145 \\ 0{,}347641 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{matrix}.$$

Отже, дістанемо економетричну модель прибутку в лінійній формі:

$$\hat{Y} = -15 + 0{,}28X_1 + 0{,}06X_2 + 0{,}35X_3.$$

Для побудови степеневої форми моделі прологарифмуємо вихідні дані:

$\ln Y$	$\ln X_1$	$\ln X_2$	$\ln X_3$
3,663562	4,127134	3,091042	4,644391
3,713572	4,174387	3,218876	4,691348
3,637586	4,043051	2,833213	4,59512
3,73767	4,189655	3,295837	4,736198
3,78419	4,234107	3,332205	4,75359
3,89182	4,060443	2,995732	4,70048
3,78419	4,276666	3,465736	4,779123
3,806662	4,248495	3,401197	4,75359
3,871201	4,317488	3,526361	4,736198
3,931826	4,369448	3,555348	4,787492
3,89182	4,343805	3,496508	4,820282
3,988984	4,406719	3,610918	4,779123
4,007333	4,382027	3,610918	4,859812
4,043051	4,317488	3,663562	4,859812
4,025352	4,418841	3,637586	4,882802
3,988984	4,394449	3,583519	4,867534
4,077537	4,465908	3,688879	4,820282
4,110874	4,521789	3,73767	4,89784
4,127134	4,553877	3,7612	4,919981
4.158883	4,574711	3.73767	4,934474

Скориставшись функцією програми «Excel» «ЛИНЕЙН», знайдемо оцінки параметрів:

$\ln \hat{a}_0$ 0,044037;

$\hat{a}_1$ 0,495475;

$\hat{a}_2$ – 0,10808;

$\hat{a}_3$ 1,099585;

$\operatorname{anti}\ln \hat{a}_0$ 1,045.

Отже, економетрична модель прибутку у степеневій формі набирає вигляду $\hat{Y} = 1{,}045 X_1^{0{,}495} X_2^{-0{,}108} X_3^{1{,}10}$.

Як бачимо, економетрична модель прибутку в лінійній формі відрізняється від моделі у степеневій формі. Ця різниця полягає передусім у тому, що оцінки параметрів в обох моделях мають різний економічний зміст.

У лінійній моделі оцінки параметрів $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ характеризують граничний приріст прибутку залежно від граничного приросту кожного ресурсу на одиницю (коли решта — сталі) і в тих одиницях, в яких вони подаються у вихідній інформації.

У степеневій моделі оцінки параметрів $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ характеризують кількісний зв'язок між прибутком та відповідно кожним ресурсом у відносному (відсотковому) виразі — еластичність. Тому їх потрібно тлумачити так: якщо інвестиції зростуть на 1 %, а основні виробничі фонди і фонд робочого часу не зміняться, то прибуток зросте на 0,495 % $(\hat{a}_1 = 0{,}495)$; якщо основні виробничі фонди зростуть на 1 %, а решта ресурсів буде сталою, то прибуток зменшиться на 0,108 % $(\hat{a}_2 = -0{,}108)$; і, нарешті, якщо фонд робочого часу зросте на 1 %, і решта ресурсів буде сталою, то прибуток зросте на 1,1 % $(\hat{a}_3 = 1{,}1)$.

Зміну напряму взаємозв'язку між прибутком та основними виробничими фондами у степеневій моделі можна пояснити особливостями статистичної інформації (можлива мультиколінеарність, автокореляція, про які йтиметься далі).

4.6. Коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі

За допомогою коваріаційної матриці розраховуються основні показники випадкового розсіювання оцінок $\hat{a}_j$ навколо відповідних істинних значень параметрів, що аналізуються, а також характеристики взаємозв'язків отриманих оцінок.

У класичній регресійній моделі $Y = XA + u$; вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ і залежний від нього вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ є випадковими змінними. До оператора оцінювання $\hat{A}$ входить вектор $Y\left(\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y\right)$, а отже, оператор $\hat{A}$ також можна вважати випадковою функцією оцінювання параметрів моделі.

Відомо, що для характеристики випадкових змінних $\hat{a}_j$ поряд із математичним сподіванням застосовуються також дисперсія $\sigma^2_{\hat{a}_j}$ і коваріація $\sigma_{\hat{a}_j \hat{a}_k}$ $(j \neq k)$. Істинні (справжні) значення цих параметрів класичної економетричної моделі утворюють ***дисперсійно-коваріаційну матрицю***

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{a_1}^2 & \sigma_{a_1a_2} & \dots & \sigma_{a_1a_j} & \dots & \sigma_{a_1a_m} \\ \sigma_{a_2a_1} & \sigma_{a_2}^2 & \dots & \sigma_{a_2a_j} & \dots & \sigma_{a_2a_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{a_ja_1} & \sigma_{a_ja_2} & \dots & \sigma_{a_j}^2 & \dots & \sigma_{a_ja_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{a_ma_1} & \sigma_{a_ma_2} & \dots & \sigma_{a_ma_j} & \dots & \sigma_{a_m}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Оцінки коваріаційної матриці $\operatorname{cov}(\hat{A}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1}$ використовуються для знаходження стандартних похибок та обчислення довірчих інтервалів оцінок параметрів $\hat{a}_j$. Вони використовуються й під час перевірки їхньої статистичної значущості.

На головній діагоналі матриці $\operatorname{cov}(\hat{A})$ містяться оцінки дисперсій $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2$ j-ї оцінки параметрів, що ж до елементів $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_k}$ $(j \neq k)$, які розміщені поза головною діагоналлю, то вони є оцінками коваріації між $\hat{a}_j$ і $\hat{a}_k$.

Отже,

$$\hat{\sigma}_{\hat{A}_j}^2 \approx \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_2} & \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_j} & \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_m} \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2 & \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_j} & \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_2} & \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2 & \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_2} & \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_j} & \dots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

де $\hat{\sigma}_u^2$ — незміщена оцінка дисперсії залишків;

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{u'u}{n-m}.$$

Зауважимо, що матриця коваріації оцінок параметрів моделі характеризує також ступінь їх випадкового розсіювання, який обчислюється, як значення детермінанта коваріаційної матриці $\operatorname{cov}(A)$.

Детермінант коваріаційної матриці $\det(\operatorname{cov}(\hat{A}))$ є так званою ***узагальненою дисперсією***, яка кількісно характеризує ступінь випадкового розсіювання значень векторної випадкової величини навколо свого середнього у відповідному багатовимірному просторі:

$$D_{уз}(\hat{A}) = \det(\mathrm{cov}(\hat{A})) . \qquad (4.14)$$

Часто використовується й інша характеристика цього випадкового розсіювання значень багатовимірної випадкової величини — ***слід коваріаційної матриці*** tr:

$$\mathrm{tr}(\mathrm{cov}(\hat{A})) = \sigma^2_{\hat{a}_1} + \sigma^2_{\hat{a}_2} + \sigma^2_{\hat{a}_3} + ... + \sigma^2_{\hat{a}_m} . \qquad (4.15)$$

Виходячи із додатної визначеності матриці $\mathrm{cov}(\hat{A})$ і змісту діагональних елементів $\sigma^2_{\hat{a}_j}$, можна стверджувати, що величини, які визначені співвідношеннями (4.14) і (4.15), завжди додатні. Чим більше значення знайдених характеристик (детермінанта, сліду дисперсійно-кореляційної матриці), тим більша загальна варіація оцінок параметрів моделі).

Ступінь тісноти взаємозв'язку між окремими оцінками параметрів моделі $\hat{a}_k$ і $\hat{a}_j$ вектора $\hat{A}$ краще визначати на основі коефіцієнта кореляції, який, у свою чергу, визначається через елементи коваріаційної матриці $\mathrm{cov}(\hat{A})$:

$$r_{kj} = \frac{-\sigma_{\hat{a}_k \hat{a}_j}}{\sqrt{\sigma_{\hat{a}_{kk}} \cdot \sigma_{\hat{a}_{jj}}}} . \qquad (4.16)$$

Усе це говорить про те, що коваріаційна матриця вектора оцінок параметрів моделей містить досить важливу інформацію про їхню якість.

Незміщена оцінка дисперсії залишків розраховується так:

$$\hat{\sigma}^2_u = \frac{u'u}{n-m} , \qquad (4.17)$$

де n — кількість спостережень; m — кількість змінних у моделі.

Оскільки вектор залишків $u = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{A}$, то добуток векторів $u'u$ можна записати так:

$$u'u = Y'Y - \hat{A}'X'Y.$$

Звідси маємо альтернативну форму запису дисперсії залишків:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{Y'Y - \hat{A}'X'Y}{n-m}.$$

Позначимо (k, j)-й елемент матриці $(X'X)^{-1}$ символом c_{kj}, тоді j-й елемент по головній діагоналі матриці $\operatorname{cov}(\hat{A})$ обчислюється за формулою:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{jj} \; (j = \overline{1,m}). \tag{4.18}$$

Коваріації $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_k}$, що містяться за межами головної діагоналі, відповідно такі:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_k} = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{kj}. \tag{4.19}$$

✓***Приклад 4.3.*** Для економетричної моделі $Y = 8{,}8 + 0{,}2X_1 + 6{,}97X_2 + u$, (приклад 4.1) обчислимо коваріаційну матрицю $\left\{\operatorname{cov}(\hat{A})\right\}$.

Отже, маємо:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 8{,}8 \\ 0{,}2 \\ 6{,}97 \end{pmatrix}; \quad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}314 & -0{,}0017 & -0{,}0446 \\ -0{,}00017 & 0{,}00003 & -0{,}00012 \\ -0{,}0446 & -0{,}00012 & 0{,}0165 \end{pmatrix};$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1496 \\ 520090 \\ 8367{,}9 \end{pmatrix};$$

$n = 16$; $m = 2$.

Розв'язання. 1. Обчислимо незміщену оцінку дисперсії залишків $\hat{\sigma}_u^2$, скориставшись співвідношенням:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{Y'Y - \hat{A}'X'Y}{n-m};$$

$$Y'Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 22^2 + 34^2 + \ldots + 197^2 = 176394;$$

$$\hat{A}'X'Y = (8{,}8 \quad 0{,}2 \quad 6{,}97)\begin{pmatrix} 1496 \\ 520090 \\ 8367{,}9 \end{pmatrix} =$$

$$= 13156 + 104018 + 58324{,}0 = 175498{,}0;$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{176394 - 175498}{16 - 3} = \frac{896}{13} = 68{,}92\,.$$

2. Визначимо дисперсії оцінок $\hat{\sigma}_{\hat{a}_i}^2$:

$$\text{var}\,(\hat{a}_1) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = \hat{\sigma}_u^2 c_{11} = 68{,}92 \cdot 0{,}314 = 21{,}64;$$

$$\text{var}\,(\hat{a}_2) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2 = \hat{\sigma}_u^2 c_{22} = 68{,}92 \cdot 0{,}00003 = 0{,}00207;$$

$$\text{var}\,(\hat{a}_3) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_3}^2 = \hat{\sigma}_u^2 c_{33} = 68{,}92 \cdot 0{,}0165 = 1{,}137.$$

3. Обчислимо коваріації відповідних оцінок параметрів:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_2} = \hat{\sigma}_u^2 c_{12} = 68{,}92 \cdot (-0{,}00017) = -0{,}0118;$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_3} = \hat{\sigma}_u^2 c_{13} = 68{,}92 \cdot (-0{,}0446) = -3{,}0738;$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_3} = \hat{\sigma}_u^2 c_{23} = 68{,}92 \cdot (-0{,}00012) = -0{,}00827.$$

Знак «мінус» перед оцінками коваріацій $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_k}$ указує на те, що зі збільшенням однієї оцінки параметрів інша зменшується в середньому і навпаки.

Отже, дістанемо дисперсійно-коваріаційну матрицю

$$\text{cov}\,(\hat{A}) = \begin{pmatrix} 21{,}64 & -0{,}0118 & -3{,}0738 \\ -0{,}0118 & 0{,}00207 & -0{,}00827 \\ -3{,}0738 & -0{,}00827 & 1{,}137 \end{pmatrix}.$$

4. Запишемо стандартні похибки оцінок параметрів моделі:

$$S_{\hat{a}_i} = \sqrt{\text{cov}\,(\hat{a}_i)}\,;$$

$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{21{,}64} = 4{,}65\,;$$

$$S_{\hat{a}_2} = \sqrt{0{,}00207} = 0{,}0455 \approx 0{,}046\,;$$

$$S_{\hat{a}_3} = \sqrt{1{,}137} = 1{,}066\,.$$

Стандартні похибки характеризують середні лінійні коливання оцінок параметрів моделі навколо свого математичного сподівання. Чим менші ці похибки, тим стійкіші оцінки параметрів моделі. Остаточні висновки стосовно стійкості оцінок можна зробити лише тоді, коли порівняти її з абсолютними значеннями оцінок параметрів моделі.

Порівняємо кожну стандартну похибку $S_{\hat{a}_i}$ з відповідним числовим значенням оцінки параметра, тобто знайдемо відношення $\dfrac{S_{\hat{a}_i}}{|\hat{a}_i|}$:

$$\frac{S_{\hat{a}_1}}{|\hat{a}_1|}\cdot 100 = \frac{4{,}65}{8{,}8}\cdot 100 = 52{,}8\ \%;$$

$$\frac{S_{\hat{a}_2}}{|\hat{a}_2|}\cdot 100 = \frac{0{,}046}{0{,}2}\cdot 100 = 23\ \%;$$

$$\frac{S_{\hat{a}_3}}{|\hat{a}_3|}\cdot 100 = \frac{1{,}066}{6{,}97}\cdot 100 = 15\ \%.$$

Отже, стандартні похибки оцінок параметрів щодо рівня самих оцінок становлять відповідно 52,8 %, 23 % і 15 %, а це свідчить про зміщеність оцінок.

Це означає, що залишки можуть мати систематичну складову, яка зумовлюється неточною специфікацією моделі. Наприклад, не всі основні чинники, що впливають на тижневі витрати, пов'язані з харчуванням (скажімо, ціни на продукти харчування) внесено до моделі.

4.7. Прогноз залежної змінної

Економетричне моделювання зв'язку між економічними показниками завжди складаєтьмя з трьох етапів:

1) побудови економетричної моделі;

2) перевірки статистичної значущості моделі та оцінювання її параметрів;

3) прогнозування на основі моделі.

Використаємо модель (4.1) для знаходження прогнозного значення y_0, яке відповідатиме очікуваним значенням матриці незалежних змінних X_0.

Розглянемо спочатку точковий прогноз і припустимо, що ми визначили його як деяку лінійну функцію від y_i:

$$\hat{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i, \tag{4.20}$$

де i — номер спостереження ($i=\overline{1,n}$); c_i — вагові коефіцієнти значень y_i (їх потрібно вибрати так, щоб значення y_0 було найкращим лінійним незміщеним прогнозом).

Оскільки $Y = XA + u$, то незміщена точкова оцінка прогнозу

$$M[y_0(X_0)] = X_0 A, \tag{4.21}$$

де X_0 — матриця очікуваних значень пояснювальних змінних.

Задаючи X_0, підставимо значення цього вектора в побудовану економетричну модель

$$\hat{y}_0 = X_0' \hat{A}. \tag{4.22}$$

Щоб дістати інтервальний прогноз, необхідно розрахувати середню похибку прогнозу.

Вона зростає з віддаленням прогнозного значення x_{0j} від відповідного середнього значення вибірки.

Розрахуємо спочатку дисперсію прогнозу.

У матричному вигляді дисперсія похибки прогнозу подається так:

$$\sigma^2_{\text{пр}} = \sigma^2_u X_0'(X'X)^{-1} X_0. \tag{4.23}$$

Середньоквадратична похибка прогнозу

$$s_{\hat{y}\ \text{пр}} = \hat{\sigma}_u \sqrt{X_0'(X'X)^{-1} X_0}. \tag{4.24}$$

Довірчий інтервал для прогнозних значень

$$\begin{gathered} \hat{y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{X_0'(X'X)^{-1} X_0} \le M(y_0(X_0)) \le \\ \le \hat{y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{X_0'(X'X)^{-1} X_0}, \end{gathered} \tag{4.25}$$

де t_α — критичне значення t-критерію при $n - m$ ступенях свободи і рівні значущості α.

Зауважимо, що $\hat{y}_0 = X_0 \hat{A}$ є точковою оцінкою як математичного сподівання прогнозного значення y_0, так і його індивідуального значення y_0 для відповідних незалежних змінних X_0, що лежить за межами базового періоду.

Для визначення інтервального прогнозу індивідуального значення $\hat{y}_0$ необхідно знайти відповідну стандартну похибку:

$$\begin{gathered} \hat{\sigma}^2_{пр(i)} = \hat{\sigma}^2_u + \hat{\sigma}^2_{\text{пр}} = \hat{\sigma}^2_u + \hat{\sigma}^2_{пр} X_0'(X'X)^{-1} X_0 = \\ = \hat{\sigma}^2_u (1 + X_0'(X'X)^{-1} X_0). \end{gathered}$$

Отже, інтервальний прогноз індивідуального значення визначається як

$$\hat{y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_{\text{пр}(i)} \le \hat{y}_0 \le \hat{y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_{\text{пр}(i)}$$

або

$$\begin{aligned} &\hat{y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X_0'(X'X)^{-1}X_0} \le \hat{y}_0 \le \\ &\le \hat{y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X_0'(X'X)^{-1}X_0}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

✓***Приклад 4.4.*** Необхідно розрахувати для економетричної моделі (приклад 4.1) точковий та інтервальний прогнози математичого сподівання та індивідуального значення залежної змінної, коли для прогнозного періоду заданий вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. 1. Визначимо точкові прогнозні значення залежної змінної, коли

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix}: \text{то } y_0 = 8{,}8 + 0{,}2x_1 + 6{,}97x_2 = 8{,}8 + 0{,}2 \cdot 500 + 6{,}97 \cdot 6 = 150{,}62.$$

Отже, y_0 можна інтерпретувати як точкову оцінку прогнозного значення математичного сподівання та індивідуального значення витрат на харчування, коли відомі загальні витрати $x_1 = 500$ і розмір сім'ї становить $x_2 = 6$.

2. Визначаємо прогнозний інтервал математичного сподівання $M(\hat{y}_0)$:

$$\sigma_{np}^2 = \sigma_u^2 X_0'(X'X)^{-1}X_0 = X_0' \operatorname{var}(\hat{A})X_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 500 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21{,}64 & -0{,}0118 & -3{,}0738 \\ -0{,}0118 & 0{,}00207 & -0{,}00827 \\ -3{,}0738 & -0{,}00827 & 1{,}137 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2{,}703 & 0{,}9736 & -0{,}3868 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} = 481{,}777.$$

Стандартна похибка прогнозу математичного сподівання $M(\hat{y}_0)$

$$\sigma_{пр} = \sqrt{\sigma_{пр}^2} = \sqrt{481{,}777} = 21{,}95\,.$$

3. Знайдемо інтервальний прогноз для $M(\hat{y}_0)$. При цьому нехай $\alpha = 0{,}05$ і $n - m = 13$; тоді $t_{0{,}05} = 2{,}160$.

Отже,

$$\hat{y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_{пр} \le M(y_0) \le \hat{y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_{пр}$$

і

$$150{,}62 - 2{,}160 \cdot 21{,}95 \le M(y_0) \le 150{,}62 + 2{,}160 \cdot 21{,}95;$$

$$150{,}62 - 47{,}412 \le M(y_0) \le 150{,}62 + 47{,}412;$$

$$103{,}208 \le M(y_0) \le 198{,}032.$$

4. Обчислимо дисперсію і стандартну похибку прогнозу індивідуального значення y_0:

$$\sigma_{пр(і)}^2 = \sigma_п^2 + \sigma_и^2 = 481{,}777 + 68{,}92 = 550{,}697\,.$$

Стандартна похибка прогнозу індивідуального значення y_0 така:

$$\sigma_{пр(і)} = \sqrt{\sigma_{пр(і)}^2} = \sqrt{550{,}697} = 23{,}467\,.$$

5. Визначимо інтервальний прогноз індивідуального значення y_0:

$$\hat{y}_0 - t_\alpha \sigma_{пр(і)} \le y_0 \le \hat{y}_0 + t_\alpha \sigma_{пр(і)}\,;$$

$$150{,}62 - 2{,}160 \cdot 23{,}467 \le y_0 \le 150{,}62 + 2{,}160 \cdot 23{,}467;$$

$$150{,}62 - 50{,}689 \le y_0 \le 150{,}62 + 50{,}689;$$

$$99{,}931 \le y_0 \le 201{,}309.$$

Значення t_α знаходимо в таблиці при $\alpha = 0{,}05$ і ступені свободи $\gamma = 13$. У такому разі $t_{0{,}05} = 2{,}160$.

Отже, з імовірністю $p = 0{,}95$ ($\alpha = 0{,}05$) прогноз математичного сподівання $M(y_0)$ потрапляє в інтервал [103,208; 198,032], а прогноз індивідуального значення — в інтервал [99,931; 201,309].

Можна також сказати, що з імовірністю $p = 0{,}95$ знайдені прогнози покривають $M(y_0)$ і y_0, коли взяти досить велику кількість вибірок і для кожної з них обчислити інтервальні прогнози.

Економічна інтерпретація: якщо у прогнозному періоді загальні витрати мають рівень 500 одиниць, а сім'я складається з шести осіб, то середні витрати на харчування потрапляють в інтервал

$$103{,}208 \le M(y_0) \le 198{,}032.$$

Водночас окреме (індивідуальне) значення цих витрат міститиметься в ширшому інтервалі:

$$99{,}931 \le y_0 \le 201{,}309.$$

4.8. Оцінювання прогнозних можливостей моделі

Прогнозування залежної змінної на основі економетричної моделі потребує оцінювання прогнозних можливостей моделі.

Для такого оцінювання застосовують систему характеристик, які можна поділити на три групи:

- абсолютні;
- порівняльні;
- якісні.

Усі три групи характеристик належать до так званих ***похибок прогнозу залежної змінної***.

Абсолютні похибки прогнозу

1. *M.E.* — абсолютний показник зміщення прогнозу:

$$M.E. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i),$$

де n — кількість спостережень $(i = \overline{1,n})$; $y_i, \hat{y}_i$ — відповідно фактичні та розрахункові значення залежної змінної.

2. *M.A.E.* — середня абсолютна похибка прогнозу:

$$M.A.E. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i|.$$

3. *M.S.E.* — середньоквадратична похибка прогнозу:

$$M.S.E. = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2\right]^{0,5}.$$

M.E., *M.A.E.*, *M.S.E.* — перші літери відповідних англійських назв показників, що використовуються у світовій економетричній літературі.

Наведені щойно абсолютні показники якості прогнозу залежать від кількісного рівня залежної змінної, а тому не можуть бути вичерпними характеристиками якості прогнозу. При цьому показник зміщення прогнозу істотно залежить від розміру сукупності спостережень, для якої перевіряються прогнозні можливості побудованої економетричної моделі. Чим більша сукупність спостережень, тим більше впевненості щодо наближення *M.E.* до нуля, а отже, щодо відсутності зміщення прогнозу.

Розглянемо порівняльні показники оцінювання якості прогнозу.

1. *M.P.E.* — відносний показник зміщення прогнозу:

$$M.P.E. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right)\cdot 100.$$

2. *M.A.P.E.* — середня відносна похибка прогнозу:

$$M.A.P.E. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}\cdot 100.$$

$К_Т$ — коефіцієнт невідповідності Тейла:

$$К_Т = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{n}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{y}_i^2}{n}}}.$$

Чим ближчі *M.P.E.* та коефіцієнт невідповідності Тейла до нуля, тим кращі прогнозні якості моделі. Рівень відносного показника *M.A.P.E.* та його тлумачення подано в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

№ з/п	Рівень *M.A.P.E*	Висновки щодо прогнозу
1	Менше як 10 %	Висока якість
2	10—20 %	Досить добра якість
3	21—50 %	Задовільна якість
4	Понад 50 %	Незадовільна якість

До якісних оцінок точності прогнозу можна віднести такі показники, що дають можливість провести певний аналіз похибок прогнозу, які трапилися раніше, розкласти їх на окремі складові. Такий аналіз особливо важливий для тих змінних, які можуть циклічно змінюватися, коли необхідно прогнозувати не лише загальний напрям розвитку, а й поворотні точки циклу. У цьому разі середньоквадратична похибка прогнозу дає змогу дослідити:

- частку зміщеності (*B.P.*);
- частку дисперсії (*V.P.*);
- частку коваріації (*C.P.*).

Очевидно, що в сумі ці *частки мають дорівнювати одиниці.*

Подамо формули розрахунку кожної складової похибки прогнозу.

$$V.P. = \frac{(\sigma_{\text{пр}} - S_v)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}; \quad B.P. = \frac{(y_{\text{пр}} - y)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2};$$

$$C.P. = \frac{2(1 - R)\sigma_{\text{пр}} * S_y}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}.$$

У цих співвідношеннях $\sigma_{\text{пр}}$ — стандартна похибка прогнозу; S_y — стандартна похибка фактичних значень залежної змінної; R — коефіцієнт кореляції; $y_{\text{пр}}$ — прогнозне значення залежної змінної.

Частка зміщеності показує наявність похибки в оцінці основної тенденції, тобто ***B.P.* > 0** лише тоді, коли середнє арифметичне значення прогнозів відрізняється від середнього арифметичного фактичних даних.

Частка дисперсії характеризує ступінь збігу стандартних відхилень прогнозу і фактичних значень, а отже, *V.P.* = 0 в тому разі, коли дисперсії однакові. Звідси доходимо висновку, що цей показник відбиває відповідність ступеня нестійкості прогнозних значень фактичним даним.

Частка коваріації свідчить про ступінь взаємозв'язку між прогнозними і фактичними значеннями. Аналізуючи цей показник можна виокремити ті випадки, коли прогноз задовільний за першими двома показниками (*B.P.* і *B.P.*), але за наявності коваріації характеризується взаємною компенсацію похибок для різних спостережень.

✓*Приклад 4.5.*

Оцінити прогнозні якості економетричної моделі, побудованої у прикладі 4.2.

Розв'язання. 1. Побудуємо економетричну модель на основі 16 спостережень, скориставшись даними табл. 4.2.

$$\bar{Y} = -8{,}188 - 0{,}0195X_1 + 0{,}259X_2 + 0{,}421X_3 .$$

Зауважимо, що ця модель істотно відрізняється від моделі, побудованої на основі 20 спостережень (див. приклад 4.2), а також оцінки її параметрів відрізняються від оцінок розглянутої раніше моделі. Коли сукупність спостережень, як у даному разі, невелика, то зміна її завжди буде досить істотно впливати на зміну рівня оцінок параметрів моделі.

2. Підставивши в дану модель значення пояснювальних змінних за останні чотири місяці, дістанемо прогнозовані значення прибутку на ці місяці і запишемо фактичні:

$$\hat{y}_{17} = 52{,}64; \qquad y_{17} = 59;$$
$$\hat{y}_{18} = 57{,}27; \qquad y_{18} = 61;$$
$$\hat{y}_{19} = 58{,}73; \qquad y_{19} = 62;$$
$$\hat{y}_{20} = 59{,}27; \qquad y_{20} = 64.$$

3. Знайдемо відхилення цих розрахункових значень прибутку від фактичних:

$$u_{17} = y_{17} - \hat{y}_{17} = 6{,}36;$$
$$u_{18} = y_{18} - \hat{y}_{18} = 3{,}76;$$
$$u_{19} = y_{19} - \hat{y}_{19} = 3{,}27;$$
$$u_{20} = y_{20} - \hat{y}_{20} = 4{,}73.$$

Як бачимо, усі значення відхилень (залишків) додатні. Звідси їх модулі та абсолютні значення однакові, а це означає, що збігатимуться *M.E.* і *M.A.E.*, а також *M.P.E.* і *M.A.P.E.*

4. Обчислимо абсолютні та порівняльні характеристики оцінки прогнозних якостей економетричної моделі.

4.1. $M.E. = \dfrac{6{,}36 + 3{,}73 + 3{,}27 + 4{,}73}{4} = 4{,}52;$

4.2. $M.A.E. = 4{,}52;$

4.3. $M.S.E. = \sqrt{\dfrac{6{,}36^2 + 3{,}73^2 + 3{,}27^2 + 4{,}73^2}{4}} = 4{,}67;$

$$4.4.\ M.P.E. = \frac{\left(\frac{6{,}36}{59} + \frac{3{,}73}{61} + \frac{3{,}27}{62} + \frac{4{,}73}{64}\right)\cdot 100}{4} = 7{,}39;$$

$$4.5.\ M.A.P.E. = 7{,}39;$$

4.6.

$$K_T = \frac{\sqrt{\frac{6{,}36^2 + 3{,}73^2 + 3{,}27^2 + 4{,}73^2}{4}}}{\sqrt{\frac{59^2 + 61^2 + 62^2 + 64^2}{4}} + \sqrt{\frac{52{,}64^2 + 57{,}27^2 + 58{,}73^2 + 59{,}27^2}{4}}} = 0{,}039.$$

Аналізуючи здобуті характеристики, доходимо висновку, що побудована економетрична модель буде давати зміщений прогноз, а це означає, що залишки не є випадковими і ними не можна нехтувати, прогнозуючи прибуток за розглянутою моделлю. Зміщеність прогнозу характеризується порівняно великими значеннями похибок *M.E.* та *M.P.E.* Наголосимо, що абсолютне зміщення *M.E.* збігається з абсолютною похибкою прогнозу, а це означає, що точковий прогноз може бути зміщеним в бік збільшення.

Оскільки відносна похибка прогнозу *M.A.P.E.* = 7,39 % (що менше за 10 %) і коефіцієнт Тейла наближається до нуля, економетричну модель можна використовувати для прогнозування, враховуючи зміщення прогнозу.

Зауважимо, що всі розраховані характеристики для оцінювання прогнозних можливостей моделі мають розглядатись системно, тобто робити висновки на основі лише окремих характеристик немає сенсу.

4.9. Побудова економетричної моделі на основі покрокової регресії

Оцінювання параметрів економетричної моделі та її дисперсійний аналіз становлять загальний процес побудови моделі. Поєднанням цих дій було створено альтернативний метод оцінювання параметрів моделі 1МНК, що базується на елементах дисперсійного аналізу.

Згідно з елементарним тлумаченням взаємозв'язку між двома змінними за 1МНК, як правило, акцентують увагу на коефіцієнтах кореляції. При цьому неважко показати, що

$$\hat{a}_1 = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

де r_{yx} — парний коефіцієнт кореляції між y та x; σ_y — середньоквадратичне відхилення залежної змінної; σ_x — середньоквадратичне відхилення незалежної змінної.

Отже, оцінка параметрів моделі прямо пропорційна до коефіцієнта парної кореляції. Аналогічні співвідношення виконуються і в загальному випадку.

А це означає, що оцінити параметри моделі можна через коефіцієнти кореляції: спочатку оцінити тісноту зв'язку між кожною парою змінних, а потім знайти оцінки параметрів економетричної моделі.

Залежність оцінок параметрів економетричної моделі та коефіцієнтів парної кореляції покладено в основу алгоритму покрокової регресії.

Опишемо цей алгоритм.

Крок 1. Усі вихідні дані змінних стандартизують (нормалізують):

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \tag{4.27}$$

де y_i^* — значення нормалізованої залежної змінної; x_{ij}^* — значення нормалізованих пояснювальних змінних; $\bar{x}_j$ — середнє значення j-ї пояснювальної змінної; $\bar{y}$ — середнє значення залежної змінної; σ_y, σ_{x_j} — середньоквадратичні відхилення.

При цьому середні значення $\bar{x}_j^*$ і $\bar{y}^*$ дорівнюють нулю, а дисперсії — одиниці.

Крок 2. Знаходять кореляційну матрицю (матриця парних коефіцієнтів кореляції):

$$r^* = \begin{pmatrix} r_{yy} & r_{yx_1} & r_{yx_2} & r_{yx_3} & \dots & r_{yx_m} \\ r_{x_1y} & r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_my} & r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & r_{x_mx_3} & \dots & r_{x_mx_m} \end{pmatrix}, \tag{4.28}$$

де r_{yx_j} — парні коефіцієнти кореляції між залежною і пояснювальними змінними;

$r_{x_jx_k}$ — парні коефіцієнти кореляції між пояснювальними змінними.

$$r_{yx_j} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_{ij} - \bar{x}_j)}{\sigma_y \ \sigma_{x_j} \cdot (n-1)},$$

або

$$r_{yx_j} = \frac{1}{n-1} y^{*'} x_j^*,$$

де n — кількість спостережень;

$$r_{x_k x_j} = \frac{\sum_i (x_{ik} - \bar{x}_k)(x_{ij} - \bar{x}_j)}{\sigma_{x_k} \cdot \sigma_{x_j} \cdot (n-1)},$$

або

$$r_{x_k x_j} = \frac{1}{n-1} x_k^{*'} x_j^*.$$

Крок 3. Порівнюючи абсолютні значення r_{yx_j}, вибирають $\max\{|r_{yx_j}|\}$. Найбільше $|r_{yx_j}|$ вказує на ту пояснювальну змінну, яка найтісніше пов'язана з y. За допомогою 1МНК знаходять оцінку параметрів цієї моделі:

$$\hat{y}^* = \hat{\beta} x_j^*, \tag{4.29}$$

де $\hat{\beta}$ — оцінка параметрів моделі, яка будується на основі нормалізованих даних.

Крок 4. Серед тих, що залишилися, значень r_{yx_j} вибирають $\max\{|r_{yx_j}|\}$ і в модель вводять наступну незалежну змінну x_l:

$$\hat{y}^* = \hat{\beta}_1 x_j^* + \hat{\beta}_2 x_l^*$$

і т. д.

Якщо немає обмеження на введення в економетричну модель кожної наступної пояснювальної змінної, то обчислення виконуються доти, доки поступово не будуть введені в модель усі змінні.

Сума квадратів залишків така:

$$f(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} u_i^{*2} = \sum_{i=1}^{n} (y_i^* - \hat{y}_i^*)^2.$$

Звідси мінімізації підлягає функція

$$f(\hat{\beta}_j) = \sum_{i=1}^{n}(Y^* - \hat{\beta}_1 X_1^* - \hat{\beta}_2 X_2^* - \hat{\beta}_3 X_3^* - \ldots - \hat{\beta}_m X_m^*)^2 \to \min.$$

Узявши похідну за кожною невідомою оцінкою параметра $\hat{\beta}_j$ цієї функції і прирівнявши всі здобуті похідні до нуля, дістанемо систему нормальних рівнянь.

Система нормальних рівнянь для знаходження параметрів моделі $\hat{\beta}_j$ у загальному вигляді запишеться так:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 r_{x_2x_1} + \hat{\beta}_3 r_{x_3x_1} + \ldots + \beta_m r_{x_mx_1}; \\ r_{yx_2} = \hat{\beta}_2 r_{x_1x_2} + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 r_{x_3x_2} + \ldots + \hat{\beta}_m r_{x_mx_2}; \\ r_{yx_3} = \hat{\beta}_1 r_{x_1x_3} + \hat{\beta}_2 r_{x_2x_3} + \hat{\beta}_3 + \ldots + \hat{\beta}_m r_{x_mx_3}; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{yx_m} = \hat{\beta}_1 r_{x_1x_m} + \hat{\beta}_2 r_{x_2x_m} + \hat{\beta}_3 r_{x_3x_m} + \ldots + \hat{\beta}_m. \end{cases}$$

Позначимо матрицю парних коефіцієнтів кореляції між пояснювальними змінними через r_{xx}, а вектор парних коефіцієнтів кореляції між залежною і пояснювальними змінними — через r_{yx}. Тоді система нормальних рівнянь набере вигляду $r_{xx}\hat{\beta} = r_{yx}$, а оператор оцінювання параметрів запишеться так:

$$\hat{\beta} = r_{xx}^{-1} r_{yx}. \tag{4.30}$$

Оскільки всі змінні нормалізовані, то оцінки параметрів $\hat{\beta}_j$ показують порівняльну силу впливу кожної незалежної змінної на залежну: чим більше за модулем значення оцінки параметра $\hat{\beta}_j$, тим сильніше впливає j-та змінна на результат.

Зв'язок між оцінками параметрів моделі на основі нормалізованих і ненормалізованих змінних набере вигляду:

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= \hat{\beta}_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} \quad (j = \overline{1, m-1}), \\ \hat{a}_0 &= \bar{y} - \sum_j \hat{a}_j \bar{x}_j. \end{aligned} \tag{4.31}$$

✓***Приклад 4.6.*** На основі статистичної інформації, наведеної у табл. 4.2 (приклад 4.2), необхідно побудувати економетричну модель прибутку методом 1МНК, використовуючи алгоритм покрокової регресії.

Розв'язання. Нормалізуємо вихідні дані табл. 4.2 за формулами:

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}.$$

Згідно з цими формулами необхідно мати середні значення змінних та їх стандартні відхилення.

Середні значення:

$$\bar{y} = 50{,}6; \quad \bar{x}_1 = 76{,}1; \quad \bar{x}_2 = 7{,}60; \quad \bar{x}_3 = 120{,}9.$$

Середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma_{\bar{y}} = 7{,}92; \quad \sigma_{x_1} = 11{,}52; \quad \sigma_{x_2} = 7{,}60; \quad \sigma_{x_3} = 10{,}98.$$

Матриці нормалізованих змінних:

$$Y^* = \begin{pmatrix} -1{,}47 \\ -1{,}21 \\ -1{,}59 \\ -1{,}09 \\ -0{,}83 \\ -0{,}20 \\ -0{,}83 \\ -0{,}71 \\ -0{,}33 \\ 0{,}05 \\ -0{,}20 \\ 0{,}43 \\ 0{,}56 \\ 0{,}81 \\ 0{,}68 \\ 0{,}43 \\ 1{,}06 \\ 1{,}31 \\ 1{,}44 \\ 1{,}69 \end{pmatrix}; \quad X^* = \begin{pmatrix} -1{,}22 & -1{,}43 & -1{,}53 \\ -0{,}96 & -1{,}03 & -1{,}08 \\ -1{,}66 & -2{,}08 & -1{,}99 \\ -0{,}88 & -0{,}77 & -0{,}63 \\ -0{,}62 & -0{,}64 & -0{,}45 \\ -1{,}57 & -1{,}69 & -0{,}99 \\ -0{,}36 & -0{,}11 & -0{,}17 \\ -0{,}53 & -0{,}37 & -0{,}45 \\ -0{,}10 & 0{,}15 & -0{,}63 \\ 0{,}25 & 0{,}28 & -0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}02 & 0{,}28 \\ 0{,}51 & 0{,}55 & -0{,}17 \\ 0{,}34 & 0{,}55 & 0{,}74 \\ -0{,}10 & 0{,}81 & 0{,}74 \\ 0{,}60 & 0{,}68 & 1{,}01 \\ 0{,}43 & 0{,}41 & 0{,}83 \\ 0{,}95 & 0{,}94 & 0{,}28 \\ 1{,}38 & 1{,}20 & 1{,}19 \\ 1{,}64 & 1{,}33 & 1{,}47 \\ 1{,}81 & 1{,}20 & 1{,}65 \end{pmatrix}.$$

1. *Побудуємо матрицю парних коефіцієнтів кореляції для всіх змінних моделі:*

$$r^* = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}909 & 0{,}898 & 0{,}913 \\ 0{,}99 & 1 & 0{,}953 & 0{,}913 \\ 0{,}898 & 0{,}953 & 1 & 0{,}924 \\ 0{,}913 & 0{,}913 & 0{,}924 & 1 \end{pmatrix}; \quad r_{yx} = \begin{pmatrix} 0{,}909 \\ 0{,}898 \\ 0{,}913 \end{pmatrix}.$$

Діагональні елементи цієї матриці є коефіцієнтами парної кореляції однойменних змінних, тому вони дорівнюють одиниці. Коефіцієнти кореляції першого рядка та першого стовпця матриці характеризують тісноту зв'язку пояснювальних змінних із залежною.

Решта коефіцієнтів кореляції цієї матриці характеризує тісноту зв'язку пояснювальних змінних між собою попарно.

Оскільки всі коефіцієнти парної кореляції наближаються до одиниці, то можна стверджувати наявність тісного зв'язку між прибутком (залежною змінною) та ресурсами: інвестиціями, основними фондами та фондом робочого часу, а також між кожною парою ресурсів (пояснювальними змінними).

2. Побудуємо економетричну модель прибутку на основі нормалізованих даних, включивши до неї лише фонд робочого часу, оскільки цей показник має найбільший коефіцієнт парної кореляції із залежною змінною (прибутком). У результаті маємо:

$$\hat{Y}^* = \hat{\beta}_3 X_3^*;$$

$$\hat{Y}^* = 0{,}913 X_3^*. \tag{4.32}$$

3. Далі серед двох інших пояснювальних змінних вищий коефіцієнт парної кореляції із залежною змінною має змінна X_1 (інвестиції), тому на наступному кроці введемо її додатково в побудовану парну модель:

$$\hat{Y}^* = \hat{\beta}_3 X_3^* + \hat{\beta}_1 X_1^*;$$

$$\hat{Y}^* = 0{,}501 X_3^* + 0{,}451 X_1^*. \tag{4.33}$$

4. Побудувавши економетричну модель і включивши до неї і третю пояснювальну змінну (основні виробничі фонди), у результаті дістанемо:

$$\hat{Y}^* = \hat{\beta}_3 X_3^* + \hat{\beta}_1 X_1^* + \hat{\beta}_2 X_2^*;$$

$$\hat{Y}^* = 0{,}482 X_3^* + 0{,}412 X_1^* + 0{,}050 X_2^*. \tag{4.34}$$

Оскільки всі змінні цієї моделі нормалізовані (мають однакові одиниці вимірювання — стандартні відхилення), то оцінки параметрів моделі (4.34) характеризують порівняльну силу впливу кожного з чинників на прибуток. Отже, найбільше впливає на прибуток фонд робочого часу X_3, потім — розмір інвестицій X_2, а потім — основні виробничі фонди X_1.

Від даної економетричної моделі на основі нормалізованих змінних легко перейти до моделі, побудованої на основі вихідних даних в абсолютних показниках виміру (див. табл. 4.2):

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}}; \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\beta}_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}}; \quad \hat{\alpha}_3 = \hat{\beta}_3 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_3}};$$

$$\hat{\alpha}_0 = \overline{y} - \sum_{j=1}^{3} \hat{\alpha}_j \overline{x}_j = \overline{y} - \hat{\alpha}_1 \overline{x}_1 - \hat{\alpha}_2 \overline{x}_2 - \hat{\alpha}_3 \overline{x}_3; \qquad (4.35)$$

$$\hat{\alpha}_1 = 0{,}412 \frac{7{,}92}{11{,}52} = 0{,}28; \quad \hat{\alpha}_2 = 0{,}059 \frac{7{,}92}{7{,}60} = 0{,}06;$$

$$\hat{\alpha}_3 = 0{,}482 \frac{7{,}92}{10{,}98} = 0{,}35;$$

$$\hat{\alpha}_0 = 50{,}6 - 0{,}28 \cdot 76{,}1 - 0{,}06 \cdot 32{,}85 - 0{,}35 \cdot 120{,}9 = -15{,}01.$$

Звідси маємо економетричну модель прибутку, яку було побудовано в прикладі 4.2:

$$\hat{Y} = -15{,}01 + 0{,}28X_1 + 0{,}06X_2 + 0{,}35X_3.$$

Побудова економетричної моделі на основі алгоритму покрокової регресії дає змогу дослідникові запобігати певним помилкам специфікації моделі, коли можна обґрунтовано включити до економетричної моделі лише ті показники, які найтісніше пов'язані з результативною ознакою.

4.10. Коефіцієнти детермінації і кореляції

Коефіцієнти детермінації та кореляції є кількісними характеристиками, за якими можна зробити висновок про те, наскільки побудована економетрична модель узгоджується з емпіричною інформацією, на підставі якої її побудовано. Тобто на основі цих коефіцієнтів можна зробити загальні висновки щодо достовірності економетричної моделі.

Щоб дати метод їх розрахунку, необхідно показати, що варіація залежної змінної Y навколо свого вибіркового середнього значення $\overline{y}$ може бути розкладена на дві складові:

1) варіацію розрахункових значень $\hat{Y}$ навколо середнього значення $\overline{y}$;

2) варіацію розрахункових значень $\hat{Y}$ навколо фактичних Y.

Необхідні в цьому разі обчислення зведемо в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Джерело варіації	Сума квадратів відхилень	Ступені свободи	Середнє квадратів відхилень або дисперсія
$x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{A}'X'Y$	$m-1$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m-1} = \dfrac{A'X'Y}{m-1} = \sigma_p^2$
Залишки u	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = u'u$	$n-m$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m} = \dfrac{u'u}{n-m} = \sigma_u^2$
Загальна варіація	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = Y'Y$	$n-1$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \dfrac{Y'Y}{n-1} = \sigma_y^2$

Зауважимо, що всі змінні вектора Y, і матриці X взяті як відхилення від свого середнього значення.

Використаємо середні квадратів відхилень (дисперсії) (див. табл. 4.2) і запишемо формулу для обчислення коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}$$

або в матричному вигляді:

$$R^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{m-1} : \frac{Y'Y}{n-1} = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y} \cdot \frac{n-1}{m-1}. \qquad (4.36)$$

Без урахування ступенів свободи коефіцієнт детермінації подається так:

$$\bar{R}^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y}. \qquad (4.37)$$

Оскільки в (4.36) задано незміщені оцінки дисперсії з урахуванням кількості ступенів свободи, то коефіцієнт детермінації може зменшуватись з уведенням у модель нових пояснювальних змінних. Водночас для коефіцієнта детермінації, обчисленого без урахування поправки на кількість ступенів свободи $(n-1)(n-m)$(4.37), коефіцієнт детермінації зростатиме. Залежність між цими двома коефіцієнтами можна подати так:

$$R^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n-m}\right)\left(1 - \overline{R}^2\right), \qquad (4.38)$$

де R^2 — коефіцієнт детермінації з урахуванням кількості ступенів свободи; $\overline{R}^2$ — коефіцієнт детермінації без урахування кількості ступенів свободи.

Для функції з двома і більше пояснювальними змінними коефіцієнт детермінації може набувати значень на множині $\overline{R}^2 \in\ ]0{,}1[$. Числове значення коефіцієнта детермінації характеризує, **якою мірою варіація залежної змінної Y визначається варіацією незалежних змінних**. Чим ближчий він до одиниці, тим більше варіація залежної змінної визначається варіацією незалежних змінних.

Множинний коефіцієнт кореляції

$$R = \sqrt{R^2}.$$

Він характеризує тісноту зв'язку всіх пояснювальних змінних із залежною.

Для множинного коефіцієнта кореляції з урахуванням і без урахування кількості ступенів свободи характерна така сама зміна числового значення, як і для коефіцієнта детермінації.

Зауважимо, що не варто абсолютизувати високе значення R^2, бо коефіцієнт детермінації може бути близьким до одиниці через те, що досліджувані показники (змінні) в моделі мають чітко виражений часовий тренд, який не стосується причинно-наслідкових зв'язків. В економіці, як правило, такий тренд мають обсягові показники, подані в абсолютних одиницях. Наприклад, валовий внутрішній продукт, валовий національний продукт, дохід, фонд споживання і т. ін. Тому у світовій економічній практиці для побудови економетричної моделі на основі часових рядів найчастіше використовують або відносні показники, або ж відхилення їх від своєї середньої, або абсолютні прирости (перші, другі, треті різниці).

Природно постає запитання про те, яке значення R^2 можна вважати задовільним. Визначимо, що межу статичної значущості R^2 для всіх випадків відразу вказати неможливо. Необхідно звертати увагу на обсяг вибіркової сукупності спостережень, кількість пояснювальних змінних, наявність трендів та змістовну інтерпретацію кількісних характеристик зв'язку.

✓***Приклад 4.7.*** Порівняємо коефіцієнти кореляції і детермінації для різних економетричних моделей (табл. 4.5), побудованих для вихідних даних, які наведено в табл. 4.2 (приклад 4.2), на основі покрокової регресії.

Таблиця 4.5

Економетрична модель	$\overline{R}^2$ без урахування кількості ступенів свободи	R^2 з урахуванням кількості ступенів свободи	$\overline{R}$ без урахування кількості ступенів свободи	R з урахуванням кількості ступенів свободи
$\hat{Y} = -28{,}96 + 0{,}66X_3$	0,833	0,801	0,913	0,895
$\hat{Y} = -20{,}63 + 0{,}23X_1 + 0{,}09X_3$	0,867	0,842	0,931	0,918
$\hat{Y} = -15{,}01 + 0{,}36X_3 + 0{,}28X_1 + 0{,}06X_2$	0,868	0,843	0,932	0,918

Розглядаючи табл. 4.5, доходимо висновку, що з додатковим введенням нової пояснювальної змінної коефіцієнти детермінації $\overline{R}^2$ і кореляції $\overline{R}$ без урахування кількості ступенів свободи збільшуються. Ці самі характеристики з урахуванням кількості ступенів свободи для другої моделі, яка має дві пояснювальні змінні, зростають, а для третьої — з трьома пояснювальними змінними — практично не змінюються. Тобто для третьої моделі в результаті введення додаткової змінної зменшення величини $1 - R^2$ не зможе компенсувати збільшення $(n-1)/(n-m)$. Зауважимо, що коефіцієнти детермінації і кореляції без урахування кількості ступенів свободи мають більші числові значення, ніж з урахуванням цієї кількості.

Коефіцієнти детермінації для кожного з рівнянь показують, на скільки відсотків варіація залежної змінної визначається варіацією пояснювальних змінних. Так, для першого рівняння варіація прибутку на 80,1 % залежить від варіації фонду робочого часу, для другого — на 84,2 % від інвестицій та фонду робочого часу, для третього — на 83,3 % від трьох змінних.

Розглянемо альтернативний спосіб обчислення коефіцієнтів детермінації і кореляції, коли система нормальних рівнянь будується на основі коефіцієнтів парної кореляції r.

У такому разі оцінку параметрів моделі можна записати:

$$\hat{a}_j = -\frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_{x_j}} \cdot \frac{R_{1j}}{R_{11}}, \qquad (4.39)$$

де R_{kj} — алгебраїчне доповнення матриці r до елемента r_{kj}; R_{11} — алгебраїчне доповнення до елемента r_{11} матриці коефіцієнтів парної кореляції.

Сума квадратів відхилень (залишків) також може бути виражена через алгебраїчне доповнення матриці r:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \frac{n\,\hat{\sigma}_y^2 |r|}{R_{11}}, \tag{4.40}$$

де $|r|$ — визначник кореляційної матриці. А це, у свою чергу, дає нам альтернативний вираз для коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_y^2} = 1 - \frac{|r|}{R_{11}}. \tag{4.41}$$

Ще один альтернативний метод розрахунку коефіцієнтів детермінації на основі матриці r можна подати у вигляді

$$R^2 = \hat{\beta}_1 r_{yx_1} + \hat{\beta}_2 r_{yx_2} + \beta_3 r_{yx_3} + \ldots + \hat{\beta}_m r_{yx_m}. \tag{4.42}$$

Звідси коефіцієнт кореляції

$$R = \sqrt{\hat{\beta}_1 r_{yx_1} + \hat{\beta}_2 r_{yx_2} + \hat{\beta}_3 r_{yx_3} + \ldots + \hat{\beta}_m r_{yx_m}}. \tag{4.43}$$

4.11. Частинні коефіцієнти кореляції та коефіцієнти регресії

Частинні коефіцієнти кореляції так само, як і парні, характеризують тісноту зв'язку між двома змінними. Але на відміну від парних частинні коефіцієнти характеризують тісноту зв'язку за умови, що решта змінних сталі.

Можна дістати спрощений вираз для розрахунку коефіцієнта частинної кореляції, обравши інший спосіб інтерпретації цього коефіцієнта. Для випадку простої регресії двох змінних маємо

$$r_{xy}^2 = \frac{\left(\sum x_i y_i\right)^2}{\left(\sum x_i\right)^2 \left(\sum y_i\right)^2} = a_{y/x} a_{x/y},$$

де $a_{y/x}$ характеризує коефіцієнт при X у рівнянні $Y = f(X)$, а $a_{x/y}$ — коефіцієнт при Y в рівнянні $X = f(Y)$. Отже, квадрат коефіцієнта парної кореляції дорівнює добутку двох наведених коефіцієнтів. Коефіцієнт частинної кореляції можна визначити аналогічно. Наприклад, розглянемо два регресійні рівняння, коли $x_1 = \text{const}$.

$$Y = f(X_2, X_3)\,; \quad X_2 = f(Y, X_3)\,.$$

Нехай в цих рівняннях X_3 дорівнює деякій довільній величині c, тоді член, який відповідає змінній X_3, збігатиметься з вільним членом, а отже, дістанемо дві прості регресії, які відбивають загальну зміну y_t, x_{t_2} на площині $X_3 = c$. Оскільки модель є лінійною, то коефіцієнти регресії $X_2 = f(Y)$ і $Y = f(X_2)$ лишаються незмінними при різних значеннях c, тобто можна стверджувати: квадрат коефіцієнта частинної кореляції між Y і X_2 дорівнює добутку коефіцієнтів при X_2 і Y у двох множинних регресіях.

Згідно з (4.44) запишемо ці рівняння у вигляді

$$\hat{Y} = -\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} \frac{R_{12}}{R_{11}} X_2 - \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_3}} \frac{R_{13}}{R_{11}} X_3;$$

$$\hat{X}_2 = -\frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} \frac{R_{21}}{R_{22}} Y - \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_3}} \frac{R_{23}}{R_{22}} X_3,$$

де R_{kj} — алгебраїчні доповнення до елемента r_{kj} матриці r. Звідси

$$r_{12,3}^2 = \frac{R_{12}^2}{R_{11}R_{22}}\,. \tag{4.44}$$

Для знаходження частинного коефіцієнта кореляції змінної Y з X_2 за умови, що змінна X_3 стала, достатньо взяти добуток параметрів при X_2 і Y у наведених щойно рівняннях з протилежним знаком.

Аналогічно

$$r_{23.1}^2 = \frac{R_{23}^2}{R_{22}R_{33}}\,.$$

Тоді частинні коефіцієнти кореляції будуть такі:

$$r_{12.3} = -\frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}\,; \quad r_{13.2} = -\frac{R_{13}}{\sqrt{R_{11}R_{33}}}\,; \quad r_{23.1} = -\frac{R_{23}}{\sqrt{R_{22}R_{33}}}\,. \tag{4.45}$$

Ці висновки можна поширити на випадок, коли економетрична модель має $m-1$ пояснювальних змінних ($j=\overline{1,m-1}$), але при цьому решта цих змінних (крім двох) є константами.

На підставі (4.45) можна записати альтернативні співвідношення для розрахунку частинних коефіцієнтів кореляції, базуючись на оберненій матриці до матриці r_{xx}:

$$r_{kj.s}=\frac{-C_{kj}}{\sqrt{C_{kk}\cdot C_{jj}}},$$

де C_{kj} — елемент матриці, оберненої до матриці r_{xx}.

✓***Приклад 4.8.*** Необхідно визначити частинні коефіцієнти кореляції для змінних моделі, побудованої на основі даних табл. 4.2 (приклад 4.2).

Розв'язання. 1. Запишемо матрицю коефіцієнтів парної кореляції для чотирьох змінних (приклад 4.6):

$$r=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}909 & 0{,}898 & 0{,}913 \\ 0{,}909 & 1 & 0{,}953 & 0{,}913 \\ 0{,}898 & 0{,}953 & 1 & 0{,}924 \\ 0{,}913 & 0{,}913 & 0{,}924 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Обернемо цю матрицю:

$$C=\begin{pmatrix} 7{,}560 & -3{,}115 & -0{,}446 & -3{,}646 \\ -3{,}115 & 13{,}159 & -8{,}775 & -1{,}054 \\ -0{,}446 & -8{,}745 & 13{,}656 & -4{,}207 \\ -3{,}646 & -1{,}054 & -4{,}207 & 9{,}179 \end{pmatrix}.$$

3. Визначимо частинні коефіцієнти кореляції:

$$r'_{yx_1x_2x_3}=\frac{3{,}115}{\sqrt{7{,}560\cdot 13{,}159}}=0{,}312;$$

$$r_{yx_2x_3x_1}=\frac{0{,}446}{\sqrt{7{,}560\cdot 13{,}656}}=0{,}044;$$

$$r_{yx_3x_2x_1}=\frac{3{,}646}{\sqrt{7{,}560\cdot 9{,}179}}=0{,}438;$$

$$r_{x_1x_2yx_3}=\frac{8{,}775}{\sqrt{13{,}159\cdot 13{,}656}}=0{,}704;$$

$$r_{x_1x_3,yx_2} = \frac{1,054}{\sqrt{13,159 \cdot 9,179}} = 0,272;$$

$$r_{x_2x_3,yx_1} = \frac{4,207}{\sqrt{13,656 \cdot 9,179}} = 0,440.$$

4. Запишемо матрицю частинних коефіцієнтів кореляції:

$$r' = \begin{pmatrix} 1 & 0,312 & 0,044 & 0,438 \\ 0,312 & 1 & 0,704 & 0,272 \\ 0,044 & 0,704 & 1 & 0,440 \\ 0,438 & 0,272 & 0,440 & 1 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи коефіцієнти парної кореляції (матриця r_{xx}) з відповідними коефіцієнтами частинної кореляції (матриця r'_{xx}), бачимо, що останні значно нижчі, ніж коефіцієнти парної кореляції. Це пов'язано з тим, що в коефіцієнтах частинної кореляції не відображаються неявні сукупні зв'язки між всіма показниками, а лише між певними двома (при цьому нехтується вплив решти). Саме ці зв'язки вимірюють частинні коефіцієнти кореляції, які мають досить важливе значення в різних проблемах економетричних досліджень. Пізніше, у розд. 6 ми повернемось до цих коефіцієнтів.

4.12. Перевірка значущості та інтервали довіри

4.12.1. Значущість економетричної моделі. Гіпотезу про рівень значущості зв'язку між залежною і пояснювальними змінними можна перевірити за допомогою F-критерію:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_p^2}{\hat{\sigma}_u^2}. \tag{4.46}$$

Зауважимо, що ми виходимо з того, що залишки u розподілені нормально, тобто користуємося фундаментальною теоремою про те, що для нормально розподіленої випадкової величини u з нульовою середньою і одиничною дисперсією сума квадратів її n випадково вибраних значень має розподіл χ^2 з n ступенями свободи.

Дисперсії, які застосовуються для обчислення F-критерію, наведено в табл. 4.4.

Фактичне значення F-критерію порівнюється з табличним для ступенів свободи m і $n - m$ і вибраного рівні значущості. Якщо $F_{факт} > F_{табл}$, то гіпотеза про істотність зв'язку між залежною і пояснювальними змінними економетричної моделі підтверджується, у протилежному випадку — відхиляється.

✓***Приклад 4.9.*** Обчислимо F-критерій для економетричних моделей, розглянутих у прикладі 4.7 (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

Економетрична модель	Кількість ступенів свободи	F-критерій
1. $\hat{Y} = -28{,}96 + 0{,}66X_3$	$\begin{cases} m-1=1 \\ n-m=18 \end{cases}$	90,10
2. $\hat{Y} = -16{,}69 + 0{,}36X_3 + 0{,}31X_1$	$\begin{cases} m-1=2 \\ n-m=17 \end{cases}$	55,63
3. $\hat{Y} = -15{,}01 + 0{,}35X_3 + 0{,}28X_1 + 0{,}06X_2$	$\begin{cases} m-1=3 \\ n-m=16 \end{cases}$	34,98

$F_{1табл}$ (0,95) для першої моделі дорівнює 4,41.
$F_{2табл}$ (0,95) для другої моделі дорівнює 3,59.
$F_{3табл}$ (0,95) для третьої моделі дорівнює 3,24.
Отже, при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$:

$$F_{1факт} > F_{1табл},$$
$$F_{2факт} > F_{2табл},$$
$$F_{3факт} > F_{3табл}.$$

Це означає, що відповідні економетричні моделі є статично значущими, тобто підтверджується гіпотеза про те, що кількісна оцінка зв'язку між залежною і пояснювальними змінними в моделях є істотною.

Скориставшись виразами дисперсій, які наведено в табл. 4.4:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{m-1};$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{u'u}{n-m},$$

а також формулою для обчислення коефіцієнта детермінації $\overline{R}^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y}$, запишемо альтернативну форму F-критерію:

$$F = \frac{R^2/(m-1)}{(1-R^2)\,/\,(n-m)}. \tag{4.47}$$

Згідно з цим критерієм перевіряється значущість коефіцієнта детермінації, а отже, й усієї моделі.

Цей результат підводить базу під традиційно дисперсійний аналіз, який застосовується для перевірки нульових гіпотез.

4.12.2. Значущість коефіцієнта кореляції. Оскільки коефіцієнт кореляції є також вибірковою характеристикою, яка може відхилятись від свого «істинного» значення, значущість коефіцієнта кореляції також потребує перевірки. Базується вона на t-критерії

$$t = \frac{R\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-R^2}}, \tag{4.48}$$

де R^2 — коефіцієнт детермінації моделі; R — коефіцієнт кореляції; $n-m$ — кількість ступенів свободи.

Якщо $|t| > t_{\text{табл}(\alpha)}$, де $t_{\text{табл}(\alpha)}$ — відповідне табличне значення t-розподілу з $n-m$ ступенями свободи, то можна зробити висновок про значущість коефіцієнта кореляції між залежною і пояснювальними змінними моделі.

✓***Приклад 4.10.*** Для множинних коефіцієнтів кореляції, які наведено в табл. 4.5, обчислимо значення t-критерію:

$$t_1 = \frac{0{,}824\sqrt{20-2}}{\sqrt{1-0{,}824^2}} = 6{,}17;$$

$$t_2 = \frac{0{,}851\sqrt{20-3}}{\sqrt{1-0{,}851^2}} = 6{,}68;$$

$$t_3 = \frac{0{,}842\sqrt{20-4}}{\sqrt{1-0{,}842^2}} = 6{,}24.$$

Табличні значення цього критерію при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і відповідних ступенях свободи такі:

$$t_{1\text{табл}} = 2{,}10;$$
$$t_{2\text{табл}} = 2{,}11;$$
$$t_{3\text{табл}} = 2{,}12.$$

Порівнюючи їх із фактичними, де

$$t_1 > t_{1\text{табл}},$$
$$t_2 > t_{2\text{табл}},$$
$$t_3 > t_{3\text{табл}},$$

доходимо висновку, що коефіцієнти кореляції, які характеризують тісноту зв'язку між залежною і пояснювальними змінними в моделях, є достовірними.

4.12.3. Значущість оцінок параметрів моделі. Перевіримо значущість оцінок параметрів $\hat{A}$ і знайдемо для них довірчі інтервали, припускаючи, що залишки u нормально розподілені, тобто $u \in N(0, \sigma^2{}_u)$. Тоді параметри моделі $\hat{A}$ задовольняють багатовимірний нормальний розподіл:

$$\hat{A} \in N\left[a, \sigma_u^2 (X' X)^{-1}\right]. \tag{4.49}$$

Коли відома величина σ_u^2, то цей результат можна буде використати для перевірки значущості елементів вектора $\hat{A}$ та оцінювання довірчих інтервалів елементів цього вектора. Проте дисперсія σ_u^2 невідома, а отже, потрібно розглянути методи знаходження.

Для цього визначимо залишки:

$$\begin{aligned} u = Y - X\hat{A} = X\hat{A} + u - X[(X' X)^{-1} X'(X\hat{A} + \hat{u})] = \\ = u - X(X' X)^{-1} X' \hat{u} = [E_n - X(X' X)^{-1} X'] \hat{u} = N\hat{u}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Отже, залишки, які можна дістати на підставі експериментальних даних, записано у вигляді лінійних функцій від невідомих залишків u. Тоді суму квадратів відхилень подамо у вигляді

$$u'u = \hat{u}'N'N\hat{u} = \hat{u}'N\hat{u} = \hat{u}' [E_n - X(X' X)^{-1} X'] \hat{u}, \tag{4.51}$$

де N — симетрична ідемпотентна матриця.

У цих перетвореннях ми виходили з того, що N є симетричною ідемпотентною матрицею, оскільки E_n — одинична матриця, а $X(X' X)^{-1} X'$ — симетрична, розміром $n \times n$.

Знайдемо математичне сподівання для обох частин рівняння (4.51), застосувавши спочатку властивість, яка полягає в тому, що $M(\hat{u}' N\hat{u}) = \hat{\sigma}_u^2 \operatorname{tr}(N)$, де $\operatorname{tr}(N)$ — слід матриці N, а далі — властивість комутативності добутку матриць відносно операцій обчислення сліду матриці.

З огляду на сказане маємо:

$$\begin{aligned} M(uu') &= \hat{\sigma}_u^2 \operatorname{tr}[E_n - X(X'X)^{-1}X'] = \hat{\sigma}_u^2\{\operatorname{tr} E_n - \operatorname{tr}[X(X'X)^{-1}X']\} = \\ &= \hat{\sigma}_u^2\{n - \operatorname{tr}[(X'X)^{-1}(X'X)]\} = (n-m)\,\hat{\sigma}_u^2 . \end{aligned} \tag{4.52}$$

У цьому співвідношенні матриця $(X'X)$ має порядок m, добуток $(X'X)^{-1}(X'X)$ дорівнює E_m, а її слід дорівнює m. Звідси

$$\sigma_u^2 = \frac{u'u}{n-m} . \tag{4.53}$$

Співвідношення (4.53) дає нам незміщену оцінку дисперсії залишків.

Нарешті, лишилося показати, що сума квадратів залишків $u'u$ розподілена незалежно від $\hat{A}$. Для цього знайдемо коваріацію між залишками і $\hat{A}$:

$$\begin{aligned} M[u(A-\hat{A})'] &= M\{[E_n - X(X'X)^{-1}X']\,uu'X(X'X)^{-1}\} = \\ &= \hat{\sigma}_u^2 X(X'X)^{-1} - \hat{\sigma}_u^2 X(X'X)^{-1} = 0 . \end{aligned} \tag{4.54}$$

Оскільки u і $\hat{A}$ — лінійні функції від нормально розподілених змінних, то вони також розподілені нормально і, як було показано, їх коваріації дорівнюють нулю.

Це дає нам змогу скористатися t-розподілом для перевірки гіпотез відносно статистичної значущості кожної з оцінок параметрів економетричної моделі

$$\hat{A}_j \in N(a_j, \hat{\sigma}_u^2 c_{jj}) .$$

Перевірку гіпотези виконаємо згідно з t-критерієм:

$$t_j = \frac{\left|\hat{a}_j\right|}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2 c_{jj}}} = \frac{\left|\hat{a}_j\right|}{S_{aj}\hat{a}_j}, \tag{4.55}$$

де c_{jj} — діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$. Знаменник відношення (4.55) $S_{aj}\hat{a}_j = \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}$ називається стандартною похибкою оцінки параметра моделі.

Обчислене значення t-критерію порівнюється з табличним при вибраному рівні значущості α і $n-m$ ступенях свободи. Якщо $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, то відповідна оцінка параметра економетричної моделі є статистично значущою.

На основі t-критерію і стандартної похибки побудуємо інтервали довіри для параметрів a_j:

$$a_j = \hat{a}_j \pm t_{(\alpha)} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 c_{jj}} \,. \tag{4.56}$$

✓***Приклад 4.11.*** Перевіримо гіпотези щодо статистичної значущості оцінок параметрів моделі

$$\hat{Y} = -15{,}01 + 0{,}28X_1 + 0{,}06X_2 + 0{,}35X_3,$$

побудованої на основі вихідних даних, наведених у табл. 4.2:

$$t_{\hat{\alpha}_0} = \frac{|\hat{a}_0|}{S_{\hat{\alpha}_0}} = \frac{15{,}01}{13{,}82} = 1{,}08; \quad t_{\hat{\alpha}_1} = \frac{|\hat{a}_1|}{S_{\hat{\alpha}_1}} = \frac{0{,}28}{0{,}22} = 1{,}32;$$

$$t_{\hat{\alpha}_2} = \frac{|\hat{a}_2|}{S_{\hat{\alpha}_2}} = \frac{0{,}06}{0{,}08} = 0{,}75; \quad t_{a_3} = \frac{|\hat{a}_3|}{S_{\hat{\alpha}_3}} = \frac{0{,}35}{0{,}17} = 1{,}95\,.$$

Табличне значення t-критерію для ступеня свободи $n - m = 16$ і рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ дорівнює 2,12. Порівнюючи розраховані значення t-критерію для оцінок параметрів моделі з табличними, можна зробити висновок, що з імовірністю 0,95 жодна з оцінок моделі не є статично значущою.

Знизимо ступінь довіри з 0,95 до 0,90. Тоді $t_{(0{,}1)\text{табл}} = 1{,}746$. У цьому випадку оцінка параметра $\hat{\alpha}_3$ є статистично значущою з імовірністю 0,9.

Інтервали довіри кожної оцінки можна визначити, знайшовши граничні похибки. Так, інтервали довіри для оцінки $\hat{\alpha}_3$ запишуться: $\Delta_3 = t_{(\alpha)\text{табл}} \cdot \sigma_{a_3}$; $\alpha_3 + \Delta_3$; $\alpha_3 - \Delta_3$; $0{,}35 - 0{,}36 \le a_3 \le 0{,}35 - 0{,}36$.

Зазначимо, що відповідно можна знайти інтервали довіри інших оцінок параметрів моделі. Коли стандартні похибки параметрів більші за абсолютні значення оцінок їх параметрів, то це може означати, що оцінки параметрів є зміщеними.

4.13. Економетрична модель аналізу виробництва (виробнича функція Кобба—Дугласа)

4.13.1. Сутність виробничої функції та її використання. У цьому підрозділі покажемо, як можна аналізувати господарську діяльність на основі побудованої економетричної моделі, зокрема, виробничої функції.

Виробнича функція — це економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники. До основних показників можна віднести дохід, прибуток, рентабельність, продуктивність праці, собівартість і т. ін.

Перше поняття виробничої функції пов'язане з математичним моделюванням технологічної залежності між обсягом продукції, що випускається, і кількісними характеристиками витрат ресурсів. Звідси і назва функції «виробнича». Уперше таку функцію побудували американські дослідники Кобб і Дуглас ще в 30-ті роки XX століття за даними про функціонування обробної промисловості США протягом двадцяти років. Це є класичним прикладом економетричного моделювання.

Функція Кобба—Дугласа (CDPF) належить до найвідоміших виробничих функцій, що набули широкого застосування в економічних дослідженнях, особливо на макрорівні. Класична виробнича функція Кобба—Дугласа має вигляд

$$Y = aF^{\alpha} L^{1-\alpha}, \tag{4.57}$$

де Y — обсяг продукції; F — основний капітал; L — робоча сила.

Сума параметрів, або ступінь однорідності класичної функції Кобба—Дугласа, дорівнює одиниці. А це означає, що зі збільшенням обох виробничих ресурсів на 1 % обсяг продукції також збільшиться на 1 %. Отже, ефективність ресурсів у такому разі стала.

Практичні дослідження функції Кобба—Дугласа показали, що припущення про лінійну однорідність на практиці виконується рідко. Тому було запропоновано виробничу функцію більш загального вигляду

$$Y = aF^{\alpha} L^{\beta}. \tag{4.58}$$

Сума параметрів $(\alpha + \beta)$ на відміну від попереднього випадку може бути як меншою, так і більшою від одиниці. Якщо $(\alpha + \beta) > 1$, то темпи зростання обсягу продукції вищі за темпи зростання виробничих ресурсів, а якщо $(\alpha + \beta) < 1$, то, навпаки, темпи зростання обсягу продукції нижчі за темпи зростання ресурсів.

Припустимо, що рівень кожного виробничого ресурсу збільшився на r %, тоді обсяги їх відповідно дорівнюватимуть $F\left(1+\frac{r}{100}\right)$ і $L\left(1+\frac{r}{100}\right)$.

Обсяг продукції на основі виробничої функції запишеться так:

$$Y_1 = a\left[F\left(1+\frac{r}{100}\right)\right]^{\alpha}\left[L\left(1+\frac{r}{100}\right)\right]^{\beta} =$$
$$= aF^{\alpha}L^{\beta}\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\beta} = Y\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\alpha+\beta}.$$

Звідси, коли $\alpha + \beta > 1$, обсяг продукції зростає більш ніж на r %; коли $\alpha + \beta < 1$ — менш ніж на r %; коли $\alpha + \beta = 1$, продукція збільшиться на r %. Узявши частинні похідні від виробничої функції Кобба—Дугласа, дістанемо:

$$Y'_F = \frac{\partial Y}{\partial F} = \alpha\frac{Y}{F}; \quad Y'_l = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta\frac{Y}{L}. \tag{4.59}$$

Це означає, що граничний приріст продукції за рахунок приросту кожного ресурсу визначається як добуток коефіцієнта еластичності на середню ефективність ресурсу. Параметр a у функції Кобба—Дугласа залежить від вибраних одиниць вимірювання Y, F, L; водночас числове значення цього параметра визначається також ефективністю виробничого процесу. У цьому можна переконатись, порівнявши дві виробничі функції, які відрізняються одна від одної лише значенням параметра a.

Для фіксованих значень F і L тій функції, де більше числове значення параметра a, відповідає більше значення Y. Отже, і виробничий процес, який описується цією функцією, буде ефективнішим. Другі похідні функції Кобба—Дугласа мають такий вигляд:

$$Y''_{FF} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,Y}{F^2}; \quad Y''_{LL} = \frac{\beta\,(\beta-1)Y}{L^2}. \tag{4.60}$$

Враховуючи, що $0 < \alpha < 1$ і $0 < \beta < 1$, $Y_{FF} < 0$ і $Y_{LL} < 0$, справджується висновок: при збільшенні ресурсів граничний приріст обсягу продукції зменшуватиметься. Якщо обсяг продукції у функції Кобба—Дугласа вважати сталим (const), то можна обчислити граничні норми заміщення ресурсів:

$$h = \frac{Y_l'}{Y_l'} = \frac{\alpha \frac{Y}{F}}{\beta \frac{Y}{L}} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{L}{F}. \tag{4.61}$$

Звідси бачимо, що гранична норма заміщення ресурсів у функції Кобба—Дугласа визначається як добуток співвідношень обсягів ресурсів та їхніх коефіцієнтів еластичності.

Швидкість зміни норми заміщення ресурсів у зв'язку зі зміною обсягу ресурсів обчислюється так:

$$\frac{\partial h}{\partial L} = \frac{\alpha}{\beta F}; \quad \frac{\partial h}{\partial F} = \frac{\alpha L}{\beta F^2}. \tag{4.62}$$

Мірою швидкості зміни h є еластичність заміщення ресурсів F і L, що визначається як відношення зміни обсягу ресурсів до зміни величини h:

$$h_{l/l} = \frac{L/F \, \partial L/F}{\partial h/h} = \frac{h\,(Lh + F)}{FL\left(h\frac{\partial h}{\partial F} - \frac{\partial h}{\partial L}\right)} = 1. \tag{4.63}$$

Отже, еластичність заміщення в кожній точці кривої, що характеризує виробничу функцію Кобба—Дугласа, дорівнює одиниці.

Розглянемо тепер поведінку функції під час зміни масштабу виробництва. Для цього припустимо, що витрати кожного ресурсу виробництва збільшилися в λ раз, тоді нове значення Y' визначатиметься так:

$$Y' = a\,(\lambda F)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} Y \tag{4.64}$$

Ступінь однорідності цієї функції дорівнює $\alpha + \beta$. Якщо $\alpha + \beta = 1$, то рівень ефективності ресурсів не залежить від масштабів виробництва. Якщо $\alpha + \beta < 1$, то, як уже стверджувалось, з розширенням масштабів виробництва середні витрати ресурсів в розрахунку на одиницю продукції зменшуються, а при $\alpha + \beta > 1$ — збільшуються. Зазначимо, що ці властивості не залежать від числових значень F і L і зберігаються в кожній точці виробничої функції.

За припущення, що мета господарської діяльності — максимізація прибутку, можна проілюструвати інші властивості виробничої функції. Запишемо функцію прибутку:

$$\Pi = bY^{r+1} - wL - rF + \lambda\,[f(F,L) - Y].$$

Підприємець вибирає такі значення Y, L, F, які максимізують прибуток при обмеженнях, що накладаються виробничою функцією. Величини b, w, r — параметри функції прибутку, λ — множник Лагранжа. Якщо виробничий процес у даному співвідношенні подається функцією Кобба—Дугласа, то можна записати умови максимізації прибутку:

$$w = \frac{\lambda\beta Y}{L}; \quad r = \frac{\lambda\alpha Y}{F}; \quad \frac{w}{r} = \frac{\beta F}{\alpha L},$$

$$\lambda = (r+1)P \quad \text{при } r \neq -1, \quad \text{де } P = bY^r.$$

Звідси обсяги ресурсів такі:

$$L = \frac{(r+1)\,P\beta Y}{w}; \quad F = \frac{(r+1)\,P\alpha Y}{r}. \qquad (4.65)$$

У цьому випадку максимальне значення випуску продукції, якщо $\alpha + \beta \neq 1$, можна записати так:

$$Y = aF^{\alpha}L^{\beta} = a\left[\frac{(r+1)\,P\alpha Y}{r}\right]^{\alpha}\left[\frac{(r+1)\,P\beta Y}{w}\right]^{\beta}. \qquad (4.66)$$

При $r = 1$ згідно із записаними щойно умовами максимізації (4.66) дістанемо:

$$F = \frac{w\alpha L}{\beta r}; \quad Y = a\left(\frac{w\alpha}{\beta r}\right)^{\alpha} L^{\alpha+\beta}.$$

Отже, необхідні умови для забезпечення максимізації прибутку дають змогу визначити відповідні витрати робочої сили і основного капіталу. З розширенням масштабів виробництва ефективність витрат ресурсів спадає, що відповідає максимізації прибутку в умовах досконалої конкуренції.

Наведений приклад виробничої функції показує, що ця економетрична модель дає змогу досить широко проаналізувати виробничу діяльність, визначити шляхи її вдосконалення для підвищення ефективності. Обґрунтованість такого аналізу повністю залежить від достовірності економетричної моделі, від того, наскільки вона адекватна реальному процесові.

Протягом багатьох років економетричні дослідження були спрямовані в основному не на заміну її іншими видами функцій, а на модифікацію виробничої функції, яка могла б адекватніше описати реальні економічні співвідношення.

Виробнича функція дає можливість дослідити для галузей та економіки в цілому показники середньої і граничної ефективності ресурсів робочої сили і основних виробничих фондів, граничні норми заміщення ресурсів у виробничому процесі. Важливе значення має також аналіз на основі функцій (4.58) таких відносних показників, як продуктивність праці (Y/L), фондоозброєність праці (K/L), фондомісткість продукції (K/Y), фондовіддача (Y/K).

Безпосередньо із (4.57) запишемо залежність між фондоозброєністю праці та її продуктивністю:

$$\frac{Y}{L} = \alpha_0 \left(\frac{K}{L} \right)^{1-\alpha_1}.$$

Звідси можна дістати і залежність фондомісткості продукції від фондоозброєності: $\frac{K}{Y} = \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha_1}$.

Із наведених співвідношень видно, що вплив зростання фондоозброєності праці на продуктивність праці і фондомісткість пов'язано з величиною параметра α_1. Якщо $\alpha_1 < 0{,}5$, то зі зростанням фондоозброєності порівняно швидко зростає продуктивність праці і досить повільно збільшується фондомісткість продукції. При $\alpha_1 > 0{,}5$ ситуація змінюється: зростання фондоозброєності праці досить різко збільшує фондомісткість, а темпи зростання продуктивності праці загасають. Так, при $\alpha_1 = 0{,}7$ збільшенню фондоозброєності праці на 10 % відповідає зростання фондомісткості на 7 %, а продуктивності праці — лише на 3 %.

Наведені висновки базуються на виробничій функції, коли сума еластичностей ресурсів дорівнює одиниці, тобто дохід зростає в такому самому співвідношенні, як і обидва ресурси.

Покажемо основні напрями використання виробничих функцій на макрорівні.

4.13.2. Застосування виробничої функції

✓***Приклад* 4.12**. Функцію Кобба—Дугласа було використано для оцінювання виробленого національного доходу Китаю.

В умовах цієї країни існує велика «резервна армія» робочої сили. Диспропорція в динаміці основних фондів і ресурсів робочої сили, які актуальні на Заході, для китайської економіки неістотні, тому отримана виробнича функція має специфічний вигляд

$$Y_t = 77{,}8e^{bt}\left(K_t L_t\right)^{0.2755}, \tag{4.67}$$

де Y_t — суспільний продукт (валова продукція) у незмінних цінах у період t;

Kt — основний капітал (ОВФ) у період t;

L_t — робоча сила (чисельність зайнятих) у період t;

b — параметр, що характеризує науково-технічний прогрес ($b = 0{,}03$).

Наведемо фактичні і розрахункові дані за моделлю в табл. 4.7.

Таблиця 4.7

Рік t	Національний дохід Китаю, млрд юанів	Обчислення за моделлю значення	Відхилення, %
1978	2485	2480	0,2
1979	2713	2656	2,1
1980	2815	2829	–0,5
1981	2939	2852	3,0
1982	3115	3157	–1,3
1983	3415	3381	1,0
1984	3964	3847	2,9
1985	4526	4411	2,5
1986	4780	4846	–1,4
1987	5276	5161	2,2
1988	5613	5407	3,7
1989	5350	5130	4,1
1990	5419	5616	–3,6
1991	6397	6217	2,8

У процесі економічної реформи в Китаї не було допущено спаду виробництва і великої інфляції, що пояснюється жорстким контролем держави і орієнтацією на інтереси більшості населення. Середній темп зростання національного доходу становив 8,7 %, а в 1994 році — 13,7 %. Згідно з цим активно запроваджувалися різні форми власності, ринкові механізми і відкрита зовнішньоекономічна політика.

✓***Приклад 4.13***. Розглянемо виробничу функцію для економіки України.

Таблиця 4.8

Показники	Позначення	Числове значення за 1994 р., трлн крб.
Національний дохід (ВНД)	Y	967
Фонд накопичення (33,2 % від НД)	K	321
Заробітна плата (33,8 % від валового внутрішнього продукту (ВВП — 1138 трлн крб.)	L	385

Припустимо, що за оцінкою Кобба—Дугласа $\frac{1-\alpha}{\alpha}=2{,}5$, тоді $\alpha=0{,}286$.

Користуючись наведеними табличними даними для визначення коефіцієнта a функції (4.57), маємо рівняння $967=a\cdot 321^{0{,}286}\cdot 385^{0{,}714}$.

Звідси $a=2{,}64$ і відповідно отримуємо вираз виробничої функції Кобба—Дугласа: $Y=2{,}64K^{0{,}286}\cdot L^{0{,}714}$.

На основі оцінок параметрів цієї функції робимо висновок: якщо капітальні вкладення збільшаться на 1 %, робоча сила не зміниться, то обсяг виробництва зросте на 0,286 %; якщо робоча сила зросте на 1 %, а капітальні вкладення не зміняться, то обсяг виробництва зросте на 0,714 %.

✓***Приклад 4.14. Модель Солоу.***

Модель Солоу є розвитком моделі Кобба—Дугласа із переходом до питомих показників та з оптимізацією співвідношення між споживанням та нагромадженням (інвестиціями).

$$y=\frac{Y}{L}=a\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=a\cdot k^{\alpha}, \tag{4.68}$$

де y — обсяг продукції, яка виробляється на одиницю живої праці; $k = \frac{K}{L}$ — обсяг капіталу на одиницю живої праці (капіталоозброєність праці).

Приріст показника капіталоозброєності праці становить $\Delta k = S_v - \sigma_k$, де S_y — норма інвестування, σ_k — показник втрат.

Покажемо на прикладі послідовність обчислень за моделлю Солоу. Припустимо, що $S_y = 0{,}2$; $\sigma_k = 0{,}15$. Тоді, коли $a = 2{,}64$, то $\alpha = 0{,}286$, $k_0 = \frac{321}{385} = 0{,}83$ (початковий показник нагромадження капіталоозброєності праці). Схема розрахунку має вигляд табл. 4.9:

Таблиця 4.9.

ПРИКЛАД ОБЧИСЛЕНЬ ЗА МОДЕЛЛЮ СОЛОУ

Рік t	Показники					
	Нагромадження k	доходів Y	інвестицій $i = S \cdot y$	втрат $\Pi = \sigma_k$	приросту нагромадження $\Delta k = i \cdot \Pi$	Споживання $c = y - i$
0-й	0,63	2,51	0,50	0,12	0,38	2,01
1-й	1,21	2,79	0,56	0,18	0,38	2,23
2-й	1,59	3,01	0,60	0,14	0,36	2,41
3-й	1,95	3,20	0,64	0,29	0,35	2,56
4-й	2,30	3,34	0,67	0,35	0,32	2,67
5-й	2,62	3,48	0,70	0,40	0,30	2,78
...	...	...	...	...	...	...
∞	5,82	4,37	0.87	0,87	0	3,50

Коли t прямує до ∞, $\Delta k = S_y - \sigma_k = 0$.

Як бачимо, залежності між інвестиціями і доходами визначають шлях оптимізації показника капіталоозброєності праці.

Визначимо «золотий» рівень нагромадження капіталу.

Розглянемо варіант моделі Солоу, припустивши довільний вигляд виробничої функції: $Y = f(k)$.

У випадку, коли капіталоозброєність не змінюється, інвестиції тільки відновлюють вибуття основних фондів:

$\Delta k = 0$ (*граничний стан розвитку при* $t \to \infty$).

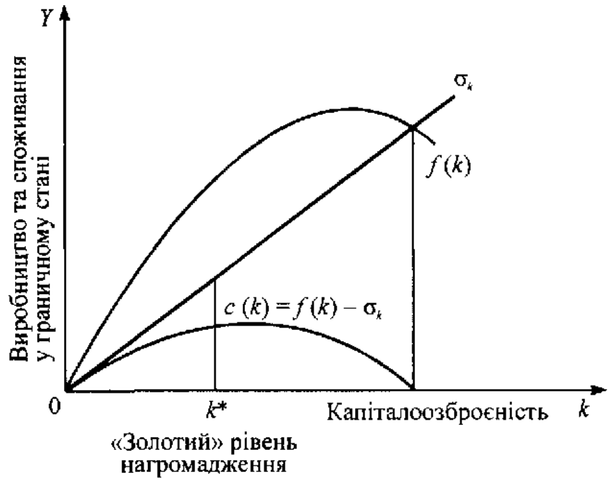


Рис. 4.2. Визначення «золотого» рівня накопичення капіталу

Рівень нагромадження капіталу, що забезпечує граничний стан із найвищим рівнем споживання, має назву ***золотого рівня нагромадження капіталу k**** (рис. 4.2). Умови досягнення k^* — максимум функції споживання: $c(k) = f(k) - \sigma_k$.

Складаємо рівняння: $c'(k) = f'(k) - \sigma_k = 0$, $f''(k) < 0$.

У різницевому варіанті: $f(k^* + 1) - f(k^*) = MPK = \sigma_k$, тобто граничний продукт капіталу (варіант питомого показника) дорівнює нормі вибуття.

Нехай $y = f(k) = \sqrt{k}$ і $\sigma_k = 0{,}1$, тоді визначення «золотого» рівня нагромадження k^* можна проілюструвати за допомогою табл. 4.10.

Таблиця 4.10

S	K	Y	$\Delta - k$	c	$f(k)$
0,1	1	1	0,1	0,9	0,5
0,2	4	2	0,4	1,6	0,25
0,4	16	4	1,6	2,4	0,125
0,5	25	5	2,5	2,5	0,100
0,6	36	6	3,6	2,4	0,083
0,8	64	8	6,4	1,6	0,062

Рядок зі значенням $K = k^* = 25$ відповідає оптимальному значенню k, тобто визначає «золотий» рівень нагромадження, оскільки $f'(k) = \sigma_k$.

Ураховуючи темпи приросту працюючих та темпи приросту продуктивності праці, дістанемо рівняння узагальненої моделі:

$$f'(k) = \sigma + n + g\,, \qquad (4.69)$$

де n — темп приросту чисельності працюючих; g — темп приросту продуктивності праці.

У формі узагальнення (4.69) «золотий» рівень нагромадження визначається як розв'язок рівняння:

$$f\left(k^* + 1\right) - f\left(k^*\right) = MPK = \sigma + n + g\,.$$

4.14. Стислі висновки

1. Економетрична модель дає кількісну оцінку кореляційно-регресійного зв'язку між економічними показниками, один чи кілька з яких є залежними, а решта — незалежними змінними.

2. Побудова економетричної моделі базується на єдності двох аспектів — теоретичного, якісного аналізу та аналізу емпіричної інформації.

3. Щоб побудувати економетричну модель, спочатку необхідно специфікувати її, тобто сформувати множину пояснювальних змінних та визначити аналітичну форму залежності. При цьому можна кілька разів повертатися до етапу специфікації моделі, уточнюючи перелік пояснювальних змінних та вид регресійної функції.

4. Помилки специфікації моделі можуть бути трьох видів:

1) ігнорування істотної пояснювальної змінної при побудові економетричної моделі;

2) внесення до моделі незалежної змінної, яка не є істотною для вимірюваного зв'язку;

3) використання невідповідних форм залежності.

5. Оцінювати параметри економетричної моделі за допомогою 1МНК можна тоді, коли:

1) математичне сподівання залишків дорівнює нулю, тобто $M(u) = 0$;

2) дисперсія залишків стала, тобто $M(uu') = \sigma_u^2$;

3) пояснювальні змінні моделі не пов'язані із залишками, тобто $M(X'u) = 0$;

4) пояснювальні змінні моделі не мультиколінеарні.

6. Система нормальних рівнянь за методом 1МНК запишеться так:

$$(X'X)\hat{A} = X'Y,$$

а оператор оцінювання параметрів

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y.$$

7. Якщо виконуються всі необхідні умови для застосування 1МНК, то оцінки параметрів економетричної моделі мають такі властивості:

1) незміщеності; 3) ефективності;
2) обґрунтованості; 4) інваріантності.

8. Оцінки параметрів моделі будуть незміщеними, якщо математичне сподівання їх вибіркових значень, знайдених у результаті багаторазового повторення вибірки, не відрізнятиметься від істинного значення, тобто

$$M(\hat{A}) = A.$$

Про наявність зміщеності оцінки можна стверджувати, коли її стандартна похибка перевищує 10 % від абсолютного значення оцінки.

9. Вибіркові оцінки вектора $\hat{A}$ будуть обґрунтованими, якщо при дуже малій величині ε справедливе твердження

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\hat{A} - A| < \varepsilon\} = 1.$$

10. Вибіркові оцінки вектора $\hat{A}$ параметрів A будуть ефективними тоді, коли їх дисперсії є найменшими. Величина дисперсії оцінок параметрів залежить від кількості спостережень, специфікації моделі та ефективного методу оцінювання цих параметрів. Це означає, що, припустившись помилки на будь-якому етапі при побудові економетричної моделі, можна дістати неефективні оцінки її параметрів.

11. Властивість інваріантності дає змогу використовувати функції від вибіркових оцінок. Наприклад, знаючи вибіркову дисперсію оцінок параметрів, можемо знайти їх стандартну похибку.

12. Одним із важливих завдань економетричного моделювання є оцінювання прогнозного значення залежної змінної за умови, що пояснювальні змінні задані на перспективу.

13. На основі економетричної моделі можна дістати точковий та інтервальний прогнози залежної змінної на перспективу.

14. Незміщена оцінка точкового прогнозу запишеться так:

$$M[y_0(X_0)] = X_0' A,$$

де X_0 — заданий рівень пояснювальної змінної на перспективу; y_0 — точковий прогноз залежної функції на основі економетричної моделі.

15. Дисперсія прогнозу подається у вигляді:

$$\sigma_{\text{пр}}^2 = \sigma_u^2 X_0'(X'X)^{-1} X_0,$$

а стандартна похибка його така:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\sigma_{\text{пр}}^2} = \sigma_u \sqrt{X_0'(X'X)^{-1} X_0}.$$

16. Стандартна похибка інтервального прогнозу містить безпосередню помилку прогнозу та залишкову дисперсію

$$\sigma_{\text{пр}}^2 = \sqrt{\sigma_u^2(1 + X_0'(X'X)^{-1} X_0)},$$

тоді інтервальний прогноз індивідуального значення визначиться як

$$\hat{y}_0 - t_\alpha \sigma_u \sqrt{1 + X_0'(X'X)^{-1} X_0} \le y_0 \le \hat{y}_0 + t_\alpha \sigma_u \sqrt{1 + X_0'(X'X)^{-1} X_0}.$$

17. З огляду на залежність між оцінками параметрів моделі та коефіцієнтами парної кореляції можна запропонувати альтернативну оцінку 1МНК на основі покрокової регресії.

18. Між оцінками параметрів моделі та коефіцієнтами парної кореляції існує залежність, яка пропорційна до відношення середньоквадратичних відхилень залежної та незалежної змінних, тобто $\hat{a} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Ця залежність справджується і в загальному вигляді. Її покладено в основу алгоритму покрокової регресії.

19. Система нормальних рівнянь для визначення оцінок параметрів моделі 1МНК на основі покрокової регресії запишеться так:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 r_{x_2x_1} + \hat{\beta}_3 r_{x_3x_1} + \ldots + \hat{\beta}_m r_{x_mx_1}; \\ r_{yx_2} = \hat{\beta}_2 r_{x_1x_2} + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 r_{x_3x_2} + \ldots + \hat{\beta}_m r_{x_mx_2}; \\ r_{yx_3} = \hat{\beta}_1 r_{x_1x_3} + \hat{\beta}_2 r_{x_2x_3} + \hat{\beta}_3 + \ldots + \hat{\beta}_m r_{x_mx_3}; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{yx_m} = \hat{\beta}_1 r_{x_1x_m} + \hat{\beta}_2 r_{x_2x_m} + \hat{\beta}_3 r_{x_3x_m} + \ldots + \hat{\beta}_m, \end{cases}$$

або, у матричному вигляді:

$$r_{xx}\hat{\beta} = r_{yx}.$$

Звідси оператор оцінювання параметрів моделі:

$$\hat{\beta} = r_{xx}^{-1} r_{xy},$$

де $\hat{\beta}$ — оцінки параметрів моделі у стандартизованому вигляді.

20. Щоб побудувати таку систему нормальних рівнянь на основі 1МНК, необхідно стандартизувати (нормалізувати) дані так:

$$y^* = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad x_j^* = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}.$$

При цьому середні значення $\bar{y}^*$ і $\bar{x}_j^*$ дорівнюють нулю, а дисперсії — одиниці.

21. Зв'язок між оцінками параметрів моделі на основі стандартизованих і нестандартизованих змінних запишеться у вигляді:

$$a_j = \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} \quad (j = \overline{1, m});$$

$$a_0 = \bar{y} - \sum_j \hat{a}_j \bar{x}_j.$$

22. Тіснота зв'язку загального впливу всіх пояснювальних змінних на залежну визначається коефіцієнтами детермінації і множинної кореляції. Коефіцієнт детермінації без урахування кількості ступенів свободи

$$\bar{R}^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y};$$

з урахуванням кількості ступенів свободи

$$R^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y} \cdot \frac{n-1}{m-1}.$$

Альтернативні залежності для обчислення коефіцієнта детермінації можна записати так:

1) $R^2 = \dfrac{\sigma_y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_y^2}$; 2) $R^2 = 1 - \dfrac{|r_{xx}|}{R_{11}}$;

3) $R^2 = \beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2} + \beta_3 r_{yx_3} + \ldots + \beta_m r_{yx_m}$.

Формули 2) і 3) доцільно використовувати в тому разі, коли для оцінювання параметрів економетричної моделі застосовується 1МНК для нормалізованих даних.

23. Коефіцієнт детермінації показує, на скільки процентів варіація залежної змінної визначається варіацією пояснювальних (незалежних) змінних.

Коефіцієнт кореляції є інваріантною оцінкою коефіцієнта детермінації. Його завжди можна дістати як функцію від R^2, тобто $R = \sqrt{R^2}$.

Коефіцієнт кореляції характеризує тісноту зв'язку між залежною і пояснювальною змінними.

24. Значення коефіцієнта детермінації і кореляції для багатофакторної залежності належать множині:

$R^2 \in]\,0, 1\,[$;
$R \in]\,0, 1\,[$.

Чим ближчі ці значення до 1, тим істотніший зв'язок між змінними економетричної моделі. Отже, коефіцієнти детермінації і кореляції можна розглядати як характеристики, що визначають адекватність (достовірність) економетричної моделі.

25. Оскільки коефіцієнти детермінації і кореляції є вибірковими характеристиками, то їх числові значення також перевіряються на значущість згідно зі статистичними гіпотезами. При цьому t-критерій для перевірки значущості коефіцієнта кореляції обчислюється так:

$$t_r = \frac{R\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-R^2}}.$$

Якщо значення цього критерію більше за критичне (табличне) при вибраному рівні довіри і ступені свободи $n - m$, то відповідний коефіцієнт кореляції (детермінації) є достовірним.

26. Гіпотеза про істотність зв'язку між залежною і незалежною змінними може бути перевірена з допомогою F-критерію:

$$F = \frac{\sigma^2_{\text{регр}}}{\sigma^2_u},$$

або, у матричному вигляді:

$$F = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y} \cdot \frac{n-1}{m-1}.$$

Альтернативна формула для його обчислення така:

$$F = \frac{R^2/(m-1)}{(1-R^2)/(n-m)}.$$

Фактичне значення F-критерію порівнюється з табличним для ступенів свободи $m - 1$, $n - m$ та вибраного рівня довіри. Якщо $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то гіпотеза про істотність зв'язку між залежною і пояснювальною змінними підтверджується, у протилежному разі — відхиляється.

27. Частинні коефіцієнти кореляції, так само як і парні, характеризують тісноту зв'язку за умови, що інші незалежні змінні сталі. Значення їхні можна визначити за допомогою алгебраїчних доповнень до елементів матриці r (парних коефіцієнтів кореляції)

$$r_{kj} = -\frac{R_{kj}}{\sqrt{R_{kk}R_{jj}}},$$

де R_{kj} — алгебраїчне доповнення до елемента матриці r_{kj}; R_{kk}, R_{jj} — алгебраїчні доповнення до відповідних діагональних елементів.

28. Перевірку гіпотези про значущість параметрів економетричної моделі можна виконати за t-критерієм:

$$t_j = \frac{|\hat{a}_j|}{\sqrt{\sigma^2_u c_{jj}}}, \quad \text{або} \quad t_j = \frac{|\hat{a}_j|}{S_{\hat{a}_j}},$$

де $S_{\hat{a}_j}$ — стандартна похибка оцінок параметрів моделі.

Обчислене значення t-критерію порівнюється з табличним для вибраного рівня довіри і $n - m$ ступенів свободи. Якщо $t_{факт} > t_{табл}$, то відповідна оцінка параметра економетричної моделі є достовірною.

29. На основі t-критерію і стандартної похибка будуються граничні довірчі інтервали для оцінок параметрів моделі:

$$a_j = \hat{a}_j \pm t_{(\alpha)} \cdot S_{\hat{a}_j} .$$

4.15. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення економетричної моделі.

4. Назвіть етапи побудови економетричної моделі.

3. Що означає специфікація моделі?

4. Коли для оцінювання параметрів моделі можна застосувати 1МНК?

5. Запишіть оператор оцінювання 1МНК. Як його можна дістати?

6. Які властивості повинні мати оцінки параметрів економетричної моделі?

7. Як визначити зміщення оцінки 1МНК?

8. Як обчислити матрицю коваріацій параметрів моделей?

9. Запишіть формулу визначення дисперсії залишків.

10. Що означає обгрунтованість оцінки?

11. Як визначити ефективність оцінки?

12. Використовуючи оператор оцінювання 1МНК, знайдіть оцінки параметрів моделі $Y = a_0 + a_1 X + u$, якщо задано вектори Y і X, що характеризують відповідно виторг, тис. грн, і обсяг інвестицій, тис. грн.

Виторг, тис. грн	Y	5	7	6	9	10	8	11	12
Обсяг інвестицій, тис. грн	X	3	4	3	5	6	4	8	8

13. Визначіть вектор коваріації параметрів моделі, базуючись на результатах завдання 12.

14. Порівняйте значення оцінок стандартної помилки. Чи мають зміщення оцінки параметрів?

15. Знайдіть оцінки параметрів 1МНК, виходячи з даних завдання 12, коли приєднується ще одне спостереження

Y	13
X	9

16. Знайдіть оцінки параметрів моделі 1МНК, виходячи з даних завдання 12, коли приєднуються ще два спостереження

Y	13	15
X	9	10

17. Використовуючи оцінки параметрів моделі завдань 12, 15 і 16, визначіть величину зміщення оцінок.

18. Знайдіть стандартні похибки оцінок параметрів моделей завдання 16 і порівняйте їх з похибками оцінок завдання 14.

19. Покажіть, чи будуть оцінки параметрів моделей, що обчислені в завданні 16, обґрунтованими.

20. Порівняйте дисперсії оцінок завдань 12, 15, 16 і визначіть, які з оцінок є ефективними.

21. Сформулюйте алгоритм покрокової регресії.

22. Чим відрізняються коефіцієнти парної та частинної кореляції?

23. Запишіть співвідношення між коефіцієнтами кореляції і детермінації.

24. Як визначаються дисперсія залишків, загальна дисперсія і дисперсія регресії? Який між ними зв'язок?

25. Як визначається F-критерій? Для чого він застосовується?

26. Покажіть залежність між F-критерієм і R^2.

27. Як оцінити достовірність коефіцієнта кореляції?

28. Доведіть, чому для визначення значущості параметрів моделі можна застосувати t-критерій.

29. Як обчислюється t-критерій?

30. Що таке стандартна похибка оцінок параметрів моделі? Наведіть альтернативні формули для її обчислення.

31. Як визначити довірчі інтервали для параметрів моделі?

32. Економетрична модель, що характеризує залежність між середньомісячною зарплатою $\hat{Y}$ і продуктивністю праці X_1 та коефіцієнтом плинності робочої сили X_2, має вигляд

$$\hat{Y} = 227{,}48 + 2{,}95X_1 - 0{,}22X_2 .$$

Дайте оцінку параметрів цієї моделі за умови, що всі її змінні подані у нормалізованому вигляді:

$$x_{ij}^{*} = \frac{x_{ij} - \bar{x}}{\sigma_{x_j}}; \quad y_i^{*} = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y},$$

коли відомі стандартні (середньоквадратичні) відхилення:

$$\sigma_{x_1} = 21{,}58;$$

$$\sigma_y = 4{,}42;$$

$$\sigma_{x_2} = 4{,}49.$$

33. Кореляційна матриця для змінних завдання 12 має вигляд:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}63 & -0{,}39 \\ 0{,}63 & 1 & -0{,}57 \\ -0{,}39 & -0{,}57 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дайте характеристику цієї матриці. Використовуючи дані завдання 12, обчисліть множинний коефіцієнт кореляції і детермінації.

34. Знайдіть дисперсію залишків для моделі (4.72), коли вектор залишків

$$u = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -16{,}2 \\ 1{,}4 \\ 13{,}5 \\ -12{,}7 \\ 10{,}3 \\ 16{,}1 \\ 24{,}3 \\ -10{,}8 \\ -28{,}8 \end{pmatrix}.$$

35. Згідно з даними завдань 13 і 14 обчисліть стандартні похибки оцінок параметрів моделі.

36. Використовуючи дані завдання 15, знайдіть t-критерій для оцінювання статистичної значущості оцінок параметрів моделі (4.72) і порівняйте їх з табличними.

37. Побудуйте інтервали довіри для параметрів моделі (4.72).

38. Наведіть альтернативну формулу для обчислення F-критерію на основі R^2. Чи можна згідно з цим критерієм відкинути чи прийняти нульову гіпотезу щодо істотності зв'язку за моделлю (4.72)?

4.15. Основні терміни і поняття

Екзогенні змінні • Ендогенні змінні • Пояснювані змінні • Пояснювальні змінні • Предетерміновані змінні • Специфікація моделі • Метод найменших квадратів (1МНК) • Оператор оцінювання • Незміщеність оцінок • Обґрунтованість оцінок • Ефективність оцінок • Інваріантність оцінок • Зміщення • Помилки специфікації • Інтервальний прогноз • Точковий прогноз • Похибка прогнозу • F-критерій • t-критерій • Значущість економетричної моделі • Значущість оцінок параметрів моделі • Залишкова дисперсія • Стандартна похибка параметрів моделі • Інтервали довіри • Система нормальних рівнянь • Стандартна похибка • Покрокова регресія • Коефіцієнт кореляції • Нормалізовані змінні • Парний коефіцієнт кореляції • Частинний коефіцієнт кореляції • Коефіцієнт детермінації • Кореляційна матриця • Дисперсія • Кількість ступенів свободи • Виробнича функція Кобба—Дугласа

Розділ 5

ЗАГАЛЬНА ЛІНІЙНА ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ІЗ ФІКТИВНИМИ ЗМІННИМИ

5.1. Сутність фіктивних змінних

У попередньому розділі було розглянуто методи побудови загальної економетричної моделі, до якої включались лише ті змінні, які можна виміряти кількісно. Проте серед економічних чинників, що розглядаються як пояснювальні змінні моделі, можуть бути й такі, які не можна виміряти кількісно, але вони істотно впливають на рівень зв'язку між залежною і пояснювальними змінними.

Такі змінні дістали назву ***фіктивних змінних (dummy—змінних)***. Ці змінні можуть істотно розширити сферу застосування лінійних моделей, включивши їх до матриці пояснювальних змінних X. Фіктивні зміни є певним чином сконструйованими змінними, що описують якісні показники, ознаки, а також відображають змінні в таких чинниках, як ефект зрушення в часі (сезонність) або змінюваність в просторі, або ж навіть включаються як змінна, що замінює інші пояснювальні змінні, яких раніше не було в моделі.

Наприклад, будуючи модель споживання для населення в період кризи і в період зростання, ми можемо очікувати, що ця модель матиме зрушення вниз під час кризи щодо періоду зростання.

Багато економетричних моделей попиту на різні товари можуть мати сезонні коливання, що необхідно враховувати через фіктивні змінні.

Заробітна плата працюючих може імпульсивно змінюватись через зміну політичної влади, що спостерігалось в Україні. Ці коливання також можна врахувати, включивши до моделі фіктивні змінні.

Просторові зрушення залежностей можна спостерігати, аналізуючи економетричні моделі, побудовані для різних регіонів країни, які різняться економічною структурою або перспективами на майбутнє.

Якісні чинники, такі як стать, сімейний стан, належність до певних соціальних або професійних груп, нерідко відіграють істотну роль у визначенні економічної оцінки зв'язку, і тому вони мають включатись у процес оцінювання.

Іноді доводиться стикатися з вимірюванням зв'язку на основі таких важливих змінних, як дохід, вік, але дані про них використовуються, агреговані за певний проміжок часу. У цьому разі доцільно ввести фіктивні змінні, які враховуватимуть особливості агрегованих змінних.

✓***Приклад 5.1.*** Розглянемо споживання пива та безалкогольних напоїв щомісяця протягом року. Очевидно, що в холодну пору року споживання цих напоїв зменшується, а в теплу пору року воно значно зростає. Звідси, використовуючи інформацію, нагромаджувану впродовж року, необхідно певним чином відобразити цей рівень споживання під час побудови функції споживання пива та безалкогольних напоїв. Запишемо функцію споживання C від доходу Y для кожного з періодів так:

1) для холодної пори року:

$$C = a_0^{(1)} + a_1 Y + u; \tag{5.1}$$

2) для теплої пори року:

$$C = a_0^{(2)} + a_1 Y + u, \tag{5.2}$$

де $a_0^{(2)} > a_0^{(1)}$.

При цьому в моделі припускається, що гранична схильність до споживання є спільною для обох періодів, тобто значення параметра a_1 в обох моделях є однаковим. Коли ці параметри різні, то коригується вільний член так, щоб модель відповідала статистичній інформації.

Якщо значення параметра a_1 однакові в обох моделях, їх можна об'єднати в одну:

$$C = a_0^{(1)} X_1 + a_0^{(2)} X_2 + a_1 Y + u, \tag{5.3}$$

де X_1 і X_2 — фіктивні змінні, які можна задати так:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{у теплі місяці року;} \\ 0 & \text{у холодні місяці року;} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{у холодні місяці року;} \\ 0 & \text{у теплі місяці року.} \end{cases}$$

У загальній лінійній моделі матриця пояснювальних змінних X набере вигляду:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 1 & 0 & y_4 \\ 1 & 0 & y_5 \\ 1 & 0 & y_6 \\ 1 & 0 & y_7 \\ 1 & 0 & y_8 \\ 1 & 0 & y_9 \\ 0 & 1 & y_{10} \\ 0 & 1 & y_{11} \\ 0 & 1 & y_{12} \end{pmatrix}.$$

Увівши умовні математичні сподівання до обох частин моделі (5.3), дістанемо окремі моделі для теплого та холодного сезонів:

$$M(C/X_2 = 0) = \hat{a}_0^{(1)} + \hat{a}_1 Y \quad (X_2 = 0);$$
$$M(C/X_2 = 1) = \hat{a}_0^{(2)} + \hat{a}_1 Y \quad (X_2 = 1).$$

У цих рівняннях перший параметр (5.1) є оцінкою вільного члена для холодної, а в (5.2) — для теплої пори року. При цьому оцінка параметра $\hat{a}_1$ є загальною граничною схильністю до споживання для всього періоду.

5.2. Особливості оцінювання параметрів економетричної моделі з фіктивними змінними

Якщо в економетричну модель введено фіктивні змінні так, як у правій частині рівняння (5.3), то застосування звичайної процедури побудови моделі 1МНК, що автоматично визначає вільний член, призведе до порушення процесу оцінювання.

Так, будуючи матрицю пояснювальних змінних, ми маємо включити до неї перший стовпець, який містить n одиниць. Це означає, що перші три вектори матриці X будуть лінійно залежними, оскільки, додавши другий вектор матриці X до третього (фіктивні змінні), дістанемо перший.

Звідси випливає, що матриця $(X'X)$ буде виродженою. Проте коли інші пояснювальні змінні комбінуються з фіктивними, то за рахунок неточності обчислень (навіть за допомогою ПЕОМ) визначник матриці $X'X$ може не дорівнювати нулю. Тоді буде знайдено всі кількісні характеристики взаємозв'язку, але вони суперечитимуть апріорному змісту і будуть далекі від реальних.

Якщо економетрична модель має містити вільний член, то єдиний вихід — скористатися іншою специфікацією моделі:

$$C = b_1 + b_2 X_2 + a_2 Y + u, \tag{5.4}$$

де $X_2 = \begin{cases} 1 & \text{— щомісяця теплої пори року;} \\ 0 & \text{— щомісяця холодної пори року.} \end{cases}$

Записавши цю модель через умовні математичні сподівання, дістанемо:

$$M(C / X_2 = 0) = \hat{b}_1 + \hat{a}_1 Y,$$
$$M(C / X_2 = 0) = \hat{b}_1 + b_2 + \hat{a}_1 Y.$$

Порівнюючи цей результат з попереднім, бачимо, що $b_1 = a_0^{(1)}$ — це вільний член для моделі холодного періоду, а $\hat{b}_1 + \hat{b}_2 = a_0^{(2)}$ — вільний член для моделі теплого періоду року і відповідно $\hat{b}_2$ — це оцінка параметра, що характеризує різницю між вільними членами моделей для холодного та теплого періодів.

5.3. Перевірка значущості оцінок параметрів моделі при фіктивних змінних

Нехай за специфікацією моделі (5.4) побудовано розрахункову економетричну модель:

$$\hat{C} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 X_2 + \hat{a}_2 Y. \tag{5.5}$$

Щоб перевірити статистичну значущість оцінок параметрів цієї моделі, необхідно передусім оцінити статистичну значущість параметрів при фіктивних змінних.

Значущість $\hat{b}_1$ встановлюється в результаті перевірки того факту, що вільний член моделі для холодної пори року значно відрізняється від нуля. Щоб переконатись у значущості оцінки параметра $\hat{b}_2$, необхідно перевірити існування деякої значної різниці між вільними членами моделей споживання для холодної та теплої пір року. Перевіряючи, чи буде вільний член, що відповідає моделі споживання для теплої пори року, істотно відрізнятися від нуля, маємо вибрати гіпотезу $\hat{b}_0 + \hat{b}_1 = 0$. Для цього потрібно виконати додавання $\hat{b}_0 + \hat{b}_1$ і порівняти цю суму з оціненою стандартною похибкою $\mathrm{var}\left(\hat{b}_0 + \hat{b}_1\right) = \sqrt{\mathrm{var}\left(\hat{b}_0\right) + \mathrm{var}\left(\hat{b}_1\right) + 2\,\mathrm{cov}\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1\right)}$, де доданки, що містяться під коренем, є елементами матриці коваріації оцінок параметрів $\hat{b}_0$ та $\hat{b}_1$.

Практика економетричних досліджень має численні приклади застосування фіктивних змінних для кількісного вимірювання зв'язків зі зсувом. Так, аналізуючи бюджет Англії, Стоун [2] розглядав вибірку, куди входили слуги та робітники, що зайняті ручною працею. За цією вибіркою він досліджував споживчі витрати залежно від доходів. Фіктивні змінні вводились для того, щоб врахувати високий рівень споживчих витрат слуг порівняно з робітниками, зайнятими ручною працею, тобто функція споживчих витрат першої групи паралельно зсунута вгору.

Графіки цих функцій наведено на рис. 5.1.

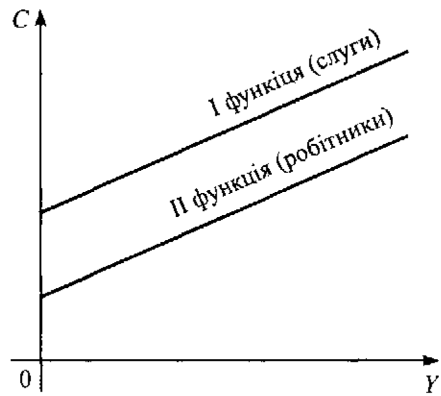


Рис. 5.1. Функція споживання для слуг та робітників

Оксфордська економетрична модель для Англії містить у деяких рівняннях фіктивну змінну для того, щоб відобразити різницю у формуванні заробітної плати [2].

В економетричній моделі Японії, побудованій Клейном і Шанкаї, 1930—1936 і 1951—1958 роки об'єднано в один період, але в кожне з рівнянь введено фіктивну змінну для врахування можливих структурних зрушень між першим і другим періодами [2].

У таких ситуаціях структурні зрушення відіграють іноді велику роль у визначенні зв'язку.

Доцільність включення фіктивних змінних для економіки України може бути пов'язана з об'єднанням інформації за роки існування України як незалежної країни. Так, до 1996 року грошовою одиницею були карбованці, з 1996 року — гривні. Аналіз загальної динаміки можливий в разі введення фіктивних змінних, коли за роками до 1996 року в матрицю X потрібно ввести нуль, далі — одиницю.

5.4. Моделі з кількома фіктивними змінними (ANCOVA-модель)

Іноді в економетричну модель потрібно ввести дві або кілька фіктивних змінних. Наприклад, необхідно визначити рівень споживання на основі бюджету споживачів за кожний із кількох кварталів, коли споживання товару має враховувати сезонні коливання, пов'язані з порами року, та відмінності у споживанні різних соціальних груп.

Якщо взяти чотири сезони і три соціальні групи, то економетричну модель з фіктивними змінними можна подати так:

$$\begin{aligned} C = \alpha_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 + \alpha_4 Q_4 + \beta_2 S_2 + \beta_3 S_3 + \\ + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_m X_m + u, \end{aligned} \qquad (5.6)$$

$$Q_r = \begin{cases} 1, \text{ якщо спостереження стосується кварталу } r,\ r = 2, 3, 4; \\ 0 \text{ — в інших випадках,} \end{cases}$$

$$S_k = \begin{cases} 1, \text{ якщо спостереження стосується соціальної групи } k,\ k = 2,3; \\ 0 \text{ — в інших випадках,} \end{cases}$$

а X_j, $j = \overline{1,m}$ — вектори економічних показників, таких як дохід, індекси цін, що застосовуються як пояснювальні змінні моделі.

Модель (5.6) містить як фіктивні, так і кількісні пояснювальні змінні. Такі економетричні моделі називають ***ANCOVA-моделями*** (моделями коваріаційного аналізу).

Зауважимо, що необхідно включити по одній фіктивній змінній з кожної групи, якщо ми будемо оцінювати вільний член моделі. Цього можна досягти за рахунок іншої інтерпретації коефіцієнтів α та β. Якщо спостереження стосується бюджету сім'ї з першої соціальної групи у першому кварталі, то всі фіктивні змінні дорівнюють нулю і вільний член дорівнює α_1. Для бюджету сім'ї з тієї самої соціальної групи, але для II кварталу, вільний член дорівнюватиме $\alpha_1 + \alpha_2$, а для сімейного бюджету сім'ї, яка належить до третьої соціальної групи і для III кварталу він буде $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_3$ і т. д.

Отже, α_2, α_3 і α_4 відображають різницю в сезонних коливаннях порівняно з першим кварталом, а β_3, β_4 — різницю в моделюванні споживання для різних соціальних груп порівняно з першою соціальною групою. Тому сезонні відмінності для II і IV кварталу дає нам різниця $\alpha_4 - \alpha_2$, а відмінності для різних соціальних груп, наприклад третьої та другої — різниця $\beta_3 - \beta_2$.

Такий підхід застосовний також, коли йдеться про оцінювання параметрів виробничої функції. Якщо потрібно, скажімо, побудувати виробничу функцію для цементної промисловості України, коли відома статистична інформація про випуск цементу та первинні виробничі ресурси за n років для s цементних підприємств, то маємо врахувати як ефект часу, так і «просторовий ефект» (тобто ефект відповідності даних за різними підприємствами). Тоді виробничу функцію можна специфікувати у вигляді:

$$Y = \alpha_1 + \alpha_2 T_2 + \ldots + \alpha_n T_n + \beta_2 F_2 + \ldots + \beta_S F_S + a_1 X_1 + a_2 X_2 + u, \qquad (5.7)$$

де Y — вектор виробництва цементу для всіх підприємств за всі роки;

X_1 — вектор витрат основного капіталу для всіх підприємств за всі роки;

X_2 — вектор витрат робочої сили для всіх підприємств за всі роки;

a_1, a_2 — параметри моделі, які характеризують вплив відповідно ресурсів X_1 та X_2;

T_i та F_s — фіктивні змінні, що мають враховувати відповідно часовий та просторовий чинники:

$$T_i = \begin{cases} 1 \text{ — у році } i \text{ для кожного підприємства, } i = \overline{2, n}; \\ 0 \text{ — в інші роки;} \end{cases}$$

$$F_s = \begin{cases} 1 \text{ — для підприємства } s \text{ щороку, } s = \overline{2, r}; \\ 0 \text{ — для інших підприємств.} \end{cases}$$

Це рівняння відповідає гіпотезі, що всі підприємства однаково реагують на зміни витрат первинних виробничих ресурсів. Водночас вони мають паралельні зсуви своїх виробничих функцій за рахунок відмінностей окремих підприємств з виробництва цементу та за рахунок відмінностей одного й того самого підприємства в різні часові періоди. Ці відмінності враховує вільний член економетричної моделі, у формуванні якого беруть участь фіктивні змінні.

5.5. Моделі ANOVA та взаємодія фіктивних змінних

У наведених раніше економетричних моделях ні модель споживання, ні виробнича функція не мають взаємодії між різними групами фіктивних значень: ефект від будь-якої пари значень фіктивних змінних дорівнює сумі двох окремих ефектів. Проте на практиці часто трапляються такі залежності, коли існує зв'язок між різними якісними ознаками економетричних процесів та явищ. Фіктивні змінні, що представляють ці якісні ознаки в моделі, будуть мати взаємозв'язок, і це можна врахувати введенням додаткових фіктивних змінних.

Економетричні моделі, що містять у правій частині лише фіктивні змінні, називають **ANOVA-моделями** (моделями дисперсійного аналізу).

Розглянемо залежність між кількістю прочитаного професійно орієнтованого матеріалу залежно від рівня освіти. На таку залежність може впливати і стать людини. Виділимо три рівні освіти:

I — молодший спеціаліст;

II — бакалавр;

III — магістр.

Жіноча стать — I і чоловіча — II.

Покажемо, як доцільно вводити фіктивні змінні в економетричну модель, коли пояснювальні змінні — рівень освіти та стать (табл. 5.1).

У табл. 5.1 X_1 означає змінну, що відповідає звичайному вільному члену; X_2 і X_3 — двом рівням освіти; X_4 — враховує стать, а X_5 та X_6 відбивають зміни вільного члена, зумовлені водночас відмінностями статі та рівня освіти. Значення X_5 і X_6 знайдено як добуток на X_4 відповідно значень змінних X_2 і X_3.

Таблиця 5 1

ФІКТИВНІ ЗМІННІ

Рівень освіти	Стать людини	Фіктивні змінні					
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
I	I	1	0	0	0	0	0
I	II	1	0	0	1	0	0
II	I	1	1	0	0	0	0
II	II	1	1	0	1	1	0
III	I	1	0	1	0	0	0
III	II	1	0	1	1	0	1

Економетрична модель у такому випадку набере вигляду:

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_6 X_6 + u. \qquad (5.8)$$

Запишемо математичні сподівання кількості прочитаного матеріалу залежно від різних співвідношень ознак, що стосуються рівня освіти та статі.

$$M(Y/\text{I},\text{I}) = \beta_1;$$
$$M(Y/\text{I},\text{II}) = \beta_1 + \beta_4;$$
$$M(Y/\text{II},\text{I}) = \beta_1 + \beta_2;$$
$$M(Y/\text{II},\text{II}) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 + \beta_5;$$
$$M(Y/\text{III},\text{I}) = \beta_1 + \beta_3;$$
$$M(Y/\text{III},\text{II}) = \beta_1 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_6.$$

Наведена схема дає змогу врахувати взаємний вплив фіктивних змінних. Отже, різний ефект, зумовлений різною статтю, для першого рівня освіти вимірюється величиною β_4, для другого рівня — $\beta_4 + \beta_5$, для третього — $\beta_4 + \beta_6$. Відмінності між другим та першим рівнями освіти вимірюються величиною β_2, третім та першим — β_3, а між третім та другим — величиною $\beta_3 - \beta_2$. Для осіб, що належать до чоловічої статі, ті самі відмінності можна визначити так:

$$\beta_2 + \beta_5, \quad \beta_3 + \beta_6, \quad \beta_3 + \beta_6 - \beta_2 - \beta_5.$$

5.6. Фіктивна залежна змінна

Досі ми розглядали лише ті фіктивні змінні, які вводяться у праву частину економетричної моделі, тобто стосуються тільки пояснювальних змінних. Але існують і такі взаємозв'язки, коли залежна змінна не вимірюється кількісно, а є якісним показником соціально-економічного процесу.

Нехай, наприклад, потрібно дослідити наявність автомобіля в сім'ї чи його відсутність залежно від певних чинників: доходу, кількості членів сім'ї, терміну її існування і т. ін. У цьому разі залежна змінна набуває лише двох значень: вона дорівнює одиниці за наявності автомобіля, нулю — за його відсутності. Якщо ми побудуємо економетричну модель для такої залежності, то розраховане значення Y для заданих значеннях X_j можна тлумачити як оцінку умовної ймовірності Y для фіксованих X_j. Це економетричне моделювання присвячене вивченню динаміки соціально-економічних систем на основі аналізу соціологічних та деяких інших змінних одночасно з традиційними економетричними змінними.

До економетричних моделей, в яких залежна змінна є фіктивною, не можна застосовувати оцінки — 1МНК, бо вони не матимуть ознак найкращих лінійних незміщених оцінок (BLUE). Тому для оцінювання параметрів моделі в цьому залучають інші методи.

5.6.1 Лінійна ймовірнісна модель (LPM-модель). Розглянемо економетричну модель, в якій залежна змінна є фіктивною, а пояснювальні змінні можуть бути як кількісними, так і якісними.

Скажімо, потрібно проаналізувати зв'язок між результатами зовнішньоекономічної діяльності країни, ВВП та індексом цін внутрішнього і зовнішнього ринку.

Результати зовнішньоекономічної діяльності виразимо через додатне та від'ємне сальдо. У цьому разі залежна змінна Y має два можливих стани:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{— додатне сальдо;} \\ 0 & \text{— від'ємне сальдо.} \end{cases}$$

Економетрична модель подається у вигляді:

$$Y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_1 + \hat{a}_2 X_2 + b_1 D_1 + u. \qquad (5.9)$$

Модель виду (5.9) ***називається лінійною ймовірнісною моделлю (LPM-модель).***

Назву цієї моделі пояснимо на прикладі простої економетричної моделі

$$Y = a_0 + a_1 X + u. \tag{5.10}$$

У моделі (5.10) з огляду на те, що $M(u) = 0$, середнє очікуване значення Y (умовне математичне сподівання Y) при заданому X визначається співвідношенням:

$$M\left(Y/X = x\right) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X.$$

Враховуючи, що Y набуває значення одиниця або нуль, для (5.10) можна записати:

$$p\left(Y = 1/X\right) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X. \tag{5.11}$$

А це означає, що застосування 1МНК до моделей LPM має певні обмеження.

1. Залишки u_i в даних моделях не є випадковими величинами, а найвірогідніше мають біноміальний розподіл.

Так, для i-го спостереження знайдемо $\hat{u}_i = Y_i - a_0 - a_1 X$, але

$$u_i = 1 - a_0 - a_1 X \qquad \text{при } y_i = 1;$$
$$u_i = -a_0 - a_1 X \qquad \text{при } y_i = 0.$$

Це обмеження стосовно отримання оцінок—1МНК дуже важливе, коли перевіряються нульові гіпотези щодо значущості характеристик зв'язку. Але зі значним збільшенням сукупності спостережень біноміальний розподіл наближається до нормального і дане обмеження буде неістотним.

2. Залишки u_i можуть бути гетероскедастичними, тобто дисперсія залишків може змінюватись для кожного спостереження:

$$D(u_i) = M\left(u_i - M(u_i)\right)^2 = M\left(u_i^2\right), \text{ оскільки } M(u_i) = 0;$$

$$D(u_i) = M\left(u_i^2\right) = \left(-a_0 - a_1 x_i\right)^2 \cdot p\left(y_i = 0\right) + \left(1 - a_0 - a_1 X\right)^2 p\left(y_i = 1\right) =$$
$$= \left(-a_0 - a_1 x_i\right)^2 \left(1 - p\left(y_i = 1\right) + \left(1 - a_0 - a_1 x_i\right)^2 p\left(y_i = 1\right)\right) =$$
$$= \left(-a_0 - a_1 x_i\right)^2 \left(1 - a_0 - a_1 x_i\right) + \left(1 - a_0 - a_1 x_i\right)^2 \left(a_0 - a_1 X_1\right) =$$
$$= \left(a_0 + a_1 x_i\right)\left(1 - a_0 - a_1 x_i\right) = p\left(y_i = 1\right)\left(1 - p\left(y_i = 1\right)\right).$$

Отже, дисперсія залишків залежить від імовірностей відповідних значень y_i, які, у свою чергу, є функціями від x_{ij}, тобто залишки не є випадковими величинами. У цьому разі для оцінювання параметрів моделі доцільно скористатись узагальненим методом найменших квадратів.

3. Розрахункові значення залежної змінної, здобуті на основі моделей (5.9), (5.10), можуть бути менші від нуля або більші від одиниці, що суперечить імовірності (5.11). Це обмеження є істотним і суперечить застосуванню оцінок — 1МНК.

4. Важливою перешкодою до застосування оцінок — 1МНК до моделі LPM є зміст характеристик взаємозв'язку. Так, збільшення значення пояснюючої змінної X на одиницю (5.10) приведе до зміни значення Y на величину $\hat{a}_1$ незалежно від конкретного значення X. Це, безумовно, суперечить теоретичним і практичним висновками про спадну граничну ефективність.

Викладені щойно обмеження в застосуванні оцінок — 1МНК до LPM-моделей дають підстави для висновку: ***безпосереднє використання 1МНК приводить до великих похибок та необгрунтованих висновків. Тому в даному випадку його використання недоцільне.***

5.6.2. *Логістична модель з фіктивною залежною змінною (Logit-модель).* Щоб подолати недоліки LPM-моделей, необхідно використовувати такі моделі, для яких не буде порушуватись умова існування границь імовірності $0 \le p\left(Y = 1/X\right) \le 1$ і залежність між $p\left(Y = 1/X\right)$ та X не матиме лінійного характеру, а задовольнятиме закон спадної ефективності.

Ці умови задовольнятиме Logit-модель. У цій моделі ймовірність p_i запишеться в такому вигляді:

$$p_i = M\left(Y = 1/X_i\right) = \frac{1}{1 + e^{-(a_0 + a_1 X_i)}} = \frac{1}{1 + e^{-Z}}, \qquad (5.12)$$

де $Z_i = a_0 + a_1 X_i$.

З (5.12) випливає, що при $-\infty < Z < +\infty$ ніколи не порушується нерівність $0 \le p_i \le 1$. Крім того, залежність p_i від x_i не є лінійною функцією від параметрів a_0 і a_1. Але для оцінювання цих параметрів не можна застосовувати 1МНК.

Дану проблему можна розв'язати, записавши рівність:

$$1 - p_i = \frac{1}{1 + e^{Z_i}}. \qquad (5.13)$$

Поділивши (5.12) на (5.13), дістанемо:

$$\frac{p_i}{1-p_i}=\frac{1+e^{Z_i}}{1+e^{-Z_i}}=e^{Z_i}. \qquad (5.14)$$

Відношення $\frac{p_i}{1-p_i}$ є відношенням імовірностей, яке характеризує, у скільки разів $p(Y_i=1)$ більше за $p(Y_i=0)$.

Прологарифмувавши ліву та праву частини (5.14), знайдемо:

$$\ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)=Z_i=\hat{a}_0+\hat{a}_1X_i. \qquad (5.15)$$

Модель (5.15) називається ***Logit-моделлю***. Вона виражає логарифм відношення ймовірностей через лінійну функцію. Якщо $0\le p_i\le 1$, то $-\infty\le Z_i\le+\infty$. Якби ймовірності у виразі $\frac{p_i}{1-p_i}$ були відомі, то ця модель могла б тлумачитись як напівлогарифмічна і для її оцінювання можна було б використати 1МНК.

Оскільки p_i невідомі, то спочатку їх потрібно задати. Якщо використовуються групові дані, то ймовірності обчислюються так: $\tilde{p}_i=\frac{n_i}{n}$, де *n — кількість спостережень;* n_i *— кількість спостережень i-ї групи.* Тоді для оцінювання параметрів моделі можна застосувати узагальнений метод найменших квадратів, про який ітиметься в наступних розділах.

5.7. Фіктивні змінні в аналізі сезонних коливань

Фіктивні змінні відіграють досить важливу роль в коригуванні сезонних коливань. При цьому можливі два варіанти: ***по-перше***, фіктивні змінні дають змогу звільнитись від сезонних коливань у квартальних чи місячних часових рядах, використовуваних для побудови економетричної моделі; ***по-друге,*** побудувати економетричну модель на основі даних, серед яких є скориговані, а також не скориговані сезонні коливання. Розв'язок першої проблеми дає змогу порівняно легко розв'язати й другу проблему.

Відокремлення сезонних збурень для окремого часового ряду. Розглянемо квартальні спостереження над змінною Y.

Нехай y_{is} — значення змінної в s-му кварталі i-го року $\left(i = \overline{1,n}; \quad s = \overline{1,4}\right)$.

Визначимо матрицю фіктивних змінних, які описують сезонні зміни упродовж чотирьох кварталів. Ця матриця має $4n$ рядків та чотири стовпці:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.16)$$

Побудуємо рівняння залежної змінної Y із сезонними коливаннями, заданими матрицею D:

$$Y = DB + u,$$

де B — вектор параметрів моделі; u — вектор залишків.

Запишемо оператор оцінювання параметрів цієї моделі методом найменших квадратів:

$$\hat{B} = \left(D'D\right)^{-1} D'Y.$$

Тоді $u = Y - D\left(D'D\right)^{-1} D'Y$

або

$$u = AY, \qquad (5.17)$$

де $A = E - D\left(D'D\right)^{-1} D^{-1}$, тобто u задається як лінійне перетворення вектора Y. Зауважимо, що A — симетрична ідемпотентна матриця і $AD = 0$.

Значення вектора u не можна безпосередньо використовувати як значення для вилучення сезонних збурень з двох причин:

1) сума елементів вектора u дорівнює нулю;

2) елементи вектора u визначені як відхилення фактичних значень Y від квартальних середніх.

Отже, якщо вихідні дані залежної змінної містять тренд та циклічну складову, то це відіб'ється і на квартальних середніх, а відповідно, і на скоригованих даних.

Першу причину можна вилучити, якщо до значень вектора u додати середнє значення $\overline{Y}$ вектора Y.

Щоб вилучити другу причину, спробуємо подати значення вектора Y як суму чотирьох складових:

1) тренду;
2) циклічної складової;
3) сезонної складової;
4) випадкового збурення.

Тоді, будуючи модель для залежної змінної Y, скористаємося розширеною матрицею PD, яка крім раніше введених до неї фіктивних змінних містить перші P стовпців, що сформовані як порядкові номери спостережень сукупності в системі P, де P — номер кварталу $\left(P=\overline{1,4}\right)$.

Запишемо цю матрицю так:

$$
PD=\begin{pmatrix}
1 & 1^2 & \ldots & 1^P & 1 & 0 & 0 & 0\\
2 & 2^2 & \ldots & 2^P & 0 & 1 & 0 & 0\\
3 & 3^2 & \ldots & 3^P & 0 & 0 & 1 & 0\\
4 & 4^2 & \ldots & 4^P & 0 & 0 & 0 & 1\\
5 & 5^2 & \ldots & 5^P & 1 & 0 & 0 & 0\\
6 & 6^2 & \ldots & 6^P & 0 & 1 & 0 & 0\\
7 & 7^2 & \ldots & 7^P & 0 & 0 & 1 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
4n & (4n)^2 & \ldots & (4n)^P & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Якщо вектори, що були додані в матрицю D, позначити через матрицю P, то модель можна записати у вигляді:

$$
Y=PA+DB+u. \tag{5.18}
$$

Юргенсон [2] 1964 року довів, що коли матриці P і D сформовані належним чином, то A і B будуть найкращими незміщеними оцінками систематичної (тренду) та сезонної складових на основі застосування методу найменших квадратів. Тоді скориговані дані залежної змінної за рахунок сезонності будуть визначатись так:

$$Y_\varsigma = Y - DB \tag{5.19}$$

Оцінки параметрів моделі A і B можна дістати на основі блочного матричного оператора:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'P & P'D \\ D'P & D'D \end{bmatrix}^{-1} \begin{matrix} P'Y \\ D'Y \end{matrix}. \tag{5.20}$$

Звідси

$$\hat{B} = \left(D'MD\right)^{-1} D'MY,$$

де $M = E - P\left(P'P\right)^{-1} P'$.

Підставивши цей вираз у співвідношення (5.19), дістанемо:

$$Y_\varsigma = A^* Y,$$

де $A^* = E - D\left(D'MD\right)^{-1} D'M$.

Отже, здобутий вектор залежної змінної з вилученими сезонними коливаннями також можна подати у вигляді лінійного перетворення вихідного вектора Y. Зауважимо, що в цьому разі матриця A^* не буде симетричною, але лишиться ідемпотентною і задовольнятиме умову $A^*D = 0$.

5.8. Оцінювання економетричних залежностей

Оцінюючи економетричні залежності на основі квартальних або місячних даних, необхідно передусім з'ясувати, чи не дає змоги економічна теорія дістати такі змінні, які відразу ж можна включити до моделі. Проілюструємо це положення на прикладах.

✓***Приклад 5.2.*** Робітник щомісяця отримує заробітну плату, яка не містить сезонних коливань, але його споживчі витрати можуть мати ці коливання, і вони досягають свого максимуму у третьому кварталі через відпускні витрати. Щоб знайти залежність між споживчими витратами та заробітною платою, необхідно скоригувати квартальні витрати.

У цьому разі скориговані квартальні витрати можна дістати як функцію від доходу (зарплати) і подати реальні витрати як суму скоригованих витрат і сезонної складової.

Економетрична модель буде тоді моделлю реальних витрат від доходу та необхідної кількості сезонних фіктивних змінних. Але оскільки і сам дохід часто містить сезонні коливання, які не завжди можуть збігатися із сезонними коливаннями в споживчих витратах, то в цьому випадку модель реального споживання від доходу має містити споживчі витрати з вилученою сезонністю. До цієї моделі будуть включені необхідні фіктивні змінні, що відбивають сезонні коливання залежної змінної.

✓***Приклад 5.3.*** Приймаючи господарські рішення, фірма, визначаючи темп випуску продукції, часто користується «згладженими» значеннями середнього продажу. Тому до відповідної економетричної моделі необхідно включати реальне виробництво як функцію скоригованого на сезонність продажу.

Зауважимо, що в багатьох випадках, особливо на макрорівні, не можна сформулювати достатньо чіткі вказівки щодо того, які з даних — скориговані чи не скориговані — необхідно включати в економетричну модель, але на практиці проблема специфікації саме з цього боку не є непереборною.

Під час побудови економетричної моделі можна брати змінні із сезонним компонентом і для врахування цього компонента застосовувати фіктивні змінні, а можна спочатку скоригувати вихідні дані, вилучивши сезонний компонент, наприклад за допомогою ковзної середньої чи регресії на одну із матриць D або $(PD)'$.

Зауважимо, що коли сезонні коливання дуже сильні, тоді потрібно зосередитись на специфікації моделі і внести необхідні корективи.

5.9. Коваріаційний аналіз

У попередньому підрозділі ми ввели аналіз дисперсій, що дає змогу простежувати, як загальна сума квадратів відхилень розбивається на суму квадратів регресії, яка пояснюється множиною пояснювальних змінних, і суму квадратів залишків. Можна також показати, що суму квадратів регресії можна розбити також на окремі складові відхилень, зумовлені лише частиною пояснювальних змінних. Це особливо важливо, якщо використовуються групові дані спостережень.

Нехай маємо вибіркові дані y_{ik}, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$, де i — номер групи вихідних даних; k — номер спостереження у групі.

Для кожної з груп обчислено групові середні: $\bar{y}_i = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{p} y_{ik}$.

Важливо знати, чи суттєві відмінності між груповими середніми змінної Y. Звичайно, варіація змінної Y всередині групи відбиває природні характеристики стохастичної компоненти Y і може бути використана для оцінювання варіацій групових середніх.

Загальна варіація змінної Y складається із суми варіацій між групами і варіацій у межах груп:

$$\sum_{ik}(y_{ik}-\bar{y})^2 = \sum_{ik}\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 + \sum_{ik}(y_{ik}-\bar{y}_i)^2 , \qquad (5.21)$$

де $\bar{y} = \frac{1}{ns}\sum_{ik} y_{ik}$ — загальна середня.

Застосуємо критерій Фішера для перевірки значущості варіацій між груповими середніми:

$$F = \frac{\sum_i s(\bar{y}_i - \bar{y})^2 \Big/ (n-1)}{\sum_{ik} (y_{ik} - \bar{y}_i)^2 \Big/ n(s-1)} .$$

Оскільки групи спостережень формуються залежно від певних ознак змінної Y, то різниця між груповими середніми характеризує ефект групових різниць між значеннями Y за рахунок ознак групування, а також некерованих чинників.

Наприклад, розглядаються дві групи спостережень над змінними Y і X, де Y — залежна, X — пояснювальна змінна. Для кожної з груп можна побудувати регресію Y за X, тобто: $Y_1 = X_1 a + u_1$ і $Y_2 = X_2 a + u_2$ (рис. 5.2).

Фактичні дані змінної X для групи 2 значно більші, ніж для групи 1. Отже, звичайна різниця між груповими середніми буде грубою верхньою оцінкою ефекту групування, що на рис. 5.2 показано різницею d між паралельними лініями регресії. Якщо значення змінної X однакові для обох груп, то еліпси розміщуються вертикально один над одним і тоді різниця між $\bar{y}_2 - \bar{y}_1$ наближається до d. Зауважимо, що ефект групування оцінюється вільним членом регресії.

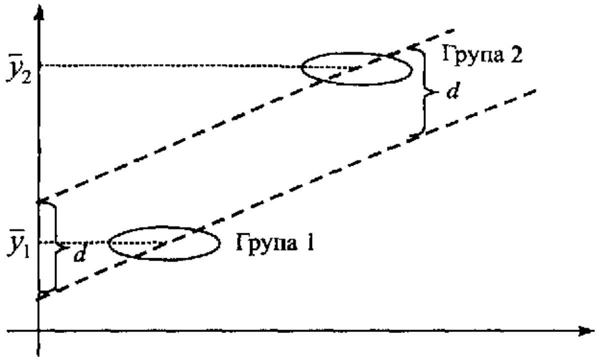


Рис. 5.2. До унаочнення ефекту групових різниць

Якщо кожна з груп має вплив некерованих чинників, то коваріаційний аналіз дає змогу знайти статистичні поправки на їхній вплив, бо некеровані чинники важко виміряти для окремих груп. Для проведення такого коригування природно припустити, що змінна X має одну й ту саму силу впливу на залежну змінну в обох групах. Але це припущення варто перевірити. Наприклад, чи мають виробничі функції цукру в різних регіонах України одну й ту саму граничну ефективність; чи показує функція попиту на певний товар однакові оцінки параметрів для різних соціальних груп; чи не змінюються оцінки параметрів моделі споживання для різних часових періодів?

На ці запитання можна відповісти, застосувавши коваріаційний аналіз у таких випадках:

1) для перевірки статистичної значущості різниці у вільних членів моделі;

2) для перевірки статистичної значущості різниці в оцінках інших параметрів моделі;

3) для перевірки статистичної значущості різниці в загальному вигляді співвідношень для груп, коли нехтують різницями між усіма оцінками параметрів моделі.

Нехай необхідно побудувати економетричну модель на основі вибіркових даних, що містять:

y_{ik} — i-те спостереження залежної змінної для k-ї групи $\left(i=\overline{1,n}\right)$, $\left(k=\overline{1,s}\right)$;

x_{ikj} — i-те спостереження j-ї пояснювальної змінної для k-ї групи $\left(j=\overline{1,r}\right)$;

$s-1$ — кількість некерованих пояснювальних змінних.

Розмір вибіркової сукупності спостережень включає $m = n \cdot s$ елементів вибірки.

Розглянемо найпростішу модель залежності на основі цих даних:

$$Y = XA + v. \tag{5.22}$$

У цій моделі:

Y — вектор залежної змінної розміру $m \times 1$;

X — матриця пояснювальних змінних розміру $m \times r$;

A — вектор оцінок параметрів моделі розміру $(r + 1) \times 1$; v — вектор залишків.

Перший стовпець матриці X, як і звичайно, складається з m одиниць і необхідний для визначення вільного члена моделі. Рівняння (5.22) фактично означає, що розбивати інформацію на групи недоцільно, бо варіація Y від варіації X приблизно однакова для кожної групи. Але дослідник не має впевненості стосовно того, що це так насправді, і хоче переконатися, чи не відбивається ефект групування на вільному члені моделі.

У цьому випадку будується загальніша модель:

$$Y = DB + XA + u, \tag{5.23}$$

де Y, X і A мають той самий зміст, що й раніше, B – вектор розміру $s \times 1$, а D — матриця фіктивних змінних розміру $ns \times (s - 1)$, u — вектор залишків.

$$D=\begin{pmatrix}
\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}n & \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} & \cdots & \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} \\
\left.\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right\}n & \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} & \cdots & \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} \\
\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}n & \left.\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right\} & \cdots & \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}n & \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} & \cdots & \left.\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\right\}
\end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

Кожний стовпець матриці D утворено із s підвекторів розміру n. Із моделі (5.23) випливають такі співвідношення для груп:

Група 1 $\qquad y_{1i} = \beta_2 x_{21i} + \ldots + \beta_j x_{j1i} + u_{1i} \qquad \left(i = \overline{1,n}\right)$

Група 2 $\qquad y_{2i} = (\alpha_2 + \beta_1) + \beta_2 x_{22i} + \ldots + \beta_j x_{j2i} + u_{2i}$

... ...

... ...

... ...

Група s $\qquad y_{si} = (\alpha_s + \beta_1) + \beta_2 x_{2si} + \ldots + \beta_j x_{jsi} + u_{si}$

Як бачимо, в моделі різняться тільки вільними членами, а параметри β_j спільні для всіх груп. Якщо ефект групування не позначається на значенні вільного члена, то $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_s = 0.$ У цьому разі необхідно перевірити гіпотезу, чи відрізняються α_s від нуля, на основі t-критерію.

Нехай за методом найменших квадратів дістали:

$$Y = X\hat{A} + v,$$

де, як і раніше, $\hat{A} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$, а v — вектор залишків за методом найменших квадратів. Помноживши наведене рівняння ліворуч на Y', дістанемо:

$$Y'Y = \hat{A}'X'X\hat{A} + v'v + 2\hat{A}'X'v,$$

або, після спрощення:

$$Y'Y = \hat{A}'X'Y + v'v, \tag{5.25}$$

оскільки $X'v = X'Y - X'X\hat{A} = 0$.

Аналогічно, застосовуючи метод найменших квадратів до (5.23), маємо:

$$Y = D\hat{\hat{B}} + X\hat{\hat{A}} + u,$$

де

$$\begin{pmatrix} \hat{\hat{B}} \\ \hat{\hat{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D'D & D'X \\ X'D & X'X \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D'Y \\ X'Y \end{pmatrix},$$

а подібне розбиття для (5.25) дає:

$$Y'Y = \hat{\hat{B}}'D'Y + \hat{\hat{A}}X'Y + u'u.$$

Різниця між залишковими сумами квадратів для (5.22) і (5.23) така:

$$v'v - u'u = \hat{\hat{B}}'D'Y + \hat{\hat{A}}X'Y - \hat{A}'X'Y .$$

Подамо коваріаційний аналіз для різних вільних членів у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

КОВАРІАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ

Джерело варіації	Сума квадратів	Ступені свободи	Дисперсії
X і D	Залишки: $u'u = Y'Y - \hat{\hat{B}}'D'Y - \hat{\hat{A}}X'Y = S_2$	$ns - s - r + 1$	$\dfrac{S_2}{(ns - s - r + 1)}$
D	Додатковий внесок: $v'v - u'u = \hat{\hat{B}}'D'Y + \hat{\hat{A}}'X'Y - \hat{A}'X'Y = S_1$	$s - 1$	$\dfrac{S_1}{s - 1}$
X	Залишки: $v'v = Y'Y - \hat{A}'X'Y = S$	$ns - r$	$\dfrac{S}{ns - r}$

Перевірка нульової гіпотези щодо вектора $\hat{B}$ здійснюється за допомогою F-статистики:

$$F = \frac{S_1/(s-1)}{S_2/(ns - s - r + 1)} \tag{5.26}$$

із $(s-1)$ та $(ns - s - r + 1)$ ступенями свободи.

Таку перевірку проведено за умови, що всі оцінки параметрів $\hat{a}_j$ і $\hat{b}_j$ $\left(j = \overline{1,m}\right)$ є спільними для економетричних моделей в усіх s групах. Але умову, що передбачає рівність елементів $\hat{a}_j$ для різних моделей, необхідно перевірити.

Припустимо тепер, що в економетричних моделях, які будуються для різних груп спостережень, будуть різними не лише вільні члени, а й інші оцінки параметрів. Кількісно це означає, що необхідно розглядати побудову моделі на основі статистичної інформації за окремими групами.

Тоді вибіркові дані для k-ї групи запишуться:

$$Y_k = \begin{pmatrix} y_{k1} \\ y_{k2} \\ \vdots \\ y_{kn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad X_k = \begin{pmatrix} 1 & x_{k21} & x_{ks1} \\ 1 & x_{k22} & x_{ks2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{k2n} & x_{ksn} \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1,s}).$$

Вектор одиниць включається в кожну з матриць пояснювальних змінних X_k.

Модель для групових даних запишеться у вигляді:

$$Y_k = X_k B_k + u_k, \quad k = \overline{1,s}. \tag{5.27}$$

Якщо s матриць пояснювальних змінних X_k об'єднати в блочно-діагональну матрицю

$$Z = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & X_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X_s \end{pmatrix},$$

то множину економетричних моделей можна записати рівнянням:

$$Y = ZC + u^{\alpha}, \tag{5.28}$$

де C — вектор розміру sr, що містить s підвекторів, а u^{α} — вектор залишків розміру ns, який містить s підвекторів u_k.

Вектор C в цьому разі визначається так:

$$C = (Z'Z)^{-1} Z'Y = \begin{pmatrix} (X_1'X_1)^{-1} & X_1'Y_1 \\ (X_2'X_2)^{-1} & X_2'Y_2 \\ \dots & \dots \\ (X_s'X_s)^{-1} & X_s'Y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_s \end{pmatrix}.$$

Залишкова сума квадратів моделі (5.28) дорівнює $u^{\alpha'} u^{\alpha}$. Ця сума квадратів менша за суму квадратів залишків $u'u$, наведених у таблиці 5.2, оскільки ми ввели в регресію додаткові параметри. Зміна залишкової суми квадратів свідчить про той внесок у суму квадратів регресії, який могли б зробити оцінки параметрів C_2, … C_s від однієї групи до іншої.

Чи є цей внесок істотним, статично значущим, можна перевірити за допомогою суми квадратів залишків $u^{\alpha'} u^{\alpha}$.

Згідно з розрахованими дисперсіями визначаються наведені далі F-критерії.

1. Критерій для оцінювання статистичної значущості вільних членів:

$$F_{(1)} = \frac{S_1/(s-1)}{S_2/(ns-s-r+1)}.$$

2. Критерій для перевірки статистичної значущості оцінок параметрів $b_2, \ldots, b_p$:

$$F_{(2)} = \frac{S_3/(sr-s-r+1)}{S_4/s(n-r)}.$$

3. Критерій для перевірки однорідності рівнянь для всіх груп:

$$F_{(3)} = \frac{(S_1+S_3)/r(s-1)}{S_4/s(n-r)}.$$

Дисперсії, які використовуються для визначення F-критеріїв, подамо в табл. 5.3

Таблиця 5.3

АНАЛІЗ КОВАРІАЦІЙ

Джерело варіації	Сума квадратів	Ступені свободи	Дисперсії
Z	Залишки: $u^{\alpha'} u^{\alpha} = Y'Y - B'Z'Y = S_4$	$s-(n-r)$	$\frac{S_4}{s(n-r)}$
Z	Додатковий внесок, що визначається зміною параметрів: $u'u - u^{\alpha'} u^{\alpha} = C'Z'Y - \hat{\hat{B}}D'Y - \hat{\hat{A}}X'Y = S_3$	$sr-s-r+1$	$\frac{S_3}{(sr-s-r+1)}$
X і D	Залишки: $u'u = Y'Y - \hat{\hat{B}}'D'Y - \hat{\hat{A}}'X'Y = S_2 = S_3 + S_4$	$ns-s-r+1$	$\frac{S_2}{(sn-s-r+1)}$
X і D	Додатковий внесок, що визначається зміною вільного члена: $v'v - u'u = \hat{\hat{B}}'D'Y + \hat{\hat{A}}'X'Y - \hat{\hat{A}}'X'Y = S_1$	$s-1$	$\frac{S_1}{(s-1)}$
X	Залишки: $v'v = Y'Y - \hat{A}'X'Y$	$ns-r$	

Якщо гіпотезу про однорідність оцінок параметрів $b_2, \ldots, b_s$, здобутих для різних груп даних, не буде відхилено, то можна перейти до перевірки відмінностей у вільних членах.

Нарешті можна виконати перевірку однорідності всіх моделей у цілому за всіма групами, порівнявши різниці залишкових сум квадратів $u'u - u^{\alpha'}u^{\alpha}$ з величиною $u^{\alpha'}u^{\alpha}$, якщо попередньо скоригувати кожну з них на відповідну кількість ступенів свободи.

З табл. 5.3 неважко знайти, що

$$u'u - u^{\alpha'}u^{\alpha} = C'Z'Y - \hat{A}'X'Y = S_1 + S_3$$

із $(sr - s + r + 1) + (s - 1) = r(s + 1)$ ступенями свободи.

Тоді $F_{(3)}$-критерій запишеться у вигляді:

$$F_{(3)} = \frac{(S_1 + S_3)\big/ r(s+1)}{S_4 \big/ s(n-r)}. \qquad (5.29)$$

Аналогічно можна перевіряти відмінності деякої підмножини параметрів для s груп спостережень.

Зауважимо, що це робиться через побудову моделі з обмеженнями, які враховують однорідність моделей, але водночас досліджується зміна решти параметрів для різних груп спостережень.

✓***Приклад 5.4.*** Нехай потрібно побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність споживання безалкогольних напоїв від доходів, використовуючи квартальні дані за п'ять років. На споживання безалкогольних напоїв впливають природно-кліматичні умови, тобто весняно-літній та осінньо-зимовий періоди, тому необхідно для побудови моделі використати фіктивні змінні.

Подамо ці дані в таблиці 5.4.

Таблиця 5.4

Роки	Квартали							
	1		2		3		4	
	Y, л	*X*, гр. од.	*Y*, л	*X*, гр. од.	*Y*, л	*X*, гр. од.	*Y*, л	*X* гр. од.
1	100	1500	120	1510	150	1505	110	1505
2	90	1510	130	1525	155	1540	95	1501
3	95	1505	125	1506	140	1530	100	1510
4	110	1520	135	1535	160	1545	105	1502
5	108	1530	132	1542	145	1520	100	1500
Всього			642	7618	750	7640	510	7518

Розв'язання. 1. Ідентифікуємо змінні.

Y_k — вектор споживання безалкогольних напоїв (літрів) на одну людину у кварталі k $\left(k = \overline{1,4}\right)$, залежна змінна;

X_k — вектор доходу на душу населення у кварталі k (грошових одиниць), пояснювальна змінна.

2. Специфікуємо моделі за цією інформацію, тобто побудуємо чотири прості економетричні моделі на основі інформації за п'ять років за кожним із кварталів:

2.1. $\hat{Y}_k = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_k$, $\quad \hat{Y}_k = X_k \hat{A}$.

2.2. Загальна модель: $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$, $\quad \hat{Y} = X\hat{A}$.

Це модель, яку буде побудовано на основі загальної інформації за п'ять років для всіх кварталів.

2.3. Модель з фіктивними змінними: $\hat{Y} = D\hat{B} + X\hat{A}$.

Це рівняння характеризує регресію Y на матриці (DX), де D — матриця квартальних фіктивних змінних порядку $ns \times (s-1)$. Тут передбачається, що в кожній групі даних є свій вільний член, тоді як параметр, що характеризує силу впливу X на Y, сталий.

2.4. Модель з фіктивними та комбінованими змінними, що характеризують зв'язок фіктивних змінних із пояснювальною:

$$\hat{Y} = (DX)\hat{B} + X\hat{A}.$$

У цій моделі матриця (DX) містить окремо матрицю фіктивних змінних D, матрицю (DX), що характеризує зв'язок фіктивних змінних із пояснювальною змінною, та матрицю пояснювальних змінних X. Отже, тут фіктивні змінні використовуються і в адитивній, і в мультиплікативній формі. Перша необхідна для того, щоб уможливити забезпечення різних вільних членів для різних груп даних (квартальних даних), а друга — щоб можна було визначити відмінності в граничній зміні споживання від доходу.

3. Побудуємо чотири прості економетричні моделі на основі даних одного кварталу за п'ять років. Для цього запишемо вектори залежної та пояснювальних змінних, до яких застосуємо оцінки — 1МНК:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 108 \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 120 \\ 130 \\ 125 \\ 135 \\ 132 \end{pmatrix}; \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 150 \\ 155 \\ 140 \\ 160 \\ 145 \end{pmatrix}; \quad Y_4 = \begin{pmatrix} 110 \\ 95 \\ 100 \\ 105 \\ 100 \end{pmatrix};$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1500 \\ 1 & 1510 \\ 1 & 1505 \\ 1 & 1520 \\ 1 & 1530 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1510 \\ 1 & 1525 \\ 1 & 1506 \\ 1 & 1535 \\ 1 & 1542 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1505 \\ 1 & 1540 \\ 1 & 1530 \\ 1 & 1545 \\ 1 & 1520 \end{pmatrix};$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1505 \\ 1 & 1501 \\ 1 & 1510 \\ 1 & 1502 \\ 1 & 1500 \end{pmatrix}.$$

На основі стандартної програми «Лінійн» в «Excel» дістанемо:

1)

0,475862	–619,3793
0,299292	452,8408
0,457305	7,207914
2,527965	3
131,3379	155,8621

2)

0,329258	–373,2578
0,112368	171,2116
0,741064	3,491024
8,585879	3
104,6383	36,56175

3)

0,242718	–220,8738
0,247525	378,2352
0,242718	7,943979
0,961538	3
60,67961	189,3204

4)

0,291411	-336,1656
0,797693	1199,415
0,042591	6,441097
0,133457	3
5,53681	124,4632

$u^a u^a =$	506,2074

Рівняння за п'ять років запишеться:
1) для даних I кварталу:

$$\hat{Y}_1 = -619{,}38 + 0{,}476X_1;$$

2) для даних II кварталу:

$$\hat{Y}_2 = -373{,}26 + 0{,}329X_2;$$

3) для даних III кварталу:

$$\hat{Y}_3 = -220{,}87 + 0{,}243X_3;$$

4) для даних IV кварталу:

$$\hat{Y}_4 = -336{,}16 + 0{,}291X_4.$$

Як бачимо, у цих рівняннях різняться не лише вільні члени, а й оцінки параметрів, що характеризують силу впливу X на Y. Сума квадратів залишків для кожної моделі така:

$$u_1^{\alpha'} u_1^{\alpha} = 155{,}86;$$

$$u_2^{\alpha'} u_2^{\alpha} = 36{,}56;$$

$$u_3^{\alpha'} u_3^{\alpha} = 189{,}32;$$

$$u_4^{\alpha'} u_4^{\alpha} = 124{,}46.$$

Додавши всі суми квадратів залишків, дістанемо: $u^{\alpha'} u^{\alpha} = 506{,}2074$. Це загальна сума квадратів залишків рівняння Y на Z, яка обчислюється так:

$$u^{\alpha'} u^{\alpha} = Y'Y - \hat{A}'Z'Y = S_4.$$

Отже, S_4 = 506,2074.

4. Побудуємо економетричну модель на основі всієї інформації, об'єднуючи дані за п'ять років за всіма кварталами:

Запишемо матриці залежної і пояснювальних змінних, на основі яких здобуто оцінки — 1МНК:

$$Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 108 \\ 120 \\ 130 \\ 125 \\ 135 \\ 132 \\ 150 \\ 155 \\ 140 \\ 160 \\ 145 \\ 10 \\ 95 \\ 100 \\ 105 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 150 \\ 1 & 1510 \\ 1 & 1505 \\ 1 & 1520 \\ 1 & 1530 \\ 1 & 1510 \\ 1 & 1525 \\ 1 & 1506 \\ 1 & 1535 \\ 1 & 1542 \\ 1 & 1505 \\ 1 & 1540 \\ 1 & 1530 \\ 1 & 1545 \\ 1 & 1520 \\ 1 & 1505 \\ 1 & 1501 \\ 1 & 1510 \\ 1 & 1502 \\ 1 & 1500 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши стандартну програму «Лінійн», дістанемо:

0,98712	−137,26
0,245923	373,0962
0,472321	16,38845
16,11165	18
4327,286	$\boxed{4834,463}$

Модель споживання безалкогольних напоїв від доходу без урахування сезонності споживання набере вигляду:

$$\hat{Y} = -1377,26 + 0,99X.$$

Сума квадратів залишків за цією моделлю така:

$$v'v = Y'Y - \hat{A}'X'Y = 4834,463\ .$$

5. Побудуємо економетричну модель споживання безалкогольних напоїв, ввівши фіктивні змінні, які мають відбивати

специфіку споживання залежно від теплих і холодних кварталів року.

Запишемо матриці змінних, за якими визначаються оцінки – 1МНК:

$$Y=\begin{pmatrix}100\\90\\95\\110\\108\\120\\130\\125\\135\\132\\150\\155\\140\\160\\145\\110\\95\\100\\105\\100\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}1&1500\\1&1510\\1&1505\\1&1520\\1&1530\\1&1510\\1&1525\\1&1506\\1&1535\\1&1542\\1&1505\\1&1540\\1&1530\\1&1545\\1&1520\\1&1505\\1&1501\\1&1510\\1&15002\\1&1500\end{pmatrix}.$$

Матриця фіктивних змінних D містить три вектори, кожний з яких відбиває відмінності інформації II—IV кварталів від I.

Матриця пояснювальних змінних X містить вектор одиниць для визначення вільного члена моделі.

Для оцінювання параметрів цієї моделі розв'яжемо систему рівнянь, що подається у блочних матрицях:

$$\begin{bmatrix}D'D & D'X\\ X'D & X'X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{B}\\ \hat{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D'Y\\ X'Y\end{bmatrix}.$$

Звідси оператор оцінювання параметрів моделі визначається:

$$\begin{bmatrix}\hat{B}\\ \hat{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D'D & D'X\\ X'D & X'X\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}D'Y\\ X'Y\end{bmatrix},$$

де D' — матриця, транспонована до матриці фіктивних змінних D;

X' — матриця, транспонована до матриці пояснювальних змінних X;

$\bar{B}$ — вектор оцінок параметрів моделі при фіктивних змінних, що застосовуються для коригування вільного члена за квартальними даними;

$\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів моделі пояснювальних змінних.

Знайдемо добутки матриць:

$$D'D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad D'X = \begin{pmatrix} 5 & 7618 \\ 5 & 7640 \\ 5 & 7518 \end{pmatrix};$$

$$X'D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7618 & 7640 & 7518 \end{pmatrix}; \quad X'X = \begin{pmatrix} 20 & 30341 \\ 30341 & 46033255 \end{pmatrix};$$

$$D'Y = \begin{pmatrix} 642 \\ 750 \\ 510 \end{pmatrix}; \quad X'Y = \begin{pmatrix} 2405 \\ 3652889 \end{pmatrix}.$$

Запишемо блочну матрицю:

$$\begin{bmatrix} D'D & D'X \\ X'D & X'X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 & 7618 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 7640 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 7518 \\ 5 & 5 & 5 & 20 & 30341 \\ 7618 & 7640 & 7518 & 30341 & 46033255 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо обернену до неї:

$$\begin{bmatrix} D'D & D'X \\ X'D & X'X \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}442554 & 0{,}260218 & 0{,}162263 & 5{,}874004 & -0{,}004015 \\ 0{,}260218 & 0{,}485214 & 0{,}146599 & 8{,}395289 & -0{,}005681 \\ 0{,}162263 & 0{,}146599 & 0{,}433465 & -5{,}86381 & 0{,}0356 \\ 5{,}874004 & 8{,}395289 & -5{,}586381 & 867{,}1781 & -0{,}573019 \\ -0{,}004015 & -0{,}005681 & 0{,}00356 & -0{,}573019 & 0{,}000379 \end{bmatrix}.$$

Блочний вектор вільного члена дорівнює:

$$\begin{bmatrix} D'Y \\ X'Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 642 \\ 750 \\ 510 \\ 2405 \\ 3652889 \end{bmatrix}.$$

Вектор оцінок параметрів моделі буде такий:

$$\begin{bmatrix} \hat{B} \\ \hat{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24{,}33625 \\ 44{,}49847 \\ 4{,}471626 \\ -393{,}801 \\ 0{,}326769 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix}.$$

Звідси економетрична модель споживання безалкогольних напоїв має вигляд:

$$\hat{Y} = -393{,}801 + 24{,}336 D_2 + 44{,}498 D_3 + 4{,}472 D_4 + 0{,}327 X .$$

У цій моделі гранична ефективність споживання від доходу є сталою $(\hat{a}_1 = 0{,}327)$, а вільні члени для кожного з кварталів набирають вигляду:

1) для I кварталу

$$\hat{a}_0^{(1)} = -393{,}801 ;$$

2) для II кварталу

$$\hat{a}_0^{(2)} = \hat{a}_0^{(1)} + \hat{b}_1 = -393{,}801 + 24{,}336 = -369{,}465 ;$$

3) для III кварталу

$$\hat{a}_0^{(3)} = \hat{a}_0^{(1)} + \hat{b}_2 = -393{,}801 + 44{,}498 = -349{,}303 ;$$

4) для IV кварталу

$$\hat{a}_0^{(4)} = \hat{a}_0^{(1)} + \hat{b}_3 = -393{,}801 + 4{,}472 = -389{,}329 .$$

Сума квадратів залишків для цієї моделі визначається так:

$$u'u = Y'Y - \hat{B}'D'Y - \hat{A}'X'Y = S_2 ;$$

$$S_2 = S_3 + S_4 = 526{,}464 ,$$

де $S_4 = u^{\alpha\prime} u^{\alpha}$; $S_3 = u'u - u^{\alpha\prime} u^{\alpha} = 526{,}464 - 506{,}207 = 20{,}257$.

Додатковий вклад залишків за рахунок зміни вільного члена моделі становить:

$$S_1 = v'v - u'u = 4834{,}463 - 526{,}464 = 4307{,}999.$$

Економетричну модель споживання безалкогольних напоїв побудуємо, застосувавши стандартну програму «Лінійн» в Excel. Для цього необхідно сформувати таку матрицю фіктивних і пояснювальних змінних:

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1510 \\ 0 & 0 & 0 & 1505 \\ 0 & 0 & 0 & 1520 \\ 0 & 0 & 0 & 1530 \\ 1 & 0 & 0 & 1510 \\ 1 & 0 & 0 & 1525 \\ 1 & 0 & 0 & 1506 \\ 1 & 0 & 0 & 1535 \\ 1 & 0 & 0 & 1542 \\ 0 & 1 & 0 & 1505 \\ 0 & 1 & 0 & 1540 \\ 0 & 1 & 0 & 1530 \\ 0 & 1 & 0 & 1545 \\ 0 & 1 & 0 & 1520 \\ 0 & 0 & 1 & 1505 \\ 0 & 0 & 1 & 1501 \\ 0 & 0 & 1 & 1510 \\ 0 & 0 & 1 & 1502 \\ 0 & 0 & 1 & 1500 \end{pmatrix}.$$

Вектор залежної змінної має такий самий вигляд, як і в попередніх розрахунках.

У результаті буде здобуто таку інформацію:

0,326769	4,471626	44,49847	24,33625	–393,801	
0,115293	3,900457	4,126725	3,941141	174,4588	
0,942537	5,924323	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	
61,50909	15	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	$\hat{\sigma}_v^2 = 35{,}0976$
8635,286	$\boxed{526{,}464}$ $u'u$	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	

Перший рядок чисел у цій таблиці утворюють оцінки параметрів моделі, побудованої раніше на основі блочної матриці. У таблиці виділено суму квадратів залишків та записано праворуч дисперсію залишків — $\hat{\sigma}_u^2$.

Коефіцієнт детермінації дорівнює $R^2 = 0{,}94$, F-критерій = 61,50, що підтверджує статистичну значущість побудованої моделі. Критерії Стьюдента дорівнюють відповідно $t = (2{,}2;\ 5{,}9;\ 10{,}8;\ 1{,}1;\ 2{,}7)$.

$t_{0,05\ \text{крит}}$ для ступенів свободи ($n - m = 15$) дорівнює 1,75. Звідси випливає, що всі оцінки параметрів моделі, крім $\hat{b}_3$, є статистично значущими.

6. Маючи три залишкові суми квадратів, можемо застосувати наведені раніше F-критерії, щоб перевірити припущення стосовно відмінностей відповідних оцінок параметрів моделі.

Визначимо $F_{(1)}$ для перевірки значущості відмінностей вільних членів:

$$F_{(1)} = \frac{S_1 / (s-1)}{S_2 / (ns - s - r + 1)} = \frac{4307{,}999/3}{526{,}464/15} = \frac{1436}{35{,}1} = 40{,}9\ .$$

Оскільки $F_{\text{крит}}$ ($\alpha = 0{,}01$) $(3{,}15) = 5{,}42$, то ефект, викликаний відмінностями вільних членів для різних груп даних, є значущим і ним нехтувати не можна.

Визначимо критерій $F_{(2)}$, щоб перевірити статистичну значущість відмінностей для $\hat{a}_1$:

$$F_{(2)} = \frac{S_3 / (sr - s - r + 1)}{S_4 / (s(n - r))} = \frac{20{,}257/3}{506{,}2074/12} = \frac{6{,}752}{42{,}184} = 0{,}16\ .$$

Значення F-критерію для $\alpha = 0{,}01$ і ступенів свободи (3, 12) дорівнює 5,95, а отже, відмінності між значеннями $\hat{a}_1$ за групами є незначущими і ми не можемо відхилити гіпотезу про те, що оцінки параметра $\hat{a}_1$ за групами є однаковими.

Обчислимо критерій загальної однорідності рівнянь для всіх груп:

$$F_{(3)} = \frac{(S_1 + S_3) / r(s-1)}{S_4 / S(n - r)} = \frac{(4307{,}999 + 20{,}257)/6}{506{,}207/12} = \frac{721{,}376}{42{,}184} = 17{,}08\ .$$

Значення F-критерію для $\alpha = 0{,}01$ і ступенів свободи (6, 12) дорівнює 4,82. Фактичне значення більше за критичне, а це свідчить про те, що рівняння, побудовані на основі групових даних, не однорідні. Об'єднувати групові дані можна лише тоді, коли в економетричну модель вводяться фіктивні змінні.

7. Побудуємо економетричну модель $\hat{Y} = (DX)\hat{B} + X\hat{A}$, яка дасть змогу визначити не лише відмінності вільного члена в моделях за групами спостережень, а й відмінності оцінки параметра $\hat{a}_1$. Для побудови цієї моделі сформуємо матрицю:

$$DX = \begin{pmatrix} D_2 & D_3 & D_4 & X & D_2X & D_3X & D_4X \\ 0 & 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1505 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1520 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1530 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1510 & 1510 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1525 & 1525 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1506 & 1506 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1535 & 1535 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1542 & 1542 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1505 & 0 & 1505 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1540 & 0 & 1540 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1530 & 0 & 1530 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1545 & 0 & 1545 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1520 & 0 & 1520 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1505 & 0 & 0 & 1505 \\ 0 & 0 & 1 & 1501 & 0 & 0 & 1501 \\ 0 & 0 & 1 & 1510 & 0 & 0 & 1510 \\ 0 & 0 & 1 & 1502 & 0 & 0 & 1502 \\ 0 & 0 & 1 & 1500 & 0 & 0 & 1500 \end{pmatrix}.$$

У цій матриці перші три стовпці є фіктивними змінними (D_2, D_3, D_4), четвертий — характеризує дохід у межах кварталів за п'ять років (X), п'ятий стовпець — добуток першої фіктивної змінної (D_2) на вектор пояснювальної змінної X. Позначимо цей добуток D_2X, наступний — добуток D_3X, останній — добуток D_4X.

Вектор залежної змінної було записано вище в п. 3.

За 1МНК дістанемо:

$\hat{a}_4$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_1$	$\hat{b}_3$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_1$	$\hat{a}_0$
–0,184451	–0,233144	–0,146604	0,475862	283,2137	398,5055	246,1215	–619,3793
0,848366	0,337174	0,341227	0,269687	1276,417	511,9883	517,6533	408,0464
0,944748	6,494917	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
29,31224	12	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
8655,543	$\boxed{506{,}2074}$	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
	$u^{\alpha\prime}u^{\alpha}$						
	$\hat{\sigma}_u^2 =$	42,18395					

Перший рядок цієї таблиці дає оцінки параметрів моделі, яка в загальному вигляді подається так:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{b}_1 D_2 + \hat{b}_2 D_3 + \hat{b}_3 D_4 + \hat{a}_1 X + \hat{a}_2 D_2 X + \hat{a}_3 D_3 X + \hat{a}_4 D_4 X. \quad (5.30)$$

На основі записаної моделі можна дістати рівняння для кожної групи.

Наприклад, послідовно маємо:

1) для першої групи (перші квартали): $\hat{Y}_1 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_1$;

2) для другої групи (другі квартали): $\hat{Y}_2 = \left(\hat{a}_0 + \hat{b}_1\right) + \left(\hat{a}_1 + \hat{a}_2\right) X_2$;

3) для третьої групи (треті квартали): $\hat{Y}_3 = \left(\hat{a}_0 + \hat{b}_2\right) + \left(\hat{a}_1 + \hat{a}_3\right) X_3$;

4) для четвертої групи (четверті квартали): $\hat{Y}_4 = \left(\hat{a}_0 + \hat{b}_3\right) + \left(\hat{a}_1 + \hat{a}_4\right) X_4$.

Запишемо побудовану економетричну модель вигляду (5.30):

$$\begin{aligned} \hat{Y} = {} & -619{,}38 + 246{,}12 D_2 + 398{,}51 D_3 + 283{,}21 D_4 + \\ & + 0{,}476 X - 0{,}146 D_2 X - 0{,}233 D_3 X - 0{,}184 D_4 X. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Згідно з моделлю (5.31) запишемо рівняння споживання для квартальних даних за п'ять років:

1) для першої групи:

$$\hat{Y}_1 = -619{,}38 + 0{,}476 X_1;$$

2) для другої групи:

$$\hat{Y}_2 = (-619{,}38 + 246{,}12) + (0{,}476 - 0{,}146) X_2 = -273{,}26 + 0{,}336 X_2;$$

3) для третьої групи:

$$\hat{Y}_3 = (-619{,}38 + 398{,}51) + (0{,}476 - 0{,}233) X_3 = -220{,}87 + 0{,}243 X_3;$$

4) для четвертої групи:

$$\hat{Y}_4 = (-619{,}38 + 283{,}21) + (0{,}476 - 0{,}184) X_4 = -336{,}17 + 0{,}292 X_4.$$

Отже, в економетричній моделі (5.31) оцінки параметрів при фіктивних змінних характеризують відмінності вільних членів відповідно за кожною з груп даних, а оцінки параметрів при змінних D_2X_2, D_3X_3, D_4X_4 характеризують відмінності у граничному споживанні за групами спостережень. Проте оскільки жодна з останніх оцінок параметрів не є статистично значущою, то можна вважати граничну ефективність споживання однаковою для всіх груп, що підтвердила F-статистика, яку ми розрахували.

5.10. Перевірка регресійної однорідності двох груп спостережень на основі критерію Г. Чоу

Нерідко на практиці ми стикаємося всього лише з двома групами даних ($s = 2$). Наприклад, важливо визначити значущість структурних зрушень між двома періодами часу, або ж значущість відмінностей у виробничих функціях для двох галузей, або ж значущість відмінностей між споживчими функціями у двох країнах.

Доти, доки кількість спостережень у кожній групі перевищує кількість оцінюваних параметрів, запропонований підхід можна застосувати безпосередньо. Якщо ж в одній із груп кількість спостережень менше кількості параметрів, то цей випадок потребує особливого дослідження, яке виконав Г. Чоу (незалежно від нього — Ф. Фішер).

Нехай маємо сукупність спостережень, яка містить дві групи даних, що різняться між собою певними якісними ознаками. Постають такі запитання:

- Чи можемо ми об'єднати ці групи для побудови економетричної моделі за всією сукупністю спостережень?
- Як відрізняються вільні члени моделей, побудованих окремо за двома групами даних?
- Чи однакові оцінки параметрів моделі, що характеризують вплив пояснювальної змінної на залежну?

Якщо йдеться лише про відмінності вільних членів, то групи спостережень можна об'єднати в одну сукупність і скоригувати вільний член введенням до моделі фіктивних змінних.

Розглянемо підхід, який запропонував для дослідження цієї проблеми Г. Чоу [1].

Цей підхід передбачає три етапи.

1. За основною вибірковою сукупністю спостережень n_1 будуємо 1МНК оцінки $\hat{A}_1$ параметрів моделі і знаходимо вектор залишків $u_1 = Y^{(1)} - X^{(1)}\hat{A}_1$, а далі — суму квадратів цих залишків

$$S_1 = u_1' u_1 = \left(Y^{(1)} - X^{(1)}\hat{A}_1\right)' \left(Y^{(1)} - X^{(1)}\hat{A}_1\right),$$

де $Y^{(1)}$ — вектор залежної змінної розміру $n_1 \times 1$;

X' — матриця пояснювальних змінних розміру $n_1 \times (r+1)$, де r — кількість пояснювальних змінних моделі.

2. За об'єднаною (загальною) $(n_1 + n_2 = n)$ вибірковою сукупністю спостережень будуємо 1МНК-оцінки параметрів моделі і

знаходимо вектор залишків моделі $u = Y - X\hat{A}$, а потім — суму квадратів цих залишків:

$$S = u'u = \left(Y - X\hat{A}\right)'\left(Y - X\hat{A}\right),$$

де Y — вектор залежної змінної розміру $n \times 1$;

X — матриця пояснювальних змінних розміру $n \times (r + 1)$.

3. Обчислюємо γ-критерій за формулою:

$$\gamma = \frac{\left(u'u - u_1'u_1\right)/n_2}{u_1'u_1/\left(n_1 - r - 1\right)}.$$

Якщо справедлива нульова гіпотеза H_0, критерій γ повинен бути випадковою величиною, яка розподілена за законом Фішера зі ступенями свободи n_2 і $(n_1 - r - 1)$. Тому якщо $\gamma > F_\alpha$ $(n_2, n_1 - r - 1)$ і розмір груп спостережень у кожній вибірці такий, що не дає змоги побудувати окремі 1МНК-оцінки за кожною з вибірок, то можна дістати ще вектор залишків $u_2 = Y^{(2)} - X^{(2)}\hat{A}_2$ і відповідно знайти суму квадратів цих залишків:

$$S_2 = u_2'u_2 = \left(Y^{(2)} - X^{(2)}\hat{A}_2\right)'\left(Y^{(2)} - X^{(2)}\hat{A}_2\right),$$

де $Y^{(2)}$ — вектор залежної змінної за другою групою n_2 розміру $n_2 \times 1$;

$X^{(2)}$ — матриця пояснювальних змінних розміру $n_2 \times (r+1)$.

Тоді для визначення регресійної однорідності доцільно використовувати критерій γ_1, який обчислюється так:

$$\gamma_1 = \frac{\left(u'u - u_1'u_1 - u_2'u_2\right)/(r+1)}{\left(u_1'u_1 + u_2'u_2\right)/\left(n_1 + n_2 - 2r - 2\right)}.$$

Цей критерій за припущенням про правильність нульової гіпотези також має бути випадковою величиною і мати F-розподіл. Порівнявши його з табличним значенням F-критерію за вибраного рівня значущості α та ступенів свободи $r+1$ і $n_1 + n_2 - 2r - 2$, можна прийняти чи відхилити нульову гіпотезу. Якщо $\gamma_1 > F_{\alpha\ \text{крит}}$, то нульову гіпотезу про регресійну однорідність треба відхилити, у протилежному випадку її потрібно прийняти.

5.11. Стислі висновки

1. На практиці досить часто серед економічних показників, розглядуваних як пояснювальні змінні моделі, можуть бути й такі, які не можна виміряти кількісно, але вони істотно впливають на рівень зв'язку між залежною та пояснювальними змінними. Такі змінні дістали назву «фіктивних змінних».

2. Фіктивні змінні — це певним чином сконструйовані змінні, які описують якісні ознаки, показники, а також відображають змінні в таких чинниках, як ефект зрушення в часі, сезонність чи зміни у просторі або ж включаються як змінні, що замінюють множину інших пояснювальних змінних.

3. Припускається, що за наявності в економетричній моделі фіктивних змінних гранична ефективність впливу чинників є спільною; для різних груп спостережень, які зазнають впливу певних якісних ознак, змінюється лише вільний член.

4. У цьому разі можна об'єднувати різні групи спостережень для побудови економетричної моделі, включаючи найчастіше фіктивні змінні як бульові змінні: 1 або 0 (бінарні).

5. Якщо економетрична модель містить фіктивні змінні, то необхідно використовувати таку специфікацію моделі, яка дає змогу дістати невироджену матрицю $(X'X)$.

6. Щоб перевірити статистичну значущість оцінок параметрів моделі з фіктивними змінними, потрібно передусім оцінити значущість параметрів при фіктивних змінних. Для цього оцінки параметрів та їх суми порівнюються зі стандартною похибкою:

$$\operatorname{var}\left(\hat{b}_0+\hat{b}_1\right)=\sqrt{\operatorname{var}\left(\hat{b}_0\right)+\operatorname{var}\left(\hat{b}_1\right)+2\operatorname{cov}\left(\hat{b}_0,\hat{b}_1\right)}.$$

7. Особливості введення кількох фіктивних змінних полягають у тому, що, маючи вільний член у моделі, необхідно знехтувати однією фіктивною змінною в кожній групі.

8. На практиці досить часто трапляються такі залежності, коли існує зв'язок між різними якісними ознаками. У цьому разі в економетричну модель необхідно вводити додаткові змінні, які є добутком фіктивних та пояснювальних або тільки фіктивних змінних.

9. Існують і такі залежності, коли залежна змінна не вимірюється кількісно, а є якісним показником соціально-економічного

процесу. У цьому разі залежна змінна набуває лише двох значень: одиниця або нуль. Обчислене значення Y для заданих значень x_j можна тлумачити як оцінку умовної ймовірності

10. До економетричних моделей, в яких залежна змінна є фіктивною, не можна використовувати оцінки — 1МНК, бо вони не мають ознак найкращих лінійних незміщених оцінок (BLUE). Такі моделі називаються ***лінійними ймовірнісними моделями*** (LPM).

11. Обмеження до застосування методу найменших квадратів полягають у тому, що:

- залишки u_i в даних моделях не є випадковими величинами;
- залишки u_i можуть бути гетероскедастичними;
- розрахункові значення залежної змінної можуть бути меншими від нуля або більшими від одиниці, що суперечить рівню ймовірності;
- зміст характеристик взаємозв'язку суперечить теоретичним і практичним висновкам про спадну граничну ефективність.

12. Щоб подолати недоліки LPM-моделей, пропонується використовувати Logit-модель, в якій не буде порушуватись умова існування границь імовірності: $0 \le P\left(Y = 1/X\right) \le 1$.

Logit-модель виражає логарифм відношення ймовірностей через лінійну функцію.

13. Фіктивні змінні відіграють важливу роль у коригуванні сезонних коливань. Можливі два варіанти:

Перший — фіктивні змінні дають змогу виокремити сезонні коливання у квартальних чи місячних часових рядах.

Другий — побудова економетричної моделі на основі даних, серед яких є скориговані і нескориговані сезонні коливання.

14. Для вилучення сезонного компонента необхідно подати вектор залежної змінної Y як суму чотирьох складових:

- тренда;
- циклічної складової;
- сезонної складової;
- випадкового збурення.

15. Для цього будується матриця фіктивних і пояснювальних змінних для моделі $Y = Pa + Db + u$, а оцінки параметрів моделі визначаються так:

$$\begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'P & P'D \\ D'P & D'D \end{bmatrix}^{-1} \begin{matrix} P'Y \\ D'Y \end{matrix}.$$

16. Економетричні моделі з фіктивними змінними типу:

$$Y = XC_1 + Db_1 + u_1, \qquad (1)$$

$$Y^\alpha = X^\alpha C_2 + u_2 \qquad (2)$$

оцінюються методом найменших квадратів і задовольняють умови:

для (1) $\quad X'(Y - XC_1 - Db_1) = 0,$
$\quad D'(Y - XC_1 - Db_1) = 0;$

для (2) $\quad (X^\alpha)'(Y^\alpha - X^\alpha C_2) = 0,$

звідки випливає, що $C_1 = C_2$.

17. Рівність $C_1 = C_2$ означає, що при побудові економетричної моделі можна використовувати змінні із сезонним компонентом, але для врахування цього компонента застосовувати або фіктивні змінні, або ж спочатку скоригувати вихідні дані, вилучивши сезонний компонент, наприклад застосувавши ковзну середню чи за допомогою регресії на одну з матриць D або $(PD)'$

18. Фіктивні змінні можуть використовуватись і тоді, коли загальна сукупність спостережень містить групові дані. У цьому випадку застосовується коваріаційний аналіз, на основі якого досліджуються питання, чи істотними є відмінності між груповими даними. Для перевірки значущості варіацій між груповими середніми застосовується F-критерій.

19. Якщо кожна з груп зазнає впливу некерованих чинників, то коваріаційний аналіз дає змогу знайти статистичні поправки на їхній вплив, оскільки некеровані чинники важко виміряти для окремих груп. Для проведення такого коригування припускається, що змінна X має однакову силу впливу на залежну змінну в обох групах.

20. Коваріаційний аналіз застосовується:

- для перевірки статистичної значущості різниці у вільних членів моделі;
- перевірки статистичної значущості в оцінках інших параметрів моделі;
- перевірки статистичної значущості відмінностей моделей у загальному вигляді для різних груп спостережень.

21. Якщо економетрична модель має вигляд $Y = D\hat{B} + X\hat{A} + u$, де D — матриця фіктивних змінних; X — матриця пояснювальних змінних; то перевірку нульової гіпотези щодо елементів вектора $\hat{B}$ можна здійснити за допомогою F-статистики:

$$F_{(1)} = \frac{S_1/(s-1)}{S_2/(ns-s-r+1)}$$

із $(s-1)$ та $(ns-s-r+1)$ ступенями свободи.

22. Для перевірки статистичної значущості оцінок параметрів моделі використовується критерій:

$$F_{(2)} = \frac{S_3/(sr-s-r+1)}{S_4/s(n-r)},$$

а критерій для перевірки однорідності рівнянь для груп такий:

$$F_{(3)} = \frac{(S_1+S_3)/r(s-1)}{S_4/s(n-r)}.$$

5.12. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Розкрийте сутність фіктивних змінних.

2. Коли необхідно застосувати їх в економетричному моделюванні?

3. Наведіть приклади соціально-економічних залежностей, при моделюванні яких доцільно включати фіктивні змінні.

4. Які особливості оцінювання параметрів моделі 1МНК при фіктивних змінних?

5. Поясніть, як здійснюється перевірка параметрів моделі з фіктивними змінними.

6. Як визначається стандартна похибка вільного члена моделі з коригувальною фіктивною змінною?

7. У чому полягають особливості введення кількох фіктивних змінних?

8. Які моделі називаються ANOVA та ANCOVA-моделями?

9. Чим різняться економетричні моделі, коли фіктивною змінною є залежна змінна?

10. Дайте характеристику моделі LPM.

11. Покажіть, чи доцільно оцінювати параметри моделі LPM методом найменших квадратів.

12. Поясніть особливості Logit-моделей.

13. Як можна оцінити параметри Logit-моделі?

14. Покажіть, як можна вирізнити сезонні збурення у статистичній інформації.

15. Побудуйте матрицю фіктивних змінних D, якщо статистична інформація має квартальні сезонні коливання.

16. Побудуйте матрицю P, поясніть її призначення.

17. У моделі $Y = Pa + Db + u$ матриці P і D — фіктивні змінні. Яке явище можна врахувати, скориставшись матрицями P і D?

18. Побудуйте коригувальну матрицю PD.

19. Покажіть, як можна оцінити параметри моделі $\hat{Y} = P\hat{a} + D\hat{b}$.

20. Чи можна використати коваріаційний аналіз в розкладанні впливу різних груп пояснювальних змінних?

21. Запишіть F-статистику для перевірки відмінностей вільного члена в групових даних.

22. Запишіть F-статистику для перевірки відмінностей сили впливу пояснювальних змінних.

23. Запишіть F-статистику для перевірки однорідності рівнянь для окремих групових даних.

24. У чому полягає перевірка регресійної однорідності двох груп спостережень на основі критерію Г. Чоу?

25. На основі квартальних даних за шість років побудовано економетрична модель:

$$\begin{aligned}\hat{Y} = {} & \underset{(2,56)}{11,79} + \underset{(2,19)}{12,47D_2} - \underset{(-1,41)}{9,91D_3} + \underset{(2,13)}{13,20D_4} + \underset{(1,19)}{0,456X} + \\ & + \underset{(0,32)}{0,118D_2X} + \underset{(0,02)}{0,008D_3X} - \underset{(-1,38)}{0,456D_4X}.\end{aligned}$$

У дужках приведено t-критерії.

Поясніть оцінки параметрів моделі, зробіть висновки щодо їх статистичної значущості.

Запишіть рівняння для групових даних.

26. На основі цих самих даних побудовано таку модель:

$$\hat{Y} = 13,49 + 12,89D_2 - 9,17D_3 + 5,72D_4 + 0,362X.$$

Критерій Стьюдента: $t = (4,78 \quad 4,67 \quad -3,41 \quad 2,20 \quad 3,04)$.

Яку з моделей потрібно використати на практиці? Чому?

5.13. Основні терміни і поняття

Фіктивні змінні • Сезонні коливання • Сезонні збурення • Стандартна похибка • Моделі ANOVA • Моделі ANCOVA • Критерій Г. Чоу • Фіктивна залежна змінна • Модель LPM • Logit-модель • Оцінка економетричних залежностей • Коваріаційний аналіз • F-статистика • Матриця фіктивних і пояснювальних змінних

Розділ 6
МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ

6.1. Поняття мультиколінеарності

Однією з умов, необхідних для оцінювання параметрів загальної лінійної моделі 1МНК, є умова (4.5), яка стосується матриці вихідних даних X. Це матриця розміру $n \times m$, яка повинна мати ранг m, тобто серед пояснювальних змінних моделі не повинно бути лінійно залежних. Проте оскільки економічні показники, які входять до економетричної моделі як пояснювальні змінні, на практиці дуже часто пов'язані між собою, то це може стати перешкодою для оцінювання параметрів моделі 1МНК та істотно вплинути на якість економетричного моделювання.

Зауважимо, що в цьому розділі ми розглядатимемо лише пояснювальні змінні. Їх кількість позначимо через m.

В економетричних дослідженнях вельми важливо з'ясувати, чи існують між пояснювальними змінними взаємозв'язки, які називають мультиколінеарністю.

Означення 6.1. *Мультиколінеарність — це існування тісної лінійної залежності, або сильної кореляції, між двома чи більше пояснювальними змінними.*

Вона негативно впливає на кількісні характеристики економетричної моделі або робить її побудову взагалі неможливою.

Так, мультиколінеарність пояснювальних змінних призводить до зміщення оцінок параметрів моделі, а це означає, що за їх допомогою не можна зробити коректні висновки про результати взаємозв'язку залежної та пояснювальних змінних. А якщо між пояснювальними змінними існує функціональний зв'язок, оцінити їхній вплив на залежну змінну взагалі неможливо. Тоді для оцінювання параметрів моделі метод найменших квадратів не придатний, оскільки матриця $X'X$ буде виродженою. Така мультиколінеарність є *екстремальною*, або *повною*.

Нехай зв'язок між пояснювальними змінними не функціональний, проте статистично істотний. Тоді попри те, що оцінити параметри методом найменших квадратів теоретично можливо, знайдена оцінка може призвести до таких помилкових значень параметрів, що сама модель стане беззмістовною.

Причини виникнення мультиколінеарності. Явище мультиколінеарності є дуже поширеним для масивів статистичної інформації, за якими визначаються кількісні характеристики взаємозв'язку між економічними показниками.

Одна з найважливіших причин виникнення мультиколінеарності — використання малої скінченної сукупності спостережень.

Друга причина пов'язана з наявністю вираженої тенденції зміни пояснювальних змінних у часі, наприклад зростання значень двох чи більше пояснювальних змінних або ж зростання значень однієї пояснювальної змінної і зменшення іншої навіть тоді, коли економічна теорія не передбачає такої зміни.

Важливою причиною виникнення мультиколінеарності є наявність лагових змінних у моделі, без чого неможливо обійтись у динамічних моделях, коли між зв'язком показників існує зрушення в часі. Особливості побудови таких моделей ми будемо описувати далі.

Зрештою, зауважимо, що між економетричними показниками завжди існує певний зв'язок. Але мультиколінеарність, як уже зазначалося, — це наявність тісного зв'язку. Тому в цьому розділі необхідно дослідити кілька важливих питань, пов'язаних із проблемою мультиколінеарності.

***Перше**: як впливає мультиколінеарність на кількісні характеристики взаємозв'язку, що отримані 1МНК?*

***Друге:** як відрізнити тісний зв'язок, тобто як визначити наявність чи відсутність мультиколінеарності?*

***Третє:** як звільнитись від мультиколінеарності, або як отримати істотні характеристики взаємозв'язку, якщо вона існує?*

6.2. Основні наслідки мультиколінеарності

Наявність мультиколінеарності під час оцінювання параметрів моделі 1МНК може призвести до негативних наслідків, які можуть значно знизити практичну цінність здобутих кількісних характеристик зв'язку або зробити їх такими, що не відповідають основним властивостям цих оцінок, а через це не можуть бути використані на практиці взагалі.

1. Дисперсія і коваріація оцінок параметрів моделі різко збільшуються.

Нехай економетрична модель описує зв'язок залежної змінної Y із двома пояснювальними змінними X_1 і X_2.

$$Y = a_0 + a_2X_1 + a_2X_2 + u. \quad (6.1)$$

Розрахункова модель на основі вибіркової сукупності спостережень запишеться у вигляді:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\hat{X}_1 + \hat{a}_2\hat{X}_2. \quad (6.2)$$

Подамо дисперсію оцінок параметрів цієї моделі так:

$$\mathrm{var}(\hat{a}_1) = \frac{\sigma_u^2}{\left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i_1} - \bar{x}_1\right)^2}; \quad (6.3)$$

$$\mathrm{var}(\hat{a}_2) = \frac{\sigma_u^2}{\left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i_2} - \bar{x}_2\right)^2}; \quad (6.4)$$

$$\mathrm{cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_2) = \frac{-r\sigma_u^2}{\left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i_1} - \bar{x}_1\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(x_{i_2} - \bar{x}_2\right)^2}}, \quad (6.5)$$

де σ_u^2 — дисперсія залишків;

$r_{x_1x_2}^2$ — коефіцієнт парної кореляції між пояснювальними змінними x_1 і x_2;

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ — середні значення пояснювальних змінних x_1 і x_2;

x_{i_1}, x_{i_2} — i-те значення відповідно першої та другої пояснювальних змінних.

Співвідношення дисперсій та коваріацій (6.3) — (6.5) записано згідно із загальною формою розв'язку системи нормальних рівнянь, коли всі змінні взято як відхилення від своєї середньої, а також формулою парного коефіцієнта кореляції між пояснювальними змінними:

$$r_{x_1x_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i_1} - \bar{x}_1\right)\left(x_{i_2} - \bar{x}_2\right)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}(n-1)},$$

яку було введено в загальні формули для відшукання оцінок $\hat{a}_1$ і $\hat{a}_2$ [5].

Зі співвідношень (6.3), (6.4) випливає, що зі збільшенням коефіцієнта кореляції між X_1 і X_2 дисперсії цих оцінок також збільшуються.

Такий самий висновок можна зробити на підставі співвідношення (6.5).

Тут відношення $\frac{r_{x_1x_2}}{\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)}$ характеризує рівень збільшення коваріації між оцінками моделі, якщо коефіцієнт кореляції r_{x1x2} збільшуватиметься, бо ця частина співвідношення (6.5) стала для всіх значень пояснювальних змінних.

$$\text{Так, якщо } r_{x_1x_2} = 0{,}50, \quad \text{то } \frac{r_{x_1x_2}}{\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)} = 0{,}67;$$

$$r_{x_1x_2} = 0{,}60, \quad \text{то } \frac{r_{x_1x_2}}{\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)} = 0{,}93;$$

$$r_{x_1x_2} = 0{,}70, \quad \text{то } \frac{r_{x_1x_2}}{\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)} = 1{,}37;$$

$$r_{x_1x_2} = 0{,}80, \quad \text{то } \frac{r_{x_1x_2}}{\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)} = 2{,}22;$$

$$r_{x_1x_2} = 0{,}90, \quad \text{то } \frac{r_{x_1x_2}}{\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)} = 4{,}73;$$

$$r_{x_1x_2} = 0{,}95, \quad \text{то } \frac{r_{x_1x_2}}{\left(1-r_{x_1x_2}^2\right)} = 9{,}74.$$

Звідси очевидно, що коли коефіцієнт кореляції збільшується, то збільшується і коваріація оцінок параметрів моделі, причому з наближенням коефіцієнта кореляції до свого граничного значення дисперсії оцінок параметрів та їхня коваріація зростають досить швидко. Наприклад, якщо $r_{x_1x_2} = 0{,}95$, то коваріація оцінок параметрів моделі перевищує своє значення за умови, що мультиколінеарність відсутня, майже в 10 раз, а дисперсії оцінок параметрів моделі будуть завищеними більш ніж у 5 раз.

2. Похибки оцінок параметрів значно збільшуються, відповідно збільшуються їхні інтервали довіри.

Адже стандартні похибки оцінок параметрів моделі обчислюються як корінь квадратний із дисперсій цих оцінок. Раніше ми показали, що дисперсії оцінок параметрів моделі значно збільшуються, а отже, стандартні та граничні похибки також збільшуються.

Якщо $r_{x_1x_2} = 0{,}90$, то похибка збільшиться в

$$\sqrt{\frac{1}{(1-0{,}81)}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}19}} = \sqrt{5{,}23} = 2{,}29\,.$$

Це означає, що інтервал довіри за наявності мультиколінеарності буде в 2,29 разу більший, ніж тоді, коли її немає.

3. Оцінки параметрів моделі можуть бути статистично незначущими. Статистична незначущість оцінок параметрів моделі може виявлятись на фоні високого рівня довіри до моделі в цілому. Це пояснюється не тим, що досліджувані пояснювальні змінні мають слабкий зв'язок із залежною, а наявністю їхнього взаємозв'язку.

Нагадаємо, що для оцінювання статистичної значущості оцінок параметрів моделі застосовуються t-критерії, в яких абсолютне значення оцінки порівнюється з її похибкою. Оскільки в разі мультиколінеарності похибки значно збільшуються і збільшується також їхня кореляція, то t-критерії прямуватимуть до нуля. Трапляються випадки, коли існує мультиколінеарність, але економетрична модель в цілому є достовірною, статистично значущими є всі оцінки параметрів моделі. Тоді мультиколінеарність не є проблемою. У цих випадках оцінки параметрів мають такі числові значення, які попри збільшення стандартних похибок залишаються набагато більшими і, відповідно, статистично значущими. На мультиколінеарність можна не зважати і тоді, коли мета економетричного моделювання — лише прогнозування. Чим вище R^2, тим точніший прогноз, але ця закономірність справджується лише доти, доки залежні змінні, що прогнозуються, мають однакову майже лінійну залежність з початковою матрицею пояснювальних змінних X.

З огляду на перелічені наслідки мультиколінеарності при побудові економетричної моделі потрібно мати інформацію про те, що між пояснювальними змінними не існує мультиколінеарності.

6.3. Ознаки мультиколінеарності

1. Коли серед парних коефіцієнтів кореляції пояснювальних змінних є такі, рівень яких наближається або дорівнює множинному коефіцієнту кореляції, то це означає можливість існування мультиколінеарності. Інформацію про парну кореляцію може да-

ти симетрична матриця коефіцієнтів парної кореляції між пояснювальними змінними:

$$r_{xx} = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \dots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & \dots & r_{x_2x_k} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & r_{x_3x_3} & \dots & r_{x_3x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & r_{x_kx_3} & \dots & r_{x_kx_k} \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Проте коли до моделі входять більш як дві пояснювальні змінні, то вивчення питання про мультиколінеарність не може обмежуватись інформацією, що її дає ця матриця. Явище мультиколінеарності в жодному разі не зводиться лише до існування парної кореляції між пояснювальними змінними.

Більш загальна перевірка передбачає знаходження визначника (детермінанта) матриці r_{xx}, який є детермінантом кореляції і позначається $|r_{xx}|$. Числові значення детермінанта кореляції задовільняють умову: $|r_{xx}| \in [0, 1]$.

2. Якщо $|r_{xx}| = 0$, то існує повна мультиколінеарність, а коли $|r_{xx}| = 1$, мультиколінеарність відсутня. Чим ближче $|r_{xx}|$ до нуля, тим певніше можна стверджувати, що між пояснювальними змінними існує мультиколінеарність. Незважаючи на те, що на числове значення $|r_{xx}|$ впливає дисперсія пояснювальних змінних, цей показник можна вважати точковою мірою рівня мультиколінеарності.

3. Коли коефіцієнт частинної детермінації R_k^2, який обчислено для регресійних залежностей між k-ю пояснювальною змінною та рештою, має значення, близьке до одиниці, то можна говорити про наявність мультиколінеарності.

4. Якщо в економетричній моделі знайдено мале значення оцінки параметра $\hat{a}_k$ за високого рівня частинного коефіцієнта детермінації R_k^2 і водночас F-критерій істотно відрізняється від нуля, то це також може свідчити про наявність мультиколінеарності.

5. Якщо під час побудови економетричної моделі на основі покрокової регресії введення нової пояснювальної змінної істотно змінює оцінку параметрів моделі за незначного підвищення (або зниження) коефіцієнтів кореляції чи детермінації, то ця змінна перебуває, очевидно, у лінійній залежності від інших, що їх було введено до моделі раніше.

Усі ці ознаки мультиколінеарності мають один спільний недолік: ні одна з них чітко не розмежовує випадки, коли залежність між пояснювальними змінними істотна і коли нею можна знехтувати.

6.4. Алгоритм Фаррара—Глобера

Найповніше дослідити мультиколінеарність можна застосувавши алгоритм Фаррара—Глобера. Цей алгоритм має три види статистичних критеріїв, згідно з якими перевіряється мультиколінеарність усього масиву пояснювальних змінних (χ^2 — «хі»-квадрат); кожної пояснювальної змінної з рештою змінних (F-критерій); кожної пари пояснювальних змінних (t-критерій).

Усі ці критерії при порівнянні з їхніми критичними значеннями дають змогу робити конкретні висновки щодо наявності чи відсутності мультиколінеарності пояснювальних змінних.

Опишемо алгоритм Фаррара—Глобера.

Крок 1. Нормалізація змінних.

Позначимо вектори пояснювальних змінних економетричної моделі через $X_1, X_2, X_3 \dots X_m$. Елементи нормалізованих векторів обчислимо за формулами:

$$1)\ x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sigma_{x_k}};\quad 2)\ x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{\sigma_{x_k}^2 n}}, \tag{6.7}$$

де n — кількість спостережень $(i = \overline{1,n})$; m — кількість пояснювальних змінних $(k = \overline{1,m})$; $\bar{x}_k$ — середнє арифметичне k-ї пояснювальної змінної; $\sigma_{x_k}^2$ — дисперсія k-ї пояснювальної змінної.

Крок 2. Знаходження кореляційної матриці згідно з двома методами нормалізації змінних:

$$1)\ r_{xx} = \frac{1}{n} X^{*'} X^*;\quad 2)\ r_{xx} = X^{*'} X^*, \tag{6.8}$$

де X^* — матриця нормалізованих незалежних (пояснювальних) змінних, $X^{*'}$ — матриця, транспонована до матриці X^*.

Крок 3. Визначення критерію χ^2 («хі»-квадрат):

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right] \ln |r_{xx}|, \tag{6.9}$$

де $|r_{xx}|$ — визначник кореляційної матриці r_{xx}.

Значення цього критерію порівнюється з табличним при $\frac{1}{2}m(m-1)$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $\chi^2_{\text{факт}} > \chi^2_{\text{табл}}$, то в масиві пояснювальних змінних існує мультиколінеарність.

Крок 4. Визначення оберненої матриці:

$$C = r_{xx}^{-1} = \left(X^{*'}X^{*}\right)^{-1}. \tag{6.10}$$

Крок 5. Обчислення F-критеріїв:

$$F_k = (c_{kk} - 1)\frac{n-m}{m-1}, \tag{6.11}$$

де c_{kk} — діагональні елементи матриці C. Фактичні значення критеріїв порівнюються з табличними при $m-1$ і $n-m$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $F_{k\,\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то відповідна k-та пояснювальна змінна мультиколінеарна з іншими.

Коефіцієнт детермінації для кожної змінної

$$R_k^2 = 1 - \frac{1}{c_{kk}}. \tag{6.12}$$

Якщо коефіцієнт детермінації наближається до одиниці, то пояснювальна змінна мультиколінеарна з іншими.

Крок 6. Знаходження частинних коефіцієнтів кореляції:

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk}\cdot c_{jj}}}, \tag{6.13}$$

де c_{kj} — елемент матриці C, що міститься в k-му рядку і j-му стовпці; c_{kk} і c_{jj} — діагональні елементи матриці C.

Крок 7. Обчислення t-критеріїв:

$$t_{kj} = \frac{r_{kj}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}}. \tag{6.14}$$

Фактичні значення критеріїв t_{kj} порівнюються з табличними при $n-m$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $t_{kj} > t_{\text{табл}}$, то між пояснювальними змінними X_k і X_j існує мультиколінеарність.

Розглянемо застосування алгоритму Фаррара—Глобера до розв'язування конкретної задачі.

✓***Приклад 6.1.*** На середньомісячну заробітну плату впливає низка чинників. Вирізнимо серед них продуктивність праці, фондомісткість та коефіцієнт плинності робочої сили. Щоб побудувати економетричну модель заробітної плати від згаданих чинників за методом найменших квадратів, потрібно переконатися, що продуктивність праці, фондомісткість та коефіцієнт плинності робочої сили як пояснювальні змінні моделі — не мультиколінеарні.

Вихідні дані наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Номер цеху	Продуктивність праці, людино-днів	Фондомісткість, млн грн	Коефіцієнт плинності робочої сили, %
1	32	0,89	19,5
2	29	0,43	15,6
3	30	0,70	·13,5
4	31	0,61	9,5
5	25	0,51	23,5
6	34	0,51	12,5
7	29	0,65	17,5
8	24	0,43	14,5
9	20	0,51	14,5
10	33	0,92	7,5

Дослідити наведені чинники на наявність мультиколінеарності.

Розв'язання. ***Крок 1.*** Нормалізація змінних.

Позначимо вектори пояснювальних змінних — продуктивності праці, фондомісткості, коефіцієнтів плинності робочої сили — через X_1, X_2, X_3. Елементи нормалізованих векторів обчислимо за формулою:

$$x_{ik}^{*} = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{n\sigma_{x_k}^2}},$$

де n — кількість спостережень, $n = 10$; m — кількість пояснювальних змінних, $m = 3$; $\bar{x}_k$ — середнє арифметичне значення компонентів вектора X_k; $\sigma_{x_k}^2$ — дисперсія змінної x_k.

Таблиця 6.2

$x_{i1}-\overline{x}_1$	$x_{i2}-\overline{x}_2$	$x_{i3}-\overline{x}_3$	$(x_{i1}-\overline{x}_1)^2$	$(x_{i2}-\overline{x}_2)^2$	$(x_{i3}-\overline{x}_3)^2$	x^*_{i1}	x^*_{i2}	x^*_{i3}
3,3	0,004	–3,4	10,89	0,000016	11,56	0,2487	0,0091	–0,2518
0,3	–0,156	1,6	0,09	0,024336	2,56	0,0226	–0,3531	0,1185
1,6	0,114	–0,4	1,89	0,012995	0,16	0,0980	0,2580	–0,0296
2,3	0,024	–4,4	5,29	0,000576	19,36	0,1733	0,0543	–0,3258
–3,7	–0,676	9,6	13,89	0,005776	92,16	–0,2788	–0,1720	0,7108
5,3	–0,078	–1,4	28,09	0,005776	1,96	0,3994	–0,1720	–0,1037
0,3	0,064	–3,6	0,09	0,004096	12,96	0,0226	0,1448	0,2666
–4,7	–0,156	0,6	22,09	0,024336	0,35	–0,3541	–0,3531	0,0444
–8,7	–0,076	0,6	75,89	0,005778	0,35	–0,6556	–0,1720	0,0444
4,3	0,334	–6,4	14,49	0,111555	40,95	0,3240	0,7559	–0,4739
Усього			176,1	0,19524	182,4			

Із формули випливає, що спочатку потрібно обчислити середні арифметичні значення і величини $\sqrt{n\sigma_x}$ для кожної пояснювальної змінної:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i1}}{n} = \frac{287}{10} = 28{,}7\,; \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i2}}{n} = \frac{5{,}86}{10} = 0{,}586\,;$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i3}}{n} = \frac{139}{10} = 13{,}9\,.$$

Усі розрахункові дані для нормалізації змінних X_1, X_2, X_3 згідно з поданими співвідношеннями наведено в табл. 6.2.

Дисперсії кожної пояснювальної змінної мають такі значення:

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{n} = \frac{176{,}1}{10} = 17{,}61\,;$$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2}{n} = \frac{0{,}19524}{10} = 0{,}0195\,;$$

$$\sigma_{x_3}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_{i3} - x_3)^2}{n} = \frac{182{,}4}{10} = 18{,}24\,.$$

Тоді знаменник для нормалізації кожної пояснювальної змінної буде такий:

$$x_1 : \sqrt{n\sigma_{x_1}^2} = \sqrt{10 \cdot 19{,}57} = 13{,}27\,;$$

$$x_2 : \sqrt{n\sigma_{x_2}^2} = \sqrt{10 \cdot 0{,}0217} = 0{,}44\,;$$

$$x_3 : \sqrt{n\sigma_{x_3}^2} = \sqrt{10 \cdot 20{,}27} = 13{,}51\,.$$

Матриця нормалізованих змінних подається у вигляді:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0{,}2487 & 0{,}0091 & -0{,}2518 \\ 0{,}0226 & -0{,}3531 & 0{,}1185 \\ 0{,}0980 & 0{,}2580 & -0{,}0296 \\ 0{,}1733 & 0{,}0543 & -0{,}3258 \\ -0{,}2788 & -0{,}1720 & 0{,}7108 \\ 0{,}3994 & -0{,}1720 & -0{,}1037 \\ 0{,}0226 & 0{,}1448 & 0{,}2666 \\ -0{,}3542 & -0{,}3531 & 0{,}0444 \\ -0{,}6556 & -0{,}1720 & 0{,}0444 \\ 0{,}3240 & 0{,}7559 & -0{,}4739 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Визначення кореляційної матриці:

$$r_{xx} = X^{*'} X^*,$$

де X^* — матриця нормалізованих пояснювальних змінних; $X^{*'}$ — матриця, транспонована до X^*.

Ця матриця симетрична і має розмір 3 × 3.

Запишемо шукану матрицю

$$r_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}494 & -0{,}551 \\ 0{,}494 & 1 & -0{,}5168 \\ -0{,}551 & -0{,}5168 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кожний елемент цієї матриці характеризує тісноту зв'язку однієї пояснювальної змінної з іншою. Оскільки діагональні елементи характеризують тісноту зв'язку кожної незалежної з цією самою змінною, то вони дорівнюють одиниці.

Решта елементів матриці r_{xx} такі:

$$r_{x_1x_2} = 0{,}494;$$

$$r_{x_1x_3} = -0{,}551;$$

$$r_{x_2x_3} = -0{,}5168,$$

тобто вони є парними коефіцієнтами кореляції між пояснювальними змінними. Користуючись цими коефіцієнтами, можна зробити висновок, що між змінними X_1, X_2, X_3 існує зв'язок. Постає запитання: чи можна стверджувати, що цей зв'язок є виявленням мультиколінеарності і через це негативно впливатиме на оцінку параметрів економетричної моделі?

Щоб відповісти на це запитання, потрібно ще раз звернутися до алгоритму Фаррара—Глобера і знайти статистичні критерії оцінки мультиколінеарності.

Крок 3. Обчислимо детермінант кореляційної матриці $\boldsymbol{r}$ і критерій χ^2:

а) $\det r_{xx} = \left| r_{xx} \right| = 0{,}466$;

б) $\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5) \right] \ln \left| r \right| = -\left[9 - \frac{1}{6}(6 + 5) \right] \ln 0{,}466 = 2{,}37.$

Якщо ступінь свободи $\frac{1}{2} m\,(m - 1) = 3$, а рівень значущості $\alpha = 0{,}01$, критерій $\chi^2_{\text{табл}} = 11{,}34$. Оскільки $\chi^2_{\text{факт}} < \chi^2_{\text{табл}}$, доходимо висновку, що в масиві змінних не існує мультиколінеарності.

Далі недоцільно реалізувати алгоритм Фаррара—Глобера, бо вже очевидно, що мультиколінеарність між досліджуваними пояснювальними змінними **відсутня.**

6.5. Методи звільнення від мультиколінеарності

Найпростіше позбутися мультиколінеарності в економетричній моделі можна, відкинувши одну зі змінних мультиколінеарної пари. Однак на практиці вилучення якогось чинника часто суперечить логіці економічних зв'язків.

Позитивно впливає на звільнення від мультиколінеарності суттєве збільшення сукупності спостережень, але цей підхід не завжди можна реалізувати на практиці. Можна також перетворити певним чином пояснювальні змінні моделі:

а) знайти відхилення від середньої;

б) замість абсолютних значень змінних обчислити відносні (темпи зростання, приросту);

в) нормалізувати пояснювальні змінні;

г) використати «рідж-регресію».

Розглянемо сутність «рідж-регресії» як одного з ефективних способів усунення мультиколінеарності.

Згідно з теоремою Гаусса—Маркова оцінки — 1МНК є оцінками з найменшою середньоквадратичною похибкою серед усіх незміщених і лінійних щодо до Y оцінок. Але в економетрії доведено, що може існувати зміщена оцінка невідомих параметрів

A, яка є точнішою з погляду середнього квадрата похибки $M\left(\hat{A}-A\right)^2$, ніж найкраща серед незміщених оцінок.

Доведено існування таких незміщених оцінок, для яких можна, змінюючи розмір сукупності спостережень, діставати багато значень зміщених лінійних оцінок — 1МНК ($\hat{A}_{зм}$) для кожної вибірки і для них будувати щільність розподілу — $f_{\hat{A}_{зм}(X)}$. Аналогічно можна дістати множину незміщених оцінок $\hat{A}_{1МНК}$ і для них знайти щільність закону розподілу — $f\,\hat{A}_{1МНК(x)}$.

Нехай надалі Δ визначає допустиму граничну похибку в оцінці істинного значення вектора A, тобто якщо $\left|\hat{A}-A\right|\le\Delta$, то оцінка вважається незміщеною (якісною), а при $\left|\hat{A}-A\right|>\Delta$ — навпаки.

Розглянемо щільності розподілу незміщених та зміщених оцінок параметрів моделі (рис. 6.1).

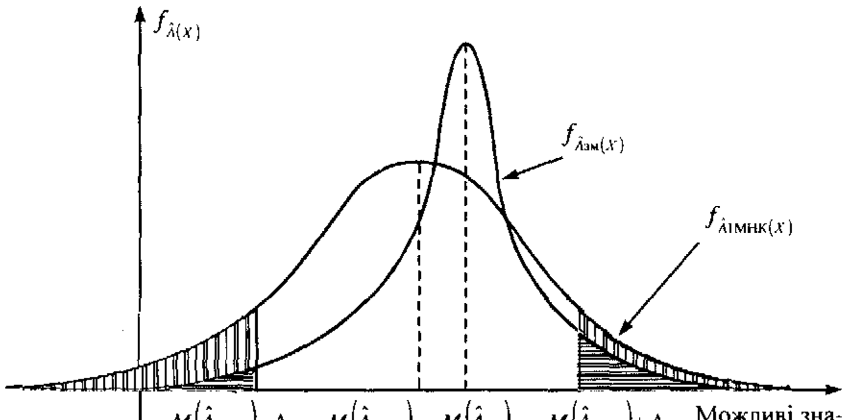


Рис. 6.1. Щільність розподілу незміщеної та зміщеної оцінок істинного значення A

Згідно з рис. 6.1 можна зробити такі висновки:

1. Частка зміщених оцінок вектора $\hat{A}_{зм}$ (область цієї частки заштриховано горизонтальними лініями) під кривою розподілу $f_{\hat{A}_{зм}(X)}$ в кілька разів менша за частку незміщених оцінок $\hat{A}_{МНК}$ (область цієї частки заштриховано вертикальними лініями $f_{\hat{A}1МНК(X)}$);

2. Середній квадрат похибок під час оцінювання вектора $\hat{A}_{1МНК}$ буде більшим за середній квадрат похибок, здобутих під час оцінювання зміщеної оцінки $\hat{A}_{зм}$. Таким чином, враховуючи, що в умовах мультиколінеарності дисперсії навіть найкращих незміщених оцінок можуть бути досить великими, доцільно спробувати відмовитися від вимоги незміщеності, щоб у ширшому класі оцінок знайти ті, які матимуть вищу точність.

Одним із підходів до побудови таких оцінок є «рідж-регресія», або «гребнева регресія». Цей підхід певною мірою коригує 1МНК-оцінки, тобто використовується такий оператор оцінювання параметрів моделі:

$$\hat{A}_\tau = \left(X'X + \tau E_m\right)^{-1} X'Y\,, \tag{6.16}$$

де τ — невелике додатне число; E — одинична матриця.

Це означає, що в матриці $X'X$ до кожного діагонального елемента потрібно додати τ («гребінь», «хребет»). Така процедура, з одного боку, перетворює матрицю $(X'X)$ з «погано обумовленої» на «добре обумовлену», а з другого — робить здобуті при цьому оцінки зміщеними. Обчислюючи визначник матриці $X'X + \tau E$ замість визначника матриці $X'X$, дістаємо такі його значення, які будуть набагато відрізнятись від нуля. Доцільність використання оцінок виду (6.16) ґрунтується на відповідній теоремі*.

Доведено, що в разі мультиколінеарності знайдеться таке значення τ, для якого середні квадрати похибок оцінок $\hat{A}_{зм}$ будуть менші за відповідні характеристики для 1МНК-оцінок $\left(\hat{A}_{МНК}\right)$. Універсальних рекомендацій щодо конкретного вибору значення τ не існує, але, як правило, його значення міститься в діапазоні від 0,1 до 0,4.

За наявності мультиколінеарності змінних потрібно звертати увагу й на специфікацію моделі. Іноді заміна однієї функції іншою, якщо це не суперечить апріорній інформації, дає змогу уникнути явища мультиколінеарності.

Коли жодний із розглянутих способів не дає змоги позбутися мультиколінеарності, параметри моделі належить оцінювати за методом головних компонентів.

Розглянемо ще один приклад виявлення мультиколінеарності та застосуємо прості способи звільнення від неї.

---

* *Hoerl A. E., Kennard R. W.* // Technometrics. — 1970. — Vol. 12, № 1. — P. 55—67.

✓***Приклад 6.2.*** На основі даних про чинники, що впливають на прибуток (табл. 6.3), дослідити їх на наявність мультиколінеарності за допомогою алгоритму Фаррара—Глобера, що містить три статистичні критерії:

✓ χ^2;

✓ F-критерій;

✓ t-критерій.

Таблиця 6.3

Прибуток, гр. од.	Інвестиції, гр. од.	ОВФ, гр. од.	ФРЧ, людино-днів
(y)	(x_1)	(x_2)	(x_3)
39	62	22	104
41	65	25	109
38	57	17	99
42	66	27	114
44	69	28	116
49	58	20	110
44	72	32	119
45	70	30	116
48	75	34	114
51	79	35	120
49	77	33	124
54	82	37	119
55	80	37	129
57	75	39	129
56	83	38	132
54	81	36	130
59	87	40	124
61	92	42	134
62	95	43	137
64	97	42	139

Розв'язання. Дослідимо наявність мультиколінеарності, виконавши такі кроки:

1. Нормалізацію (стандартизацію) пояснювальних змінних моделі.

2. Розрахунок кореляційної матриці r_{xx}.

3. Визначення детермінанта матриці r_{xx}.

4. Визначення критерію χ^2.
5. Розрахунок матриці, оберненої до матриці r_{xx}.
6. Визначення F-критерію.
7. Обчислення частинних коефіцієнтів кореляції.
8. Визначення t-критерію.

1. Нормалізація (стандартизація) пояснювальних змінних моделі.
Обчислимо середні арифметичні пояснювальних змінних:

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_i x_{ij}}{n}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 76{,}1 & 32{,}85 & 120{,}9 \end{pmatrix}.$$

Визначимо стандартні відхилення:

$$\sigma_{x_j} = \sqrt{\frac{\sum_i \left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2}{n-1}}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 7{,}916671 & 11{,}51612 & 7{,}603843 & 10{,}98276 \end{pmatrix}.$$

Нормалізуємо залежну та пояснювальні змінні:

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sigma_{x_k}};$$

$$Y^* = \begin{pmatrix} -1{,}46526 \\ -1{,}21263 \\ -1{,}59158 \\ -1{,}08632 \\ -0{,}83368 \\ -0{,}20211 \\ -0{,}83368 \\ -0{,}70737 \\ -0{,}32842 \\ 0{,}050526 \\ -0{,}20211 \\ 0{,}429473 \\ 0{,}555789 \\ 0{,}808421 \\ 0{,}682105 \\ 0{,}429473 \\ 1{,}061052 \\ 1{,}313683 \\ 1{,}439999 \\ 1{,}692631 \end{pmatrix}; \quad X^* = \begin{pmatrix} -1{,}22437 & -1{,}42691 & -1{,}53878 \\ -0{,}96387 & -1{,}03237 & -1{,}08352 \\ -1{,}65854 & -2{,}08447 & -1{,}99403 \\ -0{,}87703 & -0{,}76935 & -0{,}62826 \\ -0{,}61653 & -0{,}63784 & -0{,}44615 \\ -1{,}57171 & -1{,}68994 & -0{,}99246 \\ -0{,}35602 & -0{,}11179 & -0{,}173 \\ -0{,}52969 & -0{,}37481 & -0{,}44615 \\ -0{,}09552 & 0{,}151239 & -0{,}62826 \\ 0{,}251821 & 0{,}282752 & -0{,}08195 \\ 0{,}078151 & 0{,}019727 & 0{,}282261 \\ 0{,}512325 & 0{,}545777 & -0{,}173 \\ 0{,}338656 & 0{,}545777 & 0{,}737519 \\ -0{,}09552 & 0{,}808802 & 0{,}735519 \\ 0{,}59916 & 0{,}677289 & 1{,}010675 \\ 0{,}42549 & 0{,}414264 & 0{,}828571 \\ 0{,}946499 & 0{,}940314 & 0{,}282261 \\ 1{,}380673 & 1{,}203339 & 1{,}192778 \\ 1{,}641178 & 1{,}334851 & 1465934 \\ 1{,}814847 & 1{,}203339 & 1{,}648037 \end{pmatrix}.$$

2. Розрахунок кореляційної матриці нульового порядку.

$$r_{xx} = \frac{1}{n-1} X^{*'} X^{*},$$

де X^* — матриця нормалізованих пояснювальних змінних;

$X^{*'}$ — *матриця, транспонована до* X^*.

Маємо:

$$r_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}953438 & 0{,}912655 \\ 0{,}953438 & 1 & 0{,}924364 \\ 0{,}912655 & 0{,}924364 & 1 \end{pmatrix}.$$

Парні коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв'язку між двома змінними. Вони можуть змінюватися в межах від – 1 до 1. У нашому випадку:

$$r_{12} = 0{,}953; \quad r_{13} = 0{,}912; \quad r_{23} = 0{,}924.$$

Ці коефіцієнти парної кореляції близькі до одиниці, тому можна передбачити, що всі досліджувані пояснювальні змінні є мультиколінеарними.

3. Визначення детермінанта матриці r_{xx}.

$$\det r = 0{,}012257.$$

Детермінант матриці r_{xx} є точковою мірою мультиколінеарності, в нашому випадку він наближається до 0 (0,012257), а отже, мультиколінеарність існує.

4. Визначення критерію χ^2:

$$\chi^2 = -\left(n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5)\right)\ln(\det r),$$

де n — кількість спостережень; m — кількість пояснювальних змінних.

Виконавши обчислення, дістанемо:

$$\chi^2 = 75{,}56161; \quad \chi^2_{\text{крит}} = 7{,}814725; \quad \text{при } \alpha = 0{,}05.$$

Фактично обчислене значення критерію χ^2 порівнюємо з табличним за вибраного рівня значущості α і даних ступенів свободи: $\gamma = 1/2m(m-1)$.

Доходимо висновку, що

$$\chi^2 > \chi^2_{\text{крит}}.$$

Отже, $\chi^2_{\text{факт}}$ більше за $\chi^2_{\text{крит}}$, а це означає, що в масиві пояснювальних змінних існує мультиколінеарний зв'язок, саме це і простежується в нашому випадку.

5. Розрахунок матриці, оберненої до матриці r_{xx}:

$$c = r_{xx}^{-1};$$

$$c = \begin{pmatrix} 11,87 & -8,95904 & -2,55622 \\ -8,95904 & 13,62964 & -4,42223 \\ -2,55622 & -4,42223 & 7,420694 \end{pmatrix}.$$

Матриця c — симетрична, і її діагональні елементи завжди мають бути додатними.

6. Визначення F-критерію:

$$F_k = (c_{kk} - 1)\frac{n-m}{m-1}; \quad k = \overline{1,m};$$

$$F_1 = (c_{11} - 1)\frac{n-m}{m-1}; \quad F_2 = (c_{22} - 1)\frac{n-m}{m-1}; \quad F_3 = (c_{33} - 1)\frac{n-m}{m-1};$$

$$F_1 = 92,43606; \qquad F_2 = 107,3519; \qquad F_3 = 54,5759;$$

$$F_{\text{крит.}} = 19,43704.$$

Коли $\alpha = 0,05$ і ступені свободи $m - 1 = 2$; $n - m = 17$, маємо $F_{\text{крит}} = 19,44$.

Фактично знайдене значення F-критерію порівнюємо з табличним.

У нашому випадку $F_{\text{факт}} > F_{\text{крит}}$, тобто пояснювальні змінні мультиколінеарні з рештою змінних.

7. Обчислення частинних коефіцієнтів кореляції:

$$r_{kj.x} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk}c_{jj}}};$$

$$r_{12.3} = \frac{-c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}; \quad r_{13.2} = \frac{-c_{13}}{\sqrt{c_{11}c_{33}}}; \quad r_{23.1} = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{22}c_{33}}}.$$

$$r_{12.3} = 0,704215; \quad r_{13.2} = 0.272309; \quad r_{23.1} = 0,439721.$$

Частинні коефіцієнти кореляції характеризують рівень тісноти зв'язку між двома змінними за умови, що решта змінних на цей зв'язок не впливає. Частинні коефіцієнти кореляції за модулем нижчі, ніж коефіцієнти парної кореляції, бо на їхній рівень не впливає решта змінних, які мають зв'язок із цими двома.

8. Визначення t-критерію:

$$t_{k_j} = \frac{r_{kj.x}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj.x}^2}};$$

$$t_{k1} = 8{,}430911; \quad t_{k2} = 2{,}40553; \quad t_{k3} = 4{,}161543;$$
$$t_{\text{крит}} = 2{,}109819.$$

Обчислені t-критерії порівнюємо з табличним за вибраного рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і ступенів свободи $n - m = 17$. Якщо t_{kj} більше за $t_{\text{табл}}$, як у нашому випадку, то пара цих пояснювальних змінних тісно пов'язана між собою. Оскільки всі розраховані t-критерії більше від критичного, то між всіма пояснювальними змінними існує мультиколінеарність. А це означає, що метод найменших квадратів застосувати в цьому разі не можна.

9. Способи звільнення від мультиколінеарності. Звільнитися від мультиколінеарності можна за допомогою розглянутих далі методів перетворення вихідної інформації.

1. Взяти не абсолютні значення змінних, а їхні відхилення від свого середнього. Цей спосіб підвищує рівень незалежності інформації, в часі необхідної в даному випадку.

2. Узяти перші різниці, тобто не абсолютні показники, а їхній абсолютний приріст:

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}; \quad \Delta x_{ij} = x_{ij} - x_{i-1,j}; \quad j = \overline{1,m}.$$

3. Використати темпи зміни показників:

$$I_{y_i} = \frac{y_i}{y_{i-1}}; \quad I_{x_{ij}} = \frac{x_{ij}}{x_{ji-1}}.$$

4. Використати темпи приросту показників:

$$T_{y_i} = \frac{\Delta_{y_i}}{y_i}; \quad T_{x_{ij}} = \frac{\Delta x_{ij}}{x_{ij}}.$$

5. Узяти другі різниці показників:

$$\Delta'_{y_i} = \Delta_{y_i} - \Delta_{y_{i-1}}; \quad \Delta'_{x_{ji}} = \Delta_{x_{ji}} - \Delta_{x_{ji-1}}.$$

Виконаємо зазначені кроки.

1. Візьмемо відхилення значень змінних від середнього.

2. Визначимо перші різниці пояснювальних змінних із прикладу 6.2 (табл. 6.4).

Таблиця 6.4

Місяць	Δ_{x_1}	Δ_{x_2}	Δ_{x_3}	Місяць	Δ_{x_1}	Δ_{x_2}	Δ_{x_3}
1	–	–	–	11	–2	–2	4
2	3	3	5	12	5	4	–5
3	–8	–8	–10	13	–2	0	10
4	9	10	15	14	–5	2	0
5	3	1	2	15	8	–1	3
6	–11	–8	–6	16	–2	–2	–2
7	14	12	9	17	6	4	–6
8	–2	–2	–3	18	5	2	10
9	5	4	–2	19	3	1	3
10	4	1	6	20	2	–1	2

Побудуємо матрицю коефіцієнтів кореляції для цих пояснювальних змінних:

Стовпець	Стовпець		
	1	2	3
1	1	0,856747	0,544655
2	0,856747	1	0,593578
3	0,544658	0,593578	1

Обчислені коефіцієнти парної кореляції дещо зменшились порівняно з попередньо розрахованими. Але фактичне значення критерію $\chi^2_ф = 28{,}555$ більше від критичного ($\chi^2_{крит} = 7{,}8147$ при $\alpha = 0{,}05$, $n - m = 17$). Це означає, що ми не звільнились від мультиколінеарності.

3. Визначимо темпи зміни пояснювальних змінних (табл. 6.5).

Таблиця 6.5

Місяць	I_{x_1}	I_{x_2}	I_{x_3}
1	—	—	—
2	1,048387	1,136364	1,048077
3	0,876923	0,68	0,908257
4	1,157895	1,588235	1,151515
5	1,045455	1,037037	1,017544
6	0,84058	0,714286	0,948276
7	1,241379	1,6	1,081818
8	0,972222	0,9375	0,97479
9	1,071429	1,133333	0,982759
10	1,053333	1,029412	1,052632
11	0,974684	0,942857	1,033333
12	1,064935	1,121212	0,959677
13	0,97561	1	1,084034
14	0,9375	1,054054	1
15	1,106667	0,974359	1,023256
16	0,975904	0,947368	0,984848
17	1,074074	1,111111	0,953846
18	1,057471	1,05	1,080645
19	1,032609	1,02381	1,022388
20	1,021053	0,976744	1,014599

Побудуємо матрицю коефіцієнтів кореляції для індексів пояснювальних змінних.

Стовпець	Стовпець		
	1	2	3
1	1	0,880709	0,608988
2	0,880709	1	0,695659
3	0,608988	0,695659	1

Розраховані коефіцієнти парної кореляції не змінились порівняно з попередніми (див. п. 2).

Визначимо критерій χ^2: $\chi^2 = 34,858$;

$$\chi^2_{крит} = 7,8147 \text{ при } \alpha = 0,05,\ n - m = 17.$$

У даному випадку ми не звільнились від мультиколінеарності, оскільки $\chi^2_{ф} > \chi^2_{крит}$.

4. Визначимо темпи приросту T_{xj} пояснювальних змінних (табл. 6.6).

Таблиця 6.6

Місяць	T_{x_1}	T_{x_2}	T_{x_3}
1	—	—	—
2	0,048387	0,136364	0,048077
3	–0,12308	–0,32	–0,09174
4	0,157895	0,588235	0,151515
5	0,045455	0,037037	0,017544
6	–0,15942	–0,28571	–0,05172
7	0,241379	0,6	0,081818
8	–0,02778	–0,0625	–0,02521
9	0,071429	0,133333	–0,01724
10	0,053333	0,029412	0,052632
11	0,064935	0,121212	–0,04032
12	–0,02439	0	0,084034
13	–0,0625	0,054054	0
14	0,106667	–0,02564	0,023256
15	–0,0241	–0,05263	–0,01515
16	0,074074	0,111111	–0,04615
17	0,057471	0,05	0,080645
18	0,032609	0,02381	0,022388
19	0,021053	–0,02326	0,014599
20	0,064935	0,121212	–0,04032

Побудуємо матрицю коефіцієнтів кореляції для темпів приросту:

Стовпець	Стовпець		
	1	2	3
1	1	0,880709	0,608988
2	0,880709	1	0,695659
3	0,608988	0,695659	1

Обчислені коефіцієнти парної кореляції залишились на рівні попередніх (див п. 3), а це означає, що застосований спосіб перетворення інформації також не дає змогу звільнитись від мультиколінеарності.

5. Визначимо другі різниці пояснювальних змінних (табл. 6.7).

Таблиця 6.7

Місяць	Δ'_{x_1}	Δ'_{x_2}	Δ'_{x_3}
1	—	—	—
2	—	—	—
3	–11	–11	–15
4	17	18	25
5	–6	–9	–13
6	–14	–9	–8
7	25	20	15
8	–16	–14	–12
9	7	6	1
10	–1	–3	8
11	–6	–3	–2
12	7	6	–9
13	–7	–4	15
14	–3	2	–10
15	13	–3	3
16	–10	–1	–5
17	8	6	–4
18	–1	–2	16
19	–2	–1	–7
20	–1	–2	1

Побудуємо матрицю коефіцієнтів кореляції:

Стовпець	Стовпець		
	1	2	3
1	1	0,884655	0,589099
2	0,884655	1	0,608179
3	0,589099	0,608179	1

Обчислені коефіцієнти парної кореляції практично не змінились порівняно з попередніми.

У цьому разі ми не звільнились від мультиколінеарності, оскільки $\chi^2_ф > \chi^2_{крит}$.

Отже, ці прості способи, що базуються на перетворенні вихідної інформації, не дають змоги звільнитися від мультиколінеарності.

✓***Приклад 6.3.*** Покажемо на основі даних, наведених у прикладі 6.2, як можна використати «рідж-регресію» для знаходження оцінок 1МНК за наявності мультиколінеарності.

Розв'язання. Подамо вихідну статистичну інформацію як відхилення від середньої (від індивідуальних значень кожного показника віднімається його середнє значення).

$$Y^* = \begin{pmatrix} -11{,}6 \\ -9{,}6 \\ -12{,}6 \\ -8{,}6 \\ -6{,}6 \\ -1{,}6 \\ -6{,}6 \\ -5{,}6 \\ -2{,}6 \\ 0{,}4 \\ -1{,}6 \\ 3{,}4 \\ 4{,}4 \\ 6{,}4 \\ 5{,}4 \\ 3{,}4 \\ 8{,}4 \\ 10{,}4 \\ 11{,}4 \\ 13{,}4 \end{pmatrix}; \quad X^* = \begin{pmatrix} -11{,}4 & -10{,}85 & -16{,}9 \\ -11{,}1 & -7{,}85 & -11{,}9 \\ 19{,}1 & -15{,}85 & -21{,}9 \\ 10{,}1 & -5{,}85 & -6{,}9 \\ -7{,}1 & -4{,}85 & -4{,}9 \\ -18{,}1 & -12{,}85 & -10{,}9 \\ -4{,}1 & -0{,}85 & -1{,}9 \\ -6{,}1 & -2{,}85 & -4{,}9 \\ -1{,}1 & 1{,}15 & -6{,}9 \\ 2{,}9 & 2{,}15 & -0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}15 & 3{,}1 \\ 5{,}9 & 4{,}15 & -1{,}9 \\ 3{,}9 & 4{,}15 & 8{,}1 \\ -1{,}1 & 6{,}15 & 8{,}1 \\ 6{,}9 & 5{,}15 & 11{,}1 \\ 4{,}9 & 3{,}15 & 9{,}1 \\ 10{,}9 & 7{,}15 & 3{,}1 \\ 15{,}9 & 9{,}15 & 13{,}1 \\ 18{,}9 & 10{,}15 & 16{,}1 \\ 20{,}9 & 9{,}15 & 18{,}1 \end{pmatrix}.$$

Матриця $X'X$ у цьому разі має такий вигляд:

$$X^{*'}X = \begin{pmatrix} 20 & 5{,}68E-14 & -1{,}77636E-14 & -5{,}68434E-14 \\ 5{,}68434E-14 & 2519{,}8 & 1586{,}3 & 2193{,}2 \\ -1{,}77636E-14 & 1586{,}3 & 1098{,}55 & 1466{,}7 \\ -5{,}68434E-14 & 2193{,}2 & 1466{,}7 & 2291{,}8 \end{pmatrix},$$

а вектор оцінок параметрів моделі дорівнює:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2833 \\ 0{,}0614 \\ 0{,}3476 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель запишеться так:

$$\hat{Y}^* = 0{,}2833X_1^* + 0{,}0614X_2^* + 0{,}3476X_3^*.$$

Додамо так званий *гребінь* ($\tau = 0{,}3$) до діагональних елементів матриці $X^{*'}X^*$:

$$\left(X^{*'}X^* + \tau E\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 20{,}3 & 5.68E-14 & -1{,}77636E-14 & -5{,}68434E-14 \\ 5{,}68434E-14 & 2520{,}1 & 1586{,}3 & 2193{,}2 \\ -1{,}77636E-14 & 1586{,}3 & 1098{,}85 & 1466{,}7 \\ -5{,}68434E-14 & 2193{,}2 & 1466{,}7 & 2292{,}1 \end{pmatrix},$$

де $\tau = 0{,}3$.

Скориставшись цією матрицею для оцінювання параметрів моделі, дістанемо вектор.

$$\hat{A}_\tau = \begin{pmatrix} 0{,}2831 \\ 0{,}0619 \\ 0{,}3474 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи вектори $\hat{A}$ і $\hat{A}_\tau$ бачимо, що оцінки параметрів моделі практично не змінились: сума квадратів залишків для матриці $\left(X^{*'}X^*\right)$ і для матриці $\left(X^{*'}X^* + \tau E\right)$ дорівнює 157,5233, тобто вона не змінилась.

Визначник матриці $\left(X^{*'}X^{*}+\tau E\right)$ збільшився порівняно з визначником матриці $\left(X^{*'}X^{*}\right)$ трохи більш ніж на 2 %.

Необхідно зауважити, що навіть тоді, коли «гребінь» матриці $X^{*'}X^{*}$ збільшити на $\tau = 1$, оцінки параметрів моделі майже не зміняться:

$$\hat{A}_{\tau} = \begin{pmatrix} 0{,}2827 \\ 0{,}0632 \\ 0{,}3470 \end{pmatrix},$$

а сума квадратів залишків становитиме 157,5236, тобто збільшиться лише на 0,0003. У цьому разі детермінант матриці $\left(X^{*'}X^{*}+\tau E\right)$ збільшиться вже на 7,14 % порівняно з детермінантом матриці $X^{*'}X^{*}$.

Отже, здобуті кількісні характеристики зв'язку зі збільшенням діагональних елементів матриці $\left(X^{*'}X^{*}\right)$ на 0,3 практично не змінились. Сума квадратів залишків при цьому також не змінилась. А це означає: з-поміж зміщених оцінок параметрів ми знайшли такі, що не гірші від незміщених, причому тіснота зв'язку між пояснювальними змінними зменшилась.

6.6. Метод головних компонентів

Цей метод призначений для оцінювання моделей великого розміру, а також для оцінювання параметрів моделі, якщо до неї входять мультиколінеарні змінні.

Існують різні модифікації методу головних компонентів, які різняться залежно від того, що береться за основу для визначення ортогональних змінних — коваріаційна чи кореляційна матриця пояснювальних змінних.

Нехай маємо матрицю X, яка описує пояснювальні змінні моделі. Оскільки спостереження, що утворюють матрицю X, як правило, корельовані між собою, то можна поставити питання про кількість реально незалежних змінних, які входять до цієї матриці.

Точніше, ідея методу полягає в тому, щоб перетворити множину змінних X на нову множину попарно некорельованих змінних, серед яких перша відповідає максимально можливій дисперсії, друга — максимально можливій дисперсії в підпросторі, який є ортогональним до першого, і т. д.

Нехай нова змінна подається у вигляді:

$$Z_{1i} = a_{11}x_{1i} + a_{21}x_{2i} + \ldots + a_{m1}x_{mi}, \quad i = \overline{1,n}.$$

У матричній формі

$$Z_1 = Xa_1, \tag{6.17}$$

де Z_1 — вектор значень нової змінної; a_1 — m-вимірний власний вектор матриці $X'X$.

Суму квадратів елементів вектора подамо у вигляді:

$$Z_1' Z_1 = a_1' X' X a_1. \tag{6.18}$$

Отже, необхідно вибрати такий вектор a_1, який максимізуватиме $Z_1' Z_1$, причому на вектор a_1 потрібно накласти обмеження, щоб він не став досить великим. Тому ми його нормуємо, накладаючи обмеження:

$$a_1' a_1 = 1. \tag{6.19}$$

Оскільки $Z_1 = Xa_1$, то максимізація a_1 максимізуватиме Z_1, де Z_1 характеризує вклад цієї змінної в загальну дисперсію.

Задача тепер полягає в тому, щоб максимізувати $Z_1' Z_1$ за умов (6.19).

Побудуємо функцію Лагранжа:

$$f = a_1' X' X a_1 - \lambda_1 \left(a_1' a_1 - 1 \right) \to \max,$$

де λ_1 — множник Лагранжа.

Узявши $\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0$, дістанемо

$$\left(X' X \right) a_1 = \lambda_1 a_1. \tag{6.20}$$

Звідси бачимо, що a — власний вектор матриці $X'X$ (див. розд. 3, с. 64), який відповідає характеристичному числу λ_1.

Підставивши значення (6.20) у (6.18), дістанемо:

$$Z_1' Z_1 = \lambda_1 a' a = \lambda_1 . \qquad (6.21)$$

Отже, потрібно для значення λ_1 вибрати найбільший характеристичний корінь матриці $X'X$. За відсутності мультиколінеарності матриця $X'X$ буде додатно визначеною і, відповідно, її характеристичні корені будуть додатними. Першим головним компонентом матриці X буде вектор Z_1.

Далі визначимо $Z_2 = Xa_2$; згідно з цим вектор a_2 має максимізувати вираз $a_2' X' X a_2$ за таких умов:

1) $a_2' a_2 = 1$; 2) $a_1' a_2 = 0$.

Друга умова забезпечить відсутність кореляції між Z_2 і Z_1, бо коваріація між Z_1 і Z_2 подається у вигляді $a'X' X a_2 = \lambda_1 a_1' a_2$, причому вона дорівнює нулю лише тоді, коли $a_1' a_2 = 0$.

Для розв'язування цієї задачі функцію Лагранжа запишемо у вигляді

$$\psi = a_2' X' X a_2 - \lambda_2 (a_2' a_2 - 1) - \mu\, (a_1' a_2) ,$$

де λ_2 і μ — множники Лагранжа.

Узявши $\dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda_2} = 0$ і $\dfrac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0$, дістанемо $(X' X) a_2 = \lambda_2 a_2$, де для значення λ_2 треба вибрати другий за абсолютною величиною характеристичний корінь матриці $X'X$.

Цей процес триває доти, доки всі m характеристичних значень матриці $X'X$ не буде знайдено. Усі m власних векторів матриці $X'X$ об'єднаємо в ортогональну матрицю:

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_m].$$

Отже, головні компоненти матриці X задаються матрицею

$$Z = XA \qquad (6.22)$$

розміру $n \times m$.

$$Z' Z = A' X' X A = \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}. \qquad (6.23)$$

Вираз (6.23) означає, що головні компоненти справді попарно некорельовані, а їхні дисперсії визначаються так:

$$Z_j' Z_j = \lambda_j, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = \operatorname{tr}(X' X) = Z_1' Z_1 + Z_2' Z_2 + \ldots + Z_m' Z_m, \qquad (6.24)$$

де tr($X'X$) — слід матриці ($X'X$) (див. розд. 3).

Співвідношення $\dfrac{\lambda_1}{\sum_j \lambda_j}, \dfrac{\lambda_2}{\sum_j \lambda_j}, \ldots, \dfrac{\lambda_m}{\sum_j \lambda_j}$ характеризують пропорційний внесок кожного з векторів у загальну варіацію змінних X, причому оскільки ці компоненти ортогональні, сума всіх внесків дорівнює одиниці.

Зауважимо, *що вектори вихідних даних (матриця X) повинні мати однакові одиниці вимірювання, бо в протилежному випадку дуже важко дати змістовне тлумачення поняттю загальної варіації змінних X і розкладанню цієї варіації на складові, яке виконано відповідно до внеску кожного з векторів.*

Іноді буває важко надати конкретного змісту знайденим головним компонентам. Для цього можна обчислити коефіцієнти кореляції кожного компонента з різними змінними X. Наприклад, візьмемо перший головний компонент Z_1 і знайдемо коефіцієнти його кореляції з усіма змінними X. Для цього потрібно обчислити перехресні добутки між головним компонентом Z_1 і кожною з пояснювальних змінних X. Оскільки

$$X' Z_1 = X' X a = \lambda_1 a,$$

маємо коефіцієнти кореляції для першого компонента:

$$r_{j1} = \frac{\lambda_1 a_j}{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}} = \frac{a_j \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}}, \; i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \qquad (6.25)$$

У загальному випадку коефіцієнт кореляції між x_j і Z_k

$$r_{kj} = \frac{a_{kj} \sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}} \; \left(j, k = \overline{1, m}\right). \qquad (6.26)$$

Частка різних головних компонентів у варіації X_j визначається показником r_{kj}^2, а оскільки компоненти не корелюють один з одним, то сума їхніх часток дорівнює одиниці.

Визначивши всі головні компоненти і відкинувши ті з них, які відповідають невеликим значенням характеристичних коренів, знайдемо зв'язок залежної змінної Y з основними головними компонентами, а далі за допомогою оберненого перетворення повернемося від параметрів моделі з головними компонентами до знаходження оцінок параметрів змінних X.

✓***Приклад 6.4.*** Нехай для п'яти змінних матриці X знайдено п'ять головних компонентів. Порівнявши їхні значення, виберемо лише два:

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots + a_{51}X_5; \\ Z_2 &= a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{52}X_5. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Тоді модель, що характеризує зв'язок між Y, Z_1 і Z_2, має вигляд:

$$Y = b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + u. \tag{6.28}$$

Підставимо в (6.28) значення головних компонентів із (6.27):

$$\begin{aligned} Y = b_1(a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots + a_{51}X_5) + b_2(a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \\ \ldots + a_{52}X_5) + \varepsilon = (b_1a_{11} + b_2a_{12})X_1 + (b_1a_{21} + b_2a_{22})X_2 + \\ \ldots + (b_1a_{51} + b_2a_{52})X_5 + \varepsilon u. \end{aligned} \tag{6.29}$$

У разі, коли було б збережено всі головні компоненти, коефіцієнти рівняння (6.29) були б такі самі, як коефіцієнти, знайдені на основі прямої регресії Y на всі змінні X.

Розглянемо, як обчислити параметри моделі з головними компонентами:

$$Y = ZB + u\,;\; \hat{Y} = Z\hat{B}. \tag{6.30}$$

Звідси $\hat{B} = (Z'Z)^{-1}Z'Y$.

Оскільки $Z'Z = E_{m-1}$, то, підставивши цей вираз у (6.30), дістанемо:

$$\hat{B} = Z'Y,$$

тобто

$$\hat{b}_1 = \sum_{i=1}^{n} z_{1i} y_i;$$

$$\hat{b}_2 = \sum_{i=1}^{n} z_{2i} y_i;$$

$$\hat{b}_3 = \sum_{i=1}^{n} z_{3i} y_i;$$

....

$$\hat{b}_m = \sum_{i=1}^{n} z_{mi} y_i,$$

$\operatorname{cov}(\hat{B}) = \sigma_u^2 (Z'Z)^{-1} = \sigma_u^2 E_{m-1}$, тому $\hat{B}$ нормально розподілені навколо B.

Алгоритм головних компонентів

Крок 1. Нормалізація всіх пояснювальних змінних:

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \; i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m}.$$

Крок 2. Обчислення кореляційної матриці

$$r_{xx} = \frac{1}{n}\left(X^{*'} X^*\right).$$

Крок 3. Знаходження характеристичних чисел матриці r_{xx} з рівняння

$$\left| r_{xx} - \lambda E \right| = 0,$$

де E — одинична матриця розміру $m \times m$.

Крок 4. Упорядкування характерних чисел λ_k за абсолютним рівнем вкладу кожного головного компонента до загальної дисперсії $\left(k = \overline{1,m}\right)$.

Крок 5. Обчислення власних векторів a_k розв'язуванням системи рівнянь $(r - \lambda E)\, a = 0$

за таких умов:

$$a'_j a_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ 1 & (j = k). \end{cases}$$

Крок 6. Знаходження головних компонентів:

$$Z_k = X a_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Головні компоненти мають задовольняти такі умови:

$$\sum_{i=1}^{n} z_{k,i} = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\frac{1}{n} Z'_k Z_k = \lambda_k, \quad k = \overline{1, m};$$

$$Z'_j Z_k = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq k.$$

Крок 7. Визначення параметрів моделі $\hat{Y} = Z\hat{B}$:

$$\hat{B} = Z^{-1} Y.$$

Крок 8. Знаходження параметрів моделі $\hat{Y} = X\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = a\,\hat{B}.$$

6.7. Економетрична модель собівартості продукції

Управління собівартістю — важливий елемент управління господарською діяльністю підприємства.

У типовому положенні з планування, обліку й калькулювання собівартості продукції дано визначення економічної сутності цього показника. ***Собівартість*** *промислової продукції (робіт, послуг) — це виражені у грошовій формі поточні витрати підприємства на її виробництво. Вони утворюють* ***виробничу собівартість****, а витрати на виробництво та реалізацію —* ***повну собівартість*** *продукції.*

Собівартість продукції є результативною ознакою, яка характеризує рівень ефективного використання виробничих ресурсів і залежить від багатьох чинників. Але дуже важливо з-поміж цих чинників дібрати такі, які найбільш тісно зв'язані із собівартістю продукції.

На наш погляд, до таких чинників потрібно віднести:

✓ темпи зростання продуктивності праці;

✓ темпи зростання фондовіддачі;

✓ питому вагу фонду заробітної плати в загальних витратах.

Динаміку собівартості продукції також подамо як темпи зміни собівартості продукції в часі.

На основі цих відносних показників фірми «Рента», яка виробляє тканини, ми побудували економетричну модель.

Економічну інформацію за останні 14 років наведено в табл. 6.8

Таблиця 6.8

Рік	Індекс собівартості продукції	Індекс продуктивності праці	Індекс фондовіддачі	Питома вага фонду заробітної плати в загальних витратах
1988	0,983	0,974	0,959	0,359
1989	0,985	0,962	0,984	0,362
1990	1,026	0,841	0,850	0,442
1991	1,000	1,048	0,999	0,433
1992	1,000	0,944	1,000	0,422
1993	0,999	1,035	0,999	0,424
1994	0,984	1,114	1,101	0,379
1995	0,991	1,027	1,052	0,417
1996	0,988	1,028	1,051	0,367
1997	1,007	1,047	0,999	0,378
1998	0,994	0,965	0,999	0,375
1999	0,985	1,140	1,101	0,362
2000	1,002	0,966	1,000	0,346
2001	0,997	0,993	1,004	0,330

Ідентифікуємо змінні моделі.

Y — індекс собівартості продукції, залежна змінна;

X_1 — індекс продуктивності праці, незалежна, або пояснювальна, змінна;

X_2 — індекс фондовіддачі, незалежна, або пояснювальна, змінна;

X_3 — питома вага зарплати в загальних витратах на виробництво тканин, пояснювальна змінна.

Специфікуємо економетричну модель у степеневій формі:

$$Y = a_0 \cdot X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a} \cdot u.$$

Розрахункова модель на основі інформації запишеться у вигляді:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 X_1^{\hat{a}_1} X_2^{\hat{a}_2} X_3^{\hat{a}_3}.$$

Оцінивши параметри цієї моделі методом найменших квадратів, дістали:

$$\hat{Y} = 1{,}029 X_1^{0{,}025} X_2^{-0{,}147} X_3^{0{,}034}.$$

Коефіцієнти детермінації і кореляції для цієї моделі становлять відповідно $R^2 = 0{,}614$; $R = 0{,}783$. Це свідчить про досить тісний зв'язок індексу собівартості продукції від досліджуваних чинників.

F-критерій дорівнює 5,29, порівняємо його з табличним, коли рівень значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількість ступенів свободи $m - 1 = 4 - 1 = 3$; $n - m = 14 - 4 = 10$ ($F_{\text{табл}} = 3{,}7$).

$F_{\text{факт}} > F_{\text{крит}}$, звідси економетрична модель в цілому є статистично достовірною.

Визначимо t-критерії для перевірки статистичної значущості кожної оцінки параметрів моделі:

$$t_{a_j} = (1{,}239 \quad -1{,}677 \quad 0{,}347 \quad 1{,}099).$$

Табличні значення цього критерію, коли кількість ступенів свободи $n - m = 10$, а рівні значущості становлять:

$$\alpha = 0{,}05 - t_{\text{крит}} = 2{,}22;$$
$$\alpha = 0{,}10 - t_{\text{крит}} = 1{,}81.$$

Порівнюючи фактичні значення t-критеріїв з табличними, доходимо висновку, що жодна з оцінок параметрів цієї моделі не є статистично значущою.

Результати верифікації побудованої моделі свідчать про те, що в статистичній інформації існують причини, які не дають змоги діставати статистично значущі оцінки параметрів моделі 1МНК.

Оскільки модель в цілому є статистично достовірною, а жодна з оцінок параметрів не є статистично значущою, то очевидно, що пояснювальні змінні моделі мультиколінеарні. Крім того, оцінка параметра моделі a_1, яка характеризує рівень зміни індексу собівартості продукції залежно від зміни індексу продуктивності праці, є додатною, що суперечить теоретичним засадам динаміки цих індексів у часі.

Для перевірки наявності мультиколінеарності визначимо матрицю коефіцієнтів парної кореляції між пояснювальними змінними моделі:

$$r_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & 0,895 & -0,224 \\ 0,895 & 1 & -0,338 \\ -0,224 & -0,338 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнт парної кореляції між індексами продуктивності праці і фондовіддачі дорівнює $r_{12} = 0,895$, що значно перевищує множинний коефіцієнт кореляції: $R = 0,783$.

Детермінант кореляційної матриці r_{xx} дорівнює: $\det r = 0,17$, тобто він близький до нуля.

Наведені кількісні характеристики свідчать про те, що в моделі існує мультиколінеарність між пояснювальними змінними X_1 та X_2.

Вилучивши змінну X_2 (індекс фондовіддачі) з моделі, у результаті дістанемо:

$$\hat{Y} = 1,042 X_1^{-0,082} X_3^{0,048}.$$

Передусім зауважимо, що оцінки параметрів змінних, які залишились у рівнянні, X_1 і X_3 значно збільшились за модулем. Крім того, оцінка параметра $\hat{a}_1$ має від'ємне значення, що відповідає теоретичній сутності зв'язків між індексом продуктивності праці та індексом собівартості продукції. Якщо індекс продуктивності праці на фірмі «Рента» збільшиться на одиницю за умови, що питома вага фонду зарплати в загальних витратах не зміниться, то індекс собівартості продукції зменшиться на 0,082 одиниці.

Економетрична модель є статистично достовірною: $F_{\text{факт}} = 5,62$, що перевищує критичний рівень цього критерію ($F_{\text{крит}(0,05)} = 3,98$), коли кількість ступенів свободи $m - 1 = 2$ і $n - m = 11$.

t-критерії дорівнюють:

$$t_{\hat{a}_j} = (1,71 \quad 2,43 \quad 1,55),$$

звідки оцінки параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ є статистично значущими з імовірністю 0,95, бо $t_{(0,05)\text{крит}}$ при $n - m = 11$ дорівнює 1,765.

Наведені розрахунки показують, що мультиколінеарність негативно впливає на кількісні оцінки взаємозв'язку 1МНК, часто призводить до результатів, що суперечать теоретичній сутності зв'язків між економічними показниками. У цій моделі ми розкрили ще один зі способів звільнення від мультиколінеарності.

6.8. Стислі висновки

1. Якщо порушується одна з умов, необхідних для застосування 1МНК, що стосується матриці вихідних даних X, а саме: коли між пояснювальними змінними існує лінійна залежність, то це явище називається *мультиколінеарністю.*

2. Мультиколінеарність негативно впливає на кількісні характеристики економетричної моделі або взагалі робить неможливою її побудову, коли матриця вироджена (екстремальна мультиколінеарність).

3. Найважливіші наслідки мультиколінеарності такі:

3.1. Знижується точність оцінювання параметрів економетричної моделі.

3.2. Оцінки деяких параметрів моделі можуть бути незначущими через наявність мультиколінеарності пояснювальних змінних, взаємозв'язків між ними, а не тому, що вони не впливають на залежну змінну.

3.3. Оцінки параметрів моделі стають досить чутливими до особливостей сукупності спостережень, насамперед до її розмірів. Збільшення сукупності спостережень іноді може призвести до істотних змін в оцінках параметрів.

4. Основні ознаки мультиколінеарності.

4.1. Наявність парних коефіцієнтів кореляції між пояснювальними змінними, які наближаються до одиниці і наближено дорівнюють множинному коефіцієнту кореляції.

4.2. Значення визначника кореляційної матриці $|r_{xx}|$ наближається до нуля.

4.3. Наявність значень оцінок параметрів моделі, які наближаються до нуля, за високого рівня коефіцієнта детермінації R^2 і F-критеріїв, які істотно відрізняються від нуля.

4.4. Наявність частинних коефіцієнтів детермінації між пояснювальними змінними, які наближаються до одиниці.

4.5. Істотна зміна оцінок параметрів моделі за додаткового введення до останньої пояснювальної змінної, а також незначне підвищення (або зниження) коефіцієнтів кореляції чи детермінації.

5. Найповніше дослідити мультиколінеарність можна за допомогою *алгоритму Фаррара—Глобера*. Цей алгоритм має три види статистичних критеріїв, за якими перевіряється мультиколінеарність усього масиву пояснювальних змінних (χ^2 — «хі»-квадрат);

кожної пояснювальної змінної з усіма іншими (F-критерій); кожної пари пояснювальних змінних (t-критерій).

6. Алгоритм Фаррара—Глобера складається із семи кроків:

6.1. Нормалізація (стандартизація) змінних

$$x_{ik}^{*} = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{n\,\sigma_{x_k}^2}}.$$

6.2. Знаходження кореляційної матриці $r_{xx} = X^{*'} X^{*}$.

6.3. Визначення критерію χ^2 («хі»-квадрат)

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right] \ln |r_{xx}|.$$

6.4. Визначення оберненої матриці $C = r_{xx}^{-1} = \left(X^{*'} X\right)^{-1}$.

6.5. Обчислення F-критеріїв

$$F_k = (c_{kk} - 1)\frac{n - m}{m - 1}.$$

6.6. Знаходження частинних коефіцієнтів кореляції

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} \cdot c_{jj}}}.$$

6.7. Обчислення t-критеріїв

$$t_{kj} = \frac{r_{kj}\sqrt{n - m}}{\sqrt{1 - r_{kj}^2}}.$$

7. Можна звільнитись від мультиколінеарності за допомогою таких способів:

1) суттєво збільшити сукупність спостережень;

2) вилучити з моделі ті змінні, які є мультиколінеарними з іншими;

3) перетворити певним чином вихідну інформацію;

4) використати «рідж-регресію».

8. *Метод головних компонентів* використовується для оцінювання параметрів моделей великого розміру, а також моделей, до яких входять мультиколінеарні змінні.

Ідея методу полягає в тому, щоб перетворити множину змінних X на нову множину попарно некорельованих змінних, серед яких перша відповідає максимально можливій дисперсії, друга — максимально можливій дисперсії в підпросторі, який є ортогональним до першого, і т. д.

9. Головні компоненти Z_j обчислюються як добутки матриці нормалізованих пояснювальних змінних на власні вектори матриці $(X'X)a_j : Z_j = Xa_j$. Звідси сума елементів вектора Z_j дорівнює $Z_j' Z_j = a_j' X' X a_j$.

10. Щоб знайти головні компоненти Z_j, необхідно максимізувати вектор $Z_j' Z_j = a_j' X' X a_j$ за таких умов:

1) $a_j' a_k = 1$, $k = j$;

2) $a_j' a_k = 0$, $k \neq j$.

Перша умова нормалізує вектор a_j, щоб він не став досить великим, а друга умова забезпечує відсутність кореляції між Z_j і Z_k, бо коваріація між ними подається у вигляді $a_j' X' X_{a_k} = \lambda_j a_j k_j$ і дорівнює нулю лише тоді, коли $a_j a_k = 0$. Для розв'язування цієї задачі будується функція Лагранжа:

$$\psi = a_j' X'X a_k - \lambda_2 (a_j' a_k - 1) - \mu (a_j' a_k) \to \max .$$

Оскільки $\dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda_k} = 0$ і $\dfrac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0$, маємо рівняння $(X'X) a_j = \lambda_j a_j$, розв'язавши яке знайдемо всі власні вектори матриці $(X'X)$ a_j.

11. Головні компоненти $Z_j = Xa_j$ попарно некорельовані, а їхні дисперсії визначаються так:

$$Z_j' Z_j = \lambda_j, \quad j = \overline{1,m};$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = \operatorname{tr}(X'X) = Z_1' Z_1 + Z_2' Z_2 + \ldots + Z_m' Z_m .$$

Співвідношення $\dfrac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}$ характеризують пропорційний внесок кожного з векторів до загальної варіації змінних X, а оскільки ці компоненти ортогональні, сума всіх внесків дорівнює одиниці.

12. Алгоритм головних компонентів складається з восьми кроків.

12.1. Нормалізація всіх пояснювальних змінних:

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \overline{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \; i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m}.$$

12.2. Обчислення кореляційної матриці

$$r_{xx} = \frac{1}{n}\left(X^{*'} X^* \right).$$

12.3. Знаходження характеристичних чисел матриці r з рівняння:

$$\left| r_{xx} - \lambda E \right| = 0,$$

де λ_j — характеристичні числа; E — одинична матриця.

12.4. Власні (характеристичні) числа λ_j упорядковуються за абсолютними величинами.

12.5. Знаходження власних векторів a_j розв'язуванням системи рівнянь:

$$(r_{xx} - \lambda E)\, a = 0.$$

12.6. Обчислення головних компонент векторів Z_k:

$$Z_k = X^* a_k, \; k = \overline{1,m}.$$

Головні компоненти мають задовольняти умови:

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = 0, \quad j = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,n};$$

$$\frac{1}{n} Z_j' Z_j = \lambda_j;$$

$$Z_j' Z_k = 0, \; j \neq k.$$

12.7. Визначення параметрів моделі з головними компонентами

$$\hat{Y} = Z\hat{B}, \; \hat{B} = Z^{-1} Y.$$

12.8. Знаходження параметрів вихідної моделі:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}, \; \hat{\beta} = a \cdot \hat{B}.$$

6.9. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Що означає мультиколінеарність змінних?

2. Ознаки мультиколінеарності.

3. Як впливає наявність мультиколінеарності змінних на оцінку параметрів моделі?

4. Які статистичні критерії використовуються для виявлення мультиколінеарності?

5. Дайте коротку характеристику алгоритму Фаррара—Глобера.

6. На чому ґрунтується метод головних компонентів? Коли він застосовується?

7. Як обчислити головні компоненти і які умови вони задовольняють?

8. Як оцінюються параметри моделі на основі головних компонентів?

9. Покажіть, як можна оцінити параметри моделі $\hat{Y} = X\hat{\beta}$, скориставшись параметрами моделі $\hat{Y} = Z\hat{B}$.

10. Для трьох пояснювальних змінних обчислено матрицю:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть характеристичні числа λ_k цієї матриці.

11. За допомогою матриці $(r_{xx} - \lambda E)$ обчисліть власні вектори a_k:

$$(r_{xx} - \lambda E) = \begin{pmatrix} -5/6 & -2/6 & 1/6 \\ -2/6 & -2/6 & -2/6 \\ 1/6 & -2/6 & -5/6 \end{pmatrix},$$

де елементи a_k нормалізовані.

12. Обчисліть головні компоненти матриці

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix},$$

яка складається з трьох власних векторів.

Матрицю нормалізованих змінних X^* візьміть із прикладу 6.2.

13. Обчисліть F-критерій для визначення мультиколінеарності трьох пояснювальних змінних, якщо задано матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 1{,}60 & -0{,}41 & 0{,}61 \\ -0{,}41 & 1{,}50 & 0{,}81 \\ 0{,}61 & 0{,}81 & 1{,}47 \end{pmatrix} = r_{xx}^{-1}.$$

Сукупність спостережень $n = 20$.

14. Використовуючи елементи матриці C із завдання 13, обчисліть коефіцієнти детермінації змінних. Що вони характеризують?

15. Використовуючи матрицю C із завдання 13, обчисліть t-критерій для оцінювання попарної мультиколінеарності змінних.

6.10. Основні терміни і поняття

Мультиколінеарність • Детермінант кореляційної матриці • Стандартизація (нормалізація) змінних • Критерій χ^2 — «хі»-квадрат • Ступені свободи • Метод головних компонентів • Ортогональні змінні • Характеристичні числа • Характеристичні (власні) вектори • Функція Лагранжа • Множники Лагранжа • Головні компоненти • Алгоритм Фаррара—Глобера

Розділ 7
ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

7.1. Поняття гетероскедастичності

Припущення, які було зроблено під час оцінювання параметрів моделі 1МНК, на практиці можуть порушуватися.

У розд. 6 було розглянуто проблему мультиколінеарності, яка пов'язана з порушенням четвертої умови.

Тепер розглянемо особливості економетричного моделювання, коли порушується умова (4.3), згідно з якою припускається, що відхилення мають такий розподіл імовірностей, який зберігається для всіх спостережень. Тоді дисперсія залишків лишається незмінною для кожного спостереження.

Означення 7.1. *Якщо дисперсія залишків стала для кожного спостереження, тобто* $M(uu') = \sigma^2$, *то ця її властивість називається* ***гомоскедастичністю.***

Часто у практичних дослідженнях явище гомоскедастичност залишків порушується. Наприклад, будуючи економетричну мо дель, що характеризує залежність між заощадженнями і доходами населення на підставі теоретичної та практичної інформаці можна висунути гіпотезу, що дисперсія залишків за окремим групами населення змінюватиметься і буде пропорційною до се реднього доходу цієї групи. Коли розглядати економетричну мо дель, що характеризує залежність між депозитними вкладами розміром прибутку клієнтів банку або між витратами на харчу вання і доходом на одного члена сім'ї, витратами на харчування загальними витратами, то також можна припустити, що диспер сія залишків для окремих груп спостережень змінюватиметься У цих залежностях пояснювальна змінна може різко змінюватис а динаміка залежної змінної буде досить помірною, не адекватно до зміни пояснювальної змінної. Це і приводить до зміни дисперс залишків кожного спостереження або ж груп спостережень.

Означення 7.2. *Якщо дисперсія залишків змінюється д кожного спостереження або групи спостережень, тобт* $M(uu') = \sigma_u^2 S$, *то це явище називається* ***гетероскедастичністю***

7.2. Наслідки гетероскедастичності

За наявності гетероскедастичності оцінки параметрів, отримані 1МНК, як правило, залишаються **незміщеними, обґрунтованими, але неефективними**.

Нагадаємо, що дисперсія оцінок параметрів простої *лінійної* моделі визначається так:

$$\operatorname{var}(\hat{a}_0)=\frac{\sigma_u^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}; \tag{7.1}$$

$$\operatorname{var}(\hat{a}_1)=\frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}. \tag{7.2}$$

У цих співвідношеннях дисперсія залишків є сталою, тому вона винесена за знак суми. За гетероскедастичності дисперсія σ_u^2 буде змінюватись через зростаючий розкид значень залишків, тобто вона зростатиме. Це означає, що **буде зростати дисперсія оцінок параметрів моделі, яка приводить до збільшення їхніх стандартних похибок.**

Дисперсія оцінки $\hat{a}_1$ у разі гетероскедастичності запишеться так:

$$\operatorname{var}^*(\hat{a}_1)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sigma^2(u_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right)^2}. \tag{7.3}$$

Порівнюючи обидва співвідношення дисперсій оцінок $(\hat{a}_1)$, бачимо, що $\operatorname{var}^*(\hat{a}_1)>\operatorname{var}(\hat{a}_1)$, тобто дисперсія оцінки параметра $(\hat{a}_1)$ за гетероскедастичності більша, ніж дисперсія цієї оцінки за гомоскедастичності.

Звідси **інтервали довіри оцінок параметрів моделі також будуть більшими**. Як наслідок, *F* та *t*-критерії дають неточні результати.

Таким чином, якщо не звертати увагу на гетероскедастичність і використовувати звичайні процедури перевірки гіпотез, то висновки будуть неправильними, тобто потенційно гетероскедастичність є серйозною проблемою.

Пояснимо сутність побудови моделі 1МНК за наявності гетероскедастичності.

Припустимо, що дисперсія залишків змінюється пропорційно до величини $\frac{1}{x_{ij}}$, де x_{ij} — i-те значення j-ї пояснювальної змінної, яка може викликати гетероскедастичність.

Тоді, щоб усунути гетероскедастичність, можна перетворити вихідну інформацію, поділивши кожну зі змінних на x_{ij} і до цієї інформації застосувати ***1МНК.***

Економетрична модель матиме вигляд:

$$\frac{Y}{X} = a_0 \frac{1}{X} + a_1 + u \;\; \to \;\; \frac{Y}{X} = a_1 + a_0 \frac{1}{X} + u. \qquad (7.4)$$

У результаті для оцінювання параметрів можна застосувати 1МНК. Зауважимо, що параметри a_0 і a_1 помінялися ролями. Вільним членом моделі замість a_0 стала оцінка параметра a_1.

✓***Приклад 7.1.*** Побудуємо економетричну модель, що характеризує залежність між заощадженнями та доходом населення, млрд ф. ст. (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Рік	Заощадження	Дохід	Рік	Заощадження	Дохід
1	0,36	8,8	10	0,59	15,5
2	0,2	9,4	11	0,90	16,7
3	0,08	10,0	12	0,95	17,7
4	0,20	10,6	13	0,82	18,6
5	0,10	11,0	14	1,04	19,7
6	0,12	11,9	15	1,53	21,1
7	0,41	12,7	16	1,94	22,8
8	0,50	13,5	17	1,75	23,9
9	0,43	14,3	18	1,99	25,2

Скориставшись оператором оцінювання 1МНК

$$\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y,$$

дістанемо $\hat{a}_0 = -1{,}081$; $\hat{a}_1 = 0{,}1178$.

Економетрична модель має такий вигляд: $\hat{Y} = -1{,}081 + 0{,}1178X$.

Коефіцієнт детермінації $R^2 = \hat{a}_1 \sum x_i y_i / \sum y_i^2$ для цієї моделі $R^2 = 0{,}918$, а це означає, що варіація заощаджень Y на 91,8 % визначається варіацією доходів населення.

На перший погляд, результат наводить на думку, що специфікація моделі не містить похибки.

Але логічно висунути гіпотезу, що відхилення заощаджень можуть бути пропорційними до доходу, тобто для цієї моделі досить ймовірне існування гетероскедастичності залишків.

Отже, вихідну інформацію перетворимо, поділивши обидві змінні на дохід X (табл. 7.2):

$$y_i^* = y_i / x_i; \quad x^* = 1 / x_i.$$

Таблиця 7.2

Рік	y_i^*	x_i^*	Рік	y_i^*	x_i^*
1	0,041	0,114	10	0,038	0,065
2	0,022	0,106	11	0,054	0,060
3	0,008	0,100	12	0,054	0,056
4	0,019	0,094	13	0,044	0,054
5	0,009	0,091	14	0,053	0,051
6	0,010	0,084	15	0,073	0,047
7	0,032	0,079	16	0,085	0,044
8	0,037	0,074	17	0,073	0,042
9	0,030	0,070	18	0,079	0,040

Нове рівняння зв'язку згідно з даними табл. 7.2 має такий вигляд:

$$Y^* = -0{,}854 + 0{,}1026X^*.$$

У результаті перетворення вихідних даних практично повністю змінилася специфікація моделі. Оскільки $x_i^* = 1/x_i$, то цей зв'язок нелінійний. По-друге, $y_i^* = y_i / x_i$ характеризує відносний показник — рівень заощаджень, який припадає на одиницю доходу.

Виконавши цю процедуру, дістанемо таке: спостереження з меншими значеннями x_i^* мають відносно більшу питому вагу при оцінюванні параметрів моделі, ніж у першому варіанті.

З наведеного прикладу бачимо, що явище гетероскедастичності не впливатиме на оцінки параметрів 1МНК, якщо певним чином перетворити вихідну інформацію. Згідно з цим, якщо економетрична модель має лише дві змінні, то це можна зробити так, як у прикладі 7.1.

Це перетворення значно ускладнюється, якщо будується економетрична модель з багатьма змінними. У такому разі потрібно з'ясувати зміст гіпотези, згідно з якою $M(uu') = \sigma_u^2 S$, де σ_u^2 лишається невідомим параметром, а S — відома симетрична додатно визначена матриця.

7.3. Методи визначення гетероскедастичності

Можливість перевірки припущень про наявність гетероскедастичності залежить від природи вихідних даних. Розглянемо методи перевірки гетероскедастичності для різних вихідних даних, тобто застосуємо так зване тестування економічної інформації щодо наявності гетероскедастичності.

7.3.1. Перевірка гетероскедастичності за критерієм μ. Цей метод застосовується тоді, коли вихідна сукупність спостережень досить велика. Розглянемо відповідний алгоритм.

Крок 1. Вихідні дані залежної змінної Y розбиваються на k груп $(r = \overline{1,k})$ відповідно до зміни рівня величини Y.

Крок 2. За кожною групою даних обчислюється сума квадратів відхилень:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n_r} (y_{ir} - \overline{y}_r)^2.$$

Крок 3. Визначається сума квадратів відхилень у цілому по всій сукупності спостережень:

$$\sum_{r=1}^{k} S_r = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{r=1}^{k} (y_{ir} - \overline{y}_r)^2.$$

Крок 4. Обчислюється параметр α :

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{S_r}{n_r}\right)^{n_r/2} \Bigg/ \left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n}\right)^{n/2},$$

де n — загальна сукупність спостережень; n_r — кількість спостережень r-ї групи.

Крок 5. Обчислюється критерій:

$$\mu = -2\ln\alpha, \qquad (7.5)$$

який наближено відповідатиме розподілу χ^2 при ступені свободи $k-1$, коли дисперсія всіх спостережень однорідна. Тобто якщо значення μ не менше за табличне значення χ^2 за вибраного рівня довіри і ступені свободи $k-1$, то спостерігається гетероскедастичність.

✓***Приклад 7.2.*** Для даних, які наведено у прикладі 7.1, перевіримо наявність гетероскедастичності згідно з критерієм μ.

Розв'язання

Крок 1. Розіб'ємо дані залежної змінної, які наведені в таблиці 7.1, на три групи, по шість спостережень у кожній.

Група I	Група II	Група III
0,36	0,41	0,82
0,20	0,50	1,04
0,08	0,43	1,53
0,20	0,59	1,94
0,10	0,90	1,75
0,12	0,95	1,99

Крок 2. Обчислимо суму квадратів відхилень індивідуальних значень кожної групи від свого середнього значення:

2.1. $\bar{y}_{\text{I}} = 0{,}1767$; $\bar{y}_{\text{II}} = 0{,}6300$; $\bar{y}_{\text{III}} = 1{,}5117$.

2.2. $S_1 = \sum_{i=1}^{6}(y_{iI} - \bar{y}_I)^2 = 0{,}053133$; $\qquad S_2 = \sum_{i=1}^{6}(y_{iII} - \bar{y}_{II})^2 = 0{,}2822$;

$$S_3 = \sum_{i=1}^{6}(y_{iIII} - \bar{y}_{III})^2 = 1{,}170283.$$

Крок 3. Знайдемо суму квадратів відхилень за всіма трьома групами:

$$\sum_{r=1}^{3} S_r = S_1 + S_2 + S_3 = 0{,}05313 + + 0{,}2822 + 1{,}1703 = 1{,}5056.$$

Крок 4. Обчислимо параметр

$$\alpha = \frac{\left[\left(\frac{0{,}053}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{0{,}282}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1{,}170}{6}\right)^3\right]}{\left(\frac{1{,}5056}{18}\right)^9} = 0{,}00265.$$

Крок 5. Знайдемо критерій

$$\mu = -2\ln\alpha = 11{,}848.$$

Цей критерій наближено задовольняє розподіл χ^2 з $k - 1 = 2$ ступенями свободи. Порівняємо значення критерію μ з табличним значенням критерію χ^2 з $k - 1 = 2$ ступенями свободи за рівня довіри 0,99, $\chi^2_{кр} = 9{,}21$. Оскільки $\mu > \chi^2_{кр}$, то дисперсія залишків буде змінюватись, тобто для даних табл. 7.1 спостерігається гетероскедастичність.

7.3.2. Параметричний тест Гольдфельда—Квандта. У випадку, коли сукупність спостережень невелика, розглянутий вище метод застосовувати недоцільно.

У такому разі Гольдфельд і Квандт запропонували розглянути випадок, коли $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто дисперсія залишків зростає пропорційно до квадрата однієї з незалежних змінних моделі:

$$Y = XA + u.$$

Для виявлення наявності гетероскедастичності згадані вчені склали параметричний тест, в якому потрібно виконати такі кроки.

Крок 1. Упорядкувати спостереження відповідно до величини елементів вектора X_j.

Крок 2. Відкинути *c* спостережень, які містяться в центрі вектора. Ця процедура дасть змогу порівняти дисперсії залишків для найменших та найбільших значень пояснювальної змінної. Згідно з експериментальними розрахунками автори знайшли оптимальні співвідношення між параметрами *c* і *n* для 30—60 спостережень, де *n* — кількість елементів вектора X_j:

$$\frac{c}{n}=\frac{4}{15}.$$

Крок 3. Побудувати дві економетричні моделі на основі 1МНК за двома утвореними сукупностями спостережень обсягом $n_1=\frac{n-c}{2}$, $n_2=\frac{n-c}{2}$ за умови, що обсяг n_1 і n_2 перевищує кількість змінних *m*. Якщо $n_1 \neq n_2$, то відкидається перше або останнє спостереження сукупності.

Крок 4. Знайти суму квадратів залишків за першою (1) і другою (2) моделями S_1 і S_2:

$$S_1=u_1'u_1,$$

де u_1 — залишки за моделлю (1);

$$S_2=u_2'u_2,$$

де u_2 — залишки за моделлю (2).

Крок 5. Обчислити критерій

$$R^*=\frac{S_2}{S_1}, \tag{7.6}$$

який у разі виконання гіпотези про гомоскедастичність відповідатиме *F*-розподілу з $(n-c-2m)/2$, $(n-c-2m)/2$ ступенями свободи. Це означає, що обчислене значення R^* порівнюється з табличним значенням *F*-критерію для ступенів свободи $(n-c-2m)/2$ і $(n-c-2m)/2$ і вибраним рівнем значущості α. Якщо $R^*<F_{\text{табл}}$, то гетероскедастичність відсутня.

✓***Приклад 7.3.*** У табл. 7.3 наведено дані про загальні витрати та витрати на харчування сімей. Для цих даних перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності.

Таблиця 7.3

Номер спостереження	Витрати на харчування, ум. од.	Загальні витрати, ум. од.	$\hat{Y}$	u	u^2
1	2,30	15	2,16	0,14	0,020
2	2,20	15	2,16	0,04	0,002
3	2,08	16	2,20	–0,12	0,015
4	2,20	17	2,25	–0,05	0,002
5	2,10	17	2,25	–0,15	0,022
6	2,32	18	2,29	0,26	0,0007
7	2,45	19	2,34	0,11	0,012
8	2,50	20			
9	2,20	20			
10	2,50	22			
11	3,10	64			
12	2,50	68	2,37	0,13	0,016
13	2,82	72	2,52	0,29	0,085
14	3,04	80	2,68	0,36	0,128
15	2,70	85	2,99	–0,29	0,084
16	3,94	90	3,18	0,76	0,573
17	3,10	95	3,38	–0,28	0,076
18	3,99	100	3,57	0,42	0,178

Розв'язання.

1. Ідентифікуємо змінні:

Y — вектор витрат на харчування, залежна змінна;

X — вектор загальних витрат, незалежна змінна.

$$Y = f(X, u).$$

2. Для перевірки гіпотези про наявність гетероскедастичності застосуємо параметричний тест Гольдфельда—Квандта.

2.1. Упорядкуємо значення незалежної змінної від меншого до більшого і відкинемо c значень, які містяться всередині впорядкованого ряду:

$$\frac{c}{n} = \frac{4}{15}, \quad c \approx 4.$$

У результаті матимемо дві сукупності спостережень:

$$n_1 = \frac{n-c}{2} = \frac{18-4}{2} = 7, \qquad n_2 = \frac{n-c}{2} = \frac{18-4}{2} = 7.$$

2.2. Побудуємо дві економетричні моделі на основі двох новостворених сукупностей спостережень.

2.3. Визначимо залишки за цими двома моделями:

$$u = Y_{\mathrm{I}} - \hat{Y}_{\mathrm{I}}; \qquad u = Y_{\mathrm{II}} - \hat{Y}_{\mathrm{II}}.$$

Залишки та квадрати залишків наведено в табл. 7.3.

2.4. Обчислимо дисперсії залишків та знайдемо їх співвідношення:

$$R^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1{,}14}{0{,}074} = 15{,}41.$$

2.5. Порівняємо критерій R^* з критичним значенням F-критерію при $\gamma_1 = 5$ і $\gamma_2 = 5$ ступенях свободи і значущості $\alpha = 0{,}01$ $F_{(\alpha = 0{,}01)} = 11$. Оскільки $R^* > F_{кр}$, то вихідні дані з імовірністю 0,99 мають гетероскедастичність.

7.3.3. Непараметричний тест Гольдфельда—Квандта. Гольдфельд і Квандт для оцінювання наявності гетероскедастичності запропонували також непараметричний тест. Цей тест базується на числі піків у динаміці величини залишків після впорядкування спостережень за x_{ij}.

Закономірність зміни величини залишків, коли дисперсія є сталою, — явище гомоскедастичності ілюструє рис. 7.1, а на рис. 7.2 спостерігається явище гетероскедастичності.

Цей тест, звичайно, не такий надійний, як параметричний, але він досить простий.

Рис. 7.1

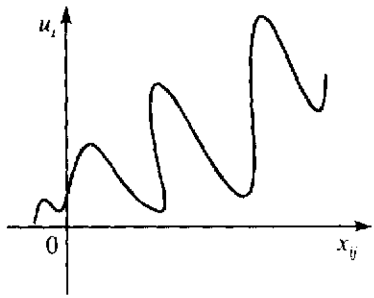


Рис. 7.2

Зауважимо, що на рис. 7.1 зображено, як змінюються залишки, що мають сталу дисперсію, а на рис. 7.2 — залишки, дисперсія яких змінюється для різних груп спостережень.

✓***Приклад 7.4.*** Дослідимо залежність залишків від кожної із пояснювальних змінних, за якими побудовано економетричну модель прибутку (див. приклад 4.2).

Подамо цю залежність графічно.

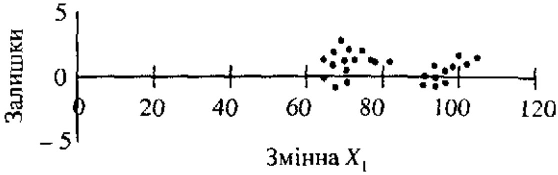


Рис. 7.3. Коливання залишків на основі змінної X_1

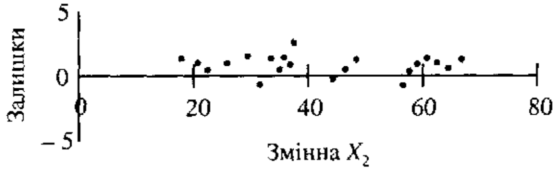


Рис. 7.4. Коливання залишків на основі змінної X_2

Рис. 7.5. Коливання залишків на основі змінної X_3

На кожному з рис. 7.3—7.5 наведено коливання залишків на вколо нуля, тобто свого математичного сподівання. Як видно цих рисунків, залишки «розсіяні» навколо нуля без певної тенден ції. А це означає, що залишки не є гетероскедастичними щод цих змінних.

7.3.4. Тест Глейзера. Ще один тест для перевірки гетерс скедастичності запропонував Глейзер. Він розглядає регресі модуля залишків $|u_i|$, що відповідають регресії найменших квад ратів, як певну функцію від X_j, де X_j — та незалежна змінн яка відповідає зміні дисперсії σ_u^2. Для цього використовуютьс такі види функцій:

$$1)\ |u_i| = a_0 + a_1 x_{ij} + \varepsilon_i\,; \quad 2)\ |u_i| = a_0 + a_1 x_{ij}^{-1} + \varepsilon_i\,;$$

$$3)\ |u_i| = a_0 + a_1 x_{ij}^{1/2} + \varepsilon_i; \quad 4)\ |u_i| = a_0 + a_1 x_{ij}^{2} + \varepsilon_i\,.$$

У цих рівняннях ε_i — стохастична складова.

Рішення про відсутність гетероскедастичності залишків приймається на підставі статистичної значущості коефіцієнтів a_0 і a_1. Переваги цього тесту визначаються можливістю розрізняти випадок чистої і мішаної гетероскедастичності.

Можливі чотири випадки:

1) $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ є статистично значущими;

2) $\hat{a}_0$— статистично значуща, $\hat{a}_1$— статистично незначуща оцінка;

3) $\hat{a}_1$— статистично значуща, $\hat{a}_0$— статистично незначуща оцінка;

4) $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ — статистично незначущі.

У першому випадку залишки гетероскедастичні, причому існує чиста і мішана гетероскедастичність. У другому випадку залишки мають мішану гетероскедастичність. Третій випадок свідчить про наявність чистої гетероскедастичності. У четвертому випадку гетероскедастичність відсутня.

✓***Приклад 7.4.*** Нехай потрібно перевірити наявність гетероскедастичності для побудови економетричної моделі, яка описуватиме залежність між рівнем заощаджень і доходом. Вихідні дані наведено в табл. 7.4.

Таблиця 7.4

Місяць	Дохід, гр. од.	Заощадження, гр. од.	Місяць	Дохід, гр. од.	Заощадження, гр. од.
1	10,8	2,36	10	17,5	2,59
2	11,4	2,20	11	18,7	2,90
3	12,0	2,08	12	19,7	2,95
4	12,6	2,20	13	20,6	2,82
5	13,0	2,10	14	21,7	3,04
6	13,9	2,12	15	23,1	3,53
7	14,7	2,41	16	24,8	3,44
8	15,5	2,50	17	25,9	3,75
9	16,3	2,43	18	27,2	3,99

Використаємо параметричний тест Гольдфельда—Квандта для встановлення гетероскедастичності у визначенні залежності між наведеними показниками.

Розв'язання. Ідентифікуємо змінні:

Y — заощадження — залежна змінна;

X — дохід — пояснююча змінна, $Y = f(X, u)$.

Крок 1. Вихідна сукупність спостережень упорядковується відповідно до величини елементів вектора X, який може впливати на зміну величини дисперсії залишків. Оскільки в табл. 7.3 дані про дохід упорядковані, то переходимо до наступного кроку.

Крок 2. Відкинемо c спостережень, які розташовано в центрі векторів X і Y, де $c = \frac{4n}{15} = \frac{4 \cdot 18}{15} \approx 4$, і поділимо сукупність спостережень на дві частини, кожна з яких містить $\frac{n-c}{2} = \frac{18-4}{2} = 7$ спостережень.

Крок 3. Побудуємо економетричну модель за першою сукупністю, яка містить спостереження від першого по сьомий місяць включно: $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$. Система нормальних рівнянь для визначення параметрів цієї моделі запишеться так:

$$\begin{cases} 7\hat{a}_0 + 88{,}4\hat{a}_1 = 15{,}47; \\ 88{,}4\hat{a}_0 + 1127{,}66\hat{a}_1 = 195{,}443. \end{cases}$$

Звідси $\hat{a}_0 = 2{,}122$; $\hat{a}_1 = 0{,}007$.

Економетрична модель має вигляд

I: $\hat{Y} = 2{,}122 + 0{,}007X$.

Крок 4. Побудуємо економетричну модель виду $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$ за другою сукупністю спостережень, починаючи від дванадцятого до вісімнадцятого місяця.

Система нормальних рівнянь для визначення параметрів цієї моделі запишеться так:

$$\begin{cases} 7\hat{a}_0 + 163\hat{a}_1 = 24{,}02; \\ 163\hat{a}_0 + 3842{,}64\hat{a}_1 = 567{,}083. \end{cases}$$

Звідси $\hat{a}_0 = -0{,}408$; $\hat{a}_1 = 0{,}165$.

Економетрична модель має вигляд:

II: $\hat{Y} = -0{,}408 + 0{,}165X$.

Крок 5. Знайдемо розрахункові значення залежної змінної моделі $\hat{Y}$ — розміру заощадження за кожною з двох моделей, і визначимо відхилення фактичних значень заощаджень від розрахункових.

Таблиця 7.5

Місяць	Y	$\hat{Y}$	u	u^2
1	2,36	*2,00*	*0,36*	*0,1296*
2	2,20	2,06	0,14	0,0196
3	2,08	2,13	–0,05	0,0025
4	2,20	2,19	0,01	0,0001
5	2,10	2,24	–0,14	0,0196
6	2,12	2,34	–0,22	0,0484
7	2,41	2,43	–0,02	0,0004
Разом				**0,2202**

Таблиця 7.6

Місяць	Y	$\hat{Y}$	u	u^2
12	2,95	2,99	–0,04	0,0016
13	2,82	3,09	–0,27	0,0729
14	3,04	3,21	–0,17	0,0289
15	3,53	3,37	0,16	0,0256
16	3,94	3,56	0,38	0,1444
17	3,75	3,68	0,07	0,0049
18	3,99	3,83	0,16	0,0256
Разом				**0,3039**

У табл. 7.5 наведено результати обчислення суми квадратів залишків за першою моделлю $S_1 = 0{,}2202$.

У табл.7.6 наведено обчислення суми квадратів залишків за другою моделлю $S_2 = 0{,}3039$.

Крок 6. Обчислимо критерій R^*, який наближено відповідає F-розподілу:

$$R^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{0{,}3039}{0{,}2202} = 1{,}33.$$

Порівняємо його значення з табличним значенням F-критерію за вибраного рівня довіри $P = 0{,}99$ і ступенях свободи $\gamma_1 = 5$ і $\gamma_2 = 5$. $F_{\text{табл}} = 11$. Звідси $R^* < F_{\text{табл}}$, що свідчить про відсутність гетероскедастичності.

7.3.5. Тест рангової кореляції Спірмена. Наявність чистої гетероскедастичності в сукупності спостережень можна виявити, розрахувавши рангові коефіцієнти кореляції Спірмена. На базі коефіцієнта Спірмена побудовано відповідний тест, алгоритм якого полягає в реалізації таких кроків:

Крок 1. Побудова простих економетричних моделей 1МНК залежної змінної (Y) з кожною з пояснювальних змінних (X_j).

Крок 2. Визначення вектора залишків для кожної з побудованих моделей (u_j).

Крок 3. Ранжування вектора кожної пояснювальної змінної (X_j) і кожного з векторів $\left|u_j\right|$ від меншого до більшого та заміна компонентів цих векторів їхніми рангами.

Крок 4. Визначення коефіцієнта рангової кореляції Спірмена за формулою:

$$r_{x_j u_j} = 1 - 6\frac{\sum_i d_{ij}^2}{n(n^2-1)}, \tag{7.7}$$

де d_{ij} — різниця між рангами x_{ij} та $\left|u_j\right|$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$; $j=\left(\overline{1,m-1}\right)$;

n — кількість спостережень; $m - 1$ — кількість пояснювальних змінних.

Крок 5. Розраховується t-статистика для визначення рівня статистичної значущості кореляції Спірмена за формулою:

$$t = \frac{\left|r_{x_j,u_j}\right|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{x_j,u_j}^2}}. \tag{7.8}$$

Доведено, що ця характеристика має закон розподілу Стьюдента з кількістю ступенів свободи $\gamma = n-2$.

Якщо розраховане значення t-статистики перевищує критичне значення при ступені свободи $n - 2$ та вибраному рівні значущості α, то гіпотезу про наявність гетероскедастичності потрібно прийняти. У протилежному випадку вона відхиляється.

Розглянемо застосування тесту рангової кореляції для визначення наявності гетероскедастичності у статистичній інформації.

Приклад 7.5. Необхідно дослідити наявність гетероскедастичності у статистичній інформації, поданій в табл. 4.2 (приклад 4.2).

Розв'язання

1. Побудуємо прості економетричні моделі, що описують залежність між прибутком та кожним з чинників. Наведемо ці моделі:

1) $\hat{Y} = 3{,}07 + 0{,}624X_1$;

2) $\hat{Y} = 19{,}90 + 0{,}935X_2$;

3) $\hat{Y} = 28{,}96 + 0{,}658X_3$.

2. Розрахуємо залишки за цими економетричними моделями (табл. 7.7).

Таблиця 7.7

Місяць	U_1	U_2	U_3	Місяць	U_1	U_2	U_3
1	–2,793515	–1,45865	–0,478358	11	–2,162116	–1,740203	–3,640065
2	–2,667235	–2,26271	–1,768784	12	–0,284983	–0,47895	4,650362
3	–0,670648	2,214783	1,812069	13	1,964164	0,52105	–0,930491
4	–2,291809	–3,132083	–4,059211	14	7,08031	0,651677	1,069509
5	–2,165529	–2,06677	–3,375382	15	1,090444	0,586364	–1,904747
6	9,704778	10,41072	5,57313	16	0,33959	0,455737	–2,588577
7	–4,039249	–5,805516	–5,349638	17	1,59215	1,716991	6,359935
8	–1,790102	–2,936143	–2,375382	18	0,469283	1,847617	1,779082
9	–1,912969	–3,67489	1,940789	19	–0,404437	1,912931	0,804826
10	–1,411263	–1,609576	0,992277	20	0,346416	4,847617	1,488655

Таблиця 7.8

Місяць	R_{X_1}	R_{U_1}	R_{X_2}	R_{U_2}	R_{X_3}	R_{U_3}	Місяць	R_{X_1}	R_{U_1}	R_{X_2}	R_{U_2}	R_{X_3}	R_{U_3}
1	3	7	3	7	3	7	11	10	13	16	12	11	10
2	6	9	6	1	1	4	12	13	15	12	16	17	14
3	1	4	1	2	2	11	13	16	14	13	20	13	20
4	2	8	2	4	6	5	14	12	17	15	18	14	18
5	4	2	4	5	4	16	15	15	18	14	15	16	3
6	5	5	5	11	9	8	16	17	19	17	17	15	9
7	7	10	7	8	8	2	17	18	3	18	13	18	12
8	9	1	11	10	7	3	18	19	20	20	14	19	6
9	14	12	9	3	12	1	19	20	6	19	6	20	7
10	11	16	10	19	12	19							

3. Визначимо ранги для кожної з пояснювальних змінних та залишків. Для цього кожну змінну та кожний із залишків $|u_{ij}|$ пронумеруємо порядковим номером від одиниці до 20. Потім впорядковуємо кожну пояснювальну змінну та залишки, посортувавши їх від меншого до більшого (Exel, меню «Данные», розділ «Сортировка»). У результаті порядковий номер чисел цих показників зміниться і характеризуватиме ранг його в масиві.

Запишемо ранги пояснювальних змінних та ранг залишків у табл. 7.8.

4. Знайдемо різниці між рангами j-ї змінної та залишками, отриманими на основі цієї змінної, піднесемо їх до квадрата (табл. 7.9).

Таблиця 7.9

d_1^2	d_2^2	d_3^2
16	16	16
25	9	9
1	9	81
4	36	1
1	4	144
36	0	1
1	9	100
1	9	36
1	100	36
121	9	121
64	36	81
4	9	1
9	9	9
16	1	49
36	4	16
0	16	169
0	4	36
25	225	36
25	0	169
196	169	9
$\sum d_{1_i}^2 = 1120$	$\sum d_{2_i}^2 = 1120$	$\sum d_{3_i}^2 = 1120$

5. Визначимо коефіцієнти рангової кореляції (простий мішаний момент):

$$r_{X_1 u_1} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{20} d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot 582}{20^3 - 20} = 0{,}562\ ;$$

$$r_{X_2u_2} = 1 - \frac{6 \cdot 674}{20^3 - 20} = 0{,}493\,;$$

$$r_{X_3u_3} = 1 - \frac{6 \cdot 1120}{20^3 - 20} = 0{,}158\,.$$

6. Розрахуємо t-критерії для визначення статистичної значущості коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена за формулою:

$$t_j = \frac{r_{X_ju_j}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r^2_{X_ju_j}}}\,;$$

$$t_1 = \frac{0{,}562\sqrt{18}}{\sqrt{1 - 0{,}562^2}} = 2{,}886\,; \quad t_2 = \frac{0{,}493\sqrt{18}}{\sqrt{1 - 0{,}493^2}} = 2{,}886\,;$$

$$t_3 = \frac{0{,}158\sqrt{18}}{\sqrt{1 - 0{,}158^2}} = 0{,}678\,.$$

Критичне значення t-критерію для $\alpha = 0{,}05$ і ступенів свободи $n - 2 = 18$ дорівнює: $t_{0{,}05\text{крит}} = 2{,}10$.

Порівнюючи розраховані t-критерії з критичним значенням, робимо висновок, що коефіцієнти рангової кореляції $r_{X_1u_1}$ та $r_{X_2u_2}$ є статистично значущими. Звідси можна зробити висновок, що пояснювальні змінні X_1 та X_2 можуть викликати гетероскедастичність.

7.3.6. Тест Парка. Для визначення наявності гетероскедастичності у статистичній інформації Р. Парк запропонував параметричний тест, в основі якого лежить визначення кількісної залежності між дисперсією пояснювальної змінної, яка може викликати гетероскедастичність, та значеннями цієї змінної за функцією:

$$\sigma^2_{x_{ij}} = \sigma^2_u x_{ij}^{\beta_j} u_j^{v_j}\,, \tag{7.9}$$

де $\sigma^2_{x_{ij}}$ — дисперсія j-ї пояснювальної змінної;

σ^2_u — дисперсія залишків;

x_{ij} — i-те значення j-ї пояснювальної змінної;

u_{ij} — стохастичні залишки для i-го спостереження j-ї пояснювальної змінної.

Прологарифмувавши вираз, дістанемо:

$$\ln \sigma_{x_{ij}}^2 = \ln \sigma_u^2 + \beta_j \ln x_{ij} + v_j ,$$

де вираз $v_j \ln(u_j)$ замінено на v_j.

Оскільки $\sigma_{x_{ij}}^2$, як правило, невідомі, то Парк запропонував замінити їх квадратами залишків.

Розглянемо алгоритм тесту Парка.

Крок 1. Побудова рівняння регресії між змінною (Y) та відповідною пояснювальною змінною (X_j)

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_j .$$

Крок 2. Визначення залишків $u = (Y - \hat{Y})$ та піднесення їх до квадрата (u^2).

Крок 3. Знаходження логарифмів u_i^2 та x_{ij}.

Крок 4. Побудова рівняння регресії

$$\ln u_i^2 = \alpha + \beta_j x_{ij} + v_{ij} ; \tag{7.10}$$

де $\alpha = \ln \sigma_u^2$.

Якщо досліджуються кілька пояснювальних змінних, то таке рівняння регресії будується для кожної з них.

Крок 5. Перевірка статичної значущості оцінки параметра β_j на основі t-критерію $\left(t_j = \dfrac{\beta_j}{\sigma_j} \right)$. Якщо фактичне значення t-статистики більше за критичне значення t-критерію, для вибраного рівня значущості α і ступеня свободи $n - 2$, то β є статистично значущий. А це означає, що гіпотезу про наявність гетероскедастичності, що викликається X_j, не можна відхиляти. Зауважимо, що тест Парка не вичерпує проблему визначення гетероскедастичності, бо вона може існувати навіть якщо врахувати ті пояснювальні змінні, які в даному випадку не досліджуються, але вони впливають на залежну змінну. Тому поряд із цим тестом доцільно використовувати інші. Зокрема, тест Глейзера доповнює тест Парка аналізом гетероскедастичності, що викликається тими змінними, які не включено до економетричної моделі. Він може виявити наявність мішаної гетероскедастичності.

✓***Приклад 7.6.*** Необхідно перевірити наявність гетероскедастичності у статистичній інформації, наведеній у табл. 4.2 (приклад 7.2), використавши параметричний тест Парка.

Розв'язання

1. Побудуємо прості економетричні моделі, які описують зв'язок залежної змінної з кожною з пояснювальних.

2. Визначимо залишки за кожною з моделей та піднесемо їх до квадрата:

u_1^2	u_2^2	u_3^2
7,803728	2,12766	0,228826
7,114145	5,119856	3,128598
0,449769	4,905264	3,283594
5,252388	9,809945	16,47719
4,689516	4,271538	11,3932
94,18272	108,3832	31,05978
16,31553	33,70402	28,61863
3,204467	8,620936	5,642439
3,659451	13,50481	3,766662
1,991663	2,590736	0,984613
4,674746	3,028306	13,25007
0.081215	0,229393	21,62587
3,85794	0,271494	0,865814
50,226	0,424683	1,143849
1,189067	0,343823	3,628063
0,115322	0,207696	6,700729
2,534942	2,948057	40,44878
0,220227	4,41369	3,165133
0,163569	3,659304	0.647745
0,120004	23,49939	2,216094

3. Прологарифмуємо квадрати залишків та пояснювальні змінні і подамо їх у табл 7.10.

Таблиця 7.10

№ з/п	$\ln u_1^2$	$\ln u_2^2$	$\ln u_3^2$	$\ln(X_1)$	$\ln(X_2)$	$\ln(X_3)$
1	2,054602	0,755023	–1,474793	4,127134	3,091042	4,644391
2	1,962085	1,633126	1,140585	4,174387	3,218876	4,691348
3	–0,79902	1,590309	1,188939	4,043051	2,833213	4,59512
4	1,658683	2,283397	2,801977	4,189655	3,295837	4,736198
5	1,545329	1,451974	2,433017	4,234107	3,332205	4,75359
6	4,545237	4,685673	3,435914	4,060443	2,995732	4,70048
7	2,792118	3,517617	3,354058	4,276666	3,465736	4,779123
8	1,164546	2,154194	1,730316	4,248495	3,401197	4,75359
9	1,297313	2,603046	1,326189	4,317488	3,526361	4,736198
10	0,68897	0,951942	–0,015506	4,369448	3,555348	4,787492
11	1,542175	1,108004	2,584003	4,343805	3,496508	4,820282
12	–2,510652	–1,47232	3,07389	4,406719	3,610918	4,779123
13	1,350133	–1,303817	–0,144085	4,382027	3,610918	4,859812
14	3,916533	–0,856412	0,134399	4,317488	3,663562	4,859812
15	0,173169	–1,06763	1,288699	4,418841	3,637586	4,882802
16	–2,16003	–1,571678	1,902216	4,394449	3,583519	4,867534
17	0,930171	1,081146	3,700036	4,465908	3,688879	4,820282
18	–1,513097	1,227794	1,152192	4,521789	3,73767	4,89784
19	–1,810519	1,297273	-0,434259	4,553877	3,7612	4,919981
20	–2,120228	3,156975	0,795746	4,574711	3,73767	4,934474

Побудуємо три економетричні моделі такого виду: $\ln u_i^2 = \alpha_i + \beta_j X_{ij}$; де $\alpha_i = \ln \sigma_u^2$.

1) $\ln u_1^2 = 35{,}313 - 8{,}002 X_1$;

2) $\ln u_2^2 = 10{,}195 - 2{,}609 X_2$;

3) $\ln u_3^2 = 9{,}534 - 1{,}677 X_3$.

4. Розрахуємо t-критерії для перевірки статистичної значущості кожної з оцінок параметрів цих моделей:

а) для першої моделі:

$$t_\alpha = 3{,}34; \qquad t_{\beta_1} = 3{,}27;$$

б) для другої моделі:

$$t_\alpha = 2{,}05; \qquad t_{\beta_2} = 1{,}83;$$

в) для третьої моделі:

$$t_\alpha = 0{,}248; \qquad t_{\beta_3} = 3{,}70.$$

5. Порівнюючи кожний із фактичних t-критеріїв із табличним, робимо висновки, що гетероскедастичність в досліджуваній статистичній інформації може існувати за рахунок кожного з чинників, бо $t_{\beta_j} > t_{\text{крит}}$.

$t_{\text{крит}} = 2{,}10$ для $\alpha = 0{,}05$ і ступенів свободи $n - 2 = 18$;

$t_{\text{крит}} = 1{,}77$ для $\alpha = 0{,}10$ і ступенів свободи $n - 2 = 18$.

Зауважимо, що висновки про наявність гетероскедастичності на основі декількох тестів не завжди збігаються. Це пов'язано з тим, що кожний із них побудований за певних вихідних припущень, тобто має свої переваги та недоліки. На наш погляд, тест Глейзера є найбільш простий і одночасно найбільш точний. Хоч і в даному випадку може бути присутня помилка специфікації рівняння регресії залишків від пояснювальної змінної.

7.4. Визначення матриці S

Щоб оцінити параметри моделі на основі інформації, коли існує гетероскедастичність і коли дисперсії залишків визначаються $M(uu') = \sigma_u^2 S$, потрібно визначити матрицю S.

Спинимося на визначенні матриці S.

Оскільки явище гетероскедастичності пов'язане лише з тим, що змінюються *дисперсії залишків*, а *коваріація між ними* відсутня, то матриця S має бути діагональною і додатно визначеною, а саме:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Аби пояснити, чому саме такий вигляд має ця матриця, потрібно ще раз наголосити: за наявності гетероскедастичності для певних вихідних даних одна (або кілька) пояснювальних змінних можуть різко змінюватися від одного спостереження до іншого тоді як залежна змінна має такі самі коливання, як і для попередніх спостережень.

Це означає, що дисперсія залишків, яка змінюватиметься від одного спостереження до іншого (*чи для групи спостережень*) може бути пропорційною до значення пояснювальної змінної X (або до її квадрата), яка зумовлює гетероскедастичність, або пропорційною до квадрата залишків.

Звідси в матриці S значення λ_i можна обчислити, користуючись *такими гіпотезами*:

а) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}$, тобто дисперсія залишків пропорційна до зміни пояснювальної змінної x_{ij};

б) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто зміна дисперсії пропорційна до змін квадрата пояснювальної змінної (x_{ij}^2);

в) $M(uu') = \sigma_u^2\{|u_i|\}^2$, тобто дисперсія залишків пропорційна до зміни квадрата розрахункових залишків за модулем.

Для першої гіпотези: $\lambda_{yi} = \dfrac{1}{x_{ij}}$;

для другої гіпотези: $\lambda_{yi} = \dfrac{1}{x_{ij}^2}$;

для третьої гіпотези: $\lambda_i = \{|\hat{u}_i|\}^2$, або $\lambda_i = (\hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{ij})^2$, або $\lambda_i = (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i^{-1})^2$.

Оскільки матриця S — симетрична і додатно визначена, то при $S = P'P$ матриця P має такий вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

✓***Приклад 7.7.*** Згідно з даними табл.7.3 треба побудувати матрицю S, яка використовується для визначення дисперсій залишків $M(uu') = \sigma_u^2 S$, якщо побудова економетричної моделі пов'язана з явищем гетероскедастичності.

Скористаємося першою гіпотезою, згідно з якою $\lambda_{ij} = \dfrac{1}{x_{ij}}$. Звідси для даних, які наведено у прикладі 7.3 (див. табл. 7.3), знайдемо $\lambda_i = \dfrac{1}{x_{i1}}$, x_{i1} — дохід в i-му місяці. Тоді матриця S^{-1} запишеться так:

$$S^{-1}=\left(\begin{array}{ccccccccc}
0{,}066667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}066667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}058824 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}058824 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}055556 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}052632 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}045455 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}015625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}014706 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}013889 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0118 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0111 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0105 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}01
\end{array}\right)$$

7.5. Узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена)

Економетрична модель, якій притаманна гетероскедастичність, є узагальненою моделлю, і для оцінювання її параметрів слід скористатися узагальненим методом найменших квадратів. Розглянемо цей метод.

Нехай задано економетричну модель

$$Y = XA + u, \tag{7.12}$$

коли $M(uu') = \sigma_u^2 S$.

Розрахункова модель запишеться так: $\hat{Y} = X\hat{A}$.

Задача полягає в знаходженні оцінок елементів вектора $\hat{A}$ в моделі. Для цього використовується матриця S, за допомогою якої коригується вихідна інформація. Цю ідею було покладено в основу методу Ейткена.

Базуючись на особливостях матриць P і S, які було розглянуто в підрозд. 7.3, можна записати співвідношення між цими матрицями та оберненими до них.

Оскільки S — додатно визначена матриця, то її можна записати як добуток PP', де матриця P є невиродженою, тобто:

$$S = PP'. \tag{7.13}$$

коли

$$P^{-1}SP^{-1'} = E \tag{7.14}$$

і

$$P^{-1'}P^{-1} = S^{-1}. \tag{7.15}$$

Помноживши рівняння (7.12) ліворуч на матрицю P^{-1}, дістанемо:

$$P^{-1}Y = P^{-1}XA + P^{-1}u. \tag{7.16}$$

Позначимо:

$$Y^* = P^{-1}Y; \quad X^* = P^{-1}X; \quad u^* = P^{-1}u.$$

Тоді модель матиме такий вигляд:

$$Y^* = X^*A + u^*. \tag{7.17}$$

Використовуючи (7.14), неважко показати, що

$$M(u^* u^{*'}) = \sigma_u^2,$$

тобто модель (7.17) задовольняє умови (4.2), коли параметри моделі можна оцінити на основі 1МНК.

Звідси

$$\hat{A} = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^* = (X'S^{-1} X)^{-1} X'S^{-1} Y. \tag{7.18}$$

Ця оцінка є незміщеною лінійною оцінкою вектора $\hat{A}$, який має найменшу дисперсію і матрицю коваріацій

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X^{*'} X^*)^{-1} = \sigma_u^2 (X'S^{-1} X)^{-1}. \tag{7.19}$$

Незміщену оцінку для дисперсії σ_u^2 можна дістати так:

$$\begin{aligned}\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m}(Y^* - X^*\hat{A})'(Y^* - X^*\hat{A}) = \frac{1}{n-m}(Y - X\hat{A})'S^{-1}(Y - X\hat{A}) = \\ = \frac{1}{n-m} u'S^{-1}u.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Оцінка параметрів $\hat{A}$, яку знайдено за допомогою (7.18), є оцінкою узагальненого методу найменших квадратів (методу Ейткена).

Коли задано матрицю S, оцінка параметрів моделі обчислюється згідно із (7.18), а стандартна похибка — згідно з (7.19). Тому можна сконструювати звичайні критерії значущості і довірчі інтервали для оцінок параметрів $\hat{a}_j$.

Визначивши залишки $u = Y - X\hat{A}$ і помноживши ліворуч на матрицю P^{-1}, дістанемо:

$$P^{-1}u = P^{-1}Y - P^{-1}X\hat{A},$$

або

$$u^* = Y^* - X^*\hat{A}.$$

Звідси $$Y^* = X^* A + u^*.$$

Тоді $$Y^{*'} Y^* = (X^*\hat{A} + u^*)'(X^*\hat{A} + u^*).$$

Оскільки $$\hat{A} = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^* = (X'S^{-1} X)^{-1} X'S^{-1} Y,$$

то

$$Y'S^{-1}Y = \hat{A}'X'S^{-1}Y + uS^{-1}u. \tag{7.21}$$

Отже, ми розбили загальну суму квадратів для (7.17) на суму квадратів регресії і залишкову. За цими даними дисперсійний аналіз буде виконано для перетворених вихідних даних. Крім того, коли незалежну змінну Y^* виміряно відносно початку відліку, а не у формі відхилення від середньої, то необхідно визначити її середнє значення і скористатись ним для корекції загальної суми квадратів і суми квадратів регресії.

Модель узагальненого методу найменших квадратів іноді специфікується у вигляді

$$Y = XA + u,$$

$$M(u) = 0,$$

$$M(uu') = V, \tag{7.22}$$

де $V = \sigma_u^2 S$ — відома симетрична додатно визначена матриця. Тоді вираз для оцінки параметрів згідно з методом Ейткена запишеться так:

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y, \tag{7.23}$$

а для її коваріаційної матриці

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2(X'V^{-1}X)^{-1}. \tag{7.24}$$

✓***Приклад 7.8.*** Скориставшись даними табл. 7.3 (див. приклад 7.2), знайдемо оцінки параметрів моделі за методом Ейткена.

Розв'язання

Оператор оцінювання методом Ейткена запишеться так:

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Тому для того, щоб знайти оцінку вектора $\hat{A}$, потрібно обчислити:

1) добуток матриць

$$X'S^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0667 & 0{,}0667 & 0{,}0625 & 0{,}0589 & 0{,}0589 & 0{,}0555 & 0{,}0526 & 0{,}05 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0{,}05 & 0{,}0454 & 0{,}0156 & 0{,}0147 & 0{,}0139 & 0{,}0125 & 0{,}0118 & 0{,}0111 & 0{,}0105 & 0{,}01 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\Bigg);$$

2) добуток матриць

$$X' S^{-1} X = \begin{pmatrix} 0,6672 & 18 \\ 18 & 833 \end{pmatrix};$$

3) матрицю, обернену до матриці $(X'S^{-1}X)$:

$$\left(X' S^{-1} X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 11,585781 & -0,6529659 \\ -0,6529659 & 0,0399344 \end{pmatrix};$$

4) матрицю

$$X' S^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1,5998 \\ 48,04 \end{pmatrix};$$

5) оцінку параметрів моделі

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3,5934 & -0,0776 \\ -0,0776 & 0,0029 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,5998 \\ 48,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,0187 \\ 0,0141 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель витрат на харчування запишеться так:

$$\hat{Y} = 2,0187 + 0,0141X.$$

$$R^2 = 0,722, \quad \sigma_u^2 = 0,083.$$

Подамо економіко-математичний аналіз характеристик економетричної моделі.

1. Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,722$. Це означає, що на 72,2 % варіація витрат на харчування залежить від загальних витрат.

2. Залишкова дисперсія $\sigma_u^2 = 0,083$ показує, що розрахункові значення витрат на харчування дуже близькі до фактичних.

3. Оцінка параметра моделі $\hat{a}_1$ свідчить про те, що збільшення загальних витрат на одиницю сприятиме граничному зростанню витрат на харчування на 0,014 одиниць.

4. Економетрична модель, параметри якої оцінені методом 1МНК, має вигляд

$$\hat{Y} = 1,999 + 0,0145X,$$

а залишкова дисперсія її $\sigma_u^2 = 0,097$. Звідси, порівнявши її характеристики з моделлю, параметри якої оцінені методом Ейткена, можна сказати, що оцінки параметрів моделі практично не змінились, але дисперсія залишків збільшилась, що впливає на ефективність оцінок.

7.6. Прогноз

Коли параметри економетричної моделі оцінюються узагальненим методом найменших квадратів, проблема прогнозування потребує спеціального дослідження. Це пов'язано з тим, що залишки моделі можуть мати систематичну складову, яку необхідно враховувати в точковому прогнозі.

Нехай $Y = XA + u$, коли $M(u) = 0$, $M(uu') = V$, де $V = \sigma_u^2 S$.

Задача зводиться до того, щоб передбачити значення залежної змінної y_0 для заданого вектора X_0. Можна записати

$$y_0 = X_0 A + u_0, \tag{7.25}$$

де u_0 — невідоме значення відхилень у прогнозований період. Нехай для u_0

$$M(u_0) = 0 \text{ і } M(u_0 u_0') = \sigma^2 E, \tag{7.26}$$

а

$$M(u_0 u) = \begin{pmatrix} Mu_1 u_0 \\ Mu_2 u_0 \\ Mu_3 u_0 \\ \dots \\ Mu_n u_0 \end{pmatrix} = W, \tag{7.27}$$

де W — вектор коваріацій поточних і прогнозованих значень залишків.

Сформулюємо лінійний прогноз:

$$p = c'Y, \tag{7.28}$$

де c — n-вимірний вектор, який має мінімізувати дисперсію прогнозу:

$$\sigma_{\text{пр}}^2 = M\left\{(p - y_0)^2\right\}. \tag{7.29}$$

Мінімальне значення дисперсії прогнозу досягається для $M(p-y_0)=0$.

Враховуючи (7.25) і (7.28), можна записати відхилення

$$p-y_0=c'Y-X_0A-u_0=c'(XA+u)-X_0A-u_0=$$
$$=c'XA+c'u-X_0A-u_0=(c'X-X_0)A+c'u-u_0.$$

З умови незміщеності прогнозу випливає, що вектор c має задовольняти рівність

$$c'X-X_0=0. \tag{7.30}$$

Тоді похибка прогнозу набере вигляду:

$$p-y_0=c'u-u_0.$$

Оскільки $p-y_0$ — скаляр, то дисперсія прогнозу:

$$\sigma_{\text{пр}}^2=M\left\{(p-y_0)^2\right\}=M\left\{(p-y_0)(p-y_0)'\right\}=$$
$$=M\left\{(c'u-u_0)(c'u-u_0)'\right\}=M\left(c'uu'c-c'uu_0-c'uu_0+u_0^2\right)= \tag{7.31}$$
$$=M\left(c'uu'c-2c'uu_0+u_0^2\right)=c'Vc+\sigma_0^2-2c'W.$$

Достовірним можна вважати прогноз тоді, коли дисперсія $\sigma_{\text{пр}}^2$ буде мінімальною. Тому формулюємо задачу:

мінімізувати $\quad\sigma_{\text{пр}}^2=c'Vc+\sigma_0^2-2c'W \qquad (7.32)$

за умови незміщеності прогнозу:

$$c'X-X_0=0.$$

Щоб розв'язати задачу (7.32), будуємо функцію Лагранжа

$$f=c'Vc-2c'W-2(c'X-X_0)\lambda,$$

де λ — $(m-1)$-вимірний вектор, компонентами якого є множники Лагранжа. Продиференціювавши функцію за невідомими параметрами c і λ та прирівнявши похідні до нуля, дістанемо рівняння

$$\begin{pmatrix}\hat{c}\\-\hat{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V & X\\X' & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}W\\X_0'\end{pmatrix}.$$

Розв'язавши їх, знайдемо $\hat{c}$:

$$\hat{c} = V^{-1}\left[E - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right] W + V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X_0'.$$

Підставимо це значення в (7.28) і визначимо найкращий лінійний незміщений прогноз

$$\hat{p} = X_0\hat{A} + W'V^{-1}(Y - XA).$$

Оскільки $\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$,

то

$$\hat{p} = X_0\hat{A} + W'V^{-1}u, \tag{7.33}$$

де $u = (Y - X\hat{A})$ — вектор залишків, який відповідає оцінці параметрів моделі на основі ІМНК.

Отже, для прогнозу можна використовувати співвідношення (7.33). Цей прогноз має дві особливості:

1) вектор прогнозних значень X_0 перемножується на вектор оцінок $\hat{A}$, обчислений згідно з узагальненим методом найменших квадратів;

2) для оцінювання невідомих прогнозних залишків u_0 застосовується матриця V, яка містить інформацію про взаємозалежність залищків базисного періоду та прогнозних.

Розглянемо приклад побудови економетричної моделі узагальненим методом найменших квадратів за наявності гетероскедастичності.

✓***Приклад 7.9.*** Побудуємо економетричну модель прибутку за умови, що в статистичній інформації (табл. 4.2) існує гетероскедастичність.

Розв'язання

1. Дослідимо гетероскедастичність на основі тесту Гольфельда—Квандта.

Алгоритм:

1. Вибираємо ту пояснювальну змінну, яка може викликати гетероскедастичність залишків. У даному випадку припустимо, що інвестиції можуть викликати гетероскедастичність залишків.

2. Сортуємо статистичну інформацію за змінною X_1 (інвестиції).

Місяць	Y	X_1	X_2	X_3	u
3	38	57	17	99	1,398473
6	49	58	20	110	8,106768
1	39	62	22	104	–1,06351
2	41	65	25	109	–1,83599
4	42	66	27	114	–2,98904
5	44	69	28	116	–2,58705
8	45	70	30	116	–1,99326
7	44	72	32	119	–4,72569
9	48	75	34	114	0,03969
14	57	75	39	129	3,517828
11	49	77	33	124	–2,94188
10	51	79	35	120	–0,24083
13	55	80	37	129	0,224196
16	54	81	36	130	–1,3453
12	54	82	37	119	2,13399
15	56	83	38	132	–0,7301
17	59	87	40	124	3,794903
18	61	92	42	134	0,779063
19	62	95	43	137	–0,17523
20	64	97	42	139	0,624327

3. Визначимо параметр c зі співвідношення:

$$\frac{c}{n} = \frac{4}{15},$$

де n — кількість спостережень ($n = 20$);

c — кількість спостережень, які необхідно в даному тесті відкинути всередині сукупності спостережень ($c = 6$).

4. Виділяємо дві сукупності спостережень (по сім спостережень) і за цими сукупностями будуємо економетричні моделі.

	Місяць	Y	X_1	X_2	X_3	u
Перша сукупність спостережень	3	38	57	17	99	1,398473
	6	49	58	20	110	8,106768
	1	39	62	22	104	–1,06351
	2	41	65	25	109	–1,83599
	4	42	66	27	114	–2,98904
	5	44	69	28	116	–2,58705
	8	45	70	30	116	–1,99326
	7	44	72	32	119	–4,72569
	9	48	75	34	114	0,03969
	14	57	75	39	129	3,517828
	11	49	77	33	124	–2,94188
	10	51	79	35	120	–0,24083
	13	55	80	37	129	0,224196
Друга сукупність спостережень	16	54	81	36	130	–1,3453
	12	54	82	37	119	2,13399
	15	56	83	38	132	–0,7301
	17	59	87	40	124	3,794903
	18	61	92	42	134	0,779063
	19	62	95	43	137	–0,17523
	20	64	97	42	139	0,624327

Скориставшись функцією «Лінійн» (програма Excel), дістали такі результати для першої та другої сукупностей:

1,04837	–0,74008	–0,543	–26,4266
0,374765	1,633299	1,202374	69,22336
0,860598	1,995725	#Н/Д	#Н/Д
6,17349	3	#Н/Д	#Н/Д
73,76553	11,94876	#Н/Д	#Н/Д

0,016570	0,293432	0,469858	3,337348
0,081812	0,483632	0,228249	7,685612
0,973327	0,922489	#Н/Д	#Н/Д
36,49156	3	#Н/Д	#Н/Д
93,16133	2,552955	#Н/Д	#Н/Д

Сума квадратів залишків становить

$$\sum_i u_{i\,(1)}^2 = 11{,}94876; \qquad \sum_i u_{i\,(2)}^2 = 2{,}552955.$$

5. Розраховуємо критерій R^*

$$R^* = \frac{\sum_i u_{i\,(2)}^2}{\sum_i u_{i\,(1)}^2}.$$

Порівняємо його з критичним значенням F-критерію для об-раного рівня значущості (0,05) і ступеня свободи $(n - c)/2 - m$.

$$R^* = 0{,}213659; \qquad F_{\text{крит}} = 9{,}276619.$$

Оскільки $R^* < F_{\text{крит}}$ $(0{,}21 < 9{,}28)$, то інвестиції не викликають гетероскедастичність залишків, тобто зміна дисперсії залишків не може викликатися зміною цієї пояснювальної змінної.

Тест Глейзера. На основі цього тесту визначається чиста та мішана гетероскедастичність. За цим тестом необхідно знайти залежність між модулем залишків та кожною пояснювальною змінною:

$$|\hat{u}| = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_j; \qquad j = \overline{1,3}.$$

У цій моделі перевіряється достовірність оцінок параметрів $\hat{\alpha}_0$ та $\hat{\alpha}_1$.

Побудуємо прості економетричні моделі модуля залишків залежно від кожної пояснювальної змінної:

$|\hat{u}| = 5{,}586 - 0{,}046x_1;$
(1,888) (–1,204)
$|\hat{u}| = 4{,}049 - 0{,}071x_2;$
(2,249) (–1,226)
$|\hat{u}| = 7{,}051 - 0{,}041x_3.$
(1,424) (–1,012)

Перевіримо статистичну значущість оцінок параметрів кожної з цих моделей, застосувавши t-статистику.

У дужках під оцінками параметрів моделей приведені фактичні значення t-критеріїв. Табличне значення цього критерію за рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і ступеня свободи $n - m = 18$ дорівнює:

$$t_{(0{,}05)\,\text{крит}} = 2{,}10.$$

Порівнюючи фактичні значення t-критеріїв з табличним, робимо висновок, що в другому рівнянні оцінка параметра a_0 є статистично значущою. Отже, можна дійти висновку про наявність мішаної гетероскедастичності, яка викликається зміною тих пояснювальних змінних, які впливають на залежну змінну, але не включені до моделі.

Щоб оцінити параметри моделі узагальненим методом найменших квадратів, необхідно сформувати матрицю S.

Побудова матриці P, S, P^{-1}, S^{-1}. Оскільки ми маємо справу з мішаною гетероскедастичністю, то використовуємо третю гіпотезу щодо визначення λ_i:

$$\lambda_i = |\hat{u}_i^2|.$$

Для розрахунку $\hat{u}_i$ використаємо модель:

$$abs(\hat{u}) = 4{,}404955 - 0{,}07133 \cdot X_2,$$

бо в цій моделі оцінка параметра $\hat{a}_0$ статистично значуща.

Підставивши в цю модель фактичні значення пояснювальної змінної X_2, дістанемо розрахункові залишки за модулем та квадрати цих залишків:

$$abs(\hat{u}) = \begin{pmatrix} 3{,}192428 \\ 2{,}978452 \\ 2{,}835802 \\ 2{,}621826 \\ 2{,}479176 \\ 2{,}407851 \\ 2{,}265201 \\ 2{,}12255 \\ 1{,}9799 \\ 1{,}623274 \\ 2{,}051225 \\ 1{,}908575 \\ 1{,}765924 \\ 1{,}83725 \\ 1{,}765924 \\ 1{,}694599 \\ 1{,}551949 \\ 1{,}409299 \\ 1{,}337973 \\ 1{,}409299 \end{pmatrix}; \qquad (abs(\hat{u}))^2 = \begin{pmatrix} 10{,}1916 \\ 8{,}871176 \\ 8{,}041773 \\ 8{,}873972 \\ 8{,}146314 \\ 5{,}797746 \\ 5{,}131136 \\ 4{,}505219 \\ 3{,}920004 \\ 2{,}6350018 \\ 4{,}207524 \\ 3{,}642659 \\ 3{,}118488 \\ 3{,}375488 \\ 3{,}118488 \\ 2{,}871666 \\ 2{,}408546 \\ 1{,}986124 \\ 1{,}790172 \\ 1{,}986124 \end{pmatrix}.$$

Значення вектора $abs(\hat{u})$ є діагональними елементами матриці P^{-1}, а значення вектора $(abs(\hat{u}))^2$ — діагональними елементами матриці S^{-1}.

Запишемо матрицю S, діагональні елементи якої визначаються за такою формулою: $\dfrac{1}{\lambda_i}$, де $\lambda_i = |\hat{u}_i|^2$.

$$S=\begin{pmatrix}
0{,}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0{,}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0{,}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0{,}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0{,}2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0{,}2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0{,}2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0{,}2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}4&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}5&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}5
\end{pmatrix}.$$

Побудуємо матрицю P, діагональні елементи якої дорівнюют $\sqrt{\dfrac{1}{\lambda_i}}$.

$$P=\begin{pmatrix}
0{,}3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0{,}3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0{,}4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0{,}4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0{,}4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0{,}4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0{,}4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0{,}5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}6&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}5&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}5&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}6&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}5&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.6&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}5&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}6&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}7&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}7&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0{,}7
\end{pmatrix}$$

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}
10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 8{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 6{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}4 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}.$$

Побудуємо матрицю P^{-1}, діагональні елементи якої дорівнюють $\sqrt{\lambda_i}$.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}
3{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}6 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}4
\end{pmatrix}$$

Побудовані матриці P^{-1} та S^{-1}, які коригують інформацію за наявності гетероскедастичності, свідчать про необхідність враховувати можливу зміну залишків для кожного спостереження. Цей висновок пов'язаний з тим, що діагональні елементи достатньо різко змінюються від першого до останнього значення в побудованих матрицях P^{-1} та S^{-1}.

Оцінювання параметрів моделі методом Ейткена за допомогою матриці S^{-1}. Оператор оцінювання запишеться у такому вигляді: $\hat{A} = \left(X'S^{-1}X\right)^{-1} X'S^{-1}Y$.

Запишемо матрицю пояснювальних змінних і вектор залежної змінної:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 57 & 17 & 99 \\ 1 & 58 & 20 & 110 \\ 1 & 62 & 22 & 104 \\ 1 & 65 & 25 & 109 \\ 1 & 66 & 27 & 114 \\ 1 & 69 & 28 & 116 \\ 1 & 70 & 30 & 116 \\ 1 & 72 & 32 & 119 \\ 1 & 75 & 34 & 114 \\ 1 & 75 & 39 & 129 \\ 1 & 77 & 33 & 124 \\ 1 & 79 & 35 & 120 \\ 1 & 80 & 37 & 129 \\ 1 & 81 & 36 & 130 \\ 1 & 82 & 37 & 119 \\ 1 & 83 & 38 & 132 \\ 1 & 87 & 40 & 124 \\ 1 & 92 & 42 & 134 \\ 1 & 95 & 43 & 137 \\ 1 & 97 & 42 & 139 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 38 \\ 49 \\ 39 \\ 41 \\ 42 \\ 44 \\ 45 \\ 44 \\ 48 \\ 57 \\ 49 \\ 51 \\ 55 \\ 54 \\ 54 \\ 56 \\ 59 \\ 61 \\ 62 \\ 64 \end{pmatrix};$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 57 & 58 & 65 & 62 & 66 & 69 & 70 & 72 & 75 & 75 & 77 & 79 & 80 & 81 & 82 & 83 & 87 & 92 & 95 & 97 \\ 17 & 20 & 22 & 25 & 27 & 28 & 30 & 32 & 34 & 39 & 33 & 35 & 37 & 36 & 37 & 38 & 40 & 42 & 43 & 42 \\ 99 & 110 & 104 & 109 & 114 & 116 & 116 & 119 & 114 & 129 & 124 & 120 & 129 & 130 & 119 & 132 & 124 & 134 & 137 & 139 \end{pmatrix};$$

$$X'S^{-1} = \left(\begin{matrix} 10{,}19159 & 8{,}871177 & 8{,}041772 & 6{,}873973 & 6{,}146314 & 5{,}797746 & 5{,}131133 & 4{,}505219 & 3{,}920004 & 2{,}635019 \\ 580{,}9202 & 514{,}5283 & 498{,}5899 & 4468083 & 405{,}6567 & 400{,}0445 & 359{,}1793 & 324{,}3758 & 294{,}0003 & 197{,}6264 \\ 173{,}2571 & 177{,}4235 & 176{,}919 & 1718493 & 165{,}9505 & 162{,}3369 & 153{,}934 & 144{,}167 & 133{,}2801 & 102{,}7657 \\ 1008{,}968 & 975{,}8295 & 836{,}3443 & 749{,}2631 & 700{,}6798 & 672{,}5385 & 595{,}2115 & 536{,}1211 & 446{,}8804 & 339{,}9174 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 4{,}207524 & 3{,}642657 & 3{,}118489 & 3{,}375486 & 3{,}118489 & 2{,}871667 & 2{,}408545 & 1{,}986122 & 1{,}790173 & 1{,}98612246 \\ 323{,}9794 & 287{,}7699 & 249{,}4791 & 273{,}4144 & 255{,}7161 & 238{,}3483 & 209{,}5434 & 182{,}7233 & 170{,}0664 & 192{,}653878 \\ 138{,}8483 & 127{,}493 & 115{,}3841 & 121{,}5175 & 115{,}3841 & 109{,}1233 & 96{,}34181 & 83{,}41714 & 76{,}97743 & 83{,}4171432 \\ 521{,}733 & 437{,}1189 & 402{,}2851 & 438{,}8132 & 371{,}1002 & 379{,}06 & 298{,}6596 & 266{,}1404 & 245{,}2537 & 276{,}071021 \end{matrix}\right);$$

$$X'S^{-1}X = \begin{pmatrix} 90{,}61923 & 6405{,}424 & 2629{,}787 & 10497{,}99 \\ 6405{,}424 & 463077{,}6 & 193134{,}3 & 751461{,}1 \\ 2629{,}878 & 193134{,}3 & 81753{,}87 & 311610{,}9 \\ 10497{,}99 & 751461{,}1 & 311610{,}9 & 1226364 \end{pmatrix};$$

$$\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}=\begin{pmatrix}5,829061 & -0,037746 & 0,117178 & -0,05672\\ -0,03746 & 0,001577 & -0,00189 & -0,00017\\ 0,117178 & -0,00189 & 0,003712 & -0,00079\\ -0,05672 & -0,00017 & -0,00079 & 0,000788\end{pmatrix};$$

$$X'S^{-1}Y=\begin{pmatrix}4274,472\\ 308079,2\\ 128300,7\\ 501389,4\end{pmatrix}.$$

Запишемо оцінки параметрів моделі за методом Ейткена:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}-28,5592\\ 0,294359\\ -0,31863\\ 0,553908\end{pmatrix}.$$

Одночасно нагадаємо, що оцінки параметрів моделі за 1МНК дорівнюють:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}-15,00803\\ 0,2833065\\ 0,0614503\\ 0,3476407\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, оцінки параметрів моделі, що оцінені методом Ейткена і 1МНК, значно відрізняються. Якщо залишки гетероскедастичні, то метод Ейткена уточнює кількісні характеристики зв'язку.

Оцінимо параметри моделі методом Ейткена, використовуючи матрицю P^{-1}.

Для цього скористаємося функцією «ЛИНЕЙН» (програма Excel), де вихідними даними будуть скориговані Y^*, X^*.

$$Y^* = \begin{pmatrix} 121{,}3123 \\ 145{,}9442 \\ 110{,}5963 \\ 107{,}4949 \\ 104{,}1254 \\ 105{,}9454 \\ 101{,}934 \\ 93{,}39221 \\ 95{,}03519 \\ 92{,}52{,}662 \\ 100{,}51 \\ 97.33731 \\ 97{,}12584 \\ 99{,}21148 \\ 95{,}35992 \\ 94{,}89756 \\ 91{,}56498 \\ 85{,}96721 \\ 82{,}95435 \\ 90{,}19511 \end{pmatrix}; \quad X^* = \begin{pmatrix} 3{,}192428 & 181{,}9684 & 54{,}27127 & 316{,}05034 \\ 2{,}978452 & 172{,}7502 & 59{,}56904 & 327{,}62974 \\ 2{,}835802 & 175{,}8197 & 62{,}38764 & 294{,}92339 \\ 2{,}621826 & 170{,}4187 & 65{,}54566 & 285{,}77907 \\ 2{,}479176 & 163{,}6256 & 66{,}93775 & 282{,}62607 \\ 2{,}407851 & 166{,}1417 & 67{,}41982 & 279{,}3107 \\ 2{,}265201 & 158{,}564 & 67{,}95602 & 262{,}76326 \\ 2{,}12255 & 152{,}8236 & 67{,}92161 & 252{,}58347 \\ 1{,}9799 & 148{,}4925 & 67{,}3166 & 225{,}70859 \\ 1{,}623274 & 121{,}7456 & 63{,}30769 & 209{,}40235 \\ 2{,}051225 & 157{,}9443 & 67{,}69043 & 254{,}3519 \\ 1{,}908575 & 150{,}7774 & 66{,}80011 & 229{,}02897 \\ 1{,}765924 & 141{,}274 & 65{,}3392 & 227{,}80425 \\ 1{,}83725 & 148{,}8172 & 66{,}14098 & 238{,}84244 \\ 1{,}765924 & 144{,}8058 & 65{,}3392 & 210{,}145 \\ 1{,}694599 & 140{,}6517 & 64{,}39477 & 223{,}6871 \\ 1{,}551949 & 135{,}0196 & 62{,}07796 & 192{,}44166 \\ 1{,}409299 & 129{,}6555 & 59{,}19054 & 188{,}84601 \\ 1{,}337973 & 127{,}1075 & 57{,}53286 & 183{,}30236 \\ 1{,}409299 & 136{,}702 & 59{,}19054 & 195{,}8925 \end{pmatrix};$$

0,553908	–0,31863	0,294359	–28,5592
0,206351	0,447979	0,291962	17,75109
0,761295	7,352343	#НД	#НД
12,75705	16	#НД	#НД
2758,43	864,9113	#НД	#НД

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -28{,}5592 \\ 0{,}294359 \\ -0{,}31863 \\ 0{,}553908 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель запишеться так:

$$\hat{Y} = -28{,}56 + 0{,}294X_1 + 0{,}319X_2 + 0{,}554X_3 .$$

Отже, бачимо, що оцінки параметрів моделі, розраховані методом Ейткена з використанням матриць P^{-1} і S^{-1}, однакові.

Прогноз залежної змінної. Точковий прогноз за наявності гетероскедастичності має такий вигляд:

$$y_{пр} = X'_{пр}\hat{A} + \sqrt{\lambda_n} \cdot u_n \ ,$$

де $\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів моделі, здобутих методом Ейткена;

$\sqrt{\lambda_n}$ — останній діагональний елемент матриці P^{-1} (1,409299);

u_n — останній елемент залишків, здобутих методом 1МНК (0,624327).

Запишемо вектор прогнозованих пояснювальних змінних:

$$X_{пр} = \begin{pmatrix} 1 \\ 90 \\ 43 \\ 135 \end{pmatrix}.$$

Тоді прогнозне значення прибутку буде таке: $\hat{y}_{пр} = 59{,}8894715$.

Для того щоб знайти інтервальний прогноз прибутку, необхідно обчислити стандартну похибку прогнозу. Вона визначається за формулою:

$$S_{y_{пр}} = \sqrt{\sigma_u^2 X'_{пр}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1} X_{пр}} \ ,$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m} \cdot u' S^{-1} u,$$

$$\sigma_u^2 = 9{,}845207,$$

$$\sigma_u^2 X'_{пр} = \begin{pmatrix} 9{,}845207 & 886{,}0686 & 423{,}343882 & 1329{,}1029 \end{pmatrix},$$

$$\left(X'S^{-1} \cdot X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5{,}829061 & -0{,}03746 & 0{,}117178 & -0{,}05672 \\ -0{,}03746 & 0{,}001577 & -0{,}00189 & -0{,}00017 \\ 0{,}117178 & -0{,}00189 & 0{,}003712 & -0{,}00079 \\ -0{,}05672 & -0{,}00017 & -0{,}00079 & 0{,}000788 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_u^2 X_{пр}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}58221 & 0{,}00849146 & 0{,}0028672 & 0{,}00869622 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_u^2 X_{пр}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1} X'_{пр} = 0{,}479295,$$

$$\hat{S}_{y_{пр}} = 0{,}692311\,.$$

Перейдемо від стандартної похибки прогнозу до граничної, яка подається у такому вигляді:

$$\Delta_{\hat{y}_{пр}} = t_\alpha S_{\hat{y}_{пр}}, \quad \alpha = 0{,}05, \quad n - m = 16,$$

$$\Delta_{\hat{y}_{пр}} = 1{,}467634.$$

Додавши похибку до точкового прогнозу, дістанемо максимально можливе значення залежної змінної на перспективу, а віднявши — мінімальне значення:

$$y_{пр\,\max} = 61{,}531049,$$

$$y_{пр\,\min} = 58{,}595781.$$

Отже, прогнозне значення прибутку міститиметься в інтервалі:

$$58{,}595781 \le y_{пр} \le 61{,}531049.$$

7.7. Стислі висновки

1. Якщо дисперсія залишків стала для кожного спостереження, тобто $M(uu') = \sigma_u^2$, то це явище називається гомоскедастичністю, причому воно є однією з чотирьох необхідних умов для застосування 1МНК під час оцінювання параметрів моделі.

2. Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження чи групи спостережень, тобто $M(uu') = \sigma^2 S$, то це явище називається гетероскедастичністю, і воно спричинює те, що оцінки параметрів моделі 1МНК будуть незміщеними, обґрунтованими, але неефективними.

3. За наявності гетероскедастичності в простій економетричній моделі, тобто $Y = a_0 + a_1X + u$, щоб оцінити параметри 1МНК достатньо ліву і праву частини моделі поділити на X, що практично змінює специфікацію моделі.

Коли будується економетрична модель з багатьма змінними, таке перетворення значно ускладнюється. Тому необхідно перевіряти гіпотезу, згідно з якою $M(uu') = \sigma_u^2 S$, де S — відома симетрична додатно визначена матриця, а σ_u^2 — невідоме значення дисперсії залишків.

4. Перевірка припущень про наявність гетероскедастичності залежить від природи вихідних даних. Для перевірки наявності гетероскедастичності використовуються такі методи:

4.1. Критерій μ.

4.2. Параметричний тест Гольдфельда—Квандта.

4.3. Непараметричний тест Гольдфельда—Квандта.

4.4. Тест Глейзера.

4.5. Тест Спірмена.

4.6. Тест Парка.

5. Алгоритм для знаходження критерію μ складається з п'яти кроків:

5.1. Вихідні дані залежної змінної Y розбиваються на k груп $\left(r=\overline{1,k}\right)$ згідно зі зміною рівня величини Y.

5.2. За кожною групою спостережень обчислюється сума квадратів відхилень:

$$S_r = \sum_{i=1}^{k}\left(y_{ir}-\overline{y}_r\right)^2.$$

5.3. Відшукується сума квадратів відхилень у цілому за всією сукупністю спостережень:

$$\sum_{r=1}^{k} S_r = \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i=1}^{k}\left(y_{ir}-\overline{y}_r\right)^2.$$

5.4. Обчислюється параметр α:

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{S_r}{n_r}\right)^{n_r/2} \Bigg/ \left(\frac{\sum_{r=1}^{k} S_r}{n}\right)^{n/2},$$

де n — кількість спостережень у цілому; n_r — кількість спостережень r-ї групи.

5.5. Обчислюється критерій μ:

$$\mu = -2\ln\alpha,$$

який наближено відповідатиме розподілу χ^2. Якщо значення μ менше за табличне значення χ^2 за вибраного рівня довіри і ступеня свободи $k-1$, то гетероскедастичність відсутня.

6. Параметричний тест Гольдфельда—Квандта складається з п'яти кроків.

6.1. Спостереження (вихідні дані) впорядковуються відповідно до величини елементів вектора X_j, який може викликати зміну дисперсії залишків.

6.2. Відкидається c спостережень, які містяться всередині векторів вихідних даних, де

$$\frac{c}{n}=\frac{4}{15}.$$

6.3. Будуються дві економетричні моделі на основі 1МНК за двома створеними сукупностями спостережень обсягу $(n-c)/2$ за умови, що $(n-c)/2$ перевищує кількість змінних m.

6.4. Обчислюється сума квадратів залишків за першою S_1 та другою S_2 моделями:

$$S_1=u_1'u_1,$$

де u_1 — залишки за моделлю, побудованою за першою сукупністю спостережень,

$$S_2=u_2'u_2,$$

де u_2 — залишки за моделлю, побудовою за другою сукупністю спостережень.

6.5. Відшукується критерій $R^*=\frac{S_2}{S_1}$, який в разі виконання гіпотези про гомоскедастичність відповідатиме F-розподілу з $\gamma_1=(n-c-2m)/2$, $\gamma_2=(n-c-2m)/2$ ступенями свободи.

Обчислене значення критерію порівнюється з табличним значенням F-критерію за вибраного рівня довіри і відповідних ступенів свободи. Якщо $R^*\leq F_{\text{табл}}$, то гетероскедастичність відсутня.

7. Непараметричний тест Гольдфельда—Квандта базується на кількості піків величини залишків після упорядкування спостережень за x_{ij}. Якщо для всіх значень змінної x_{ij} залишки розподіляються приблизно однаково, то дисперсія їх однорідна, у протилежному разі вона змінюється.

8. Тест Глейзера для перевірки гетероскедастичності базується на побудові регресійної функції, що характеризує залежність величини залишків за модулем від пояснювальної змінної X_j, яка може викликати зміну дисперсії залишків.

Рішення про відсутність гетероскедастичності залишків приймається на підставі значущості коефіцієнтів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$. Перевага цього методу полягає в тому, що він дає змогу розрізняти випадок чистої і мішаної гетероскедастичності. Чистій гетероскедастичності відповідають значення параметрів — $\hat{a}_0 = 0$, $\hat{a}_1 \neq 0$, а мішаній — $\hat{a}_0 \neq 0$, $\hat{a}_1 \neq 0$.

9. Оскільки явище гетероскедастичності пов'язане лише з тим, що змінюються дисперсії залишків, а коваріація між ними відсутня, то матриця S у співвідношенні $M(uu') = \sigma_u^2 S$ має бути додатно визначеною і діагональною:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

10. У цій матриці значення λ_i можна обчислити трьома способами, залежно від того, яку гіпотезу висунуто відносно зміни дисперсій залишків:

а) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}$, $\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}}$;

б) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, $\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}^2}$;

в) $M(uu') = \sigma_u^2 \{|u_i|\}^2$ $\lambda_i = \{|u_i|\}^2$.

11. За наявності гетероскедастичності для оцінювання параметрів моделі доцільно застосувати узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена), оператор оцінювання якого має такий вигляд:

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Вектор $\hat{A}$ у такому разі містить незміщену лінійну оцінку параметрів моделі, яка має найменшу дисперсію і матрицю коваріацій

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X' S^{-1} X)^{-1}.$$

12. Оператор узагальненого методу найменших квадратів іноді специфікується у такому вигляді:

$$\hat{A} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y,$$

де $V = \sigma_u^2 S$, а $\operatorname{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X' V^{-1} X)^{-1}$.

13. Коли параметри моделі оцінюються за методом Ейткена, то загальна сума квадратів залежної змінної розбивається на суму квадратів регресії і суму квадратів залишків так:

$$Y' S^{-1} Y = \hat{A}' X' S^{-1} Y + u S^{-1} u.$$

Відповідно дисперсії будуть такі:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} Y' S^{-1} Y; \ \sigma^2 = \frac{1}{m-1} \hat{A}' X' S^{-1} Y \ ; \ \sigma_u^2 := \frac{1}{n-m} u' S^{-1} u.$$

Зауважимо, що в цих співвідношеннях вектор залежної змін ної Y розглядається як відхилення від середньої.

14. Найкращий лінійний незміщений прогноз за моделлю, оці нки якої знайдені за методом Ейткена, визначатиметься зі спів відношення

$$\hat{p} = X_0 \hat{A} + W' V^{-1} u.$$

Величина $W' V^{-1} u$ визначає систематичну складову залишкі прогнозного періоду — u_0 і може тлумачитися як похибка прс гнозу на підставі моделі $\hat{Y} = X_0 \hat{A}$.

7.8. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення гомоскедастичності і гетероскедастичності.

2. Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів м делі?

3. Назвіть методи визначення гетероскедастичності.

4. Як перевіряється гетероскедастичність згідно з критерієм μ?

5. Як застосовується параметричний тест для визначення гетероскедастичності?

6. У чому сутність непараметричного тесту?

7. Як визначається гетероскедастичність за допомогою теста Глейзера?

8. Опишіть методи формування матриці S в умові $M(uu') = \sigma_u^2 S$.

9. Як використовується матриця S у методі Ейткена?

10. Які властивості повинна мати матриця S?

11. Запишіть формулу обчислення матриці коваріацій параметрів моделі. Чим вона відрізняється від формули при застосуванні 1МНК?

12. Як дістати незміщену оцінку дисперсії залишків за наявності гетероскедастичності?

13. Запишіть оператор оцінювання параметрів моделі за методом Ейткена.

14. Як виконується прогноз за методом Ейткена?

15. Сформуйте матрицю S^{-1}, якщо діагональна матриця

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_5} \end{pmatrix}$$

додатно визначена.

16. Коли умова $M(uu') = \sigma^2 S$, де $\{x_j\}=\{15, 17, 20, 22, 25, 30, 35\}$, то як обчислити параметри λ_i?

17. Нехай для моделі $Y = XA + u$ відомі залишки $u = Y - X\hat{A}$:

$$u = (3, -2, -1, -0{,}5, 0{,}3, 0{,}2, 4, -2, -1, -0{,}7).$$

Визначте незміщену оцінку дисперсії залишків, враховуючи результат попереднього завдання.

18. Використавши дисперсію залишків, визначте матрицю коваріацій параметрів, якщо матриця

$$(X'S^{-1}X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}01 & -0{,}15 \\ -0{,}01 & 0{,}12 & -0{,}10 \\ -0{,}15 & -0{,}10 & 0{,}08 \end{pmatrix}.$$

19. Використовуючи дані завдань 17 і 18, визначте точковий та інтервальний прогнози залежної змінної, якщо пояснювальна змінна дорівнює 10.

7.9. Основні терміни і поняття

Гомоскедастичність • Гетероскедастичність • Параметричний тест Гольдфельда—квандта • Непараметричний тест Гольдфельда—Квандта • Узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена) • Дисперсія залишків • Тест Спірмена • Тест Парка • Матриця коваріацій параметрів • Незміщена оцінка • Критерій μ • Додатно визначена матриця • Вектор коваріацій • Похибка прогнозу • Функція Лагранжа • Тест Глейзера

Розділ 8
АВТОКОРЕЛЯЦІЯ

8.1. Причини виникнення автокореляції в економетричних моделях

8.1.1. Поняття автокореляції. Означення 8.1. ***Автокореляція** — це наявність взаємозв'язку між послідовними елементами часового чи просторового ряду даних.*

В економетричних дослідженнях часто виникають такі ситуації, коли дисперсія залишків є сталою, але спостерігається їх коваріація. Це явище називають ***автокореляцією залишків***.

Автокореляція залишків найчастіше спостерігається тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів. Якщо існує кореляція між послідовними значеннями деякої пояснювальної змінної, то буде спостерігатись і кореляція послідовних значень залишків.

Автокореляція може бути також наслідком помилкової специфікації економетричної моделі, зокрема наявність автокореляції залишків може означати, що необхідно ввести до моделі нову незалежну змінну.

У загальному випадку ми вводимо до моделі лише деякі з істотних змінних, а вплив змінних, яких виключено з моделі, має позначитися на зміні залишків. Існування кореляції між послідовними значеннями виключеної з розгляду змінної не обов'язково має викликати відповідну кореляцію залишків, бо вплив різних змінних може взаємно погашатися. Якщо кореляція послідовних значень виключених з моделі змінних спостерігається, то загроза виникнення автокореляції залишків стає реальністю.

Проілюструємо проблему автокореляції залишків на прикладі простої економетричної моделі. Нехай

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t, \tag{8.1}$$

де припускається, що залишки u_t задовольняють схему авторегресії першого порядку (стаціонарний марковський процес 1-го порядку), тобто залежать тільки від залишків попереднього періоду:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{8.2}$$

причому $|\rho|<1$, а для ε_t виконуються такі властивості:

$$M(\varepsilon_t)=0;$$

$$\begin{cases} M(\varepsilon_t\varepsilon_{t-s})=\sigma_s^2, & s=0; \\ M(\varepsilon_t\varepsilon_{t-s})=0, & s\neq 0, \end{cases}$$

де s — номер зрушення (лагу) залишків щодо періоду t.

Величина ρ є коефіцієнтом автокореляції залишків, що характеризує рівень взаємозв'язку кожного наступного значення з попереднім, тобто коваріацію залишків.

Специфікація моделі (8.1) на відміну від моделей, які розглядались у розд. 7, має індекс t, що свідчить про її динамічний характер, тобто t — період часу, для якого будується така модель на основі динамічних (часових) рядів вихідних даних.

Розглянемо залишки моделі u_t, враховуючи (8.2):

$$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t=\rho(\rho u_{t-2}+\varepsilon_{t-1})+\varepsilon_t=\ldots=$$
$$=\varepsilon_t+\rho\varepsilon_{t-1}+\rho^2\varepsilon_{t-2}+\ldots.$$

Звідси

$$u_t=\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\varepsilon_{t-s}, \qquad (8.3)$$

де s — лаг залишків.

Оскільки $M(\varepsilon_t)=0$, то $M(u_t)=0$.

Визначимо дисперсію залишків u_t.

$$M(u_t^2)=M(\varepsilon_t^2)+\rho^2 M(\varepsilon_{t-1}^2)+\rho^4 M(\varepsilon_{t-2}^2)+\ldots.$$

Враховуючи, що послідовні значення ε_t незалежні, запишемо

$$M(u_t^2)=(1+\rho^2+\rho^4+\ldots)\,\sigma_\varepsilon^2,$$

де $|\rho|<1$.

Тоді

$$\sigma_u^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}. \qquad (8.4)$$

Коваріація послідовних значень залишків запишеться у такому вигляді:

$$M(u_t u_{t-1})=\rho\sigma_u^2, \qquad M(u_t u_{t-2})=\rho^2\sigma_u^2,$$

і в загальному випадку

$$M(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2, \tag{8.5}$$

тобто для моделі (8.1) не задовольняється гіпотеза про незалежність послідовних значень залишків.

Вираз (8.5) можна записати так:

$$\frac{M(u_t u_{t-s})}{\sigma_u^2} = \rho^s. \tag{8.6}$$

Це означає, що за наявності автокореляції залишків друга необхідна умова подається у вигляді:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S,$$

де S — матриця коефіцієнтів автокореляції s-го порядку для ряду u_t, або

$$M(uu') = V.$$

Якщо

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$M(uu') = V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Порівнюючи матрицю, яку маємо в даному разі, з матрицею за наявності гетероскедастичності, побачимо, що вони істотно відрізняються одна від одної. Це пов'язано з тим, що природа порушення другої умови для застосування методу 1МНК для явищ гетероскедастичності та автокореляції різна.

Отже, *для гетероскедастичних залишків, розглянутих у розд. 7, існує одна форма порушення стандартної гіпотези, згідно з якою* $M(uu') = \sigma_u^2 S$. *Для автокореляційних залишків ми стикаємося з іншою формою порушення цієї гіпотези.*

8.1.2. Наслідки автокореляції залишків. Знехтувавши автокореляцією залишків і оцінивши параметри моделі 1МНК, дійдемо таких **трьох основних наслідків.**

1. Оцінки параметрів моделі можуть бути незміщеними, але неефективними, тобто вибіркові дисперсії вектора оцінок $\hat{A}$ можуть бути невиправдано великими.

2. Оскільки вибіркові дисперсії обчислюються не за уточненими формулами, то статистичні критерії *t*- і *F*-статистики, які знайдено для лінійної моделі, практично не можуть бути використані в дисперсійному аналізі при автокореляції.

3. Неефективність оцінок параметрів економетричної моделі призводить, як правило, до неефективних прогнозів, тобто прогнозів з доволі великою вибірковою дисперсією.

Нагадаємо, що за відсутності автокореляції залишків матриця коваріацій для вектора оцінок $\hat{A}$ така:

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} = S_{(\hat{A})}^2. \tag{8.8}$$

Припустимо, що незалежні змінні і залишки можна подати у вигляді стаціонарних марковських процесів першого порядку:

$$\begin{aligned} x_t &= \lambda x_{t-1} + v_t, \ |\lambda| < 1; \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \ |\rho| < 1. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Якщо коефіцієнти λ і ρ додатні, то говорять про додатну автокореляцію. Від'ємна автокореляція в економетричних моделях спостерігається дуже рідко.

Залишки v_t і ε_t взаємно незалежні, і їхні автокореляційні матриці діагональні, тобто вони не автокорельовані. Тоді можна показати, що звичайний метод найменших квадратів дає при достатньо великому *n* таку оцінку дисперсії параметрів $\hat{A}$:

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = S_{(\hat{A})}^2 \frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda}. \tag{8.10}$$

Із (8.10) бачимо, що зміщення $\frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda}$ дисперсії оцінок параметрів тим більше, чим більші значення λ і ρ (більша автокореляція). Нехай $\lambda = \rho = 0{,}5$, тоді зміщення $\frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda} = \frac{5}{3}$. Цей множник і буде загубленим при використанні 1МНК, що призводить до заниження дисперсії приблизно на 40 % порівняно з її справжнім значенням. Зі збільшенням λ і ρ, наприклад, $\rho = \lambda = 0{,}8$, зміщення буде $\frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda} = \frac{1+0{,}64}{1-0{,}64} = \frac{1{,}64}{0{,}36} = 4{,}5$, тобто істинне значення дисперсії в чотири з половиною разу перевищуватиме те, яке дістали, застосувавши 1МНК.

Якщо додатна автокореляція спостерігається і в залишках, і в незалежній змінній, то 1МНК дає зміщення і для дисперсії залишків. Припустивши, як і раніше, що x_t і u_t підлягають однаковій схемі авторегресії, знайдемо:

$$M(uu') = \sigma_u^2\left[n - \frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda}\right]\Big/(n-1). \tag{8.11}$$

Якщо $\rho = \lambda = 0{,}5$ і $n = 20$, то $M(uu') = \frac{18{,}3}{19}\sigma_u^2$, тобто недооцінка дисперсії залишків становить близько 3,5 %, а при $\rho = \lambda = 0{,}8$; $n = 20$ ця недооцінка дорівнюватиме приблизно 24,2 %. $M(uu') = \frac{15{,}4}{19}\sigma_u^2$.

Отже, в разі застосування 1МНК вибіркові дисперсії будуть заниженими. Навіть після коригування оцінок вибіркових дисперсій на величину зміщення не можна бути впевненим у коректності рівнів значущості для t- і F-статистик, оскільки наявність автокореляції залишків означає, що величина $\frac{u'u}{\sigma_u^2}$, яка характеризує співвідношення між вибірковою дисперсією залишків і дисперсією в генеральній сукупності, може не розподілятися за законом χ^2 і не буде незалежною від $(\hat{A} - A)$. Недооцінка коваріації вектора оцінок параметрів моделі $(\mathrm{cov}(\hat{A}))$ є, очевидно, найбільш серйозною помилкою, коли застосовується 1МНК і спостерігається автокореляція. Метод найменших квадратів приводить нас в цьому випадку до неефективних оцінок і до неефективних прогнозів, тобто стандартні похибки оцінок параметрів моделі та похибка прогнозу будуть заниженими.

8.2. Перевірка наявності автокореляції

8.2.1. Критерій Дарбіна—Уотсона. Для перевірки наявності автокореляції залишків найчастіше застосовується критерій Дарбіна—Уотсона (DW):

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}u_t^2}, \tag{8.12}$$

який може набувати значень із проміжку [0, 4]: $DW \in [0,4]$.

Якщо залишки u_t є випадковими величинами, нормально розподіленими, а не автокорельованими, то значення DW містяться поблизу 2. За додатної автокореляції $DW < 2$, а за від'ємної $DW > 2$. Фактичні значення критерію порівнюються з критичними (табличними) для різної кількості спостережень n і кількості незалежних змінних m за вибраного рівня значущості α. Табличні значення мають нижню межу DW_1 і верхню — DW_2.

Коли $DW_{факт} < DW_1$, залишки мають автокореляцію. Якщо $DW_{факт} > DW_2$, приймається гіпотеза про відсутність автокореляції. У разі $DW_1 < DW < DW_2$ конкретних висновків зробити не можна: необхідно далі провадити дослідження, збільшуючи сукупність спостережень. Зауважимо, що цей критерій призначений для малих вибіркових сукупностей.

Вибірковий розподіл значень критерію Дарбіна—Уотсона залежить від емпіричних спостережень пояснювальних змінних і, якщо взяти до уваги цю обставину, можна стверджувати параметр ρ для генеральної сукупності має тісний зв'язок : критерієм DW. Якщо $\rho = 1$, то значення $DW = 0$, при $\rho =$ ($DW = 2$ і при $\rho = -1$ значення критерію $DW = 4$. Наведені співвідношення показують, що існують області, в яких застосування критерію Дарбіна—Уотсона не може дати певних результатів, про що вже було сказано. Верхні та нижні межі критерію DW визначають межі цієї області для різних **розмірів вибірки заданої кількості пояснювальних змінних та певного рівня значущості**.

Шкалу визначення наявності автокореляції на основі порівняння фактично розрахованого критерію Дарбіна—Уотсона та його критичних значень зображено на рис. 8.1.

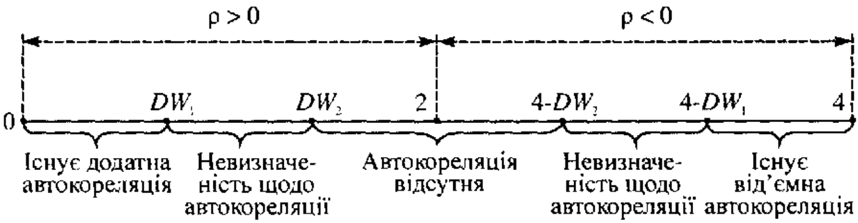


Рис. 8.1. Шкала визначення наявності автокореляції за критерієм Дарбіна—Уотсона

Із рис. 8.1 випливає, що коли фактичне значення DW потрапляє в межі від нуля до нижньої критичної межі DW_1, то гіпотезу про наявність автокореляції необхідно **прийняти**.

Якщо фактичне значення критерію DW потрапляє в межі від верхнього критичного рівня DW_2 до двох, то гіпотезу про наявність автокореляції потрібно **відхилити**. Коли фактичне значення критерію DW міститься в межах від нижнього до верхнього критичного значення, то існує невизначеність щодо наявності автокореляції залишків. У цьому випадку гіпотезу про наявність автокореляції доцільніше прийняти, ніж відхилити.

Якщо фактичне значення критерію DW більше від 2, то, як було зазначено, може йтися про від'ємну автокореляцію. Оскільки критичні значення критерію DW табульовані для додатної автокореляції, то щоб зробити висновки стосовно від'ємної автокореляції, необхідно відняти розраховане значення критерію DW від 4 і цю різницю порівнювати з критичними значеннями критерію DW, як це було показано раніше.

✓***Приклад 8.1.*** Нехай обсяг вибірки складається з 20 спостережень. На основі цієї вибірки побудовано модель, яка включає в себе три пояснювальні змінні. Наведено табличні значення критерію Дарбіна — Уотсона DW_1 і DW_2 для 1 %- і 5 %-го рівнів значущості:

	DW_1	DW_2
$\alpha_1 = 1\ \%$	0,77	1,41
$\alpha_2 = 5\ \%$	1,00	1,68

Для додатної автокореляції залишків ці значення є межами п'яти інтервалів, за якими можна дійти таких висновків:

1) $0 \le DW \le 0{,}77$ — нульова гіпотеза відхиляється як з 1 %-м, так і за 5 %-м рівнями значущості;

2) $0{,}77 \le DW \le 1{,}00$ — нульова гіпотеза відхиляється з 5 %-м рівнем значущості; для 1 %-го рівня значущості певних висновків зробити не можна;

3) $1{,}00 \le DW \le 1{,}41$ — критерій не дає певних результатів як для одного, так і для другого рівня значущості;

4) $1{,}41 \le DW \le 1{,}68$ — нульова гіпотеза не відхиляється з 1 %-м рівнем значущості, для 5 %-го рівня значущості певних висновків зробити не можна;

5) $1{,}68 \le DW \le 2{,}00$ — нульова гіпотеза не відхиляється для обох рівнів значущості.

Дж. Джонстон [2] наводить ряд спостережень, які свідчать про те, що верхній рівень DW_2 ближчий до істинного значення прийняття гіпотези, яка перевіряється. Отже, якщо виникають сумніви, можна обмежитись одним показником — DW_2. Це означає, що сам критерій також може мати зміщення, він указує на наявність серійної кореляції першого порядку і там, де її не повинно бути. Дж. Джонстон зауважує, що оскільки наслідки некоректного прийняття нульової гіпотези можуть бути набагато серйознішими, ніж її некоректного відхилення, то в сумнівних випадках нульову гіпотезу, як правило, краще відхилити.

8.2.2. Критерій фон Неймана. Для виявлення автокореляції залишків використовується також критерій фон Неймана:

$$Q = \frac{\dfrac{\sum\limits_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{n-1}}{\dfrac{\sum\limits_{t=1}^{n}u_t^2}{n}}. \qquad (8.13)$$

Звідси $Q = DW\dfrac{n}{n-1}$. При $n \to \infty\, Q = DW$. Фактичне значення критерію фон Неймана порівнюється з табличним для вибраного рівня значущості і заданої кількості спостережень. Якщо $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція, у протилежному випадку — вона відсутня.

8.2.3. *Нециклічний коефіцієнт автокореляції.* Цей коефіцієнт показує ступінь взаємозв'язку залишків кожного наступного значення з попереднім, а саме:

1-й ряд — $u_1, u_2, u_3 ... u_{n-1}$;

2-й ряд — $u_2, u_3, u_4 ... u_n$.

Він обчислюється за формулою:

$$r^* = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t u_{t-1}) - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t\right)\left(\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}\right)}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t\right)^2\right]\left[\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}\right)^2\right]}}. \qquad (8.14)$$

Коефіцієнт r^* може набувати значень в інтервалі $(-1; +1)$. Від'ємні значення його свідчать про від'ємну автокореляцію, додатні — про додатну. Значення, що містяться в деякій критичній області біля нуля, свідчать про відсутність автокореляції, тобто стверджують нульову гіпотезу про відсутність автокореляції залишків. Оскільки ймовірнісний розподіл r^* встановити важко, то на практиці замість r^* часто застосовують циклічний коефіцієнт автокореляції r^0.

8.2.4. *Циклічний коефіцієнт автокореляції.* Він виражає ступінь взаємозв'язку рядів:

1-й ряд — $u_1, u_2, u_3 ... u_{n-1}$, u_n;

2-й ряд — $u_2, u_3, u_4, ..., u_n$, u_1.

Циклічний коефіцієнт обчислюється за формулою:

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1} + u_n u_1 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t\right)^2}. \qquad (8.15)$$

Для досить довгих рядів вплив циклічних членів на значення коефіцієнта r^0 неістотний, тому можна вважати, що ймовірнісний розподіл r^0 наближається до розподілу r^*. Якщо останній член ряду дорівнює першому, тобто $u_1 = u_n$, то нециклічний коефіцієнт автокореляції дорівнює циклічному. Очевидно, що коли залишки не містять тренду, то припущення про рівність $u_1 = u_n$ не далеке від реальності і циклічний коефіцієнт автокореляції наближається до нециклічного.

Фактично обчислене значення циклічного коефіцієнта автокореляції порівнюється з табличним для вибраного рівня значущості і довжини ряду n. Якщо $r^0_{\text{факт}} \geq r^0_{\text{табл}}$, то існує автокореляція. Припускаючи, що $\sum_{t=1}^{n} u_t \approx \sum_{t=2}^{n} u_{t-1} \approx 0$, циклічний коефіцієнт автокореляції можна записати у вигляді

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}. \tag{8.16}$$

На практиці часто замість (8.16) обчислюють

$$r^0 = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^2}. \tag{8.17}$$

8.3. Оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками

8.3.1. Метод Ейткена. Нехай в економетричній моделі

$$\begin{aligned} y_t &= a_0 + a_1 x_t + u_t, \\ u_t &= \hat{\rho}\, u_t + \varepsilon_t,\ |\rho| < 1, \end{aligned} \tag{8.18}$$

де ε_t — нормально розподілені випадкові залишки. Тоді, щоб усунути автокореляцію залишків u_t, потрібно перетворити основну модель так, щоб вона мала нормально розподілені залишки ε_t. Оскільки $\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$, то для такого перетворення запишемо модель для попереднього періоду

$$y_{t-1} = a_0 + a_1 x_{t-1} + u_{t-1}. \tag{8.19}$$

Помножимо ліву і праву частину її на $\hat{\rho}$ та віднімемо від моделі для періоду t (8.18).

У результаті дістанемо таку економетричну модель:

$$y_t - \hat{\rho}\, y_{t-1} = a_0(1 - \hat{\rho}) + a_1(x_t - \hat{\rho}\, x_{t-1}) + (u_t - \hat{\rho}\, u_{t-1}). \tag{8.20}$$

Оскільки в цій моделі $(u_t - \rho\, u_{t-1})$ дорівнює ε_t, то очевидно, що коли вихідні дані перетворені, а саме $y_t - \hat{\rho}\, y_{t-1}$, $x_t - \hat{\rho}\, x_{t-1}$, то для оцінювання параметрів можна застосувати 1МНК. При цьому для перетворення можна використати перші різниці $y_t - y_{t-1}$ і $x_t - x_{t-1}$, коли $\hat{\rho}$ наближається до одиниці. Якщо $\hat{\rho}$ близьке до нуля, то вихідні дані можна не перетворювати. Зауважимо, що коли $\hat{\rho} = 1$, у перетвореній моделі буде відсутній вільний член (як виняток може бути ситуація, коли вихідна модель містить лінійний часовий тренд). Якщо залишки вихідної моделі характеризувались додатною автокореляцією, використання перших різниць може спричинити виникнення від'ємної автокореляції.

Параметр ρ наближено можна знайти на основі залишків, якщо обчислити циклічний коефіцієнт кореляції r^0. На практиці, як правило, $\rho \approx r^0$, але r^0 коригується на величину зміщення.

Усі ці міркування покладено в основу методів оцінювання параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками.

Для оцінювання параметрів економетричної моделі, що має автокореляцію залишків, можна застосувати ***узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена), який базується на скоригованій вихідній інформації з урахуванням коваріації залишків.***

У розд. 7 було розглянуто метод Ейткена і показано, що система рівнянь для оцінювання параметрів моделі на основі цього методу записується так:

$$(X'V^{-1}X)\hat{A} = X'V^{-1}Y, \tag{8.21}$$

або

$$(X'S^{-1}X)\hat{A} = X'S^{-1}Y, \tag{8.22}$$

де $\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів економетричної моделі;

X — матриця пояснювальних змінних;

X' — матриця, транспонована до матриці X;

S^{-1} — матриця, обернена до матриці кореляції залишків;

V^{-1} — матриця, обернена до матриці V, де $V = \sigma_u^2 S$, а σ_u^2 — залишкова дисперсія;

Y — вектор залежних змінних.

Звідси

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

або

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Отже, щоб оцінити параметри моделі за методом Ейткена, потрібно сформувати матрицю S або V.

Матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \rho^{n-5} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

У цій симетричній матриці ρ^s виражає коефіцієнт автокореляції s-го порядку для залишків u_t. Очевидно, що коефіцієнт автокореляції нульового порядку дорівнює 1.

Оскільки коваріація залишків ρ^s при $s > 2$ часто наближається до нуля, то матриця, обернена до матриці S, матиме такий вигляд:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (8.23)$$

Таку матрицю пропонується використовувати для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками за методом Ейткена.

Покажемо, як розрахувати циклічний коефіцієнт кореляції.

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2},$$

або

$$r^0 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2},$$

де u_t — величина залишків у період t; u_{t-1} — величина залишків у період $t-1$; n — кількість спостережень.

Якщо $n \to \infty$, то $r^* = r^0$.

На практиці $\rho = r^0$.

Зауважимо, що параметр r^0 має зміщення. Тому, використовуючи такий параметр для формування матриці S, можна скоригувати його на величину зміщення

$$r^0_{\text{скор}} = \frac{n}{n-1}\frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} + \frac{m}{n},$$

де $\frac{m}{n}$ — величина зміщення (m — кількість змінних моделі).

Матриця $V = \sigma_u^2 S$, де σ_u^2 — залишкова дисперсія, що визначається за формулою

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m} u'u,$$

де u' — вектор, транспонований до вектора залишків u; $n - m$ — кількість ступенів свободи.

Дисперсія залишків з урахуванням зміщення обчислюється так:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m} u'u \left[\frac{n - \frac{1+\lambda\rho}{1-\lambda\rho}}{n-1} \right].$$

Значення λ можна обчислити методом 1МНК за допомогою авторегресійного рівняння $x_t = \lambda\, x_{t-1} + v_t$. У такому разі за 1МНК

$$\lambda = \frac{\sum_{i=2}^{n} x_t x_{t-1}}{\sum_{i=2}^{n} x_{t-1}^2},$$

де x_t взято як відхилення від свого середнього значення.

Реалізація алгоритму Ейткена для оцінювання параметрів моделі включає такі п'ять кроків.

Крок 1. Оцінювання параметрів моделі за методом 1МНК.

Крок 2. Дослідження залишків на наявність автокореляції.

Крок 3. Формування матриці коваріації залишків V або S.

Крок 4. Обернення матриці V або S.

Крок 5. Оцінювання параметрів методом Ейткена, тобто згідно з (8.21), (8.22).

✓***Приклад 8.2.*** За допомогою двох взаємозв'язаних часових рядів про роздрібний товарообіг та доходи населення побудувати економетричну модель, що характеризує залежність роздрібного товарообігу від доходу. Вихідні дані наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Роздрібний товарообіг, грош. од.	24,0	25,0	25,7	27,0	28,8	30,8	33,8	38,1	43,4	45,5
Дохід, грош. од.	27,1	28,2	29,3	31,3	34,0	36,0	38,7	43,2	50,0	52,1

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

y_t — роздрібний товарообіг у період t, залежна змінна;

x_t — дохід у період t, пояснювальна змінна.

Звідси

$y_t = f(x_t,\ u_t)$,

де u_t — стохастична складова, залишки.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t;$$
$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t;$$
$$u_t = y_t - \hat{y}_t.$$

3. Визначаємо оцінки параметрів моделі $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ за методом найменших квадратів, припускаючи, що залишки u_t не корельовані:

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

де X' — матриця, транспонована до X.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 27{,}1 \\ 1 & 28{,}2 \\ 1 & 29{,}3 \\ 1 & 31{,}3 \\ 1 & 34{,}0 \\ 1 & 36{,}0 \\ 1 & 38{,}7 \\ 1 & 43{,}7 \\ 1 & 50{,}0 \\ 1 & 52{,}1 \end{pmatrix};$$

$$(X'X)=\begin{pmatrix}10 & 370{,}4\\ 370{,}4 & 14441{,}62\end{pmatrix};\ (X'X)^{-1}=\begin{pmatrix}2{,}0002 & -0{,}513\\ -0{,}513 & 0{,}0014\end{pmatrix};$$

$$(X'Y)=\begin{pmatrix}322{,}1\\ 12555{,}09\end{pmatrix};$$

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}0{,}597 & 0{,}416\\ 0{,}416 & 0{,}348\end{pmatrix}\begin{pmatrix}196{,}400\\ 252{,}222\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12{,}3\\ 6{,}1\end{pmatrix};$$

$$\hat{a}_0 = 0{,}172;$$

$$\hat{a}_1 = 0{,}865.$$

Економетрична модель має вигляд

$$\hat{y}_t = 0{,}172 + 0{,}865x_t.$$

4. Знаходимо розрахункові значення роздрібного товарообігу на основі моделі $\hat{y}_t = 0{,}172 + 0{,}865x_t$ і визначаємо залишки u_t (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Рік	y_t	$\hat{y}_t$	u_t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t u_{t-1}$
1	24,0	23,612	0,388	0,150	—	—	—
2	25,0	24,564	0,436	0,190	0,049	0,0024	0,1691
3	25,7	25,515	0,485	0,034	–0,252	0,0632	0,0806
4	27,0	27,245	–0,245	0,060	–0,430	0,1848	–0,045
5	28,8	29,581	–0,779	0,609	–0,535	0,2866	0,1913
6	30,8	31,310	–0,510	0,261	0,270	0,0729	0,3984
7	33,8	33,646	0,154	0,023	0,665	0,4417	–0,0787
8	38,1	37,971	0,129	0,017	–0,025	0,0006	0,0199
9	43,4	43,420	–0,020	0,0002	–0,149	0,0222	–0,003
10	45,5	45,236	0,264	0,070	0,284	0,0804	–0,005
Σ	**322,1**			**1,4152**		**1,1550**	**0,7276**

Записуємо оцінку критерію Дарбіна—Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} = \frac{1{,}155}{1{,}4152} = 0{,}816.$$

Порівнюємо значення критерію DW з табличним для $\alpha = 0{,}05$ і $n = 10$. Критичні значення критерію DW у цьому разі такі:

$DW_1 = 0{,}879$ — нижня межа; $DW_2 = 1{,}320$ — верхня межа.

Оскільки критерій $DW_{\text{факт}} < DW_1$, то можна стверджувати, що залишки u_t мають додатну автокореляцію.

Наявність чи відсутність автокореляції залишків можна також визначити за критерієм фон Неймана.

Критерій фон Неймана $Q = \frac{10}{10-1} DW = 0{,}906$. Це значення порівнюється з табличним; $Q_{\text{табл}} = 1{,}18$ при $n = 10$ і рівні значущості $\alpha = 0{,}05$. Оскільки $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція залишків.

6. Застосовуючи метод Ейткена, оцінюємо параметри економетричної моделі з автокорельованими залишками. Оператор оцінювання записуємо так:

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y,$$

де S^{-1} — матриця, обернена до матриці S; V^{-1} — матриця, обернена до матриці V.

Матриця S — матриця коваріацій залишків вигляду

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 & \rho^9 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^9 & \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \sigma_u^2 S .$$

7. Щоб сформувати матрицю S або V, необхідно визначити величину ρ, яка характеризує взаємозв'язок між послідовними членами ряду залишків. Нехай залишки описуються автокореляційною моделлю першого порядку $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$,

$$\rho \approx r^0 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} + \frac{m}{n} = \frac{10}{9} \cdot \frac{0{,}7276}{1{,}4156} + \frac{2}{10} = 0{,}77 .$$

Отже, матриця S набирає вигляду:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 & 0{,}211 & 0{,}162 & 0{,}125 & 0{,}097 \\ 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 & 0{,}211 & 0{,}162 & 0{,}125 \\ 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 & 0{,}211 & 0{,}162 \\ 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 & 0{,}211 \\ 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 & 0{,}273 \\ 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 & 0{,}354 \\ 0{,}211 & 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 & 0{,}459 \\ 0{,}162 & 0{,}211 & 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 & 0{,}595 \\ 0{,}125 & 0{,}162 & 0{,}211 & 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 & 0{,}77 \\ 0{,}097 & 0{,}125 & 0{,}162 & 0{,}211 & 0{,}273 & 0{,}354 & 0{,}459 & 0{,}595 & 0{,}77 & 1 \end{pmatrix};$$

1) $(X^T S^{-1}) = \begin{pmatrix} 0{,}565 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}129 & 0{,}565 \\ 13{,}204 & 3{,}640 & 2{,}069 & 2{,}708 & -5{,}722 & 3{,}314 & 0{,}616 & 3{,}165 & 14{,}453 & 33{,}412 \end{pmatrix}$;

2) $(X^T S^{-1} X) = \begin{pmatrix} 28{,}56 & 47{,}26 \\ 52{,}53 & 51{,}13 \end{pmatrix}$;

3) $(X^T S^{-1} X)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}08 & 0{,}07 \\ 0{,}07 & -0{,}07 \end{pmatrix}$;

4) $(X^T S^{-1} Y) = \begin{pmatrix} 71{,}8148 \\ 3089{,}991 \end{pmatrix}$;

5) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3{,}9815 & -0{,}0924 \\ -0{,}0924 & 0{,}0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71{,}8148 \\ 3089{,}991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}442 \\ 0{,}861 \end{pmatrix}$;

$\hat{a}_0 = 0{,}442$; $\hat{a}_1 = 0{,}861$.

Остаточно дістаємо економетричну модель:

$$\hat{y}_t = 0{,}442 + 0{,}861 x_t. \qquad (1)$$

8. Знайдемо розрахункові значення $\hat{y}_t$ на основі побудованої економетричної моделі та визначимо залишки v_t (табл. 8.3).

Таблиця 8.3

Рік	y_t	$\hat{y}_t$	v_t	v_t^2	$v_t - v_{t-1}$	$(v_t - v_{t-1})^2$	$v_t v_{t-1}$
1	24,0	23,784	0,216	0,0468	—	—	—
2	25,0	24,731	0,269	0,0724	0,0526	0,0028	0,0528
3	25,7	25,678	0,022	0,0005	–0,2774	0,0612	0,0058
4	27,0	27,401	–0,401	0,1608	–0,4226	0,1786	–0,0086
5	28,8	29,727	–0,927	0,8586	–0,5255	0,2762	0,3716
6	30,8	31,449	–0,649	0,4215	0,2774	0,0769	0,6016
7	33,8	33,775	0,025	0,0006	0,6745	0,4549	–0,0164
8	38,1	38,081	0,019	0,0004	–0,0066	0,00004	0,0005
9	43,4	43,508	–0,108	0,0116	–0,1262	0,0159	0,0020
10	45,5	45,316	0,184	0,0937	0,2912	0,0848	0,9908
				1,6069		**1,1514**	**0,9908**

9. Обчислимо критерій Дарбіна—Уотсона і фон Неймана:

$$DW = \frac{1{,}1514}{1{,}6069} = 0{,}716.$$

Порівнявши його з критичним значенням при $n = 10$ і $\alpha = 0{,}05$, коли $DW_{\text{факт}} < DW_1$, дійдемо висновку, що ми не звільнились від автокореляції залишків. Це означає, що вихідна гіпотеза, коли залишки описуються авторегресійною схемою першого порядку, не виконується. Якщо залишки описуються авторегресійною схемою вищого порядку, то доцільно виконати оцінювання параметрів моделі іншими методами, наприклад методом Кочрена—Оркатта або Дарбіна, які буде розглянуто далі.

10. Визначаємо оцінку параметрів моделі, скориставшись оберненою матрицею S^{-1} вигляду:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Підставивши $\rho = 0{,}77$, дістанемо:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}469 & -1{,}904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0, & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 & -1{,}904 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}904 & 3{,}938 \end{pmatrix}.$$

Вектор оцінок параметрів моделі:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3{,}9815 & -0{,}0924 \\ -0{,}0924 & 0{,}0024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 71{,}8148 \\ 3089{,}991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}442 \\ 0{,}861 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\hat{a}_0 = 0{,}442$; $\hat{a}_1 = 0{,}861$, і економетрична модель подається у вигляді

$$\hat{y}_t = 0{,}442 + 0{,}861x_t\,. \qquad (2)$$

Порівнюючи економетричні моделі (1) і (2), бачимо, що при оцінюванні параметрів методом Ейткена за допомогою матриці S^{-1}, коли коваріація залишків для $S > 2$ відсутня, дістаємо ті самі результати, що й раніше.

8.3.2. Метод перетворення вихідної інформації. Випадок, коли залишки задовольняють авторегресійну модель першого порядку, допускає альтернативний підхід до пошуку оцінок параметрів моделі за допомогою двокрокової процедури:

1) перетворення вихідної інформації із застосуванням для цього параметра ρ;

2) застосування 1МНК для оцінювання параметрів на основі перетворених даних.

Для цього треба знайти матрицю перетворення T, щоб модель

$$TY = TXA + Tu \qquad (8.24)$$

мала скалярну дисперсійну матрицю

$$M(Tuu'T') = \sigma_u^2 E.$$

Розглянемо матрицю T_1 розміром $n \times n$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (8.25)$$

Безпосереднім множенням легко переконатися, що

$$M(T_1 uu' T_1') = \sigma_u^2 E.$$

А це означає, що можна застосувати 1МНК до перетворених даних $T_1 Y$ і $T_1 X$ вигляду

$$T_1 Y = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\, y_1 \\ y_2 - \rho y_1 \\ y_3 - \rho y_2 \\ y_4 - \rho y_3 \\ \dots \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{pmatrix};$$

$$T_1 X = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2}\, x_1^1 & \dots & \sqrt{1-\rho^2}\, x_1^m \\ 1-\rho & x_2^1 - \rho x_1^1 & \dots & x_2^m - \rho x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\rho & x_n^1 - \rho x_{n-1}^1 & \dots & x_n^m - \rho x_{n-1}^m \end{pmatrix}.$$

Іноді для перетворення вихідної інформації використовується матриця T_2 розміром $(n-1) \times n$, яка отримується з матриці T_2 викреслюванням першого рядка:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Неважко показати, що застосування 1МНК до даних $T_1 Y$ і $T_1 X$ дає таку саму оцінку параметрів моделі, як і метод Ейткена, а для даних $T_2 Y$ і $T_2 X$ — забезпечує порівняно добру апроксимацію.

У загальному випадку, коли ми не маємо інформації ні про порядок авторегресійної моделі, ні про значення параметрів у ній, а через це не можемо застосувати ні метод Ейткена, ні метод перетворення вихідної інформації, в економетричній літературі пропонуються наближені методи Кочрена—Оркатта і Дарбіна.

✓***Приклад 8.3.*** Згідно з даними, які наведено в табл. 8.1 (приклад 8.2), необхідно оцінити параметри економетричної моделі, яка має автокорельовані залишки, методом перетворення вихідної інформації.

Розв'язання

1. Сформуємо матрицю T_1 для перетворення вихідних даних:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0{,}64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}77 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Перетворимо змінні Y, X на основі матриці T_1:

$$T_1Y = \begin{pmatrix} 15{,}27 \\ 6{,}49 \\ 6{,}42 \\ 7{,}18 \\ 7{,}97 \\ 8{,}58 \\ 10{,}04 \\ 12{,}03 \\ 14{,}01 \\ 12{,}02 \end{pmatrix}; \qquad T_1X = \begin{pmatrix} 0{,}64 & 17{,}25 \\ 0{,}23 & 7{,}30 \\ 0{,}23 & 7{,}55 \\ 0{,}23 & 8{,}70 \\ 0{,}23 & 9{,}86 \\ 0{,}23 & 9{,}77 \\ 0{,}23 & 10{,}93 \\ 0{,}23 & 13{,}85 \\ 0{,}23 & 16{,}29 \\ 0{,}23 & 13{,}53 \end{pmatrix}.$$

3. Для перетворених даних скористаємося оператором 1МНК:

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y \;\; \rightarrow \;\; \hat{A} = (X^{*'}X^{*})^{-1}X^{*'}Y^{*}.$$

Позначимо $T_1Y_t = Y^*$, $T_1X_t = X^*$. Тоді маємо

3.1. $X^{*'}X^{*} = \begin{pmatrix} 0{,}8756 & 33{,}3368 \\ 33{,}3368 & 1436{,}007 \end{pmatrix}$.

3.2. $X^{*'}Y^{*} = \begin{pmatrix} 29{,}1003 \\ 1251{,}584 \end{pmatrix}$.

3.3. $(X^{*'}X^{*})^{-1} = \begin{pmatrix} 9{,}8299 & -0{,}2282 \\ -0{,}2282 & 0{,}006 \end{pmatrix}$.

3.4. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3{,}9815 & -0{,}0924 \\ -0{,}0924 & 0{,}0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71{,}8148 \\ 3089{,}991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}442 \\ 0{,}861 \end{pmatrix}$.

Звідси $\hat{a}_0 = 0{,}442$; $\hat{a}_1 = 0{,}861$; економетрична модель:

$$\hat{y}_t = 0{,}442 + 0{,}861x_t.$$

Оцінки параметрів моделі, які визначені за методом перетворення вихідної інформації, не відрізняються від оцінок, здобутих методом Ейткена для різних матриць коваріацій залишків. Це означає, що обидва методи є альтернативними, коли залишки — описуються авторегресійною функцією першого порядку.

Дещо відрізняються одна від одної оцінки параметрів моделі, якщо для перетворення вихідних даних використовується матриця T_2. Так, вектор оцінок

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} -0{,}862 & 0{,}884 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\hat{a}_0 = -0{,}862$; $\hat{a}_1 = 0{,}884$; економетрична модель:

$$\hat{y}_t = -0{,}862 + 0{,}884x_t.$$

✓***Приклад 8.4.*** На основі статистичної інформації, що задана в таблиці (приклад 4.2), необхідно побудувати економетричну модель з автокорельованими залишками.

Місяць	Прибуток, гр. од.	Інвестиції, гр. од.	ОВФ, гр. од.	ФРЧ, людино–днів
t	(Y)	(X_1)	(X_2)	(X_3)
1	39	62	22	104
2	41	65	25	109
3	38	57	17	99
4	42	66	27	114
5	44	69	28	116
6	49	58	20	110
7	44	72	32	119
8	45	70	30	116
9	48	75	34	114
10	51	79	35	120
11	49	77	33	124
12	54	82	37	119
13	55	80	37	129
14	57	75	39	129
15	56	83	38	132
16	54	81	36	130
17	59	87	40	124
18	61	92	42	134
19	62	95	43	137
20	64	97	42	139

Для побудови економетричної моделі необхідно:
1. Дослідити наявність автокореляції.
2. Побудувати матриці S та S^{-1}.

3. Оцінити параметри моделі методом Ейткена.

4. Оцінити параметри моделі на основі перетворення вихідної інформації.

5. Розрахувати точковий та інтервальний прогнози.

6. Зробити порівняльний аналіз кількісних характеристик взаємозв'язку, здобутих 1МНК методом Ейткена у разі гетероскедастичності та автокореляції.

Розв'язання

1. Дослідимо наявність автокореляції.

Спочатку запишемо економетричну модель:

$$y_t = a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 x_{3t} + u_t;$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + \hat{a}_2 x_{2t} + \hat{a}_3 x_{3t}.$$

Припустимо, що наявність автокореляції залишків описується авторегресійною моделлю першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

1а. Для визначення наявності автокореляції залишків застосуємо критерій **Дарбіна—Уотсона**:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} = 2{,}693.$$

Оскільки критерій DW перевищує число 2, то маємо справу з від'ємною автокореляцією. Табличні значення критерію DW, табульовані для додатної автокореляції. Тому для перевір[illegible] суттєвості автокореляції необхідно від верхньої межі існуван[illegible] [illegible]итерію Дарбіна—Уотсона відняти здобуте значення і його [illegible]нювати з табличними:

$$DW = 2{,}692560477,$$

$$DW_{ф} = 1{,}307439523,$$

$$DW_{1кр} = 1,$$

$$DW_{2кр} = 1{,}68.$$

Таким чином, $DW_ф = 4 - 2{,}693 = 1{,}307$.

Цю величину будемо порівнювати з нижньою та верхньою межами табличного значення.

Оскільки $DW_1 \le DW_ф \le DW_2$, то існує невизначеність щодо автокореляції. У цьому випадку відхиляємо нульову гіпотезу і приймаємо гіпотезу про наявність автокореляції.

1б. Визначимо **критерій фон Неймана**:

$$Q = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2/(n-1)}{\sum_{t=1}^{n}u_t^2/n};$$

$$Q = DW \cdot \frac{n}{n-1} = 1{,}307 \cdot \frac{20}{19} = 1{,}37.$$

Фактично розраховане значення Q порівнюється з Q критичним (табличним) за довжини часового ряду $n = 20$ і рівня значущості $\alpha = 0{,}05$. Оскільки фактичне значення Q практично дорівнює табличному ($Q_{табл} = 1{,}36$), то існує невизначеність щодо автокореляції.

1в. Визначимо **циклічний коефіцієнт автокореляції**:

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^{n}u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}u_t^2} = -0{,}351.$$

Циклічний коефіцієнт автокореляції від'ємний, оскільки автокореляція є від'ємною Якщо $\left|r^0\right| \le 0{,}3$, то автокореляцією можна знехтувати. У нашому випадку автокореляцію потрібно вважати перепоною до застосування методу найменших квадратів, бо $\left|r^0\right| > 0{,}3$.

Оцінимо параметри економетричної моделі узагальненим методом найменших квадратів.

2. Побудуємо матриці S та S^{-1}:

$$S = \left(\begin{array}{rrrrrrrrrr}
1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & 09{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 \\
-0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 \\
0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 \\
-0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 \\
0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 \\
-0.005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 \\
0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 \\
-7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 \\
0{,}0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & -0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 \\
-8E-05 & 0{,}0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 \\
3E-05 & -8E-06 & 0{,}0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 \\
-1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0{,}0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 \\
4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0.0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0.005 & 0{,}0152 & -0.043 \\
-1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0{,}0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & 0.0152 \\
4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0{,}0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 \\
-2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0{,}0002 & -7E-04 & 0{,}0019 \\
5E-08 & -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0{,}0002 & -7E-04 \\
-2E-08 & 5E-08 & -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0.0002 \\
7E-09 & -2E-08 & 5E-08 & -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 \\
-2E-09 & 7E-09 & -2E-08 & 5E-08 & -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-06 & 3E-05
\end{array} \right.$$

$$
\left.\begin{matrix}
3E-05 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-06 & 4E-07 & -2E-07 & 5E-08 & 2E-08 & 7E-09 & -2E-0? \\
-8E-05 & 3E-05 & -1E-05 & 4E-06 & -1E-06 & 4E-07 & -2E-07 & 5E-08 & -2E-08 & 7E-0? \\
0{,}0002 & -8E-05 & 3E-05 & -1E-05 & 4E-06 & -1E-06 & 4E-07 & -2E-07 & 5E-08 & -2E-0? \\
-7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 & 3E-05 & -1E-05 & 4E-06 & -1E-06 & 4E-07 & -2E-07 & 6E-0? \\
0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 & 3E-05 & -1E-05 & 4E-06 & -1E-06 & 4E-07 & -2E-07 \\
-0.005 & 0.0019 & -7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 & 3E-05 & -1E-05 & 4E-06 & -1E-06 & 4E-07 \\
0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 & 3E-05 & -1E-05 & 4E-06 & -1E-06 \\
-0.043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 & 3E-05 & -1E-05 & 4E-06 \\
0.1233 & -0.043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 & 3E-05 & -1E-05 \\
-0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 & 3E-05 \\
1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 & -8E-05 \\
-0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 & 0{,}0002 \\
0{,}1233 & -0.351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 & -7E-04 \\
-0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 & 0{,}0019 \\
0.0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 & -0{,}005 \\
-0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 & -0{,}043 & 0{,}0152 \\
0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0.351 & 0{,}1233 & -0{,}043 \\
-7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}351 & 1 & -0{,}351 & 0{,}1233 \\
0{,}0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0{,}1233 & -0{,}3561 & 1 & -0{,}351 \\
-8E-06 & 0.0002 & -7E-04 & 0{,}0019 & -0{,}005 & 0{,}0152 & -0{,}043 & 0.1233 & -0{,}351 & 1
\end{matrix}\right)
$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}
1{,}1406 & 0{,}4005 & -4E-18 & 3E-18 & 4E-37 & -5E-19 & 2E-19 & 1E-19 & 1E-20 & -2E-21 \\
0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & 3E-36 & 2E-17 & 2E-19 & -5E-19 & 4E-19 & 2E-19 & -2E-20 \\
-7E-37 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & 4E-17 & 1E-18 & -2E-18 & -2E-19 & 2E-19 & 5E-20 \\
4E-38 & 3E-18 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -4E-18 & 8E-20 & 1E-18 & 2E-18 & -2E-19 \\
-7E-36 & 9E-18 & 4E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -2E-19 & 2E-17 & -4E-18 & -2E-18 \\
2E-19 & 3E-18 & 1E-17 & -3E-18 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & 4E-17 & 9E-18 & -4E-18 \\
6E-19 & 2E-18 & 2E-18 & -8E-18 & 3E-18 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & 3E-17 & 8E-18 \\
2E-19 & 7E-19 & 8E-19 & -2E-18 & 6E-18 & 3E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & 1E-17 \\
5E-21 & 1E-19 & 2E-19 & -2E-18 & -6E-18 & 2E-18 & 2E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 \\
-2E-20 & -6E-20 & -3E-20 & -5E-19 & -3E-18 & -4E-18 & 3E-18 & 2E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 \\
-5E-21 & -2E-20 & 2E-20 & 2E-19 & -2E-19 & -3E-18 & -9E-18 & -5E-18 & 2E-17 & 0{,}4005 \\
-1E-36 & -3E-21 & 6E-21 & 1E-19 & 2E-19 & -8E-19 & -4E-18 & -8E-18 & 4E-18 & -2E-17 \\
4E-38 & -9E-22 & -2E-21 & 2E-20 & 9E-20 & 1E-19 & -3E-19 & -2E-18 & -4E-18 & -1E-17 \\
4E-23 & -2E-22 & -5E-22 & -1E-21 & 2E-20 & 7E-20 & 1E-19 & -3E-20 & -1E-18 & -3E-16 \\
1E-22 & 2E-22 & 3E-2 & 2E-21 & 1E-20 & 4E-20 & 8E-20 & 2E-19 & 3E-19 & 7E-34 \\
8E-24 & 3E-23 & 7E-23 & 4E-22 & 5E-21 & 2E-20 & 3E-20 & 1E-19 & 2E-19 & 1E-34 \\
-1E-23 & -5E-23 & -1E-22 & -4E-22 & 1E-22 & 2E-21 & 5E-21 & 2E-20 & 1E-19 & 2E-20 \\
-7E-40 & -3E-23 & -3E-23 & -2E-22 & -9E-22 & -1E-21 & 2E-37 & -4E-21 & 2E-20 & 6E-20 \\
-9E-40 & -9E-24 & -1E-23 & -3E-23 & -2E-22 & -4E-22 & -3E-22 & -2E-21 & -4E-21 & 6E-21 \\
-5E-40 & -2E-24 & -4E-24 & -1E-23 & 9E-24 & -2E-23 & -7E-22 & -1E-21 & -1E-21 & -2E-21
\end{pmatrix}$$

$$
\left.\begin{array}{cccccccccc}
-2E-21 & 1E-21 & -1E-21 & -2E-22 & 1E-22 & -1E-24 & -2E-23 & -3E-24 & -4E-25 & 0 \\
-1E-20 & -3E-21 & -3E-21 & -6E-22 & -3E-22 & -6E-23 & -7E-23 & -5E-24 & -4E-24 & 9E-25 \\
3E-20 & 7E-21 & -3E-21 & -6E-22 & 3E-22 & -2E-22 & -1E-22 & 2E-23 & -4E-24 & 0 \\
3E-19 & 9E-20 & 7E-21 & -2E-21 & 1E-21 & -2E-22 & -4E-22 & 4E-23 & -8E-24 & 0 \\
-8E-20 & 2E-19 & 3E-20 & 7E-21 & 5E-21 & 1E-21 & -3E-22 & -6E-22 & -2E-22 & 3E-23 \\
-3E-18 & -6E-19 & 9E-20 & 3E-20 & 4E-20 & 2E-20 & 1E-21 & -1E-21 & -6E-22 & -6E-23 \\
-7E-18 & -4E-18 & -6E-19 & 9E-20 & 9E-20 & 4E-20 & 5E-21 & 1E-22 & -1E-21 & -7E-22 \\
3E-18 & -7E-18 & -3E-18 & -1E-19 & 3E-19 & 1E-19 & 4E-20 & -1E-22 & -4E-21 & -1E-21 \\
6E-17 & 1E-17 & -8E-19 & -2E-18 & -5E-20 & 2E-19 & 1E-19 & 4E-20 & -8E-21 & 0 \\
0{,}4005 & 5E-18 & -5E-18 & -3E-18 & -1E-18 & -5E-19 & -2E-20 & 1E-19 & 1E-20 & -4E-21 \\
1{,}2812 & 0{,}4005 & -7E-17 & 4E-18 & 3E-18 & -2E-18 & -1E-18 & -1E-19 & 5E-20 & 2E-20 \\
0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -4E-17 & -5E-18 & -5E-18 & -3E-18 & -7E-19 & -2E-20 & 3E-20 \\
-6E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -7E-17 & -5E-18 & -1E-18 & -2E-18 & -4E-19 & -1E-19 \\
2E-18 & -7E-17 & 0{,}40056 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -4E-17 & 4E-18 & -2E-18 & -2E-18 & -5E-19 \\
-2E-19 & -2E-17 & -8E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -5E-17 & -2E-18 & -1E-18 & -2E-18 \\
-2E-18 & -8E-18 & -1E-17 & -7E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -7E-17 & -3E-18 & -2E-18 \\
-9E-19 & -4E-18 & -5E-18 & -8E-18 & -7E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -8E-17 & 0 \\
-3E-20 & -7E-19 & -3E-18 & -5E-18 & -8E-18 & -7E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 & -8E-17 \\
1E-19 & -4E-21 & -4E-19 & -3E-18 & -5E-18 & -8E-18 & -8E-17 & 0{,}4005 & 1{,}2812 & 0{,}4005 \\
2E-20 & 3E-20 & -1E-20 & -6E-19 & -2E-18 & -4E-18 & -4E-18 & -9E-17 & 0{,}4005 & 1{,}1406
\end{array}\right)
$$

Розрахуємо оцінки параметрів моделі методом Ейткена, застосувавши $\hat{A} = \left(X'S^{-1}X\right)^{-1} X'S^{-1}Y$.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -20,73795801 \\ 0,241772267 \\ 0.073860021 \\ 0,417830605 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель прибутку запишеться так:

$$\hat{Y} = -20,74 + 0,24X_1 + 0,07X_2 + 0,42X_3.$$

4. Оцінимо параметри моделі на основі перетворення вихідної інформації. Для цього побудуємо матрицю T_1:

$$T_1 = \begin{pmatrix}
0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1
\end{pmatrix}$$

Помноживши матрицю T_1 на вектор Y та матрицю X, дістанемо скориговану інформацію:

Y^*	X_0^*	X_1^*	X_2^*	X_3^*
36,51706949	0,936335115	58,05277713	20,59937253	97,37885196
54,69319671	1,351107608	86,7686717	32,72436738	145,5151912
52,39541193	1,351107608	79,82199452	25,7776902	137,2707293
55,3420891	1,351107608	86,01313366	32,69882934	148,7596532
58,74651954	1,351107608	92,17310213	37,47990542	156,0262673
64,44873475	1,351107608	82,22642495	29,83101302	150,7284825
61,20427279	1,351107608	92,36424126	39,02215216	157,6218369
60,44873475	1,351107608	95,27974778	41,23544346	157,7818054
63,79984236	1,351107608	99,57753256	44,53322824	154,7284825
67,85316518	1,351107608	105,3330706	46,93765867	160,0262673
66,90648801	1,351107608	104,737501	45,28876628	166,132913
71,20427279	1,351107608	109,0352858	48,58655106	162,5373434
73,95981083	1,351107608	108,7908239	49,9909815	170,7818054
76,31091844	1,351107608	103,0886086	51,9909815	174,2928814
76,01313366	1,351107608	109,3330706	51,69319671	177,2928814
73,6202605	1,351107608	110,1419315	49,3420891	176,3462043
77,95981083	1,351107608	115,4397162	52,63987389	169,643989
81,71534887	1,351107608	122,5463619	56,04430432	177,5373434
83,41756409	1,351107608	127,3018999	57,74651954	184,0484195
85,7686717	1,351107608	130,3552228	57,09762714	187,1017423

Застосувавши функцію «Лінійн» (Excel) до перетвореної інформації, дістанемо:

Вектор оцінок параметрів моделі: $\hat{A} = \begin{pmatrix} -20{,}737958 \\ 0{,}241773 \\ 0{,}073860 \\ 0{,}417831 \end{pmatrix}$.

Як бачимо, він повністю збігається з раніше розрахованим на основі матриці S^{-1}.

8.3.3. Метод Кочрена—Оркатта. Нехай задано економетричну модель

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t, \quad t = \overline{1,n}; \tag{8.26}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1.$$

Перетворивши вихідну інформацію за допомогою ρ, дістанемо:

$$y_t - \rho y_{t-1} = a_0(1-\rho) + a_1(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t. \tag{8.27}$$

У цій моделі залишки ε_t мають скалярну дисперсійну матрицю.

Сума квадратів залишків на основі (8.27) визначатиметься співвідношенням

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n} \left[(y_t - \rho y_{t-1}) - a_0(1-\rho) - a_1(x_t - \rho x_{t-1}) \right]^2. \tag{8.28}$$

Безпосередня мінімізація функції (8.28) приводить до системи нелінійних рівнянь, тому аналітичний вираз оцінок параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ дістати важко.

Метод наближеного пошуку параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ, які мінімізують суму квадратів (8.28), дає ітеративний метод, запропонований Кочреном і Оркаттом.

Опишемо його алгоритм.

Крок 1. Довільно вибирають значення параметра ρ, наприклад $\rho = r_1^0$. Підставивши його в (8.28), обчислюють $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Узявши $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$, підставимо їх у (8.28) і обчислимо $\rho = r_1^0$.

Крок 3. Підставивши в співвідношення (8.28) значення $\rho = r_2$, знайдемо $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Крок 4. Використаємо $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$ для мінімізації суми квадратів залишків (8.27) за невідомим параметром $\rho = r_3^0$. Процедура триває доти, доки наступні значення параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ не будуть відрізнятись менш як на задану величину.

Цей ітеративний метод, як і інші аналогічні процедури, має дві проблеми:

а) збіжності;

б) характеру знайденого мінімуму — локальний чи глобальний.

Проведені дослідження [2] за цими двома проблемами показали, що в результаті застосування методу Кочрена—Оркатта завжди знаходимо глобальний оптимум і алгоритм забезпечує порівняно добру збіжність.

Часто пропонується альтернативний підхід до використання цього ітеративного методу.

На відміну від попереднього в ньому подальші ітерації припиняються тоді, коли на основі критерію Дарбіна—Уотсона робиться висновок про відсутність автокореляції залишків.

Розглянемо алгоритм

Крок 1. Приймається гіпотеза $\rho = r_1 = 0$ і мінімізується на основі 1МНК сума квадратів: $\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)}x_t)^2$. Знаходяться оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Знаходяться залишки і на основі критерію Дарбіна—Уотсона перевіряється нульова гіпотеза відносно автокореляції залишків. Якщо гіпотеза відхиляється, то переходять до кроку 3.

Крок 3. На цьому кроці мінімізується сума квадратів залишків:

$$\sum_{t=1}^{n}\left[(y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)}x_t) - \rho(y_{t-1} - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)}x_{t-1})\right]^2,$$

де $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$ — оцінки параметрів, знайдені на першому кроці 1МНК. У результаті параметр $\rho = r_2^0$ визначається як коефіцієнт регресії залишків, знайдених 1МНК.

Крок 4. Використовуючи значення оцінки параметра r_2^0, визначають оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$ на основі 1МНК, який застосовується до перетворених даних $(y_t - r_2^0 y_{t-1})$ і $(x_t - r_2^0 x_{t-1})$.

Крок 5. Визначаються залишки і перевіряються на наявність автокореляції. Якщо гіпотеза про наявність автокореляції відхиляється, то ітеративний процес припиняється. У протилежному випадку переходимо до кроку 3, де використовуються знайдені оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Коли ітеративний процес припиняється, то виконується перевірка значущості параметрів для останньої економетричної модел. У цьому випадку звичайні формули дадуть обґрунтовані оцінк дисперсій залишків.

8.3.4. Метод Дарбіна. Дарбін запропонував просту двокрокову процедуру, яка також дає оцінки параметрів. Вони асимптотично мають той самий вектор середніх і ту саму матрицю дисперсій, що й оцінки за методом найменших квадратів.

Крок 1. Підставимо значення залишків, яке підпорядковане авторегресійній моделі першого порядку $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, в економетричну модель $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$. Тоді дістанемо $y_t = a_0 + a_1 x_t + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, де $u_{t-1} = y_{t-1} - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{t-1}$.

Звідси $y_t = a_0(1-\rho) + \rho y_{t-1} + a_1 x_t - a_1 \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$, де ε_t має скалярну матрицю дисперсій.

Згідно з 1МНК визначаються параметри цієї моделі, куди входить і коефіцієнт ρ. У результаті обчислень маємо $\rho = r'$.

Крок 2. Значення $\rho = r'$ використовується для перетворення змінних $(y_t - r' y_{t-1})$ і $(x_t - r' x_{t-1})$, а 1МНК застосовується до перетворених даних. Коефіцієнт при $(x_t - r' x_{t-1})$ є оцінкою параметра a_1, а вільний член, поділений на $1 - r'$, оцінює параметр a_0.

Метод Дарбіна дуже просто поширюється на випадок кількох незалежних змінних і для автокореляції вищих порядків.

Нехай задано модель

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \ldots + a_m x_{mt} + u_t, \qquad (8.29)$$

де $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$.

Підставивши значення u_t в (8.29), дістанемо:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \hat{a}_1 x_{1t} + \ldots + \hat{a}_m x_{mt} -$$
$$- \rho_1 \hat{a}_1 x_{1,t-1} - \ldots - \rho_1 \hat{a}_m x_{m,t-1} - \rho_2 \hat{a}_1 x_{1,t-2} - \ldots - \rho_2 \hat{a}_m x_{m,t-1} + \varepsilon_t.$$

Застосувавши 1МНК, обчислимо параметри цієї моделі. Коефіцієнти $\rho_1 = r_1$ і $\rho_2 = r_2$ використаємо для перетворення даних:

$$(y_t - r_1 y_{t-1} - r_2 y_{t-2}), \quad (x_{jt} - r_1 x_{j,t-1} - r_2 x_{j,t-2}), \quad j = \overline{1,m}, \; t = \overline{1,n}.$$

Знову застосуємо 1МНК для цих перетворених даних і знайдемо оцінки параметрів моделі $\hat{a}_0$, $\hat{a}_j (j = \overline{1,m})$.

Описаний щойно ітеративний метод Кочрена—Оркатта і розглянута двокрокова процедура Дарбіна за наявності автокореляції залишків асимптотично ефективніші, ніж 1МНК.

Але при цьому постають два важливі запитання:

1) Чи будуть ці методи ефективнішими, ніж 1МНК, для малих вибіркових сукупностей?

2) Якою — однаковою чи різною — буде ефективність застосування методів Кочрена—Оркатта і Дарбіна для малих вибірок?

Чисельний аналіз, виконаний Гриліхесом і Рао [2] за допомогою методу Монте-Карло, дав відповідь на ці запитання.

Висновок 1. 1МНК дає менш ефективні оцінки порівняно з іншими методами, якщо сукупність спостережень $n = 20$ одиниць, а $|\rho| > 0{,}3$.

Висновок 2. Якщо $|\rho| < 0{,}3$, то зниження ефективності оцінок 1МНК порівняно зі складнішими процедурами невелике.

Висновок 3. Метод Дарбіна забезпечує найкращу оцінку для більшого кола параметрів порівняно з іншими методами.

Висновок 4. Нелінійний метод оцінювання параметрів не дає відчутних переваг порівняно з двокроковою процедурою Дарбіна.

8.4. Прогноз

Теоретичні дослідження прогнозу в разі порушення умови (4.3) було розглянуто в розд. 7.

Нехай маємо модель: $Y = XA + u$, де $M(u) = 0$ і $M(uu') = \sigma_u^2 S = V$, яка побудована для n спостережень.

Використаємо цю модель для визначення прогнозу залежної змінної $\hat{y}_{n+1}$ для періоду $n + 1$, коли в цьому періоді задано незалежну змінну x_{n+1}. Формула дає найкращий незміщений прогноз:

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + W'V^{-1}u,$$

де $\hat{A}$ — оцінка параметрів моделі за методом Ейткена,

$$u = Y - X\hat{A}$$

і W — вектор коваріації розрахованих залишків для n спостережень і прогнозних залишків u_{n+1}:

$$W = \begin{bmatrix} M(\hat{u}_1 u_{n+1}) \\ M(\hat{u}_2 u_{n+1}) \\ M(\hat{u}_3 u_{n+1}) \\ \dots \\ M(\hat{u}_n u_{n+1}) \end{bmatrix}.$$

Якщо залишки описуються авторегресійною моделлю першого порядку, то з урахуванням рівності $M(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2$ можна записати:

$$W = \rho^s \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \rho^{n-1} \\ \rho^{n-2} \\ \rho^{n-3} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, вектор W можна дістати, помноживши ρ на останній стовпець матриці V. Але оскільки $VV^{-1} = E$, то добуток WV^{-1} являє собою останній рядок матриці E, помножений на ρ.

Звідси $W'V^{-1}u_n = \rho u_n$.

Формула прогнозу має такий вигляд

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho u_n, \tag{8.30}$$

де $\hat{y}_{n+1}$ — прогнозний рівень залежної змінної; x_{n+1} — прогнозне значення незалежної змінної.

✓***Приклад 8.5.*** Використовуючи економетричну модель, яку побудовано за даними про роздрібний товарообіг та дохід (приклад 8.2), визначити прогнозний рівень товарообігу, коли дохід становитиме $x_{n+1} = 55$.

Розв'язання

1. Запишемо співвідношення, яке визначатиме прогнозний рівень залежної змінної

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1}\hat{A} + \rho u_n,$$

де $X_{n+1}\hat{A}$ — точкова оцінка прогнозної залежної змінної; ρu_n — залишки прогнозу, а u_n — залишки періоду $t(t = n)$, здобуті згідно з 1МНК.

2. Скористаємося економетричною моделлю роздрібного товарообігу (приклад 8.2) для обчислення прогнозу:

$$\hat{y}_{n+1} = 0{,}442 + 0{,}861x_{n+1} = 0{,}442 + 0{,}861\ 55 = 0{,}442 + 47{,}35 = 47{,}8.$$

3. Знайдемо оцінку залишків прогнозу $\rho\,\hat{u}_n$, де ρ — коефіцієнт коваріації залишків; $\hat{u}_n$ — залишки за моделлю для $t = 10$.

$$\rho = 0{,}77;\ \ \hat{u}_n = 0{,}18;$$

$$\rho\hat{u}_n = 0{,}77 \cdot 0{,}18 \approx 0{,}14.$$

4. Визначимо точковий прогнозний рівень роздрібного товарообігу на одинадцятий рік $(n + 1)$:

$$\hat{y}_{n+1} = 47{,}8 + 0{,}14 = 47{,}94.$$

✓***Приклад 8.6.*** Виконаємо точковий та інтервальний прогноз прибутку на основі економетричної моделі, здобутої у прикладі 8.4.

Спочатку задамо очікувані значення пояснювальних змінних:

$$X_{\text{пр}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 90 \\ 43 \\ 135 \end{pmatrix}; \qquad X'_{\text{пр}} = \begin{pmatrix} 1 & 90 & 43 & 135 \end{pmatrix};$$

точковий прогноз прибутку на основі моделі запишеться так:

$$\bar{y}_{\text{пр}} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1^{\text{пр}} + \hat{a}_2 x_2^{\text{пр}} + \hat{a}_3 x_3^{\text{пр}} + \rho u_n;$$

$$\bar{y}_{\text{пр}} = -20{,}74 + 0{,}24 \cdot 90 + 0{,}07 \cdot 43 + 0{,}417 \cdot 135 - 0{,}351 \cdot (-0{,}917) = 60{,}385.$$

Для визначення інтервального прогнозу розрахуємо стандартну похибку прогнозу за формулою:

$$S_{y_{\text{пр}}} = \sqrt{\sigma_u^2 X'_{\text{пр}} \left(X'S^{-1}X\right) X_{\text{пр}}}; \quad S_{y_{\text{пр}}} = 0{,}806120762.$$

Визначимо граничну похибку прогнозу за формулою:

$$\sigma_{y_{\text{пр}}} = t_{(\alpha)\text{крит}} \cdot S_{y_{\text{пр}}}; \quad \alpha = 0{,}05; \quad \sigma_{y_{\text{пр}}} = 1{,}407393517.$$

Додавши граничну похибку до точкового прогнозу, дістанемо максимально можливий рівень прибутку:

$$y_{\text{пр}\max} = \bar{y}_{\text{пр}} + \sigma_{y_{\text{пр}}} = 60{,}385 + 1{,}407 = 61{,}792.$$

Віднявши граничну похибку від точкового прогнозу, дістанемо мінімально можливий рівень прибутку:

$$y_{пр\,min} = \hat{y}_{пр} - \sigma_{y_{пр}} = 60.385 - 1,407 = 58,978.$$

У результаті маємо: $58,978 \le y_{пр} \le 61,792$.

Порівняємо отримані значення прогнозу прибутку зі значеннями прогнозу, здобутими на основі оцінок моделей за 1МНК:

$$\hat{y}_{пр} = 60,06341527;$$

$$y_{пр\,max} = 62,17325357;$$

$$y_{пр\,min} = 57,95357697.$$

Як бачимо, точковий та інтервальний прогнози прибутку на основі економетричних моделей, параметри яких оцінені 1МНК та УМНК, відрізняються в даному випадку несуттєво. Зауважимо, що оцінки за УМНК та кількісні характеристики, здобуті на основі цих оцінок, ніколи не будуть гіршими ніж за 1МНК.

8.5. Стислі висновки

1. Часто під час побудови економетричної моделі стикаються з порушенням другої необхідної умови для застосування 1МНК, коли $M(uu') = \sigma_u^2 S$, де матриця S $(n \times n)$ характеризує коваріації між залишками, а дисперсія лишається сталою. Це явище спостерігається насамперед тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів і називається автокореляцією залишків.

2. Виникнення автокореляції залишків пов'язане ось із чим:

1) автокореляцією послідовних елементів векторів залежної і незалежних змінних;

2) автокореляцією послідовних значень змінної (змінних), які не ввійшли до економетричної моделі;

3) помилковою специфікацією економетричної моделі.

3. Оскільки коваріація послідовних значень залишків подається у вигляді

$$\rho^s = \frac{M(u_t u_{t-s})}{\sigma_u^2},$$

то друга з необхідних умов записується так:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S,$$

де S — матриця коефіцієнтів коваріацій s-го порядку для елементів ряду u_t або $M(uu') = V$, де $V = \sigma_u^2 S$.

4. За наявності автокореляції залишків оцінювання параметрі моделі 1МНК може мати такі результати:

1) оцінки параметрів моделі будуть зміщеними;

2) статистичні критерії Стьюдента (t-критерій) і Фішера (F критерій) не можуть бути використані в дисперсійному аналі економетричної моделі;

3) неефективність оцінок параметрів економетричної модел призводить до неефективних прогнозів.

5. Наявність автокореляції перевіряється за такими критеріями:

1) Дарбіна—Уотсона — $DW\,(d)$;

2) фон Неймана — Q;

3) нециклічного коефіцієнта автокореляції r^*;

4) циклічного коефіцієнта автокореляції r^0.

6. Для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими за лишками можна застосувати такі методи:

1) Ейткена;

2) перетворення вихідної інформації;

3) Кочрена—Оркатта;

4) Дарбіна.

Перші два методи використовуються тоді, коли залишки зад вольняють авторегресійну модель першого порядку, третій і че вертий можна застосувати і тоді, коли залишки описуються авт регресійною моделлю вищого порядку.

7. Метод Ейткена базується на скоригованій вихідній інфо мації з урахуванням коваріації залишків. Система рівнянь д оцінювання параметрів моделі запишеться так:

$$(X'V^{-1}X)\hat{A} = X'V^{-1}Y,$$

або

$$(X'S^{-1}X)\hat{A} = X'S^{-1}Y.$$

Звідси оператор оцінювання за методом Ейткена має так вигляд

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$$

або

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Матриця S у цьому операторі:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \rho^{n-5} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки коваріація залишків ρ^s при $s > 2$ часто наближається до нуля, то матрицю, обернену до S, іноді доцільно подавати у такому вигляді

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Метод перетворення вихідної інформації дає альтернативний підхід до пошуку оцінок параметрів моделі за допомогою двокрокової процедури:

1) перетворення вихідної інформації за допомогою параметра ρ;

2) застосування 1МНК для оцінок параметрів згідно з перетвореними даними.

Доведено, що $M(T_1 uu' T_1') = \sigma_u^2 E$, тому перетворення вихідної інформації виконується за допомогою такої матриці:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

розміром $n \times n$.

Іноді для перетворення вихідної інформації використовується матриця T_2 розміром $(n-1)\times n$, яка утворюється з матриці T_1 викреслюванням першого рядка:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Метод Кочрена—Оркатта є ітеративним методом оцінювання параметрів економетричної моделі, коли мінімізується сума квадратів залишків, яка для моделі

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t,$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

визначається так:

$$\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n} \left[(y_t - \rho y_{t-1}) - a_0(1-\rho) - a_1(x_t - \rho x_{t-1}) \right]^2.$$

Для мінімізації цієї функції використовується наведений далі алгоритм.

Крок 1. Довільно вибираємо значення параметра ρ, наприклад $\rho = r_1$, і підставляємо у співвідношення, яке визначає суму квадратів залишків, а на основі 1МНК знаходимо параметри $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Узявши $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$, підставимо їх у співвідношення, яке визначає суму квадратів залишків, та обчислимо $\rho = r_2$.

Крок 3. Підставивши $\rho = r_2$, знайдемо оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Крок 4. Використовуємо $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$ для мінімізації суми квадратів залишків за невідомим параметром $\rho = r_3$ і т. д. Процедура триває доти, доки наступні значення параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ практично не відрізнятимуться від попередніх або відрізнятимуться на задану величину.

10. Метод Дарбіна також є ітеративним методом, який складається з двокрокової процедури. На першому кроці визначаються 1МНК оцінки параметрів моделі

$$y_t = a_0 + \sum_j a_j x_{tj} + u_t,$$

де $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, або $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$ і т. д.

На другому кроці 1МНК застосовується для перетворених даних з допомогою параметра ρ, який визначено на першому кроці, тобто змінні наберуть вигляду $(y_t - \rho y_{t-1})$, $(x_{tj} - \rho x_{tj-1})$.

Коефіцієнт при $x_{tj} - \rho x_{tj-1}$ є оцінкою параметра a_j, а вільний член, поділений на ρ, — оцінкою параметра a_0.

11. Оцінку прогнозного рівня залежної змінної можна дістати, скориставшись таким співвідношенням:

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1}\hat{A} + W'V^{-1}u,$$

де $\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів моделі з автокорельованими залишками $u = Y - X\hat{A}$. Оскільки $W'V^{-1}u_n = \rho u_n$, то формула найкращого незміщеного прогнозу запишеться у вигляді:

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1}\hat{A} + \rho u_n.$$

8.6. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення автокореляції.
2. Які причини виникнення автокореляції залишків?
3. Як впливає автокореляція залишків на оцінку параметрів економетричної моделі?
4. Які особливості оцінювання параметрів за методом Ейткена за наявності автокореляції?
5. Запишіть матриці перетворення вихідної інформації згідно з двокроковою процедурою Дарбіна.
6. В яких випадках за автокореляції залишків доцільніше використовувати методи Кочрена—Оркатта або Дарбіна?
7. Дайте коротку характеристику алгоритму методу Кочрена—Оркатта.
8. Чим відрізняється метод Дарбіна від методу Кочрена—Оркатта?
9. Як записати формулу прогнозу залежної змінної за автокореляції залишків? Чому вона має такий вигляд?

10. Для оцінювання параметрів моделі $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$ скористайтеся методом перетворення вихідної інформації, яку задано у вигляді двох взаємозв'язаних часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5		7
Y	10	12	11	10	13		16
X	5	7	6	4	7		10

а залишки u_t задовольняють авторегресійну схему першого порядку: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$.

11. Дайте порівняльний аналіз оцінок параметрів моделі, наведеної в завданні 10, на основі 1МНК і перетворення вихідної інформації.

12. Визначте ступінь зміщення коваріації параметрів і залишкової дисперсії в разі застосування 1МНК у завданні 10.

13. Дайте оцінку параметрів моделі за методом Кочрена—Оркатта, якщо порядок авторегресійної моделі для залишків є схемою другого порядку. Вказівка: $r_1 = 0{,}4$, $r_2 = 0{,}3$ (за даними завдання 10).

14. Виконайте порівняльний аналіз оцінок параметрів моделі із завдання 10, знайдених за допомогою перетворення вихідної інформації, а також за методом Кочрена—Оркатта. Обґрунтуйте результати порівняння, виходячи з особливостей цих двох методів.

15. Для моделі $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$, де $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$, дайте оцінку параметрів за методом Дарбіна, якщо вихідну інформацію задано у вигляді двох часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5	6
Y	16	18	19	19	22	25
X	6	7	8	9	12	13

16. Використовуючи ρ_1 і ρ_2 із завдання 15, зробіть перетворення вихідної інформації зі згаданого завдання.

17. Знайдіть прогнозне значення y_8, коли $x_8 = 15$, за моделлю $\hat{y} = 5{,}3 + 0{,}6x_t$, скориставшись такими даними:

Рік	1	2	3	4	5	6	7
Y	10	12	13	11	14	15	14
u	–0,5	–0,3	0,2	0,4	0,1	–0,6	0,6

18. Визначте вектор W, коли відомі залишки:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_t	1	–1	1,2	1,1	–1,2	–1,1	0,6	–0,5	0,2

8.7. Основні терміни і поняття

Автокореляція • Модель з автокорельованими залишками • Коваріація залишків • Стаціонарний марковський процес • Додатна автокореляція • Від'ємна автокореляція • Критерій Дарбіна—Уотсона • Критерій фон Неймана • Авторегресійна схема другого порядку • Нециклічний коефіцієнт автокореляції • Циклічний коефіцієнт автокореляції • Метод перетворення вихідної інформації • Метод Кочрена—Оркатта • Метод Дарбіна • Авторегресійна схема першого порядку

Розділ 9
МЕТОД ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗМІННИХ

9.1. Властивості оцінок моделі у разі стохастичних змінних

У попередніх розділах, розглядаючи модель

$$Y = XA + u,$$

виходили з припущення, що змінні X є детермінованими і набувають значення з деякої множини детермінованих чисел. Це означає, що якщо б нам потрібно було повторити розрахунки з новою вибіркою, то значення пояснювальних змінних залишились незміненими. Значення ж залежної змінної змінилося б, тому що вони є випадкові, і нова вибірка містила б нові значення випадкових пояснюваних змінних.

В економічній практиці припущення про нестохастичність пояснювальних змінних стають досить часто нереальними. Як правило, пояснювальні змінні нерідко визначаються з інших економічних залежностей (і таких залежностей буває кілька, що діють одночасно).

Розглянемо три такі моделі зі стохастичними пояснювальними змінними, що класифікуються згідно з тим, який зв'язок між розподілом цих змінних і розподілом випадкової складової (залишками). Усі вони мають важливе практичне значення.

1. У моделях першого типу пояснювальні змінні розподілені незалежно від випадкової складової.

2. У моделях другого типу пояснювальні змінні і випадкова складова ***не є незалежними***, але їх значення в кожен момент часу не корелюються (тобто поточні значення пояснювальних змінних не корелюються з поточними значеннями залишків).

3. У моделях третього типу значення пояснювальних змінних і залишків корелюють в кожен момент часу.

У цих типах моделей розглядаються два випадки: коли часові ряди пояснювальних змінних є стаціонарними, тобто коли розподіл X не залежить від часу, і коли часові ряди X містять змінні з трендом, і, отже дисперсія залишків необмежено збільшується з розширенням часового періоду вибірки.

Водночас в економіці під час дослідження будь-якої залежності використовувані змінні бувають неправильно виміряні. Наприклад, часто трапляються помилки, зроблені під час опитування (не точно розуміє питання особа, що веде опитування, або той, що відповідає). Проте неточна інформація може бути не тільки такого змісту. Іноді бувають випадки, коли певна змінна в моделі визначена, але дані свідчать, що вона має дещо інше визначення (широко відомий приклад М. Фрідмена про стандартну функцію споживання).

Розглянемо властивості оцінок параметрів моделі, якщо матриця пояснювальних змінних буде стохастична.

Нехай $\hat{a}^{(n)}$ — оцінка скалярного параметра a. Верхній його індекс вказує на розмір вибіркової сукупності, на основі якої оцінено ці параметри.

Означення 9.1. *Сукупність оцінок $\hat{a}^{(n)}$ спостережень називається* ***послідовністю оцінок***:

$$\left\{\hat{a}^{(n)}\right\} = \hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)} \ldots \hat{a}^{(n)}.$$

Означення 9.2. *Якщо послідовність математичного сподівання параметрів $\hat{a}$ $M\left\{\hat{a}^{(n)}\right\}$ прямує до деякої константи, то ця константа є* ***асимптотичним сподіванням***, *тобто* $M(\hat{a}) = \lim\limits_{n\to\infty} M\left\{a^{(n)}\right\}$.

Означення 9.3. *Граничне значення послідовності дисперсій для $\hat{a}^{(n)}$ називається* ***асимптотичною дисперсією***

$$M\left[\hat{a}^{(n)} - Ma^{(n)}\right]^2 = \lim_{n\to\infty} M\left[\hat{a}^{(n)} - Ma^{(n)}\right]^2.$$

Оскільки для $n \to \infty$ вираз у правій частині може дорівнювати нулю, то дисперсія є сталою, а саме $\sigma_{\hat{a}}^2$.

Визначимо асимптотичні властивості оцінок 1МНК у загальній лінійній моделі зі стохастичними пояснювальними змінними:

$$Y = XA + u,$$

де X — незалежна щодо всіх і кожного з елементів вектора u, тобто:

$$\text{а)}\quad M(u/X) = M(u) = 0; \qquad (9.1а)$$

$$\text{б)}\quad M(Y/X) = XA + M(u/X) = XA; \qquad (9.1б)$$

$$\text{в) } M(X) = \sigma_u^2 E. \tag{9.1в}$$

Передусім розглянемо властивість обґрунтованості оцінок. Припустимо, що виконуються такі рівності:

$$\text{а) } p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}u'u\right) = \sigma_u^2; \tag{9.2а}$$

$$\text{б) } p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'X\right) = \sum{}_{xx}; \tag{9.2б}$$

$$\text{в) } p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'u\right) = 0. \tag{9.2в}$$

Припущення (9.2а) означає: дисперсія стала для всіх залишків.

Припущення (9.2б) стверджує існування границі за ймовірністю для дисперсій (других моментів) змінної X, які утворюють матрицю Σ_{xx}.

Припущення (9.2в) має такий зміст: границя за ймовірністю коваріацій між змінними X і залишками u дорівнює нулю, тобто матриця X і залишки u не зв'язані між собою.

Вектор оцінок параметрів $\hat{A}$ 1МНК подається у такому вигляді:

$$\hat{A} = A + (X'X)^{-1}X'u.$$

Звідси

$$p\lim_{n\to\infty}\hat{A} = A + p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\cdot p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'u\right) = A + \sum{}_{xx}^{-1}\cdot 0 = A.$$

Отже, оцінка $\hat{A}$, здобута за допомогою 1МНК, є обґрунтованою.

Асимптотична матриця коваріацій для $\hat{A}$ така:

$$asy\,\mathrm{cov}(\hat{A}) = n^{-1}\lim_{n\to\infty} M\left[\sqrt{n}(\hat{A}-A)\right]\left[\sqrt{n}(\hat{A}-A)\right]',$$

або

$$asy\,\mathrm{cov}(\hat{A}) = n^{-1}\sigma_u^2\sum{}_{xx}^{-1}. \tag{9.3}$$

Оскільки

$$p\lim\left(\frac{1}{n}X'X\right) = \sum{}_{xx},$$

а $$S_u^2\,(X'X)^{-1} = n^{-1}\sigma_u^2 \frac{1}{n}(X'X)^{-1}, \qquad (9.4)$$

то 1МНК забезпечує обґрунтовану оцінку асимптотичних дисперсій і коваріацій, коли в моделі пояснювальні змінні є стохастичними.

Досить часто на практиці змінні X не можуть бути повністю незалежними від u, як це припускалося раніше. Наприклад, однією з пояснювальних змінних може бути лагове значення залежної змінної Y, що може призвести до зміщення оцінки 1МНК для вибіркових сукупностей спостережень.

Розглянемо модель

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 y_{t-1} + u_t, \quad t = 1,\dots,n, \qquad (9.5)$$

де $$M(uu') = \sigma_u^2 E.$$

Оскільки u_{t-1} впливає на y_{t-1}, а y_{t-1} впливає на y_t, то і u_{t-1} впливає на y_t навіть тоді, коли послідовні значення залишків незалежні. Але коли значення u_t є незалежними, то зворотна залежність, тобто залежність між u_t і y_{t-1}, може бути відсутня. Як ми бачили, обґрунтованість оцінки 1МНК залежить від двох припущень:

$$1)\ p\lim\left\{\frac{1}{n}(X'X)\right\} = \Sigma_{xx},$$

$$2)\ p\lim\left\{\frac{1}{n}(X'u)\right\} = 0.$$

Для (9.5) друга умова має вигляд

$$p\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}(X'u)\right\} = \begin{pmatrix} p\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}u_t \\ p\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}x_t u_t \\ p\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}y_{t-1}u_t \end{pmatrix}.$$

Коли $p\lim\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}y_{t-1}u_t = 0$, то можна сказати, що $p\lim\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}x_t u_t = 0$. А це означає, що для моделі, яка містить лагові значення залежної змінної, можна чекати, що оцінка 1МНК буде обґрунтованою.

9.2. Метод інструментальних змінних

Кореляція між пояснювальними змінними і залишками є досить серйозною перепоною для застосування 1МНК. Така кореляція може виникнути з різних причин, але основними є три:

1) помилки вимірювання пояснювальних змінних;

2) побудова економетричної моделі за системою одночасних рівнянь;

3) наявність в економетричній моделі лагових змінних.

До лагових пояснювальних змінних відноситимемо такі змінні, які впливають на залежну змінну через певний проміжок часу. Наприклад, якщо залежна змінна в період t залежить від рівня тієї самої змінної в період $t-1$, то ця змінна входить до переліку пояснювальних змінних моделі, які в такому разі стають стохастичними. Вони включають лагову залежну змінну, яка є стохастичною і має зв'язок із залишками.

У разі існування кореляції між пояснювальними змінними і залишками можна застосувати поширений альтернативний метод оцінювання, який називається ***методом інструментальних змінних***.

Розглянемо модель

$$Y = XA + u, \tag{9.6}$$

для якої

$$p\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}(X'u)\right\} \neq 0.$$

Припустимо, що існує матриця Z порядку $n \times m$, яка має такі властивості:

$$1)\ p\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}(Z'u)\right\} = 0; \tag{9.7}$$

$$2)\ p\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}(Z'X)\right\} = \Sigma_{zx}, \tag{9.8}$$

$$3)\ p\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}(Z'Z)\right\} = \Sigma_{zz}, \tag{9.9}$$

де матриця Σ_{zz} — невироджена і, крім того, для неї існує границя (9.9).

Матриця Z є матрицею інструментальних змінних. Припускається, що змінні Z гранично некорельовані із залишками u, а їх перехресні моменти зі змінними X не всі дорівнюють нулю й утворюють невироджену матрицю. Якщо деякі зі змінних X не корелюють із залишками u, то їх можна використовувати для формування стовпців матриці Z і знаходити додаткові інструментальні змінні лише для тих стовпців, що залишилися.

Оператор оцінювання вектора A за допомогою інструментальних змінних можна записати так:

$$\hat{A} = (Z'X)^{-1} Z'Y. \tag{9.10}$$

Щоб дістати його, помножимо модель (9.6) на $\frac{1}{n}Z'$ ліворуч:

$$\frac{1}{n}Z'Y = \frac{1}{n}Z'XA + \frac{1}{n}Z'u. \tag{9.11}$$

Оскільки $p\lim\left(\frac{1}{n}Z'u\right) = 0$, то $Z'Y = Z'XA$.

Звідси дістаємо оператор оцінювання (9.10), який забезпечує визначення обґрунтованої оцінки, у чому можна переконатися, підставивши (9.6) у (9.10). Маємо:

$$\hat{A} = A + (Z'X)^{-1} Z'u;$$

Покажемо, що

$$p\lim_{n\to\infty} \hat{A} = A + p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}Z'X\right)^{-1} \cdot p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}Z'u\right) = A + \textstyle\sum_{xx}^{-1} \cdot 0 = A.$$

Асимптотична матриця коваріацій запишеться:

$$asy\,\mathrm{cov}(\hat{A}) = n^{-1}\sigma_u^2 \textstyle\sum_{zx}^{-1} \sum_{zz} \sum_{zx}^{-1}. \tag{9.12}$$

На практиці (9.12) обчислюють так:

$$asy\,\mathrm{cov}(\hat{a}) = \sigma_u^2 (Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}, \tag{9.13}$$

де

$$\sigma_u^2 = \frac{u'u}{n-m}.$$

Отже, асимптотична матриця коваріацій оцінок параметрів моделі, отриманих методом інструментальних змінних, є добутком трьох коваріаційних матриць: $(Z'X)^{-1}$, $(Z'Z)$, $(X'Z)^{-1}$.

Реальна трудність застосування цього методу полягає в знаходженні змінних, які можна використовувати як інструментальні. Встановити розподіл інструментальних змінних практично неможливо, а тому важко переконатися, що вибрані інструментальні змінні справді не корелюють із залишками. Водночас ці змінні повинні мати досить високу кореляцію зі змінними X, бо в протилежному випадку вибіркові дисперсії для оцінок, здобутих за допомогою інструментальних змінних, будуть досить великими.

Коротко вимоги до інструментальних змінних Z можна сформулювати так:

1) Z тісно пов'язані з X;

2) Z не пов'язані із залишками u.

9.3. Визначення інструментальних змінних

Розглядаючи способи визначення інструментальних змінних, скористаємося найпростішими економетричними моделями, які використовувались в різних операторах оцінок.

9.3.1. Оператор оцінювання Вальда. Нехай економетрична модель є простою і має вигляд

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t. \tag{9.14}$$

Якщо вибіркова сукупність містить парне число спостережень, то матриця інструментальних змінних Z запишеться так:

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця пояснювальних змінних для цієї моделі запишеться у такому вигляді:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця інструментальних змінних замість рядка пояснювальної змінної буде включати інструментальну змінну. Щоб визначити інструментальну змінну, необхідно виконати такі дії:

1. Знайти відхилення кожного елемента вектора X від медіани.
2. Додатні відхилення замінюються на +1, а від'ємні — на −1.

Використовуючи оператор оцінювання

$$\hat{A} = (Z'X)^{-1} Z'Y, \tag{9.15}$$

маємо:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n\bar{y} \\ \frac{n}{2}(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \end{pmatrix}, \tag{9.16}$$

де $\bar{x}_2$ і $\bar{x}_1$ характеризують середні відхилення значень X відповідно вгору і вниз від медіани, а $\bar{y}_2$ і $\bar{y}_1$ — середні значення залежної змінної, які відповідають середнім $\bar{x}_2$ і $\bar{x}_1$. Звідси

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \dfrac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} \end{pmatrix}. \tag{9.17}$$

Це означає, що параметр $\hat{a}_1$ у моделі (9.14) подається у такому вигляді:

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}, \quad \text{причому } \hat{a}_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}. \tag{9.18}$$

Коли вибіркова сукупність містить непарну кількість спостережень, то перш ніж розпочинати обчислення, необхідно відкинути середнє спостереження.

За загальних припущень оцінка, яку здобуто методом Вальда, є обґрунтованою, але її вибіркова дисперсія може бути досить великою, тобто оцінка є неефективною.

9.3.2. Особливості оцінювання методом Бартлета. Бартлет показав, що ефективність оцінки можна збільшити, якщо розбити впорядковані значення змінної X на три групи однакового розміру. Перша з них містить найменші значення X, друга — середні, а третя — найбільші. Вилучивши середню групу — $n/3$ спостережень, дістанемо оцінку для параметра:

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{y}_3 - \bar{y}_1}{\bar{x}_3 - \bar{x}_1}, \tag{9.19}$$

де $\bar{x}_3, \bar{x}_1, \bar{y}_3, \bar{y}_1$ — середні величини двох крайніх груп спостережень. Вільний член оцінюється так само, як і в (9.18).

Поділ вибіркової сукупності спостережень на три рівні групи доцільно використовувати у прикладних дослідженнях, оскільки немає змоги дістати точну інформацію про закон розподілу значень X.

9.3.3. Оператор оцінювання Дарбіна. Дарбін запропонував упорядковувати значення вектора X в порядку зростання, і ввів як інструментальну змінну порядковий номер (ранг), тобто числа 1, 2, 3, 4, ... n. Учений показав, що для великих вибіркових сукупностей ефективність оцінок параметрів моделі становитиме майже 96 % від ефективності оцінок 1МНК, а для сукупностей $n = 20$ ефективність оцінок згідно з оператором Дарбіна становить близько 86 %.

Модель Дарбіна не має вільного члена. Щоб застосувати цей метод для оцінювання всіх параметрів моделі, зокрема й для вільного члена, матриці змінних Z' і X' подамо у вигляді:

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

і

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \end{pmatrix},$$

де x_i характеризують відхилення від середнього значення $\bar{x}$, які впорядковуються за зростанням.

Оператор оцінювання

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} i y_i}{\sum_{i=1}^{n} i x_i}, \tag{9.20}$$

де i — порядковий номер, причому $\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}$. Коваріація оцінок параметрів запишеться:

$$asy\mathrm{cov}(\hat{a}) = \sigma_u^2 (Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}. \tag{9.21}$$

Метод Дарбіна можна застосовувати і тоді, коли модель містить декілька пояснювальних змінних. У такому разі спочатку знаходяться відхилення значень кожної змінної од відповідного середнього значення. Потім ці відхилення упорядковуються за зростанням і кожному з них присвоюється порядковий номер.

9.4. Помилки вимірювання змінних

Раніше ми припускали, що змінні вимірюються без помилок, і лише відхилення u — це єдина припустима форма помилок. Останнє було пов'язане з наміром врахувати вплив різних пояснювальних змінних, які не входять до економетричної моделі в явному вигляді.

Проте досить часто під час вимірювання змінних, які належать до економетричної моделі, припускаються помилок. Тоді постає запитання, як наявність помилок змінних може вплинути на оцінку параметрів моделі?

Щоб відповісти на це запитання, розглянемо матрицю незалежних змінних X, елементи якої містять помилки.

Нехай

$$X = \tilde{X} + V, \tag{9.22}$$

де $\tilde{X}$ — матриця розміром $n \times m$ справжніх (фактичних) значень, а V — матриця помилок вимірювання.

Тоді модель має вигляд

$$Y = \tilde{X}a + u,$$

або з (9.22) $\tilde{X} = X - V$, тоді

$$Y = XA + (u - VA). \tag{9.23}$$

Оцінка параметрів для цієї моделі 1МНК матиме вигляд

$$\hat{A} = A + (X'X)^{-1} X'(u - VA),$$

де $(X'X)^{-1} X'(u - VA)$ — величина зміщення оцінки.

Обґрунтованість цієї оцінки залежить від того, чи дорівнює границя за ймовірністю нулю

$$p\lim_{n \to \infty}\left[\frac{1}{n} X'(u - VA)\right].$$

Запишемо

$$p\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}X'(u-VA)\right]=p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'u\right)-p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'V\right)A.$$

Якщо «справжні» значення змінних X і їх помилки не корелюють із залишками, то

$$p\lim\left(\frac{1}{n}X'u\right)=0. \qquad (9.24)$$

Але насправді границя за ймовірністю (9.24) дорівнює:

$$p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'V\right)=p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'V\right)+p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}VV'\right).$$

Отже, навіть тоді, коли помилки вимірювання змінних X не корелюють зі справжніми значеннями цих змінних, і перший доданок у правій частині дорівнює нулю, другий доданок, який характеризує матрицю коваріацій помилок, здебільшого не дорівнює нулю. А це означає, що за наявності помилок вимірювання змінних оцінка параметрів моделей 1МНК є необґрунтованою і асимптотичне зміщення визначається формулою

$$p\lim_{n\to\infty}(\hat{A}-A)=-p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\cdot p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}V'V\right)A.$$

Наприклад, якщо ми оцінюємо параметри моделі з двома змінними 1МНК, то зміщення параметра a:

$$p\lim_{n\to\infty}(\hat{a}-a)=-\frac{\sigma_v^2 a}{\sigma_{\tilde{x}}^2+\sigma_v^2},$$

або

$$p\lim_{n\to\infty}\hat{a}=-\frac{a}{1+\dfrac{\sigma_v^2}{\sigma_{\tilde{x}}^2}}, \qquad (9.25)$$

де σ_v^2 — дисперсія помилки вимірювання X, а $\sigma_{\tilde{x}}^2$ — дисперсія справжніх значень X, причому припускаємо, що помилки вимірювання не корелюють із цими значеннями X.

Рівняння (9.25) показує, що оцінка справжнього значення параметра моделі занижена. Наприклад, хоч би як ми збільшували сукупність спостережень, коли $\sigma_v^2 = 10\ \%$ від $\sigma_{\tilde{x}}^2$, то оцінка параметра $\hat{a}$ відрізнятиметься від справжнього значення також майже на 10 %, тобто за наявності помилок вимірювання змінних збільшення сукупності спостережень не компенсує зміщення.

Тому при оцінюванні параметрів економетричної моделі, коли трапляються помилки вимірювання змінних, доцільно застосувати метод інструментальних змінних, який ми розглянули раніше.

✓***Приклад 9.1.*** Побудувати економетричну модель методом інструментальних змінних, яка характеризує залежність між зайнятістю населення і виробництвом продукції, скориставшись даними, наведеними в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Виробництво, гр. од.	130	128	194	157	195	205	142	225	168	133
Зайнятість, чол.	114	96	134	112	113	144	105	150	109	110

Розв'язання

1. Ідентифікація змінних і специфікація моделі.

Нехай x_t — виробництво продукції, незалежна (пояснювальна) змінна, y_t — зайнятість населення, залежна змінна.

Економетрична модель має вигляд

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t;$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t.$$

2. Оцінка параметрів моделі.

Оскільки вихідні дані можуть мати помилки вимірювання, то для оцінювання параметрів моделі застосуємо метод інструментальних змінних.

2.1. Оператор оцінювання за методом інструментальних змінних

$$\hat{A} = (Z'X)^{-1} Z'Y,$$

де Z — матриця інструментальних змінних; X — матриця пояснюючих змінних.

2.2. Визначимо матрицю інструментальних змінних за методом Дарбіна. Для цього впорядкуємо значення вектора X від меншого до більшого і надамо кожному елементу цього вектора порядковий номер. Запишемо ці дані в табл. 9.2.

Таблиця 9.2

Y	X	Інструментальна змінна Z	$\hat{Y}$	$\hat{u}$	$\hat{u}^2$
96	128	1	91,6398	4,360	19,01
114	130	2	93,0030	20,997	440,87
110	133	3	95,0478	14,95	223,5
105	142	4	101,1822	3,81	14,51
112	157	5	111,4062	0,5938	0,352
109	168	6	118,9000	–9,9	98,01
134	194	7	136,6254	–2,625	6,89
113	195	8	137,3000	–24,3	590,49
144	205	9	144,1230	–0,123	0,015
150	225	10	157,7550	–7,755	60,14

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Оскільки економетрична модель має вільний член, перший рядок матриці інструментальних змінних складається з одиниць, а другий є інструментальною змінною замість вектора пояснювальної змінної X.

Матриця X має такий вигляд: $$X = \begin{pmatrix} 1 & 128 \\ 1 & 130 \\ 1 & 133 \\ 1 & 142 \\ 1 & 157 \\ 1 & 168 \\ 1 & 194 \\ 1 & 195 \\ 1 & 205 \\ 1 & 225 \end{pmatrix}.$$

2.3. Знайдемо оцінки параметрів моделі

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{10} i_t y_t}{\sum_{t=1}^{10} i_t x_t} = \frac{6926}{10161} = 0,6816,$$

де i_t — інструментальна змінна, порядковий номер,

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x} = 118,7 - 0,6816 \cdot 167,8 = 4,395.$$

Звідси економетрична модель запишеться так:

$$\hat{y}_t = 4,395 + 0,681 x_t.$$

2.4. Підставимо значення змінної x_t в модель і знайдемо розрахункові значення залежної змінної — зайнятості населення ($\hat{y}_t$). Ці значення і відхилення їх від фактичних наведено в табл. 9.2.

3. Визначимо коваріаційну матрицю оцінок параметрів моделі:

$$asy\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}.$$

3.1. $\sigma_u^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{10} \hat{u}_t^2}{n-m} = \dfrac{1453,787}{8} = 181,73.$

3.2. $Z'X = \begin{pmatrix} 10 & 1677 \\ 55 & 10161 \end{pmatrix}$; $(Z'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,08384 & -0,17888 \\ -0,0058666 & 0,001060 \end{pmatrix}$.

3.3. $Z'Z = \begin{pmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{pmatrix}$.

3.4. $X'Z = \begin{pmatrix} 10 & 55 \\ 1677 & 10161 \end{pmatrix}$; $(X'Z)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,08384 & -0,0058666 \\ -0,17888 & 0,001066 \end{pmatrix}$.

3.5. $(Z'X)^{-1}(Z'Z) = \begin{pmatrix} 1 & -9,26 \\ 0,000036 & 0,0877 \end{pmatrix}$.

3.6. $(Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,74 & -0,004 \\ -0,0157 & 0,00009 \end{pmatrix}$.

3.7. $asy\operatorname{cov}(\hat{A}) = 181,73 \begin{pmatrix} 2,74 & -0,004 \\ -0,0157 & 0,00009 \end{pmatrix}$.

4. Знайдемо стандартні похибки оцінок параметрів моделі

$$S_{\hat{a}_0} = \sqrt{181{,}73 \cdot 2{,}74} = \sqrt{497{,}9402} \approx 22{,}3;$$

$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{181{,}73 \cdot 0{,}00009} = \sqrt{0{,}0163557} \approx 0{,}13.$$

Оскільки стандартна похибка оцінки параметра $\hat{a}_1$ становить близько 17 % до її абсолютного значення, а стандартна похибка вільного члена перевищує його абсолютну величину в кілька разів, то можна стверджувати про наявність зміщення цих оцінок параметрів моделі та їх неефективність.

9.5. Економетрична модель експорту продукції із стохастичними пояснювальними змінними

Розглянемо динамічну економетричну модель експорту продукції, яка в загальному вигляді запишеться так:

$$E_t = f\left(E_{t-1}, V_t, I_{u_t}, u_t\right),$$

де E_t — експорт продукції в період t;

E_{t-1} — експорт продукції в період $t-1$;

V_t — обсяг виробництва продукції в період t;

I_{u_t} — індекс співвідношення цін на продукцію на зовнішньому та внутрішньому ринках;

u_t — стохастична складова, яка характеризує вплив на експорт продукції випадкових чинників у період t.

Специфікуємо цю модель у лінійній формі:

$$E_t = a_0 + a_1 E_{t-1} + a_2 V_t + a_3 I_{u_t} + u_t. \tag{9.26}$$

Пояснювальні змінні даної моделі є стохастичними, бо експорт продукції в період t (E_t) залежить від стохастичної складової u_t, а експорт продукції в період $t-1$ (E_{t-1}) залежить від стохастичної складової u_{t-1}. Звідси, оскільки E_t залежить від E_{t-1}, то E_{t-1} залежить від u_t.

Цей взаємозв'язок вимагає розглядати всю матрицю пояснювальних змінних як стохастичну і спонукає висунути гіпотезу щодо залежності матриці пояснювальних змінних і залишків. Тому для оцінювання параметрів даної моделі потрібно застосувати метод інструментальних змінних або двокроковий метод найменших квадратів, який буде розглянуто пізніше.

Побудуємо цю економетричну модель, аналізуючи експорт цукру з України в Росію на основі статистичної інформації за 12 років (з 1990 по 2001 р. включно).

$$\hat{E}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 E_{t-1} + \hat{a}_2 V_t + \hat{a}_3 I_{u_t}.$$

У даній моделі замість лагової залежної змінної E_{t-1} використаємо інструментальну змінну Z_t.

Для визначення цієї інструментальної змінної знайдемо відхилення змінної E_{t-1} від своєї середньої, а потім проранжуємо величину відхилень від меншого до більшого значення. Пронумеруємо ранжовані значення відхилень змінної E_{t-1} і цей порядковий номер використаємо в економетричній моделі експорту цукру як інструментальну змінну (метод Дарбіна).

Запишемо економічну інформацію в табл. 9.3.

Таблиця 9.3

Роки	Обсяг експорту цукру (млн т)	Обсяг виробництва (млн т)	Індекс співвідношення цін на цукор
1	3200	4900	0,122
2	3500	4200	0,675
3	2500	3500	1,205
4	2475	3600	1,274
5	2633	3900	0,851
6	1800	3400	1,052
7	1700	3900	1,231
8	1054	3300	1,18
9	740	2000	1,201
10	157	1900	1,131
11	69	1600	1,401
12	–400	1540	1,425

Ідентифікуємо змінні моделі:

E_t — обсяг експорту цукру в період t, залежна змінна;

E_{t-1} — обсяг експорту цукру в період $t-1$, пояснювальна змінна;

V_t — обсяг виробництва цукру в період t, пояснювальна змінна;

I_{u_t} — співвідношення цін на цукор на російському та українському ринках.

Сукупність спостережень зменшиться на одиницю, бо за умови лагової змінної E_{t-1} експорт в період t потрібно подати без першого спостереження, а експорт у період $t-1$ — без останнього. Звідси обсяг виробництва цукру в період t та індекс цін потрібно розглядати без першого спостереження.

Запишемо ці змінні в табл. 9.4.

Таблиця 9.4

Рік	E_t	E_{t-1}	V_t	I_{u_t}	Рік	E_t	E_{t-1}	V_t	I_{u_t}
2	3500	3200	4200	0,675	8	1054	1700	3300	1,18
3	2500	3500	3500	1,205	9	740	1054	2000	1,202
4	2475	2500	3600	1,274	10	157	740	1900	1,131
5	2633	2475	3900	0,851	11	69	157	1600	1,401
6	1800	2633	3400	1,052	12	400	69	1540	1,425
7	1700	1800	3900	1,231					

Замінимо лагову пояснювальну змінну E_{t-1} інструментальною Z_t яка, як уже було сказано, визначена як порядковий номер відхилень E_{t-1} від своєї середньої, що ранжовані від меншого до більшого значення.

Таблиця 9.5

Рік	E_t	Z_t	V_t	I_{u_t}	Рік	E_t	Z_t	V_t	I_{u_t}
2	400	1	1540	1,425	8	2633	7	3900	0,851
3	69	2	1600	1,401	9	2475	8	3600	1,274
4	157	3	1900	1,131	10	1800	9	3400	1,052
5	740	4	2000	1,202	11	3500	10	4200	0,675
6	1054	5	3300	1,18	12	2500	11	3500	1,205
7	1700	6	3900	1,234					

Оцінимо параметри моделі експорту методом інструментальних змінних, матричний оператор якого запишеться так:

$$\hat{A} = (Z'X)^{-1} Z'Y.$$

У відповідності з цим оператором сформуємо матриці X, Z:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 69 & 1540 & 1{,}425 \\ 1 & 157 & 1600 & 1{,}401 \\ 1 & 740 & 1900 & 1{,}131 \\ 1 & 1054 & 2000 & 1{,}202 \\ 1 & 1700 & 3300 & 1{,}18 \\ 1 & 1800 & 3900 & 1{,}231 \\ 1 & 2475 & 3900 & 0{,}851 \\ 1 & 2500 & 3600 & 1{,}274 \\ 1 & 2633 & 3400 & 1{,}052 \\ 1 & 3200 & 4200 & 0{,}675 \\ 1 & 3500 & 3500 & 1{,}205 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1540 & 1{,}425 \\ 1 & 2 & 1600 & 1{,}401 \\ 1 & 3 & 1900 & 1{,}131 \\ 1 & 4 & 2000 & 1{,}202 \\ 1 & 5 & 3300 & 1{,}18 \\ 1 & 6 & 3900 & 1{,}231 \\ 1 & 7 & 3900 & 0{,}851 \\ 1 & 8 & 3600 & 1{,}274 \\ 1 & 9 & 3400 & 1{,}052 \\ 1 & 10 & 4200 & 0{,}675 \\ 1 & 11 & 3500 & 1{,}205 \end{pmatrix}$$

Виконаємо розрахунки за оператором:

$$Z'X = \begin{pmatrix} 11 & 19828 & 32840 & 12{,}627 \\ 66 & 157641 & 225540 & 71{,}336 \\ 32840 & 69796160 & 108261600 & 36218{,}5 \\ 12{,}627 & 21082{,}57 & 36218{,}5 & 14{,}98678 \end{pmatrix};$$

$$\left(Z'X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 9{,}970418 & 0{,}053099 & -0{,}001253917 & -5{,}62291 \\ 6{,}83E-05 & 0{,}000112 & -2{,}93955E-07 & 0{,}000121 \\ -0{,}0118 & -0{,}000107 & 4{,}56021E-07 & 0{,}000404 \\ -5{,}645097 & 0{,}057891 & 0{,}00367933 & 3{,}65822 \end{pmatrix};$$

$$Z'Y = \begin{pmatrix} 17028 \\ 136370 \\ 61361600 \\ 17732{,}57 \end{pmatrix}; \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 366{,}3634 \\ 0{,}506295 \\ 0{,}391374 \\ -783{,}5237 \end{pmatrix}.$$

Звідси економетрична модель експорту цукру запишеться:

$$E_t = 366{,}3634 + 0{,}5063E_{t-1} + 0{,}3914V_t - 783{,}5237I_{u_t}.$$

Коваріаційна матриця оцінок параметрів цієї моделі дорівнює:

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1};$$

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = \begin{pmatrix} 1884046 & 33{,}65621739 & -241{,}8194 & -1050330 \\ 33{,}65622 & 0{,}070794899 & -0{,}068126 & 36{,}69368 \\ -241{,}8194 & -0{,}068126395 & 0{,}098105 & 62{,}48962 \\ -1050330 & 36{,}69368367 & 62{,}48962 & 694852{,}8 \end{pmatrix},$$

а стандартні похибки оцінок параметрів моделі запишуться:

$$S\hat{a}_j = \begin{pmatrix} 1372{,}605 \\ 0{,}266073 \\ 0{,}313217 \\ 833{,}5783 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнт детермінації цієї моделі дорівнює: $R^2 = 0{,}90$, F-критерій дорівнює: $F = 21{,}05$. Звідси за приведеними кількісними характеристиками можна зробити висновок про статистичну значущість економетричної моделі експорту цукру в цілому. Але серед оцінок параметрів моделі лише оцінка $\hat{a}_1$ є статистично значущою, про що свідчить t-критерій.

Таку ситуацію можна пояснити насамперед малою сукупністю спостережень, наявністю мультиколінеарності між змінними E_{t-1} і V_t $\left(r_{E_{t-1}V_t} = 0{,}89\right)$.

Не останню роль відіграє в даному випадку і експортна та імпортна політика України і Росії.

Наведені розрахунки дають можливість показати використання методу інструментальних змінних у випадку, коли серед пояснювальних змінних є лагове значення залежної змінної.

9.6. Стислі висновки

1. В економетричній моделі $Y = XA + u$ пояснювальні змінні X можуть бути як детермінованими, що набувають своїх значень з деякої множини фіксованих чисел, так і стохастичними, які набувають своїх значень з певним рівнем імовірності.

2. Якщо пояснювальні змінні X є стохастичними і функція розподілу їх жодним чином не пов'язана з параметрами A і σ_u^2 та змінні X розподілені незалежно від залишків u, то основна частина висновків про перевірку значущості моделі та її параметрів, побудову довірчих інтервалів справджуватиметься й тоді, коли X — стохастичні величини.

3. У загальній лінійній моделі зі стохастичними пояснювальними змінними асимптотичні властивості оцінок 1МНК будуть характеризуватись такими співвідношеннями:

а) $M(u/X) = M(u) = 0$;

б) $M(Y/X) = XA + M(X) = XA$;

в) $M(uu'/X) = \sigma_u^2 E$.

До того ж висуваються такі припущення:

а) $p\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}u'u\right) = \sigma_u^2$;

б) $p\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'X\right) = \sum_{xx}$;

в) $p\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}X'u = 0$.

У цьому випадку 1МНК забезпечує обґрунтовану оцінку асимптотичних дисперсій і коваріацій помилок, коли в моделі пояснювальні змінні є стохастичними.

4. Якщо не виконується припущення, що границя за ймовірністю коваріацій між змінними X і залишками u не дорівнює нулю, тобто $p\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'u\right) \neq 0$ і оцінки 1МНК для кінцевих вибіркових сукупностей можуть мати зміщення.

5. Кореляція між змінними X і залишками u може виникати з різних причин; основними з них є три:

1) помилки вимірювання пояснювальних змінних;

2) наявність у моделях лагових змінних;

3) побудова економетричної моделі на основі системи одночасових структурних рівнянь.

6. У разі існування кореляції між пояснювальними змінними та залишками для оцінювання параметрів моделі можна застосувати альтернативний метод, який називається методом інструментальних змінних.

Оператор оцінювання вектора $\hat{a}$ за допомогою інструментальних змінних запишеться так:

$$\hat{A} = (Z'X)^{-1}Z'Y.$$

Цей вектор забезпечує визначення обґрунтованої оцінки параметрів моделі. Асимптотична матриця коваріацій:

$$asy\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}.$$

7. Застосування методу інструментальних змінних пов'язане зі знаходженням змінних, які можна використовувати як інструментальні. Вимоги до інструментальних змінних коротко можна сформулювати так:

1) інструментальні змінні Z мають бути тісно пов'язані з X;

2) Z не пов'язані із залишками u.

8. В економетричних дослідженнях пропонуються три методи визначення інструментальних змінних, за якими знайдені оператори оцінювання параметрів моделі:

1) оператор оцінювання Вальда;

2) оператор оцінювання Бартлета;

3) оператор оцінювання Дарбіна.

9. Оператори оцінювання Вальда і Бартлета застосовуються тоді, коли економетрична модель є парною, тобто має вигляд $y_t = a_0 + a_1x_t + u_t$, а оператор оцінювання Дарбіна може бути застосований і тоді, коли економетрична модель має більш як одну пояснювальну змінну.

10. В операторі оцінювання Вальда інструментальні змінні визначаються так:

1) знаходиться відхилення кожного елемента пояснюючої змінної від медіани;

2) величини, що мають знак «плюс», замінюються одиницями, а величини, що мають знак «мінус» — одиницями з цим знаком.

Використовуючи ці інструментальні змінні в операторі $\hat{A} = (Z'X)^{-1}Z'Y$, дістаємо оцінки Вальда:

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}; \qquad \hat{a}_0 = \bar{y} - a_1\bar{x},$$

де $\bar{x}_2$ і $\bar{x}_1$ — середні значення відхилень пояснюючої змінної відповідно вгору і вниз від медіани, а $\bar{y}_2$ і $\bar{y}_1$ — середні значення залежної змінної, які відповідають середнім $\bar{x}_2$ і $\bar{x}_1$.

11. В операторі оцінювання Бартлета інструментальні змінні визначаються, як і в операторі Вальда. Але Бартлет запропонував розбити упорядковані значення змінної X на три групи однакового розміру і вилучити середню групу спостережень з розрахунку. Оператор оцінювання параметрів Бартлета:

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{y}_3 - \bar{y}_1}{\bar{x}_3 - \bar{x}_1}, \qquad \hat{a}_0 = \bar{y} - a_1\bar{x},$$

де $\bar{y}_3, \bar{y}_1$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_1$ — середні значення змінних для спостережень третьої і першої груп.

12. В операторі оцінювання Дарбіна інструментальні змінні визначаються так:

1) значення вектора X упорядковуються в порядку зростання;

2) упорядковані значення X замінюються порядковим номером (рангом), тобто числами 1, 2, 3, 4, ... , n.

Оператор оцінювання має вигляд

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} i_t y_t}{\sum_{t=1}^{n} i_t x_t}; \quad \hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x},$$

де i_t — порядковий номер (інструментальна змінна).

Якщо оператор оцінювання Дарбіна застосовується тоді, коли економетрична модель має кілька пояснювальних змінних, то спочатку відшукуються відхилення значень кожної змінної від її середнього значення, потім вони упорядковуються за зростанням і кожному присвоюється порядковий номер.

Часто під час вимірювання змінних, які входять до економетричної моделі, припускаються помилок. У такому разі оцінка параметрів 1МНК матиме зміщення, яке можна записати так:

$$p\lim_{n \to \infty}(\hat{a} - a) = -\frac{\sigma_v^2 a}{\sigma_{\tilde{x}}^2 + \sigma_v^2},$$

де $\sigma_{\tilde{x}}^2$ — дисперсія справжніх значень X; σ_v^2 — дисперсія помилки вимірювання X.

Цього зміщення можна уникнути, якщо для оцінювання параметрів моделі скористатися методом інструментальних змінних.

9.7. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Що таке детерміновані і стохастичні пояснювальні змінні?

2. Які властивості мають оцінки параметрів моделі в разі стохастичних пояснювальних змінних моделі?

3. Назвіть асимптотичні властивості оцінок параметрів моделі. Дайте основні визначення.

4. Покажіть обґрунтованість оцінок параметрів моделі при стохастичних пояснвальних змінних.

5. Коли оцінка параметрів моделі 1МНК стає необґрунтованою?

6. Якщо пояснювальні змінні X корелюють із залишками u, то який метод оцінювання параметрів моделі доцільно застосувати?

7. Запишіть оператор оцінювання за методом інструментальних змінних (МІЗ).

8. Які вимоги ставляться до інструментальних змінних? Які властивості має матриця Z?

9. Запишіть асимптотичну матрицю коваріацій параметрів на основі МІЗ.

10. Визначте оператор оцінювання Вальда.

11. Назвіть особливості оцінювання методом Бартлета.

12. Дайте характеристику оператору оцінювання Дарбіна.

13. Визначте оцінку параметрів моделі $\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$, використовуючи оператор оцінювання Вальда для таких вихідних даних:

Y	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,9	1,9	2,0	1,9	2,0
X	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5

14. Використовуючи дані завдання 13, визначте параметри моделі за оператором оцінювання Бартлета. Порівняйте знайдені оцінки параметрів з оцінками для завдання 13.

15. Використовуючи дані завдання 13, визначте оцінку параметрів моделі за методом Дарбіна. Порівняйте знайдені оцінки з оцінками завдань 13 і 14.

16. Обчисліть середньоквадратичну похибку оцінок параметрів моделі, знайдених у завданнях 13, 14, 15. На підставі середньоквадратичної похибки зробіть висновок про рівень ефективності оцінок, обчислених за різними алгоритмами МІЗ.

17. Чи буде обґрунтованою оцінка параметрів моделі, коли змінні X мають помилки вимірювання? Відповідь обґрунтуйте.

18. Як визначається величина зміщення параметрів за наявності помилки вимірювання змінних?

9.8. Основні терміни і поняття

Метод інструментальних змінних • Стохастичні пояснювальні змінні • Асимптотичне математичне сподівання • Асимптотична дисперсія • Асимптотична матриця коваріацій параметрів • Лагова змінна • Помилки вимірювання пояснювальних змінних • Оператор оцінювання Вальда • Оцінювання методом Бартлета • Інструментальна змінна • Оператор оцінювання Дарбіна

Розділ 10
МОДЕЛІ РОЗПОДІЛЕНОГО ЛАГУ

10.1. Поняття лагу і лагових змінних

Для багатьох економічних процесів типовим є те, що ефект від впливу деякого фактора на показник, який характеризує процес, виявляється не одразу, а поступово, через деякий період часу. Таке явище називається ***лагом*** (***запізненням***).

Потреба враховувати лаг під час кількісного вимірювання взаємозв'язку між економічними показниками постає дуже часто. Наприклад, у динамічних моделях необхідно враховувати лаг при визначенні зв'язку між обсягом продукції і капітальними вкладеннями, або частину цього лагу — будівельний.

Кількісне визначення взаємозв'язку між капітальними вкладеннями і введенням основних фондів, між витратами виробничих ресурсів і обсягом виробництва, між доходами і витратами, тощо має базуватися на врахуванні впливу запізнення, або лагу. При цьому вплив деяких пояснювальних змінних на залежну може проявлятися не лише через певний період часу, а й протягом певного часу, тобто лаг може складатися з кількох часових періодів. У такому разі маємо справу з економетричною моделлю розподіленого лагу.

Нехай економетрична модель розподіленого лагу визначається так:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-\tau} + u_t, \tag{10.1}$$

де a_j — параметри моделі при лагових змінних; $x_{t-\tau}$ — пояснювальна лагова змінна; τ — період зрушення; u_t — залишки, що розподілені нормально, тобто мають нульове математичне сподівання і сталу дисперсію.

Означення 10.1. *Модель* (10.1) *називається* ***загальною моделлю нескінченного розподіленого лагу****, якщо для неї справджуються такі умови*:

1) $a_k a_j \geq 0$, для будь-яких k, j; (10.2)

2) $a_j \geq 0$, j = 1, 2, 3...; k = 1, 2, 3...; (10.3)

3) $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = w$, де w — певне число; (10.4)

4) $w_j = \frac{a_j}{w}$; (10.5)

5) $\sum_{j=0}^{\infty} w_j = 1$, $0 \le w_j \le 1$. (10.6)

Означення 10.2. *Коефіцієнти* a_j, $j = 0,1,2 \ldots$, *називаються* ***коефіцієнтами лагу***, *а послідовність* $a = \{a_j : j = 0,1,2,\ldots\}$ *— структурою лагу.*

Означення 10.3. *Якщо виконуються умови* (10.3) — (10.6), *то величини* w_j, $j = 0,1,2,\ldots$, *називаються* ***нормованими коефіцієнтами лагу***, *а послідовність* $w = \left\{ w_j : j = 0,1,2,\ldots, \sum_{j=0}^{\infty} w_j = 1 \right\}$ *—* ***нормованою структурою лагу для моделі*** (10.1).

Моделі розподілених лагів можуть порівняно добре описувати процеси лише в тому разі, коли забезпечена відносна стабільність умов, в яких ці процеси реалізуються. Може йтися про стабільність відповідних індексів цін, процентних ставок за кредити, норми амортизації, термінів будівництва, обсягів та структури ресурсів. Така стабільність далеко не завжди спостерігається для порівняно довгих проміжків часу, протягом яких формується сукупність спостережень. Усе це призводить до побудови ***узагальненої моделі розподіленого лагу***, яка містить не лише лагові змінні, а й інші фактори — пояснювальні змінні $z_1, z_2, \ldots, z_m$, що характеризують поточні умови функціонування економічних систем у період t.

Узагальнена модель розподіленого лагу задаватиметься рівнянням

$$y_t = \sum_{\tau \ge 0} a_\tau x_{t-\tau} + \sum_{s=1}^{m} b_s z_{t,s} + u_t, \tag{10.7}$$

де $z_{t,s}$ — s-та пояснювальна змінна в період t.

Труднощі оцінювання параметрів такої моделі пов'язані з необхідністю враховувати обмеження на параметри a_τ.

10.2. Взаємна кореляційна функція

Теоретично побудову моделі з розподіленими лагами можна узагальнити на будь-яку кількість пояснювальних змінних $x_{t-\tau}$. Але практична реалізація такої моделі часто стикається з непереборними труднощами, що зумовлені великою кількістю факторів, порівняно короткими часовими рядами і складністю їх внутрішньої структури.

Як правило, до моделі входять такі змінні $x_{t-\tau}$, для яких лаги обґрунтовані теоретично і перевірені емпірично. Для обґрунтування лагу чи лагів доцільно використовувати ***взаємну кореляційну функцію***. Ця функція характеризує тісноту зв'язку кожного елемента вектора залежної змінної y_t з елементом вектора пояснювальної змінної x_t, зсунутим один відносно одного на часовий лаг τ.

$$r_{(\tau)} = \frac{(n-\tau)\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_t x_{t-\tau} - \sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum\limits_{t=1}^{n-\tau} x_{t-\tau}}{\sqrt{\left[(n-\tau)\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - (\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_t)^2\right]\left[(n-\tau)\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} x_{t-\tau}^2 - (\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} x_{t-\tau})^2\right]}}. \quad (10.8)$$

Для різних значень τ на основі взаємної кореляційної функції можна дістати $\boldsymbol{n+1}$ значення $r_{(\tau)}$. Якщо $\tau = 0$, то маємо парний коефіцієнт кореляції. Значення $r_{(\tau)}$ містяться на множині $r_{(t)}]-1,1[$. Найбільше значення $r_{(t)}$ за модулем (найближче до одиниці) визначає зрушення, або часовий лаг. Якщо серед множини значень $r_{(\tau)}$ є кілька, величини яких наближаються до одиниці, то це означає, що запізнення впливу змінної x_t відбувається протягом певного проміжку часу і в результаті маємо кілька часових лагів для двох взаємопов'язаних часових рядів. Розрахувавши часові лаги для визначення взаємозв'язку між економічними показниками, можна побудувати економетричну модель розподіленого лагу.

✓***Приклад 10.1.*** На основі двох взаємозв'язаних часових рядів, які характеризують чисту продукцію та капітальні вкладення Республіки Сирії за 20 років, знайдемо $r_{(\tau)}$, використовуючи (10.8). Вихідні дані наведені в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

(У порівнянних цінах 1985 р. млн сирійських лір)

Рік	Капітальні вкладення	Чиста продукція	Рік	Капітальні вкладення	Чиста продукція
1970	3857	24334	1980	17006	72165
1971	4686	28678	1981	17352	78743
1972	5515	33021	1982	17838	80381
1973	5209	32432	1983	18878	82204
1974	7522	40325	1984	19090	77833
1975	10390	49334	1985	20016	81413
1976	13678	54717	1986	17736	77484
1977	15976	53818	1987	11951	75443
1978	13880	55968	1988	11469	85038
1979	13949	61517	1989	9068	75809

Значення $r_{(\tau)}$ при різних значеннях τ наведено в табл. 10.2.

Таблиця 10.2

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_{(\tau)}$	0,89	0,86	0,89	0,92	0,92	0,92	0,85	0,75	0,64	0,4	0,55	–0,06	–0,2

Величина τ є ***зрушенням***. Зрушення, якому відповідає найбільший коефіцієнт взаємної кореляції, називається ***часовим запізненням***, або ***часовим лагом***. У нашому прикладі найбільший коефіцієнт взаємної кореляції $r_{(\tau)} = 0{,}92$. Він відповідає трьом значенням $\tau = \{3,4,5\}$. Звідси випливає, що найбільший вплив капітальних вкладень на обсяг чистої продукції треба очікувати на третьому, четвертому і п'ятому роках.

Графік кореляційної функції називається ***корелограмою***.

Корелограма взаємної кореляційної функції, що побудована для заданих часових рядів, зображена на рис. 10.1.

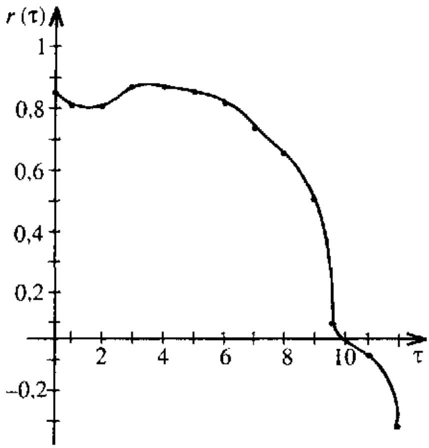


Рис. 10.1. Корелограма функції

З графіка, зображеного на рис. 10.1, бачимо що найбільше значення взаємна кореляційна функція набуває на третьому, четвертому і п'ятому зрушеннях. Між капітальними вкладеннями і чистою продукцією існує часовий лаг в три, чотири і п'ять років. На даному проміжку часу слід очікувати найбільшого приросту чистої продукції від початку інвестування.

Динамічна модель розподіленого лагу в такому разі запишеться так:

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-3} + a_2 x_{t-4} + a_3 x_{t-5} + u_t, \qquad (10.9)$$

де a_j $(j = \overline{0,3})$ — вагові коефіцієнти лагових змінних; y_t — чиста продукція в період t; $x_{t-\tau}$ $(\tau = 3,4,5)$ — капітальні вкладення в період $t - \tau$.

10.3. Лаги залежних і незалежних змінних

10.3.1. Лаги незалежних змінних. Наявність мультиколінеарності між лаговими змінними ускладнює побудову економетричної моделі з лаговими змінними.

Один із способів звільнитися від мультиколінеарності — це ввести такі коефіцієнти при лагових змінних, які мали б однаковий знак і для них можна було знайти суму. З урахуванням умов

(10.3) — (10.6) модель з розподіленим лагом набере такого вигляду:

$$y_t = a\sum_{j=0}^{\infty} w_j x_{t-\tau} + u_t. \qquad (10.10)$$

Л. Койк запропонував вибрати для запису вагових коефіцієнтів форму спадної геометричної прогресії

$$w_j = (1-\lambda)\lambda_j, \qquad (10.11)$$

де $0 \le \lambda \le 1$.

Звідси

$$y_t = w(1-\lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}). \qquad (10.12)$$

Якщо через D позначити оператор зрушення такий, що $Dx_t = x_{t-1}$, $D^2x_t = x_{t-2}$ і т. д., то вираз (10.11) можна записати так:

$$w_0 + w_1D + w_2D^2 + ... = (1-\lambda)(1+\lambda D + \lambda^2 D^2 + ...) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda D}.$$

З урахуванням цього модель (10.12) матиме вигляд:

$$y_t = \frac{a(1-\lambda)}{1-\lambda D} x_t + u_t.$$

Це припущення, що його зробив Койк, приводить до значних спрощень співвідношення (10.11). Адже замість оцінки цілого ряду параметрів моделі a_j достатньо дати оцінки лише двох параметрів w і λ у рівнянні, де y_t розглядається як функція x_t і y_{t-1}.

Діставши оцінку параметра λ і скориставшись співвідношенням (10.11), можна обчислити всі вагові коефіцієнти. Середнє значення розподілу λ дорівнює $\frac{\lambda}{1-\lambda}$, тому для геометричного розподілу середній лаг

$$\bar{\tau} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Входження до формули (10.12) лагового значення змінної Y може забезпечити досить добру апроксимацію моделі.

Зауважимо, що не завжди лаги розподілятимуться обов'язково за законом Койка, який забезпечує найближчому значенню X найбільшу вагу, а всім наступним — постійно спадні ваги. Якщо можна припустити, що це не так, то тоді лишається кілька перших вагових коефіцієнтів вільними, а для решти використовується закон розподілу Койка.

Наприклад, можна записати

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \lambda a_2 x_{t-3} + \lambda^2 a_2 x_{t-4} + \ldots + u_t = \\ = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + \frac{a_2}{1-\lambda D} x_{t-2} + u_t, \qquad (10.13)$$

де перші два коефіцієнти лишаються вільними, а починаючи з a_2 вони спадають геометрично. Використаємо оператор зрушення D для скороченого запису моделі (10.13).

Рівняння (10.13) можна подати у вигляді

$$y_t = a_0 x_t + (a_1 - \lambda a_0) x_{t-1} + (a_2 - \lambda a_1) x_{t-2} + a_2 x_{t-2} + \\ + \lambda a_2 x_{t-3} + \lambda^2 a_2 x_{t-4} + \ldots + u_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + \\ + \frac{a_2}{1-\lambda D} x_{t-2} + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}). \qquad (10.14)$$

Якщо модель має дві пояснювальні змінні, скажімо, X і Z, то розподілені лаги Койка можуть бути використані для кожної з них. Найпростіше припустити, що для обох змінних вибирається однакове значення λ.

Тоді модель розподіленого лагу

$$y_t = a(1-\lambda)x_t + b(1-\lambda)z_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}).$$

Якщо взяти параметри λ різними для різних пояснювальних змінних, то до моделі треба ввести змінні x_t, z_t, y_t з оператором зрушення $Dx_t = x_{t-1}$, $D^2 x_t = x_{t-2}$, $Dz_t = z_{t-1}$, $D^2 z_t = z_{t-2}$, $Dy_t = y_{t-1}$, $D^2 y_t = y_{t-2}$.

Запишемо модель, коли різні пояснювальні змінні включаються з різними параметрами λ

$$y_t = a(1-\lambda_1)x_t - a\lambda_2(1-\lambda_1)x_{t-1} + b(1-\lambda_2)z_t - \\ - b\lambda_1(1-\lambda_2)z_{t-1} + (\lambda_1 + \lambda_2)y_{t-1} - \lambda_1 \cdot \lambda_2 y_{t-2} + \\ + [u_t - (\lambda_1 + \lambda_2)u_{t-1} + \lambda_1 \cdot \lambda_2 u_{t-2}].$$

Отже, припущення, зроблені Койком, зумовлюють появу в правій частині рівняння величин y_{t-1} і y_{t-2}. При цьому для змінної y_{t-1} слід узяти суму параметрів λ_1 і λ_2, а для змінної y_{t-2} — їх добуток. Аналогічно діють із залишками u_{t-1} і u_{t-2}.

Розглянемо ще один підхід до розв'язування задачі вибору ваги для коефіцієнтів моделей при лагових пояснювальних змінних, який був запропонований Ширлі Алмон [2].

Нехай економетрична модель розподіленого лагу запишеться так:

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + ... + a_\tau x_{t-\tau} + u_t. \tag{10.15}$$

Це означає, що пояснювальна змінна x_t впливатиме на y_t протягом τ періодів. Аби скористатися схемою вибору $a_\tau(\tau = 0, 1, 2,...)$, необхідно визначити величину τ. У попередньому розділі ми показали, як це можна зробити, скориставшись взаємною кореляційною функцією.

Метод Ширлі Алмон базується на теоремі Веєрштрасса, яка стверджує, що неперервна функція на замкнутому інтервалі може бути апроксимована на всьому відрізку многочленом певного степеня, який відрізняється від цієї функції в будь-якій точці даного відрізка менш ніж на будь-яке задане фіксоване число.

За цією теоремою значення параметрів моделі апроксимують за допомогою деякої функції $a_z = f(z)$, яка запишеться у вигляді многочлена від z:

$$f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + ... + b_r z^s.$$

Теорема Веєрштрасса не містить будь яких вказівок щодо степеня многочлена, який відповідав би заданому рівню точності. Сутність динаміки взаємозв'язків економічних процесів дає можливість припустити, що в цьому випадку можна застосувати многочлен невисокого степеня ***s* = 3, *або s* = 4.**

Узявши $s = 3$ і $a = 6$, дістанемо таку схему для оцінювання параметрів моделі розподіленого лагу:

$$\begin{aligned}
&a_0 = f(0) = b_0;\\
&a_1 = f(1) = b_0 + b_1 + b_2 + b_3;\\
&a_2 = f(2) = b_0 + 2b_1 + 4a_2 + 8a_3;\\
&a_3 = f(3) = b_0 + 3b_1 + 9b_2 + 27b_3;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_6 = f(6) = b_0 + 6b_1 + 36b_2 + 216b_3.
\end{aligned} \tag{10.16}$$

Це означає, що кожну з оцінок параметрів моделі розподіленого лагу подано через чотири невідомі параметри многочлена: b_0, b_1, b_2, b_3.

Підставивши оцінку з (10.16) в модель (10.15), дістанемо:

$$\begin{aligned} y_t = {} & b_0\left(x_1 + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots + x_{t-6}\right) + \\ & + b_1\left(x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \ldots + 6x_{t-6}\right) + \\ & + b_2\left(x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \ldots + 36x_{t-6}\right) + \\ & + b_3\left(x_{t-1} + 8x_{t-2} + 27x_{t-3} + \ldots + 216x_{t-6}\right) + u_t. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Коефіцієнти в рівнянні (10.17) можна оцінити, побудувавши регресійні рівняння залежності вектора Y від чотирьох змінних, визначених виразами, що стоять у дужках. Оцінки параметрів $\hat{a}_j$ в моделі розподіленого лагу будуть визначені після підставлення знайдених параметрів b_j у рівняння (10.16).

Якість оцінок параметрів b_j залежатиме від дисперсійно-кореляційної матриці змінних у рівнянні (10.17), яка запишеться так:

$$\operatorname{cov}\left(\hat{b}\right) = \sigma_u^2\left(V'V\right)^{-1},$$

де V — матриця пояснювальних змінних рівняння (10.17).

Вибіркові дисперсії оцінок параметрів $\hat{a}_j$, здобуті в (10.16), запишуться у вигляді:

$$\operatorname{var}\left(\hat{a}_j\right) = \sigma_u^2 C_i \left(V'V\right)^{-1} C', \quad i = 0,\ 1,\ \ldots\ k,$$

де C_i — вектор коефіцієнтів для кожного параметру $\hat{a}_j$. Наприклад, для a_2 вектор $C_2 = (1 \quad 2 \quad 4 \quad 8)$.

Це найпростіший підхід до визначення оцінок моделі розподіленого лагу на основі використання многочлена, який запропоновано Ширлі Алмон.

10.3.2. Лаги залежної змінної. Коли використовувати схему Койка для економетричної моделі, яка має лагові пояснювальні змінні, то в правій частині моделі серед таких змінних з'являється лагова залежна змінна $y_{t-\tau}$. З її появою стають стохастичними пояснювальні змінні моделі.

До появи в правій частині моделі лагових значень залежної змінної приводять і деякі інші моделі. Добре відомими моделями такого типу є модель ***часткового коригування*** і модель ***адаптивних сподівань***.

Коли відсутнє повне уявлення про об'єкт, його інерційність, то застосовується метод часткового коригування. Розглянемо його.

Нехай

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t. \tag{10.18}$$

У цьому рівнянні y_t^* розглядається як оптимальне значення y_t, яке відповідає x_t. Так, наприклад, якщо x_t — дохід, то y_t може визначати розмір оптимальних витрат за доходу x_t. Нехай дохід x_t різко змінюється (збільшується чи зменшується). Згідно з цим споживчі витрати y_t можуть не змінитись адекватно доходу з різних причин: певна інерційність, недостатня інформація, договірні умови і т. ін. Тому в цьому випадку використаємо коригувальну функцію:

$$y_t - y_{t-1} = \gamma(y_t^* - y_{t-1}) + u_t,\ \ 0 \le \gamma \le 1, \tag{10.19}$$

яка вказує, що протягом поточного періоду часу буде пройдено лише частину відстані між вихідним станом y_{t-1} та оптимальним y_t^*. Об'єднавши (10.18) і (10.19), дістанемо модель часткового коригування:

$$y_t = \alpha\gamma + \beta\gamma x_t + (1-\gamma) y_{t-1} + u_t,\ \ 0 \le \gamma \le 1. \tag{10.20}$$

Ця залежність дуже схожа на кінцеве рівняння Койка (10.12). Вона відрізняється від (10.12) лише наявністю вільного члена і простішою формою залишків.

Недоліком моделі часткового коригування є те, що оптимальне значення y_t^* не завжди визначається лише поточним значенням x_t, а й попередніми значеннями цієї змінної.

Якщо значення x_t змінюється від періоду до періоду, то оптимальне значення також змінюватиметься. Це явище знайшло своє відображення в моделі ***адаптивних сподівань***, яка характеризує зв'язок змінної Y з очікуваним рівнем X. Позначимо його через x_t^*. Маємо

$$y_t = \alpha + \beta x_t^* + u_t, \tag{10.21}$$

де x_t^* — очікуване значення x_t, яке сформоване в поточний момент часу, u_t — залишки, які можуть бути пов'язані з неточним вимірюванням значення змінної x_t^*.

Оскільки x_t^* — очікуване значення, то слід доповнити модель (10.20) деякими припущеннями відносно формування очікуваного значення x_t^*.

Загальноприйнятими в такому разі є припущення про адаптивні сподівання, які можна записати так:

$$x_t^* - x_{t-1}^* = \delta(x_t - x_{t-1}^*),\ \ 0 \le \delta \le 1. \tag{10.22}$$

Це означає, що змінні, які спостерігатимуться протягом поточного періоду порівняно з очікуваними раніше, ураховуються лише частково, що й відбиває формула (10.22) — додатне число δ, яке не перевищує одиниці. Щоб перейти до змінних x_t, які фактично спостерігаються, запишемо:

$$x_t^* - \lambda x_{t-1}^* = \delta x_t,$$

де $\lambda = 1 - \delta$,

Використовуючи оператор зрушення D, можна записати:

$$x_t^* = \frac{\delta}{1-\lambda D} x_t.$$

Підставимо це значення x_t^* в (10.22):

$$y_t = \alpha + \frac{\beta\delta}{1-\lambda D} x_t + u_t,$$

помноживши обидві частини на $1-\lambda D$, дістанемо:

$$y_t - \lambda D y_t = \alpha(1-\lambda D) + \beta\delta\ x_t + u_t(1-\lambda D),$$

або

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \alpha(1-\lambda) + \beta(1-\lambda)x_t + u_t(1-\lambda u_{t-1}).$$

Остаточно це рівняння матиме вигляд

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta(1-\lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + u_t(1-\lambda u_{t-1}).$$

Останнє рівняння є простою моделлю ***адаптивних сподівань.*** Порівнявши його з (10.20), побачимо, що воно має такі самі змінні, як і модель ***часткового коригування,*** відрізняється лише формуванням залишків. Модель ***адаптивних сподівань*** відрізняється від ***схеми Койка*** лише наявністю вільного члена.

Остаточні рівняння всіх трьох моделей практично збігаються, бо як у моделі адаптивних сподівань, так і в моделі часткового коригування використовуються вагові коефіцієнти, що спадають за геометричною прогресією.

10.4. Методи оцінювання

Коли схема формування вагових коефіцієнтів задовольняє припущення Койка, модель часткового коригування або модель адаптивних сподівань, то у правій частині економетричної моделі виникає лагове значення залежної змінної Y. Це зумовлює певні проблеми в оцінюванні параметрів такої моделі. Розглянемо ці проблеми.

Нехай економетрична модель має такий вигляд

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 x_t + v_t, \qquad (10.23)$$

де v_t — залишки в період t.

Як ми вже переконалися, методи оцінювання параметрів моделі залежать від гіпотез, які будуть прийняті щодо залишків v_t.

Гіпотеза 1. Залишки є випадковими величинами і розподіляються за нормальним законом, тобто $v_t \in N(0, \sigma_v^2)$.

Гіпотеза 2. Залишки виражені через параметр λ, тобто

$$v_t = u_t - \lambda u_{t-1}, \quad 0 \le \lambda \le 1;$$

а) $v_t \in N(0, \sigma_v^2)$;

б) $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$, $\varepsilon_t \in N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Гіпотеза 3. Залишки $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$, $\varepsilon_t \in N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Перша гіпотеза найпростіша, а тому єдина складність в оцінюванні параметрів моделі пов'язується з наявністю в правій частині лагової змінної y_{t-1}.

Друга гіпотеза відповідає схемі Койка і моделі адаптивних сподівань. При цьому розглядаються два варіанти:

а) залишки u_t незалежні;

б) залишки u_t описуються авторегресійною моделлю першого порядку.

Третя гіпотеза не пов'язується ні зі схемою Койка, ні з моделлю адаптивних сподівань. Згідно з цією гіпотезою величина залишків v_t $(u_t - \lambda u_{t-1})$ описується авторегресійною схемою першого порядку (найпростіший випадок).

Розглянемо особливості оцінки параметрів моделі за різними гіпотезами відносно залишків.

Гіпотеза 1. Оскільки залишки не корельовані між собою, то оцінка параметрів може бути виконана за методом 1МНК. Але цей метод дасть зміщення оцінок, бо залишки не можна вважати незалежними від лагової змінної y_{t-1}. Оскільки $M(u_t y_t) \neq 0$, то і $M(u_t y_{t-\tau}) \neq 0$ для $\tau \geq 0$ і $t = \overline{1,n}$.

Щоб знайти величину зміщення, розглянемо таку модель:

$$y_t = ay_{t-1} + u_t,$$

де $|a| < 1$ і послідовні значення u_t некорельовані.

Для такої моделі оцінка параметрів a на основі 1МНК дає

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} y_t^2}. \tag{10.24}$$

В економетричній літературі [2] доведено, що в такому разі зміщення параметра $\hat{a}$

$$M(\hat{a}) - a \approx \frac{-2a}{n}. \tag{10.25}$$

Альтернативною оцінкою параметра a може бути коефіцієнт автокореляції першого порядку для y, тобто:

$$r = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1} - \frac{1}{(n-1)^2}(\sum_{t=2}^{n} y_t)(\sum_{t=2}^{n} y_{t-1})}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \frac{1}{n^2}(\sum_{t=1}^{n} y_t)^2}. \tag{10.26}$$

Зміщення тоді визначатиметься так:

$$M(r) - a \approx -\frac{1}{n}(1 + 3a), \tag{10.27}$$

а отже, обидві оцінки мають тенденцію до завищення параметра a, причому рівень зміщення параметра r більший, ніж параметра $\hat{a}$.

За допомогою методу Монте-Карло було досліджено оцінки параметрів a у моделі $y_t = ay_{t-1} + u_t$ із застосуванням таких прийомів:

а) визначення параметра r;

б) використання параметра r, скоригованого на величину зміщення в (10.27);

в) застосування 1МНК.

Виявилось, що оцінка параметрів a на основі 1МНК має найменшу середньоквадратичну похибку. Звідси, якщо залишки стосуються моделі $y_t = ay_{t-1} + u_t$, то найдоцільніше використовувати 1МНК.

Гіпотеза 2а. Якщо залишки в моделях з лаговою змінною y_t мають вигляд $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$, де u_t автокорельовані, тобто $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, то оцінки параметрів моделі 1МНК матимуть зміщення. Так, якщо $u_t = y_t - \hat{a}y_{t-1}$, то зміщення для ρ буде

$$\frac{\rho(1-\hat{a}^2)}{1+\hat{a}\rho}. \tag{10.28}$$

Асимптотичні зміщення оцінок $\hat{a}$ і r збігаються, але мають протилежні знаки. Зміщення має і критерій Дарбіна — Уотсона, яке можна записати так:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} DW - DW^* = \frac{2\rho(1-\hat{a}^2)}{1+\hat{a}\rho}, \tag{10.29}$$

тобто асимптотичне зміщення для критерію Дарбіна—Уотсона — це подвоєне зміщення для оцінки параметра $\hat{a}$.

Коли в економетричній моделі серед пояснювальних змінних є лагове значення залежної змінної, застосування критерію Дарбіна—Уотсона для виявлення серійної кореляції залишків приводить до зміщення його оцінок. Тому Дарбін розробив методи перевірки автокореляції залишків, які можна застосувати і для моделей з лаговими змінними, що побудовані на базі великих сукупностей спостережень (n). Цей критерій визначається так:

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1-n\cdot \operatorname{var}(\hat{a}_1)}},$$

де $\hat{\rho}$ — оцінка параметра в автокореляційній моделі першого порядку:

$$u_t = \hat{\rho}\, u_{t-1} + \upsilon_t.$$

$\text{var}(\hat{a}_1)$ — оцінка вибіркової дисперсії параметра $\hat{a}_1$, який знаходиться при лаговій змінній y_{t-1}. Оцінку параметра $\hat{\rho}$ можна дістати з такого співвідношення:

$$\hat{\rho} \approx r^0 = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}^2}.$$

Для перевірки нульової гіпотези обчислені величини h порівнюються з критичними значеннями (односторонній критерій) нормального розподілу (χ^2) за вибраного рівня значущості. Коли $\text{var}(\hat{a}_1) \geq 1$, то його використовувати не можна. Для критерію h виконується така сама перевірка, як і в разі стандартного нормального відхилення, тобто коли за рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ $h > 1{,}645$, то гіпотеза про відсутність автокореляції відхиляється.

Розглянемо особливості оцінки параметрів, коли залишки мають форму для моделі адаптивних сподівань і схеми Койка, тобто $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $v_t \in N(0, \sigma_u^2)$.

Тоді математичне сподівання залишків дорівнюватиме нулю $M(v_t) = 0$ для всіх t, а дисперсія визначатиметься так: $M(v_t^2) = \sigma_u^2(1 + \lambda^2)$ для всіх t. А це означає, що для оцінювання параметрів моделі в даному разі можна використати ***узагальнений метод найменших квадратів***:

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y.$$

Оскільки дисперсія залишків пропорційна до величини $1 + \lambda^2$, тоді як коваріація для $\tau = \pm 1$ дорівнює $-\lambda\sigma^2$, а для $|\tau| \geq 2$ дорівнює нулю, то матриця V має такий вигляд

$$V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad (10.30)$$

а матриця X містить лагову змінну y_{t-1}.

Узявши до уваги, що параметр $\hat{a}$ при y_{t-1} дорівнює λ, дійдемо висновку: коли λ відома, модель спрощується і має вигляд

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a_0 + a_2 x_t + v_t. \tag{10.31}$$

Тоді матриця X складатиметься лише з двох стовпців, перший з яких утворюється одиницями, а другий — спостереженнями над X. Вектор Y в такому разі складається з перетворених даних $y_t - \lambda y_{t-1}$. Як бачимо, проблема оцінювання параметрів у цьому випадку зводиться до знаходження параметра λ.

Зельнер і Гейсел [2] запропонували вибирати значення параметра з інтервалу: $0 < \lambda < 1$, тобто довільно вибирається параметр λ, за яким формується матриця V з (10.30). Ця матриця, у свою чергу, дає змогу знайти оцінки параметрів узагальненим методом найменших квадратів. Вибирається те значення параметра λ, яке дає змогу мінімізувати суму квадратів залишків $v'V^{-1}v$, а звідси і стандартну похибку параметрів. Тобто використовується поступовий перебір значень λ на певному інтервалі доти, доки не буде знайдено той параметр, який забезпечує найкращий розв'язок.

Гіпотеза 2б. За цією гіпотезою залишки мають вигляд:

$$v_t = u_t - \lambda u_{t-1},\ 0 < \lambda < 1;$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,\ |\rho| < 1,\ \varepsilon_t \in N(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Зельнер і Гейсел запропонували процедуру пошуку параметрів λ і ρ для цієї моделі.

Запишемо економетричну модель (10.31) у такому вигляді

$$y_t = a_0 + \lambda y_t + a_2 x_t + u_t - \lambda u_{t-1}. \tag{10.32}$$

Визначимо $w_t = y_t - u_t$. Отже,

$$w_t - \rho w_{t-1} = y_t - \rho y_{t-1} - (u_t - \rho u_{t-1}).$$

Перепишемо це рівняння так:

$$w_t(\rho) = y_t(\rho) - u_t(\rho),$$

де $w_t(\rho) = w_t - \rho w_{t-1}$.

Оскільки

$$y_t(\rho) = a_0(1-\rho) + \lambda y_{t-1}(\rho) + a_2 x_t(\rho) + u_t(\rho) - \lambda u_{t-1}(\rho),$$

то

$$w_t(\rho) = a_0(1-\rho) + \lambda w_{t-1}(\rho) + a_2 x_t(\rho).$$

Через послідовні підставлення можна записати $y_t(\rho)$:

$$y_t(\rho) = \lambda w_0(\rho) + a_0(1-\rho)(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{t-1}) + \\ + a_2[x_t(\rho) + \lambda x_{t-1}(\rho) + \ldots + \lambda^{t-1}x_1] + \varepsilon_t. \qquad (10.33)$$

Якщо λ і ρ відомі, то (10.33) визначає Y як лінійну функцію від трьох невідомих параметрів $w_0(\rho)$, $a_0(1-\rho)$ і a_2 плюс випадкове відхилення. Тоді ці параметри можна відшукати на основі 1МНК. Матриця вихідних даних $X(\rho)$ матиме вигляд:

$$X(\rho) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & x_1(\rho) \\ \lambda^2 & 1+\lambda & x_2(\rho)+\lambda x_1(\rho) \\ \lambda^3 & 1+\lambda+\lambda^2 & x_3(\rho)+\lambda x_2(\rho)+\lambda^2 x_1(\rho) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^n & 1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{n-1} & x_n(\rho)+\lambda x_{n-1}(\rho)+\ldots+\lambda^{n-1}x_1(\rho) \end{pmatrix}.$$

З огляду на те, що λ і ρ невідомі, Зельнер і Гейсел запропонували вибирати значення λ і ρ довільно на проміжку $0 < \lambda < 1$; $-1 < \rho < 1$. Для кожної пари λ і ρ послідовно обчислюються значення $y_t(\rho)$ і залишки. У кінці процедури вибираються ті значення λ і ρ, які забезпечують мінімальну суму квадратів відхилень.

Як бачимо, процедура оцінювання параметрів за гіпотезами 2а і 2б є досить громіздкою. ***Тому використовувати її слід лише тоді, коли є впевненість, що залишки мають ту специфікацію, яка визначає особливості прийнятої гіпотези.***

Гіпотеза 3. Згідно з цією гіпотезою специфікується модель:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 x_t + v_t,$$

де $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$, $\varepsilon_t \in N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Ця гіпотеза не пов'язується ні зі схемою Койка, ні з моделлю адаптивних сподівань. Ідеться про оцінку параметрів моделі, ***яка має серед пояснювальних змінних лагове значення залежної змінної і одночасно має автокорельовані залишки.***

10.4.1. Метод Ейткена. Якщо ρ відоме, то можна сформувати матрицю

$$M(vv') = \sigma_v^2 S = \sigma_v^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

і оцінити параметри моделі за методом Ейткена:

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

де
$$X = \begin{pmatrix} 1 & y_0 & x_1 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_2 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Така процедура наближено еквівалентна застосуванню 1МНК до моделі

$$(y_t - \rho y_{t-1}) = a_0(1-\rho) + a_1(y_{t-1} - \rho y_{t-2}) + a_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

відносно перетворених даних. У результаті дістаємо обґрунтовані й асимптотично ефективні оцінки параметрів, але через присутність лагового значення залежної змінної в правій частині вони будуть зміщеними для кінцевих вибірок.

Якщо значення параметра ρ невідоме, то можна скористатися процедурою пошуку, запропонованою для гіпотези 2.

✓***Приклад 10.2.*** Необхідно побудувати економетричну модель, що характеризує залежність між чистим доходом і обсягом капітальних вкладень в економіку Сирії на основі даних, наведених у табл. 10.3.

Таблиця 10.3

у млн сирійських лір

Рік	Чистий дохід	Обсяг капітальних вкладень	Рік	Чистий дохід	Обсяг капітальних вкладень
1976	32432	3858	1984	78743	13880
1977	40325	4686	1985	80381	13949
1978	49334	5515	1986	82204	17006
1979	54717	5209	1987	77833	17352
1980	53818	7522	1988	81412	17838
1981	55968	10390	1989	77484	18878
1982	61517	13678	1990	75443	19090
1983	72165	15976	1991	85038	20016

! Вказівка. На основі взаємної кореляційної функції встановлено, що лаг капітальних вкладень дорівнює трьом ($\tau = 3$), тобто через три роки після інвестування можна одержати найбільший приріст чистого доходу.

Розв'язання. 1. Ідентифікація змінних і специфікація моделі.

y_t — чистий дохід, залежна змінна;

x_t — обсяг капітальних вкладень, пояснювальна змінна.

Економетрична модель має такий вигляд:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{t-\tau} + u_t;$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{t-\tau}.$$

2. Оцінка параметрів моделі.

Залежно від того, яка гіпотеза приймалась відносно залишків, застосовувались різні методи оцінювання параметрів моделі.

Зауважимо, що оскільки лаг $\tau = 3$, то вихідні дані були скорочені на три спостереження, причому в часовому ряді чистого доходу було відкинуто перші три спостереження, а в часовому ряді капіталовкладень — три останні.

2.1. Оцінка 1МНК.

Вихідна гіпотеза — залишки неавтокорельовані, нормально розподілені.

Економетрична модель має вигляд

$$\hat{y}_t = 32193{,}64 + 2{,}63x_{t-3}.$$

Коефіцієнт детермінації за цією моделлю: $R^2 = 0{,}84$.

Критерій Дарбіна — Уотсона: $DW = 0{,}92$.

Прогнозне значення доходу становить: 79270 млн сир. лір.

Похибка прогнозу: 3461,5.

Коефіцієнт невідповідності Тейла: 0,0223.

Значення коефіцієнта детермінації свідчить про те, що на 84 % варіація чистого доходу визначається варіацією капітальних вкладень. Величина критерію Дарбіна—Уотсона свідчить про наявність додатної автокореляції залишків моделі. Похибка прогнозного рівня чистого доходу згідно з моделлю становить 4,3 % до абсолютного значення прогнозу. Коефіцієнт невідповідності Тейла близький до нуля, що свідчить про добру апроксимацію чистого доходу на основі моделі, але наявність автокореляції залишків робить оцінки моделі зміщеними і необґрунтованими.

2.2. Оцінювання параметрів за методом Кочрена—Оркатта.

2.2.1. Вихідна гіпотеза — залишки описуються автокореляційною функцією першого порядку: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$. Початкове значення ρ є фіксованим. У такому разі економетрична модель має вигляд

$$\hat{y}_t = 86865{,}148 + 0{,}01\, X_{t-3};$$

$$u_t = 0{,}8421 u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Коефіцієнт детермінації: $R^2 = 0{,}16$.

Критерій Дарбіна—Уотсона: $DW = 1{,}02$.

Абсолютний рівень прогнозу: 85338.

Похибка прогнозу: 9529.

Коефіцієнт невідповідності Тейла: 0,0591.

Кількість ітерацій: 26.

Як свідчать результати аналізу моделі, оцінки параметрів не усунули автокореляції залишків, коефіцієнт детермінації значно знизився, що пояснюється високим рівнем залишкової дисперсії.

Звідси оцінки параметрів моделі є неефективними, бо також мають велику дисперсію. Апроксимація моделі в цілому погіршилася. Оцінка прогнозу становить близько 10 % до абсолютного рівня, удвічі вищим став коефіцієнт невідповідності Тейла.

2.2.2. Вихідна гіпотеза — залишки описуються автокореляційною функцією другого порядку

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \nu_t.$$

Початкові значення ρ_1 і ρ_2 — стохастичні.

Економетрична модель має вигляд:

$$\hat{y}_t = 31176{,}20 + 2{,}78x_{t-3};$$

$$\hat{u}_t = 0{,}8525u_{t-1} - 0{,}7396u_{t-2} + \nu_t.$$

Коефіцієнт детермінації: $R^2 = 0{,}94$.

Критерій Дарбіна—Уотсона: $DW = 2{,}08$.

Абсолютний рівень прогнозу: 85447.

Похибка прогнозу: 9638.

Коефіцієнт невідповідності Тейла: 0,0598.

Кількість ітерацій: 8.

Результати обчислень показують, що друга гіпотеза відносно залишків (вони описуються авторегресійною схемою другого порядку) є для наведеної вихідної інформації реальнішою, ніж перша.

Коефіцієнт детермінації показує, що на 94 % варіація чистого доходу залежить від варіації капітальних вкладень. Критерій Дарбіна—Уотсона є близьким до двох, а це означає відсутність автокореляції залишків. Якість прогнозу за моделлю на $t + 1$ період характеризується відносною похибкою, яка становить 11,2 %. Коефіцієнт невідповідності Тейла залишається таким, що дорівнює 0,059, як і для попередньої гіпотези.

Обчислення, наведені в цьому прикладі для побудови лагової моделі, показують, що оцінки параметрів моделі на основі двох методів — 1МНК і Кочрена—Оркатта — різні. Більше того, метод Кочрена—Оркатта для різних вихідних гіпотез відносно залишків моделі дає істотно різні результати. Отже, потрібно уважно ставитись до аналізу залишків моделі і прийнятих гіпотез відносно їх автокореляції, щоб у кожному конкретному випадку для оцінювання параметрів моделі з лаговими змінними застосувати той метод, який найбільше відповідає особливостям вихідної інформації і меті дослідження.

10.4.2. *Ітеративний метод.* Як альтернативу можна запропонувати ітеративний метод. Розглянємо його.

Перепишемо останнє рівняння у вигляді:

$$y_t = a_0(1-\rho) + (a_1 + \rho)y_{t-1} - a_1\rho y_{t-2} + a_2 x_t - a_2\rho x_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (10.34)$$

Щоб безпосередньо оцінити всі чотири параметри, мінімізуючи суму квадратів відхилень для (10.34), треба розв'язувати нелінійні рівняння відносно параметрів. Якщо розбити параметри на дві множини, внісши до однієї a_0, a_1, a_2, а до іншої — ρ, то можна знайти умовний мінімум суми квадратів залишків для рівняння (10.34) почергово відносно кожної множини параметрів. У такому разі оцінюватимуться лінійні рівняння.

Алгоритм

Крок 1. Вибирається деяке початкове значення $\rho = \hat{\rho}$, яке підставляється в рівняння (10.34), що відповідно спрощується.

Крок 2. Мінімізується сума квадратів залишків рівняння (10.34) при фіксованому ρ, в результаті одержуються оцінки $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$.

Крок 3. Підставимо значення параметрів $a_0 = \hat{a}_0$, $a_1 = \hat{a}_1$, $a_2 = \hat{a}_2$ в модель (10.34) і визначимо параметр $\hat{\hat{\rho}}$, тобто застосовується 1МНК до рівняння $\hat{v}_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon'_t$, що і дозволяє знайти $\hat{\hat{\rho}}$.

Крок 4. Задавши $\hat{\hat{\rho}}$ в моделі (10.34), знайдемо на основі 1МНК оцінку параметрів $a_0 = \hat{\hat{a}}_0$, $a_1 = \hat{\hat{a}}_1$, $a_2 = \hat{\hat{a}}_2$.

Процес триває доти, поки не буде досягнуто збіжності оцінок параметрів моделі на двох останніх кроках з вибраною точністю.

10.4.3. Двокрокова процедура. Іноді застосовується альтернативна двокрокова процедура. Розглянемо її алгоритм.

Крок 1. Параметри моделі (10.34) оцінюються 1МНК, оскільки залишки ε_t в ній — гомоскедастичні. При цьому ігноруються нелінійні обмеження, які необхідно б було враховувати для оцінювання. Як оцінка параметра ρ використовується

$$\hat{\rho} = -\frac{a_2\rho}{a_2},$$

тобто береться відношення коефіцієнта при змінній x_{t-1} до коефіцієнта при змінній x_t.

Крок 2. На основі $\rho = \hat{\rho}$ перетворюється вихідна інформація $(y_t - \hat{\rho} y_{t-1})$ і $(x_t - \hat{\rho} x_{t-1})$, для якої будується модель (10.34) методом 1МНК.

10.4.4. Інструментальні змінні. Застосовується також процедура, що використовує інструментальні змінні, бо y_t залежить від v_t, а y_t залежить від y_{t-1}.

Одна зі складнощів моделі — це існування кореляції y_{t-1} з v_t. Але, враховуючи зроблене припущення, коли пояснювальні змінні ймовірніше всього не корелюють з y_{t-1}, оцінку параметрів моделі

$$\hat{y}_{t-1} = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$$

можна знайти за допомогою 1МНК. Кількість лагових значень X, які включаються в цю модель, можна вибрати залежно від обсягу вибірки і від їх здатності пояснити поводження залежної змінної y_t. Якщо значення змінної X має високу автокореляцію, то навряд чи потрібно брати більше ніж два її лагових значення. Записане вище співвідношення зрушимо на один період назад, аби дістати $\hat{y}_{t-1}$, і підставимо вираз $\hat{y}_{t-1}$ у праву частину моделі (10.34) замість y_{t-1}. Після цього застосовується 1МНК для оцінки параметрів a. Ці оцінки будуть обґрунтованими, бо всі пояснюючі змінні гранично не корельовані із залишками, але вони будуть не ефективними, оскільки при оцінюванні параметрів не була врахована автокореляція залишків.

Алгоритм Уолліса. Уолліс запропонував складніший трикроковий метод оцінювання.

Крок 1. Оцінюються параметри моделі

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 x_t + v_t,$$

де x_{t-1} використовується як інструментальна змінна для y_{t-1}. Таким чином, визначають:

$$\hat{A} = (Z'X)^{-1} Z'Y,$$

де $$Z = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \text{ і } X = \begin{pmatrix} 1 & y_0 & x_1 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_2 & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \ldots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Для залишків цієї моделі $v = Y - X\hat{A}$ розраховують коефіцієнт автокореляції першого порядку з урахуванням поправки на зміщення:

$$r = \frac{\dfrac{\sum_{t=2}^{n} v_t v_{t-1}}{n-1}}{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} v_t^2}{n}} + \frac{m+1}{n},$$

де $r \approx \rho$.

Крок 3. За допомогою оцінки, здобутої для ρ, формують матрицю:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ r & 1 & r & \dots & r^{n-2} \\ r^2 & r & 1 & \dots & r^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & r^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

і обчислюють оцінку вектора $\hat{A}$ узагальненим методом найменших квадратів:

$$\hat{A} = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} Y.$$

Проведені Уоллісом експерименти показали, що його метод оцінювання приводить до значно менших величин зміщення і до меншої суми квадратів залишків, ніж застосування методу Ейткена безпосередньо до моделі (10.24).

✓***Приклад 10.3.*** Необхідно побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами на харчування і доходом сім'ї згідно з даними, наведеними в табл. 10.4.

Таблиця 10.4

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Витрати на харчування, гр. од.	4	5	6	6	8	11	14	14	16	14
Дохід, гр. од.	25	29	34	33	41	50	55	54	56	62

Розв'язання

1. Ідентифікація змінних та специфікація моделі.

y_t — витрати на харчування в період t, залежна змінна;

x_t — дохід в період t, пояснювальна змінна;

y_{t-1} — витрати на харчування в період $t-1$, пояснювальна змінна.

Економетрична модель має вигляд:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 y_{t-1} + u_t;$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t + \hat{a}_2 y_{t-1}.$$

Таким чином, витрати на харчування в період t залежать від доходу в період t та від витрат на харчування в період $t-1$.

2. Оцінка параметрів моделі.

Для оцінювання параметрів цієї моделі застосуємо алгоритм Уолліса, який базується на методах інструментальних змінних і Ейткена.

2.1. Оцінка параметрів моделі виконується на основі методу інструментальних змінних, де x_{t-1} використовується як інструментальна змінна для y_{t-1}. Отже, в операторі оцінювання $\hat{A} = (Z'X)^{-1}Z'Y$ матриці Y, Z' та X запишуться так:

$$Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \\ 14 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}; \quad Z' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 29 & 34 & 33 & 41 & 50 & 55 & 54 & 56 & 62 \\ 25 & 29 & 34 & 33 & 41 & 50 & 55 & 54 & 56 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 29 & 4 \\ 1 & 34 & 5 \\ 1 & 33 & 6 \\ 1 & 41 & 6 \\ 1 & 50 & 8 \\ 1 & 55 & 11 \\ 1 & 54 & 14 \\ 1 & 56 & 14 \\ 1 & 62 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$Z'X = \begin{pmatrix} 9 & 414 & 84 \\ 414 & 20188 & 4267 \\ 377 & 18452 & 3947 \end{pmatrix}; \quad (Z'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}466 & -0{,}218 & 0{,}184 \\ -0{,}066 & 0{,}010 & -0{,}009 \\ 0{,}073 & -0{,}02 & 0{,}026 \end{pmatrix};$$

$$Z'Y = \begin{pmatrix} 94 \\ 4715 \\ 4336 \end{pmatrix}; \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} -1{,}7665 \\ 0{,}1617 \\ 0{,}5109 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель має такий вигляд:

$$\hat{y}_t = -1{,}7665 + 0{,}1617x_t + 0{,}5109y_{t-1};$$

$$\overline{y}_t = 46; \quad \overline{y}_{t-1} = 41{,}889; \quad x_t = 10{,}44.$$

2.2. Знайдемо розрахункові значення $\hat{y}_t$, відхилення їх від фактичних $u_t = y_t - \hat{y}_t$ та дослідимо ці відхилення на наявність автокореляції (табл. 10.5).

Таблиця 10.5

Рік	y_t	$\hat{y}_t$	u_t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$
2	5	4968	0,031	0,0009	—	—
3	6	6,288	–0,288	0,083	0,082	0,006
4	6	6,638	–0,6380	0,407	0,323	0,104
5	8	7,9322	0,067	0,004	–0,402	0,162
6	11	10,410	0,589	0,341	0,343	0,111
7	14	12,752	1,247	1,557	4,209	1,462
8	14	14,123	–0,123	0,015	–1,542	2,378
9	16	14,446	1,553	2,412	2,397	5,746
10	14	16,439	–2,439	5,950	3,538	12,520
Всього				**10,7797**		**22,499**

Обчислимо критерій Дарбіна—Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{8}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{9} u_t^2} = \frac{22{,}4998}{10{,}7797} \approx 2.08.$$

Критерій Дарбіна—Уотсона свідчить про від'ємну автокореляцію, бо його значення перевищує 2.

Віднявши $DW = 2{,}08$ від верхньої межі коефіцієнтів Дарбіна—Уотсона, дістанемо:

$$DW_{\text{факт}} = 4 - 2{,}08 = 1{,}92.$$

Порівняємо це значення з критичними рівнями. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і ступеней свободи $n = 9$, $m = 3$ критичні значення критерію Дарбіна–Уотсона дорівнюють:

$$DW_1 = 0{,}629;$$

$$DW_2 = 1{,}699.$$

$DW_{\text{факт}}$ більше верхньої межі, а це означає, що автокореляція відсутня.

3. Перевіримо статистичну значущість побудованої економетричної моделі та її оцінок:

3.1. Дисперсія залишків:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=2}^{10} u_i^2}{n-m} = \frac{10{,}7797}{6} = 3{,}59.$$

3.2. Загальна дисперсія:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=2}^{10} \left(y_i - \overline{y}\right)^2}{n-1} = 18{,}028.$$

3.3. Коефіцієнти детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2} = \frac{3{,}59}{18{,}028} = 0{,}80.$$

3.4. Критерій Фішера (F-критерій):

$$F = \frac{\sigma^2_{\text{регр}}}{\sigma_u^2} = \frac{69{,}43}{3{,}59} = 19{,}32;$$

$$F_{0{,}05\,\text{крит}} = 4{,}46;$$

$$F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}.$$

Наведені щойно характеристики дисперсійного аналізу економетричної моделі свідчать про значущість зв'язку між витратами на харчування в період t і доходом в період t, а також витратами на харчування в період $t-1$ ($F_{\text{крит}} < F_{\text{факт}}$). Коефіцієнт детермінації показує, що на 80 % варіація витрат на харчування визначається варіацією пояснювальних змінних моделі. Коефіцієнт кореляції також показує, що зв'язок є тісним.

Оцінки параметрів моделі мають порівняно високі стандартні похибки, що свідчить про їх неефективність. Це пов'язано з варіацією фактичних спостережень змінної y_t в часі та малою кількістю спостережень.

10.5. Стислі висновки

1. Для багатьох економічних процесів є типовим той факт, що ефект від впливу одного показника на інший виявляється не відразу, а поступово, через деякий період часу. Це явище називається лагом (запізненням). Кількісний вираз взаємозв'язку між капітальними вкладеннями і введенням основних фондів, між затратами виробничих ресурсів і обсягом виробництва, між доходами і витратами тощо і має базуватись на врахуванні запізнення впливу, або лагу.

2. Вимірювання зв'язку між економічними показниками з урахуванням лагу виконується на основі побудови економетричної моделі розподіленого лагу:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-\tau} + u_t.$$

Коефіцієнти a_j, $j = 0, 1, 2, 3...$, називаються коефіцієнтами лагу, а їх послідовність $a = \{ a_j, j = 0, 1, 2, 3... \}$ — структурою лагу.

3. Якщо економетрична модель включає в себе не тільки лагові змінні, а й змінні, що характеризують поточні умови функціонування економічних систем, то така модель називається узагальненою моделлю розподіленого лагу і записується у вигляді

$$y_t = \sum_{\tau \geq 0} a_\tau x_{t-\tau} + \sum_{s=1}^{m} b_s z_{t,s} + u_t.$$

4. Оскільки параметри a_τ стосуються однієї і тієї самої лагової змінної, що впливає на залежну змінну протягом певного часу, то $w = \sum_{\tau} a_\tau = 1$ виражає сумарний вплив цієї лагової змінної на залежну, де w — скінченне число.

5. Щоб побудувати економетричну модель розподіленого лагу, необхідно обґрунтувати його величину. Для обґрунтування лагу (чи лагів) доцільно використовувати взаємну кореляційну функцію, яка визначає ступінь зв'язку кожного елемента вектора залежної змінної y_t з елементом вектора незалежної x_t, зрушеними відносно один одного на часовий лаг τ. Для різних значень τ на основі взаємної кореляційної функції можна дістати $n+1$ значення $r_{(\tau)}$, які належать множині $r_{(\tau)} \in]-1, 1[$. Найбільше значення $r_{(\tau)}$ за модулем визначає зрушення, або часовий лаг. Якщо таких зрушень кілька, то запізнення впливу змінної x_t відбувається протягом певного проміжку часу, що відображає модель розподіленого лагу.

6. Наявність мультиколінеарності між лаговими змінними в економетричній моделі ускладнює її побудову. Щоб звільнитися від мультиколінеарності, необхідно ввести такі коефіцієнти при лагових змінних, які б мали однаковий знак і для них можна було б знайти суму всіх оцінок лагових змінних, тоді економетрична модель запишеться так:

$$y_t = a\sum_{j=0}^{l} w_j x_{t-\tau} + u_t.$$

Для визначення вагових коефіцієнтів Л. Койк запропонував форму спадної геометричної прогресії, тобто

$$w_j = (1-\lambda)\lambda_j, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Тоді економетрична модель запишеться у такому вигляді:

$$y_t = w(1-\lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}),$$

тобто в правій частині з'являється лагова змінна y_{t-1}.

7. Метод визначення оцінок параметрів при лагових змінних запропонував також Ширлі Алмон. Він базується на побудові функції, яка записується у вигляді многочлена степеня s (де $s = 3$, або $s = 4$). Тоді кожна оцінка параметрів моделі розподіленого лагу виражається через коефіцієнти многочлена.

8. Лагову пояснювану змінну в правій частині моделі мають також моделі часткового коригування:

$$y_t = \alpha\gamma + \beta\gamma x_t + (1-\gamma)y_{t-1} + u_t, \quad 0 \le \gamma \le 1$$

і адаптивних сподівань

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta(1-\lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + u_t(1-\lambda u_{t-1}).$$

9. Наявність в економетричній моделі лагової змінної та прийняття гіпотези відносно залишків зумовлюють особливості оцінки параметрів моделі. Ці гіпотези можна визначити так.

Гіпотеза 1. Залишки є випадковими величинами і розподіляються нормально.

Гіпотеза 2. Залишки описуються авторегресійною схемою першого порядку

$$v_t = u_t - \lambda u_{t-1}, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Гіпотеза 3. Залишки описуються авторегресійною схемою першого порядку

$$v_t = u_t + \lambda u_{t-1},$$

де $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$.

10. Якщо відносно залишків приймається перша гіпотеза, то для оцінки параметрів можна застосувати 1МНК.

11. Якщо відносно залишків приймається друга гіпотеза (залишки автокорельовані), то застосовується метод Ейткена. В операторі $\hat{a} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$ матриця V має вигляд:

$$V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Коли модель $y_t = a_0 + a_1x_t + \lambda\, y_{t-1} + u_t$, для другої гіпотези можна записати

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a_0 + a_2 x_t + v_t,$$

а також застосувати 1МНК для перетворених даних залежної змінної y_t на основі параметра λ. Параметр λ пропонується вибирати довільно на інтервалі $0 < \lambda < 1$ таким чином, аби мінімізувати суму квадратів залишків $(u'V^{-1}u)$.

12. Якщо відносно залишків моделі приймається третя гіпотеза, то для оцінки параметрів моделі можна використовувати:

1) 1МНК, коли вихідні дані перетворені на основі параметрів ρ і λ;
2) метод Ейткена;
3) ітеративний метод;

4) двокрокову процедуру:

а) 1МНК для вихідних даних, коли $\hat{\rho} = \frac{a_2\rho}{a_2}$;

б) 1МНК для перетворених даних на основі $\rho = \hat{\rho}$;

5) метод інструментальних змінних;

6) алгоритм Уолліса.

13. Щоб застосувати для оцінки параметрів 1МНК, матриця вихідних даних має подаватися у вигляді:

$$X(\rho) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & x_1(\rho) \\ \lambda^2 & 1+\lambda & x_2(\rho) + \lambda x_1(\rho) \\ \lambda^3 & 1+\lambda+\lambda^2 & x_3(\rho) + \lambda x_2(\rho) + \lambda^2 x_1(\rho) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^n & 1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{n-1} & x_n(\rho) + \lambda x_{n-1}(\rho) + \ldots + \lambda^{n-1} x_1(\rho) \end{pmatrix}.$$

Параметри λ і ρ вибираються довільно на множині] 0,1 [. Для кожної пари λ і ρ послідовно обчислюються залишки; λ і ρ вибираються доти, доки не буде мінімізована сума квадратів залишків.

14. Оператор оцінювання методом Ейткена $\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$ базується на матриці

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

а матриця X дорівнює:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & y_0 & x_1 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_2 & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Цей метод аналогічний оцінкам 1МНК для моделі

$$(y_t - \rho y_{t-1}) = a_0(1-\rho) + a_1(y_{t-1} - \rho y_{t-2}) + a_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

відносно перетворених даних.

15. Ітеративний метод є альтернативою методу Ейткена. Його алгоритм має чотири кроки:

Крок 1. Вибирається початкове значення $\rho = \hat{\rho}$ і підставляється в модель п.14.

Крок 2. Застосовується 1МНК для оцінювання параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$.

Крок 3. В моделі п.14 підставляються параметри $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ і на основі 1МНК обчислюється параметр $\hat{\hat{\rho}}$.

Крок 4. Задається $\hat{\hat{\rho}}$ на основі 1МНК і розраховуються параметри $\hat{\hat{a}}_0$, $\hat{\hat{a}}_1$, $\hat{\hat{a}}_2$ і т. д.

16. Метод інструментальних змінних для оцінки параметрів моделі застосовують тоді, коли залишки не автокорельовані, але існує залежність пояснювальних змінних із залишками. Якщо модель має вигляд:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + a_3 y_{t-1} + u_t,$$

то можна замість змінної y_{t-1} використати як інструментальну змінну $\hat{y}_{t-1}$, що розраховується як функція $\hat{y}_{t-1} = f(x_{t-1})$.

17. Оцінка параметрів моделі з лаговою змінною на основі алгоритму Уолліса складається з трьох етапів.

На першому етапі оцінка параметрів моделі виконується на основі методу інструментальних змінних, де x_{t-1} використовується як інструментальна змінна для y_{t-1}.

На другому етапі обчислюють коефіцієнт автокореляції першого порядку з урахуванням поправки на зміщення і формують матрицю S.

На третьому кроці визначаються оцінки параметрів моделі на основі методу Ейткена.

10.6. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Що таке лаг і що означає «лагова змінна»?

2. Дайте означення моделі розподіленого лагу.

3. Чим відрізняється модель розподіленого лагу від узагальненої моделі розподіленого лагу?

4. Побудуйте взаємну кореляційну функцію для таких взаємозв'язаних часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Національний дохід, гр. од.	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,0	2,2
Основні виробничі фонди, гр. од.	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5

Знайдіть значення «лагу» або «лагів» і побудуйте модель розподіленого лагу.

5. У рівнянні $y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 x_t + u_t$, $|a| < 1$ значення x_t вибрані випадково із заданої сукупності спостережень, а значення u_t є стаціонарний марковський процес $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$, де v_t розподілені незалежно. Покажіть, що оцінка 1МНК параметра a_2 — обгрунтована. Знайдіть асимптотичне зміщення параметра a_2. Як зміниться модель, якщо $a_2 = 0$; $a_2 \to \infty$?

6. Яку схему розподіленого лагу запропонував Койк?

7. Виконайте перетворення даних за Койком, якщо відомо:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	11	10,8	10,6	11,6	13,6	14,7	16,6	18,5	23,2	24,4
x_t	9,6	10,8	12,1	12,7	15,0	16,5	19,1	21,6	24,5	27,4
u_t	0,3	0,4	–0,5	0,2	–0,1	–0,4	0,7	–0,6	0,3	–0,1

Необхідно побудувати такі моделі:

а) $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$;

б) $y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + u_t$.

8. Виконайте оцінку параметрів моделі а) завдання 7 за допомогою 1МНК і методом Ейткена. Проаналізуйте результати.

9. Оцініть параметри моделі а) завдання 7 з допомогою 1МНК на основі заданої вихідної інформації і на основі перетворень інформації за Койком.

10. Визначте величину зміщення параметрів моделі, обчислених у завданні 9.

11. Побудуйте модель адаптивних сподівань згідно з такими вихідними даними:

y_t	22	33	50	67	47	66	81	106	70	95
x_t	45	75	125	223	92	146	227	358	135	218

де y_t — витрати на харчування, грн на тиждень; x_t — загальні витрати, грн на тиждень.

12. Назвіть найпростіші гіпотези, які застосовуються відносно залишків в моделях розподіленого лагу.

13. Як оцінюються параметри моделей за різними формами зміни залишків?

14. Побудуйте модель $y_t = ay_{t-1} + u_t$, коли

$y_t = \{8, 9, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Визначте величину зміщення параметра a.

15. Згідно із завданням 14 знайдіть коефіцієнт автокореляції першого порядку. Порівняйте його з параметром a. Знайдіть величину зміщення.

16. Коли застосовується матриця

$$V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Як знайти λ?

17. Опишіть алгоритм ітеративного методу для оцінювання параметрів моделі:

$$y_t = a_0(1-\rho) + (a_1+\rho)y_{t-1} - a_1 y_{t-2} + a_2 x_t - a_2 x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

18. Опишіть трикрокову процедуру оцінювання за Уоллісом.

10.7. Основні терміни і поняття

Лаг • Лагова незалежна, або пояснювальна, змінна • Лагова залежна, або ендогенна, змінна • Загальна модель нескінченного розподіленого лагу • Коефіцієнти лагу • Структура лагу • Нормовані коефіцієнти лагу • Нормована структура лагу • Узагальнена модель розподіленого лагу • Взаємна кореляційна функція • Корелограма • Динамічна модель розподіленого лагу • Схема Койка • Модель часткового коригування • Модель адаптивних сподівань • Алгоритм Уолліса

Розділ 11

АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ (МОДЕЛІ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ)

11.1. Часові ряди, основні поняття та означення

Показники багатьох явищ і процесів в економіці змінюються в часі. Цей розвиток має назву ***економічної динаміки***. Характерним для економічної динаміки є те, що рівень показників у наступному часовому періоді значною мірою залежить від їхнього рівня в минулому. Крім того, чим довший часовий інтервал між двома явищами, тим суттєвіша різниця як у кількісному, так і в якісному їхньому стані.

Початковою інформацією математико-статистичного вивчення процесу в розвитку є ряд числових даних, що являє собою зміни деякого економічного показника в часі, який має назву одновимірного ряду.

Отже, дамо визначення одновимірного ряду динаміки.

Послідовність спостережень одного показника (ознаки), упорядкована залежно від послідовно зростаючих або спадних значень другого показника (ознаки) є ***одновимірним рядом динаміки***.

Якщо ознакою, за якою відбувається впорядкування ряду, є ***час***, то такий динамічний ряд має назву ***часового ряду***.

Упорядкування економічних показників найчастіше відбувається саме за часом, тому в цьому розділі розглянемо принципово нові методи аналізу динамічних рядів на відміну від розділу, де розглядалися сукупності, що утворюють випадкову вибірку.

Одним з основних завдань аналізу рядів у соціально-економічних системах є вивчення структури і класифікації основних факторів, під упливом яких формуються складові елементи часового ряду, і його розкладання на ці складові.

Дослідження рядів динаміки особливо важливо і для визначення темпів і пропорцій у розвитку економічних процесів, а також закономірностей і змін тих чи інших показників у майбутньому, тобто можливої поведінки їх у межах прогнозованого періоду.

Залежно від того, чого стосуються рівні ряду до певного моменту чи інтервалу часу — їх визначають як ***моментні*** й ***інтервальні***.

Часові ряди, які характеризують економічні явища ***на певний конкретний момент часу***, мають назву ***моментних***. Наприклад, випуск продукції на перше число кожного місяця, кварталу, року і т. ін. Якщо рівні часового ряду утворені агрегуванням за певний проміжок часу, то вони мають назву ***інтервальних*** часових рядів. Наприклад, часовий ряд, кожен рівень якого відбиває фонд заробітної плати робітників за кожен місяць року, за квартал або рік в цілому.

Часовий ряд записують як послідовність членів (рівнів): y_1, y_2, ... y_t, ... y_n, де n — кількість членів ряду; або скорочено: ряд y_t, $t = \overline{1,n}$, де t є порядковий номер рівня ряду, який набуває значень від 1 до n. Під ***довжиною*** ряду розуміють ***час*** від початкового рівня спостереження y_1 до останнього y_n. Довжина ряду складається з певної кількості рівнів ряду.

11.2. Поняття стаціонарного часового ряду

Динамічні ряди, характер яких не змінюється з часом, мають назву ***стаціонарних***.

Стаціонарність часового ряду пов'язана з вимогою того, що він має стале середнє значення, і його рівні коливаються навколо цього середнього зі сталою дисперсією, тобто для стаціонарних рядів справджується рівність $m(t)$ = const; $D(t)$ = const; автокореляційна функція $r(\tau)$ (див. підрозділ 10.2) визначається як

$$r(\tau) = r(t - t') = M(y(t) - m_y) = (y(t') - m_y),$$

тобто вона в стаціонарному процесі є функцією одного аргументу — проміжку τ між двома моментами часу, не розрізняючи, де за часом розташовується цей проміжок.

Отже, властивості стаціонарного ряду не змінюються з часом, за яким починається рахунок його рівнів.

Припустимо, що нам потрібно змінити значення ряду y_t на y_{t+s}, де s — стале число. Якщо ряд вважається стаціонарним, то середнє, дисперсія і значення варіації ряду дисперсії y_{t+m} мають бути такими ж, як і для y_t. Якщо ж ці показники змінюватимуться з часом, то ряд буде ***нестаціонарним***. Його легко зводять до стаціонарного, застосовуючи певні математичні перетворення, наприклад оператор різниць.

Стаціонарність рядів на рис. 11.1 розглядається за трьома типами:

а) стаціонарність навколо ненульової константи (*CS*); *б*) стаціонарність навколо нуля (*ZS*); *в*) тренд-стаціонарність, або стаціонарність навколо тренду (*TS*).

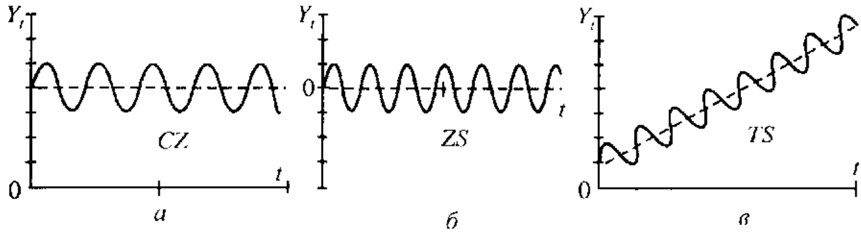


Рис. 11.1. Стаціонарні ряди. Різні випадки

Стаціонарні ряди, таким чином, можна вважати динамічно стабільними, або такими, що мають ***нульовий порядок інтеграції***, а саме: $y_t - I(0)$.

Розглядаючи графічно нестаціонарні ряди, можна зауважити, що виявити певну закономірність в їхній динаміці неможливо. Вони є нестабільними і мають відмінний від нуля порядок інтеграції. Зауважимо, що ***порядком інтеграції*** називають число, яке показує, скільки разів застосовується до ряду оператор перших різниць, для того, щоб він став стаціонарним.

Якщо часовий ряд y_t має порядок інтеграції одиницю, тобто $y_t - I(1)$, то це означає, що його різниці є стаціонарним рядом, який тепер має нульовий порядок інтеграції: $\Delta y_t = (y_t - y_{t-1}) - I(0)$.

Можливість прогнозування нестаціонарних рядів досить обмежена. У практиці їх аналізу застосовують, як правило, три підходи:

• припущення про стаціонарність процесу в окремі проміжки часу, де це можливо;

• аналізом виявляють характер нестаціонарності (наприклад, може бути, що швидкість або прискорення ряду сталі);

• в той чи інший спосіб виключають нестаціонарність, яку потім враховують окремо.

Так, нерідко нестаціонарність полягає лише в тому, що детермінована складова з часом змінюється.

Згідно з цим, визначивши дану функцію $m_y(t)$, виключаємо це змінне математичне сподівання з ряду y_t і зрештою наближено дістаємо стаціонарний ряд.

Дослідження нестаціонарних рядів виходить за межі даного розділу. Тут розглядатимемо тільки стаціонарні ряди, котрі добре піддаються аналізу і прогнозуванню.

11.3. Розкладання часових рядів на складові

Динаміка рядів економічних явищ і процесів у загальному випадку формується під впливом чотирьох груп факторів, а саме:

* ***довготривалі***, що формують загальну тенденцію. Кожен із цих факторів окремо може діяти на процес, що досліджується, у протилежному напрямі один щодо одного. Проте в сукупності вони формують зростаючу чи спадну тенденцію цього процесу, описувану невипадковою функцією $Q_t = f(t)$, яку називають функцією тренду, або просто — трендом;
* ***сезонні***, що формують періодично повторювані за певний час року коливання того чи іншого показника. Це теж є невипадкова функція $S_t = \varphi(t)$.

Оскільки ця функція має бути періодичною (з періодами, що кратні «сезонам»), то в її аналітичному виразі мають бути включені гармоніки (тригонометричні функції), періодичність яких зумовлена змістовною сутністю задачі;

* ***циклічні*** (кон'юнктурні), що формують зміни динаміки ряду, зумовлені дією тривалих циклів економічної, демографічної чи астрофізичної природи (демографічні «ями», цикли сонячної активності і т. ін.). Результат дії циклічних факторів позначимо за допомогою невипадкової функції $Z_t = \psi(t)$;
* ***випадкові*** (нерегулярні), які не піддаються реєстрації й обліку. Їхня дія на формування рівнів часового ряду саме і зумовлює їхню стохастичну природу. Отже, часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ можемо інтерпретувати як сукупність спостережень із випадкових величин, яка має специфічні властивості, відмінні від класичної стохастичної вибірки, що розглядалася в розд. 4.

Позначимо цю випадкову функцію $U_t = \varsigma(t)$.

Випадкові фактори, у свою чергу, можуть бути різної природи: ***стрибкоподібні*** («несподівані»), що призводять до стрибкоподібних структурних змін у механізмі формування основних регулярних складових функцій $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, та ***еволюційно залишкові***, які зумовлюють невеликі випадкові відхилення значень y_t від тих, що відбуваються під впливом дії регулярних факторів.

У цьому розділі розглядатимемо схеми формування часових рядів тільки під впливом еволюційно залишкових випадкових факторів.

Звичайно, не обов'язково, щоб у формуванні рівнів часового ряду були присутні одночасно всі розглянуті щойно фактори. Висновки про те, якого типу фактори формують рівні ряду динаміки y_t, можуть базуватися як на аналізі змістовної сутності задачі (тобто вони мають бути апріорно-експертними за своєю природою), так і на спеціальному статистичному аналізі досліджуваного часового ряду.

Наведемо кілька прикладів.

✓**Приклад 11.1.** У табл. 11.1 і на рис. 11.2. наводяться дані про сумарні місячні відстані, км, що їх подолали авіалайнери компанії «Аеросвіт» за 96 місяців з 1993 року до грудня 2000 року, тобто часовий проміжок дорівнює одному місяцю, а довжина ряду $n = 96$.

Таблиця 11.1

ВІДСТАНІ, ЩО ЇХ ПОДОЛАЛИ АВІАЛАЙНЕРИ, км

1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
6827	7269	8350	8186	8334	8639	9491	10840
6178	6775	7829	7444	7899	8772	8919	10436
7084	7819	8829	8484	9994	10894	11607	13589
8162	8371	9948	9864	10078	10455	8852	13402
8462	9069	10638	10252	10801	11179	12537	13103
9644	10248	11253	12282	12950	10588	14759	14933
10466	11030	11424	11637	12222	10794	13667	14147
10748	10882	11391	11577	12246	12770	13731	14057
9963	10333	10665	12417	13281	13812	15110	16234
8194	9109	9396	9637	10366	10857	12185	12389
6848	7685	7775	8094	8730	9290	10645	11595
7027	7602	7933	9280	9614	10925	12161	12772

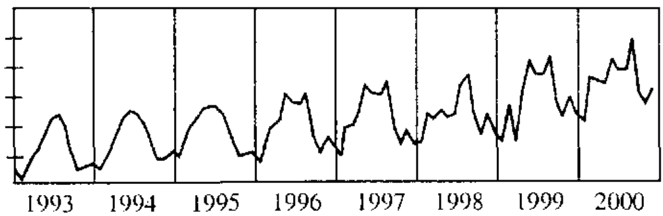


Рис. 11.2. Графік динаміки часового ряду, наведеного в табл. 11.1. (Відстані, що їх подолали авіалайнери компанії «Аеросвіт»)

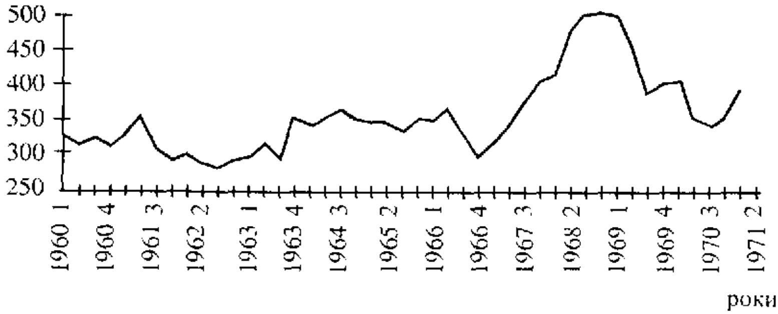
Дані про відстань, яку подолали авіалайнери, є типовими прикладами сезонних коливань, що поступово з'єднуються з трендом, який монотонно зростає. Сезонний ефект тут легко можна спостерігати. Протягом року відбувається три «спалахи» активності пасажирських авіаперевезень: на Великдень, улітку та на Різдвяні свята. Звісно, перельоти на Великдень від року до року зрушуються, як і дата самого цього свята. Крім того, коливання в обсягах перевезень можуть вібдуватися ще через неоднакові кількості авіалайнерів, що виконують роботу.

✓**Приклад 11.2.** На фондовій лондонській біржі за 48 кварталів відома динаміка курсу акцій компаній з 1960—1971 рр. Дані наведено в табл. 11.2 і графічно на рис. 11.3. Часовий проміжок дорівнює кварталу, а довжина ряду становить $n = 48$.

Таблиця 11.2

ІНДЕКС КУРСУ АКЦІЙ ПРОВІДНИХ КОМПАНІЙ НА ЛОНДОНСЬКІЙ БІРЖІ

Роки, квартал	Індекс	Роки, квартал	Індекс	Роки, квартал	Індекс
1960, 1	323,8	1964, 1	335,1	1968, 1	409,1
2	314,1	2	344,4	2	401,1
3	321,0	3	360,9	3	491,4
4	312,9	4	346,5	4	490,5
1961, 1	323,7	1965, 1	340,6	1969, 1	491,0
2	349,3	2	340,3	2	433,0
3	310,4	3	323,3	3	378,0
4	295,8	4	345,6	4	382,6
1962, 1	301,2	1966, 1	349,3	1970, 1	403,4
2	285,8	2	359,7	2	354,7
3	271,7	3	320,0	3	343,0
4	283,6	4	299,9	4	345,4
1963, 1	295,7	1967, 1	318,5	1971, 1	330,4
2	309,3	2	343,1	2	372,8
3	295,7	3	360,8	3	409,2
4	342,0	4	397,8	4	427,6



11.3. Графік часового ряду, наведеного в табл. 11.2
(індекс акцій, квартальні середні)

У прикладі 11.2 чітко спостерігається чотирирічний економічний цикл, що може бути пояснений не тривалою складовою економічного розвитку, а, як стверджують фахівці, проведенням парламентських виборів раз у чотири роки.

✓**Приклад 11.3.** За 56 років (1884—1939 рр.) наведено дані урожаю ячменю в Англії та Уельсі (табл. 11.3 і рис. 11.4). Часовий проміжок тут дорівнює одному року, а довжина ряду $n = 56$.

Таблиця 11.3

УРОЖАЙНІСТЬ ЯЧМЕНЮ В АНГЛІЇ ТА УЭЛЬСІ З 1884 ДО 1939 рр.
(в англ. центнерах)

Рік	Урожайність	Рік	Урожайність	Рік	Урожайність
1884	15,2	1903	15,1	1922	14,0
1885	16,9	1904	14,6	1923	14,5
1886	15,3	1905	16,0	1924	15,4
1887	14,9	1906	16,8	1925	15,3
1888	15,7	1907	16,8	1926	16,0
1889	15,1	1908	15,5	1927	16,4
1890	16,7	1909	17,3	1928	17,2
1891	16,3	1910	15,5	1929	17,8
1892	16,5	1911	15,5	1930	14,4
1893	13,3	1912	14,2	1931	15,0
1894	16,5	1913	15,8	1932	16,0
1895	15,0	1914	15,7	1933	16,8
1896	15,9	1915	14,1	1934	16,9
1897	15,5	1916	14,8	1935	16,6
1898	16,9	1917	14,4	1936	16,2
1899	16,4	1918	15,6	1937	14,0
1900	14,9	1919	13,9	1938	18,1
1901	14,5	1920	14,7	1939	17,5
1902	16,6	1921	14,3		

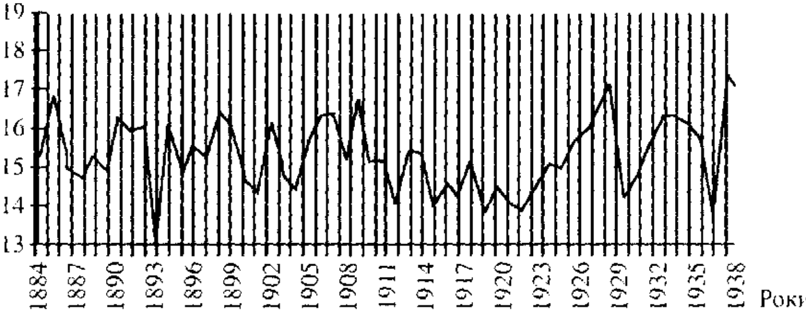


Рис. 11.4. Графік часового ряду, наведеного в табл. 11.3 (урожайність ячменю, ц/акр)

Аналіз графіка (рис. 11.4) дає підстави припустити, що у формуванні рівнів даного ряду не брали участі регулярні функції. Коливання ж рівнів ряду навколо деякого постійного значення скоріше за все має випадковий характер.

Отже, в найзагальнішому випадку часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ економічної динаміки можна розкласти на чотири структурних елементи:

- тренд Q_t;
- сезонний компонент S_t;
- циклічну складову Z_t;
- випадкову складову U_t.

Таким чином, під ***трендом*** розумітимемо стійку систематичну зміну процесу протягом довготривалого періоду, тобто тренд визначає зміни, які зумовлюються тривалими постійно діючими факторами, що визначають основну тенденцію часових рядів.

Іноді під ***трендом*** розуміють лише зміну показника в середньому за весь період спостереження. Говорять, що тренд відсутній, якщо такої зміни (зростання чи спадання) у середньому немає.

У зв'язку з цим економіко-математична динамічна модель, де розвиток економічної системи моделюється через тренд, має назву ***трендової моделі***.

У наведених раніше прикладах показано, що в часових рядах економічних процесів можуть відбуватися також більш або менш регулярні коливання. Якщо вони мають строго періодичний або близький до нього характер і завершуються протягом одного часового періоду, то вони мають назву ***сезонних коливань***.

У тих випадках, коли період коливання становить кілька часових періодів (наприклад, років), говорять, що в часовому ряді є

довготривалий циклічний компонент. Тренд, сезонний і циклічний компоненти мають назву ***регулярних***, або ***систематичних*** компонентів часового ряду. Складову часового ряду, що залишається після вилучення з нього регулярних компонентів, раніше названо ***випадковою,*** або нерегулярною.

Вона є обов'язковою складовою часового ряду в економіці, бо випадкові фактори неминуче притаманні будь-якому економічному явищу.

Якщо систематичні регулярні компоненти часового ряду визначені правильно, то після їх вилучення залишковий компонент має бути ***випадковим*** компонентом часового ряду, тобто повинен мати такі властивості:

- характеризуватись випадковістю коливань рівнів залишкової послідовності (або простіше — залишків);
- відповідністю розподілу ймовірностей рівнів випадкового компонента нормальному закону розподілу;
- рівністю нулю математичного сподівання;
- незалежністю значень рівнів залишків, тобто відсутністю суттєвої між ними автокореляції.

Перевірка адекватності трендових моделей ґрунтується саме на перевірці виконання в залишках наведених вище чотирьох властивостей.

Якщо не виконується хоча б одна з них, модель визначається як неадекватна; навпаки, у разі виконання всіх чотирьох властивостей — модель є адекватною. Ця перевірка відбувається з використанням певних статистичних критеріїв, які докладніше буде розглянуто далі.

У більшості випадків фактичний рівень часового ряду наводиться як сума або добуток трендової, сезонного, циклічного й випадкового компонентів:

$$Y_t = Q_t + S_t + Z_t + U_t \qquad \text{або } Y_t = Q_t\, S_t\, Z_t\, U_t.$$

Модель, де часовий ряд наводиться як сума перелічених компонентів, має назву ***адитивної моделі***. Модель, де часовий ряд подається через добуток складових компонентів, тобто $Y_t = Q_t\, S_t\, Z_t\, U_t$, має назву ***мультиплікативної моделі***.

У цьому розділі розглядатимемо адитивні моделі, які найчастіше трапляються у практичному застосуванні.

Отже, виходячи з адитивної природи динамічних рядів, сформулюємо основні цілі їх аналізу:

- визначити, які з наведених щойно складових Q_t, S_t, Z_t, U_t формують рівні ряду $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$;

• розрахувати кількісні оцінки параметрів для тих регулярних функцій $f(t)$, $\varphi(t)$ і $\psi(t)$, що є складовими ряду $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$;

• перевірити адекватне поводження нерегулярної функції U_t;

• розрахувати ефективну прогнозну модель, виходячи з базового періоду часового ряду $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$.

11.4. Тренд часового ряду і його виявлення

Для моделювання тренду передусім необхідно провести попередній аналіз.

Попередній аналіз часових рядів економічних показників полягає насамперед у перевірці однорідності ряду, тобто у виявленні й усуненні ***аномальних значень*** рівнів ряду, а також визначенні ***повноти*** даних, можливості їх ***зіставлення*** і ***стійкості***.

Під аномальним рівнем розумітимемо окремі значення рівнів часового ряду, які суттєво впливають на основні часові характеристики ряду динаміки: середній рівень, середній приріст, середній темп зростання, середній темп приросту і т. ін., а також на відповідну трендову модель. Причинами аномальних спостережень можуть бути помилки технічного характеру, або ***помилки першого роду***, що виникають при агрегуванні або дезагрегуванні показників чи при передаванні інформації і т. ін. Помилки першого роду мають бути виявлені й усунуті.

Крім того, аномальні рівні в часових рядах можуть виникати через впливи факторів, що мають об'єктивний характер, але можуть діяти рідко, епізодично. Такі помилки мають назву помилки ***другого роду*** і не можуть бути усунутими.

Для виявлення аномальних явищ використовується ряд статистичних методів. Наведемо один з них: ***метод Ірвіна***.

Метод Ірвіна припускає використання такої формули:

$$\lambda = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y}, \quad t = 2, 3, \dots, n, \qquad (11.1)$$

де σ_y — середнє квадратне відхилення часового ряду,

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2}{n-1}}, \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}.$$

Розраховані значення $\lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_{n-1}$ порівнюються з критичним значенням критерію Ірвіна λ_α, і, якщо вони будуть більші за табличні, відповідне значення ряду y_t вважається аномальним. Рівень значущості α, як правило, береться $\alpha = 0{,}05$.

Після виявлення аномальних явищ необхідно з'ясувати причини їх виникнення. Якщо усунути ці причини немає можливості, то їхній рівень, як правило, замінюється середнім значенням ряду або арифметичною середньою двох сусідніх з ними рівнів і т. ін.

Злами в тенденції ряду говорять про зміну закономірності розвитку процесу або про зміну методики обчислення значень показників. Якщо значення в кінці ряду «випадає» із загальної тенденції, то без додаткової інформації про причини «викиду» на кінці ряду не можна визначити, що це — аномальне спостереження або свідчення зміни тенденції. У такому разі важливо провести якісний аналіз цих змін або дочекатись надходження нового спостереження. Якщо злам тенденції зумовлюється зміною методики розрахунку показника, то рівні ряду, які наводились попереду зламу, можуть бути використані в оцінках характеристик динаміки і для побудови моделі тільки після ***їх перерахунку за новою методикою***. Якщо ж злам тенденції відбиває зміну закономірностей розвитку процесу, то за інформаційну базу для статистичного аналізу потрібно взяти рівень останнього зламу тенденції.

Продовжуючи попередній аналіз часового ряду в напрямі виявлення тренду, необхідно провести статистичну перевірку наявності його в динамічному ряду. Для цього розроблено цілу низку методів [27]. Наведемо кілька з них, що найчастіше застосовується.

11.4.1. Метод перевірки різниць середніх рівнів. Реалізація цього методу складається з чотирьох етапів.

1-й етап. Початковий часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ розбивається на дві частини приблизно однієї довжини: n_1 і $n_2 = n - n_1$.

2-й етап. Для кожної частини ряду розраховується середнє значення і дисперсії:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1}; \qquad \sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1}\left(y_t - \bar{y}_1\right)^2}{n_1 - 1};$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n_2} y_t}{n_2}; \qquad \sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n_2}\left(y_t - \bar{y}_2\right)^2}{n_2 - 1}.$$

3-й етап. Перевіряється однорідність дисперсій обох частин за допомогою критерію Фішера F_α:

$$F_\alpha = \begin{cases} \sigma_1^2/\sigma_2^2, & \text{якщо}\, \sigma_1^2 > \sigma_2^2; \\ \sigma_2^2/\sigma_1^2, & \text{якщо}\, \sigma_2^2 > \sigma_1^2. \end{cases}$$

Рівень значущості α беруть таким, що дорівнює 0,1; 0,01 або 0,05. Якщо розраховане значення $F_\alpha^{(p)}$ менше за табличне $F_\alpha^{(m)}$, то гіпотеза про рівність дисперсій приймається і переходимо до четвертого етапу. Якщо $F_\alpha^{(p)}$ більше або дорівнює $F_\alpha^{(m)}$ — гіпотеза про рівність дисперсій відхиляється і робиться висновок, що даний метод про визначення наявності тренду відповіді не дає.

4-й етап. Перевіряється гіпотеза про відсутність тренду з використанням t-критерію Стьюдента. Для цього визначається розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою:

$$t_p = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \qquad (11.2)$$

де σ — середньоквадратичне відхилення різниці середніх, що визначається так:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}. \qquad (11.3)$$

Якщо розрахункове значення t_p менше або дорівнює табличному значенню t_α (із рівнем значущості α), то гіпотеза про відсутність тренду приймається у протилежному випадку, тобто коли $t_p > t_\alpha$, то з імовірністю $1 - \alpha$ приймається гіпотеза про існування тренду.

11.4.2. Метод Фостера—Стюарта. Основні показники методу Фостера—Стьюарта такі:

$$W = \sum_{t=1}^{n} \omega_t \quad \text{і} \quad D = \sum_{t=1}^{n} d_t,$$

де $\omega_t = C_t + V_t$, $d_t = C_t - V_t$, причому параметри C_t і V_t мають наведені далі значення:

$$C_t = \begin{cases} 1, \text{коли}\, y_t > y_{t-1}, \ldots\; y_1; \\ 0\ \text{в інших випадках}. \end{cases} \quad V_t = \begin{cases} 1, \quad \text{коли}\, y_t < y_{t-1}, \ldots y_1; \\ 0\ \text{в інших випадках}. \end{cases} \qquad (11.4)$$

З наведених співвідношень випливає, що $0 \le W \le n-1$.

Якщо всі рівні ряду однакові, тобто $y_1 = y_2, \ldots = y_n$, то $W = 0$.

Якщо $y_1 < y_2 \ldots y_n$, то $W = n - 1$.

Аналогічно знаходять: $-(n-1) \le D \le n-1$.

Показники D і W застосовуються для визначення тенденції зміни в часі відповідного середнього значення $\bar{y}_t$ і дисперсії S_t.

Після визначення для ряду значень D і W за критерієм Стьюдента перевіряються гіпотези про відсутність тенденції в середньому значенні D і W:

$$t_p^{(1)} = \frac{D}{\sigma_2}; \quad t_p^{(2)} = \frac{W - \overline{W}}{\sigma_1}, \tag{11.5}$$

де σ_1 і σ_2 — середні квадратичні відхилення для W і D,

$\overline{W}$ — середнє значення параметра W.

Значення $\overline{W}$, σ_1 і σ_2 знаходяться за табл. 11.4, яку розроблено авторами методу.

Таблиця 11.4

n	$\overline{W}$	σ_1	σ_2	n	$\overline{W}$	σ_1	σ_2
10	3,86	1,29	1,96	60	7,36	2,20	2,71
15	3,64	1,52	2,15	65	7,52	2,37	2,74
20	5,19	1,68	2,28	70	7,67	2,67	2,77
25	5,65	1,79	2,37	75	7,80	2,30	2,79
30	5,99	1,88	2,45	80	7,93	2,32	2,82
35	6,29	1,96	2,51	85	8,05	2,35	2,84
40	6,56	2,02	2,56	90	8,16	2,37	2,86
45	6,79	2,07	2,61	95	8,27	2,40	2,88
50	7,00	2,12	2,64	100	8,37	2,42	2,89
55	7,19	2,16	2,68	—	—	—	—

Теоретичне значення t-критерію визначається з табл. 11.4 за 5 %-го рівня значущості. Якщо $t_p^{(1)} > t_{теор}$ і $t_p^{(2)} > t_{теор}$, то гіпотеза про відсутність тренду з імовірністю 0,95 відхиляється.

Якщо ж $t_p^{(1)}$ і $t_p^{(2)} \le t_{теор}$, то приймається гіпотеза про відсутність тренду.

✓*Приклад 11.4.*

Розглянемо динамічний ряд y_t, який складається з рівнів:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, тобто $n = 10$.

Визначимо наявність тенденції за допомогою наведених раніше двох методів.

• ***Метод різниць середніх***

Ряд поділимо на дві половини. Перша половина ряду: 2, 4, 6, 8, 10, друга — решта значень. Середнє значення першої половини ряду $\bar{y}_t^{(1)} = 6$. Для другої половини ряду $\bar{y}_t^{(2)} = 16$.

За формулою (11.2) визначаємо:

$$t_p = \frac{16-6}{\sqrt{\frac{2\sum_{t=1}^{10}(y_t-6)^2}{10-2}}\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = 5.$$

Знаходимо теоретичне значення критерію Стьюдента (для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$) $t_{\text{теор}} = 2{,}31$. Таким чином, $t_p > t_{\text{теор}}$ і гіпотеза про відсутність тренду в середніх значеннях ряду відхиляється, тобто приймається гіпотеза про те, що ряд має тенденцію розвитку.

• ***Метод Фостера—Стюарта***

Застосовуючи формули (11.4), бачимо, що $C_t = 0$, а $V_t = 1$.

Тоді $W = 9$ і $D = 9$. З табл. 11.4 знаходимо, що $\overline{W} = 3.86$; $\sigma_1 = 1{,}29$; $\sigma_2 = 1{,}96$.

Отже, для значення D: $t_p^{(1)} = 9/1{,}96 = 4{,}58$;

для значення W: $t_p^{(2)} = (9 - 3{,}86) / 1{,}29 = 5{,}14 / 1{,}29 = 2{,}42$.

Таким чином, $t_p^{(2)} = 4{,}98 > 2{,}31$; $t_p^{(2)} = 2{,}42 > 2{,}31$.

Отже, у даному часовому ряді за цим методом з імовірністю 0,95 підтверджується наявність тренду.

Порівнюючи наведені два методи тестування наявності тренду, доходимо висновку, що другий, тобто метод Фостера—Стюарта, є ефективнішим, оскільки тестує не тільки середнє значення, а й дисперсію ряду.

11.4.3. Методи визначення тренду. *11.4.3.1. Метод простої ковзної середньої.* Рівні економічних часових рядів коливаються, згідно з чим тенденція розвитку економічних явищ у часі явно не може бути визначена через випадкові відхилення рівнів у той чи в інший бік. Щоб якнайчіткіше визначити основну тенденцію ряду (тренд) для подальшого прогнозування процесу, використовуючи ту чи іншу трендову модель, розроблені методи ***згладжування*** (вирівнювання) часових рядів, які називають ***механічним методом визначення тренду***.

Отже, статистичні методи згладжування часових рядів поділяють на дві групи: методи механічного методу згладжування ряду та аналітичне вирівнювання, базоване на кривих зростання.

Сутність методів механічного згладжування полягає в такому. Береться кілька перших рівнів часового ряду (три, чотири, п'ять чи сім), кількість яких утворює ***інтервал згладжування***. Для них добирається поліном, степінь якого має бути меншим за кількість рівнів, що входять в інтервал згладжування; за допомогою полінома розраховуються нові, вирівняні значення рівнів до середини інтервалу. Далі інтервал згладжування зрушується на один рівень праворуч (або вниз), обчислюється наступне згладжуване значення і т. ін.

Найпростішим методом механічного згладжування є ***метод простої ковзної середньої.*** Спочатку для часового ряду $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ визначається інтервал згладжування $m (m < n)$. Якщо потрібно згладити дрібні безпорадні коливання, то інтервал згладжування беруть по змозі більшим; інтервал згладжування зменшують, якщо потрібно зберегти дрібніші коливання. За інших однакових умов інтервал згладжування рекомендується брати непарним. Для перших m рівнів часового ряду обчислюється їхнє середнє арифметичне; це буде згладжуване значення рівня ряду, яке відповідає середині інтервалу згладжування.

Далі інтервал згладжування зсувається на один рівень праворуч (або вниз), повторюється обчислення середньої арифметичної і т. д. Для обчислення згладжених рівнів ряду $\tilde{y}_t$ застосовуємо формулу:

$$\tilde{y}_t = \frac{\sum\limits_{i=t-p}^{t_{t+p}} y_i}{m}, \quad t > p, \tag{11.6}$$

де i — порядковий номер рівня ряду;

$p = \dfrac{m-1}{2}$ (для непарних m; для парних m формула ускладнюється).

Отже, послідовно проводячи такі обчислення, дістанемо $n - m + 1$ згладжених значень рівнів ряду; згідно з цим перші й останні p рівнів ряду губляться (не згладжуються) — це є першим недоліком цього методу.

Другим недоліком є те, що він застосовний лише для рядів, що мають лінійну тенденцію.

✓***Приклад 11.5.*** Провести згладжування випуску продукції за 15 років методом простої ковзної середньої. Ряд наводиться в табл. 11.5, де подано також результати обчислення. Згладжування проведено за п'ятирівневим інтервалом.

Таблиця 11.5

ЗГЛАДЖУВАННЯ МЕТОДОМ КОВЗНОЇ СЕРЕДНЬОЇ

Рік, t	Випуск продукції, шт.	П'ятирівневі суми	Згладжування ряду випуску продукції за п'ятирівневим інтервалом згладжування $\tilde{y}_t$	Згладжування випуску продукції за методом експоненціального згладжування y_t
1	30	—	—	30,67
2	31	—	—	30,73
3	31	—	30,8	30,76
4	32	154	30,8	30,88
5	30	154	31,0	30,79
6	30	155	31,0	30,71
7	32	155	31,2	30,84
8	31	156	31,4	30,86
9	33	157	31,6	31,07
10	31	158	31,8	31,065
11	31	159	32,0	31,06
12	33	159	32,2	31,26
13	32	160	32,6	31,33
14	33	161	—	31,49
15	34	163	—	31,75

Обчислимо відповідно перший, другий і третій рівні згладженого ряду:

$$\tilde{y}_1 = \frac{30+31+31+32+30}{5} = \frac{154}{5} = 30{,}8;$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{31+31+32+30+30}{5} = \frac{154}{5} = 30{,}8;$$

$$\tilde{y}_3 = \frac{31+32+30+30+32}{5} = \frac{155}{5} = 31$$

і т. ін.

Результати обчислення занесено в графу 4 табл. 11.5.

11.4.3.2. Метод експоненціального згладжування. Його особливість полягає в тому, що у процедурі відшукання загладжуваного рівня застосовуються значення тільки попередніх рівнів ряду, які беруться з певною вагою. Вага рівня ряду зменшується залежно від того, на скільки віддалений рівень від моменту часу, для якого визначається згладжуване значення. Вага рівнів знижується експоненціально, що залежить від зазначеної величини параметра згладжування α, значення якого міститься в інтервалі $0 < \alpha < 1$.

Якщо для вихідного часового ряду $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ відповідні згладжені значення рівнів ряду позначити через S_t, $t = 1,2, \ldots n$, то експоненціальне згладжування розраховується за формулою:

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\, S_{t-1}, \tag{11.7}$$

де α — параметр для згладжування; $1 - \alpha$ має назву коефіцієнта дисконтування.

Використовуючи наведені щойно рекурентні співвідношення для всіх рівнів ряду, починаючи з першого, можна дістати таке співвідношення:

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)\, S_{t-1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\,[\alpha y_{t-1} + (1 - \alpha)S_{t-2}] = \\ &= \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)\, y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \cdot [\alpha y_{t-2} + (1 - \alpha)\, S_{t-2}] = \\ &= \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)\, y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \ldots + \alpha\,(1 - \alpha)^{\tau} y_{t-\tau} + (1-\alpha)^t y_0. \end{aligned}$$

У загальному вигляді маємо:

$$S_t = \alpha \sum_{\tau=0}^{t-1} (1 - \alpha)^{\tau}\, y_{t-\tau} + (1 - \alpha)^t S_0, \tag{11.8}$$

тобто згладжене значення S_t є зваженою середньою всіх попередніх рівнів.

У практичних задачах обробки економічних часових рядів рекомендують вибирати параметри згладжування в інтервалі від 0,1 до 0,3 [28]. Більш обґрунтованих рекомендацій α поки що немає.

В окремих випадках Р. Браун пропонує визначати величину стосовно α, виходячи з величини інтервалу згладжування ряду: $\alpha = \frac{2}{m+1}$, де m — інтервал згладжування ряду.

Що стосується початкового параметра S_0, то в конкретних задачах його беруть або за значенням першого рівня ряду y_1, або як середню арифметичну кількох перших членів ряду, наприклад y_1, y_2, y_3:

$$S_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Цей метод вибору значення S_0 забезпечує добру відповідність загладжуваного й вихідного рядів для перших рівнів. Якщо ж останні згладжені рівні ряду, розраховані цим методом з певним параметром α, починають різко відрізнятися від відповідних значень вихідного ряду, то необхідно змінити параметр α на інший.

Перевагою цього методу згладжування є те, що не губляться як початкові, так і кінцеві рівні ряду.

Розрахунок ряду, що характеризує випуск продукції за методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0,1$, наведено в табл. 11.5.

Початкове згладжуване значення S_0 здобуто як середнє значення перших рівнів ряду:

$$S_0 = S_1 = \frac{30+31+31}{3} = 30,666 \approx 30,67;$$

$$S_2 = 0,1y_2 + (1-0,1)S_1 = 0,1 \cdot 31 + 0,9 \cdot 30,67 = 30,73;$$

$$S_3 = 0,1y_3 + (1-0,1)S_2 = 0,1 \cdot 31 + 0,9 \cdot 30,73 = 30,76;$$

$$S_4 = 0,1y_4 + (1-0,1)S_3 = 30,88$$

і т. ін.

Результати розрахунку випуску продукції, за методом експоненційного згладжування, наведені в табл. 11.5 (графа 5).

11.5. Трендові моделі за кривими зростання

11.5.1. Загальна характеристика кривих зростання. Якщо існує певна закономірність в динаміці деякого економічного явища або процесу, то тенденція цієї зміни може бути встановлена добором потрібної функції

$$y(t) = f(t).$$

Така емпірична функція, що має назву кривої зростання, є ефективним засобом дослідження часового ряду і його прогнозування.

Щоб правильно підібрати найкращу криву зростання для моделювання економічного явища, необхідно знати особливості кожного виду кривих. Найчастіше в економіці використовуються поліноміальні, експоненціальні та S-подібні криві зростання.

• Найпростіші поліноміальні криві зростання мають вигляд:

$y_t = a_0 + a_1 t$ (поліном першого степеня);

$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ (поліном другого степеня);

$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ (поліном третього степеня);

....

$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_p t^p$ (поліном p-го степеня),

де a_1, a_2, a_p — параметри многочлена; t — незалежна змінна;

• гіперболічна функція $y_t = a_0 + a_1/x$;

• експоненціальні функції $y_t = a(1 + r)^t$ або $y_t = ab^t$; $y_t = ae^{b^t}$, де $r = \text{const}$;

• модифікована експоненціальна функція $y_t = k + ab^t$;

• логістична крива:

$$y_t = \frac{k}{1 + be^{-at}}, \quad \text{або} \quad y_t = \frac{k}{1 + 10^{a+bt}};$$

• крива Гомперця: $y_t = ka^{b^t}$; $0 < b < 1$

і т. ін.

Параметри многочленів прямої, параболи, полінома третього порядку мають конкретну інтерпретацію, що залежить від змісту процесу, описуваного часовим рядом. Зокрема, параметр a_1 характеризує швидкість зростання, a_2 — прискорення зростання, a_3 — зміну прискорення зростання, a_0 — вільний член функції.

Парабола другого порядку описує рух із ***рівномірною зміною прискорення*** як у додатному, так і в протилежному напрямі.

Характерним для таких економічних процесів є рівноприскорене зростання або спад їх розвитку.

У параболі третього порядку ***приріст*** може змінювати свій знак один раз або двічі.

Експоненціальна функція $y_t = ab^t$ описує процес зі сталим темпом зростання і сталим темпом приросту. Якщо $b > 1$, то крива зростає зі збільшенням t, а при $b < 1$ — спадає. Прологарифмувавши ліву і праву частини розглядуваного виразу, дістанемо; $\log y_t = \log a + t\log b$. Це лінійно-логарифметична функція часу, що полегшує її розрахунок.

Процеси, що характеризуються насиченням, описуються модифікованою експонентою

$$y_t = k + ab^t, \tag{11.9}$$

де a, b — параметри і $a < 0$, $0 < b < 1$, k — асимптота функції.

У маркетингових дослідженнях, відбиваючи основну тенденцію у страхових, демографічних та інших розрахунках, використовують функцію Гомперця,

$$y_t = ka^{b^t}, \tag{11.10}$$

де a, b — додатні параметри; k — асимптота функції
або

$$\log y_t = \log k + b^t \log a.$$

Найчастіше розглядається функція, коли і $b < 1$, і $\log a < 0$, тобто коли на першому етапі приріст є невеликим і ***повільно*** збільшується зі зростанням t.

На другому ж етапі приріст швидко починає зростати і після досягнення точки перегину повільно прямує до асимптотичної прямої. Такою кривою описують, наприклад, динаміку показників рівня життя, моделюють показники народжуваності, смертності населення і т. ін.

В економіці вельми поширені процеси, для яких характерне на початку повільне зростання, а далі, з часом, воно прискорюється і наприкінці — спадає, наближаючись до певної межі (асимптоти).

Наприклад, попит на нову продукцію, яка ще недавно була дефіцитною, у міру зростання її виробництва починає поволі спадати і зупиняється на певному рівні, наближаючись до асимптоти.

Для описування таких економічних явищ використовуються логістичні криві різного виду:

$$y_t = \frac{k}{1 + ab^t}, \quad y_t = \frac{k}{1 + 10^{a+bt}} \qquad \text{і т. ін.}$$

11.5.2. Методи вибору форми тренду. Вибір апроксимуючої кривої, як правило, відбувається вже за згладженим рядом.

Існує кілька підходів до вибору форми кривої, що адекватна заданому динамічному ряду.

Найпростіший перший шлях — ***візуальний***, тобто вибір форми тренду на основі графічного зображення динамічного ряду. На результат вибору впливає масштаб графічного зображення.

Графіки різних кривих зростання наведено на рис. 11.5. За графіком і за результатами теоретичного аналізу даної тенденції можна передбачити характер тієї чи іншої динаміки економічного процесу.

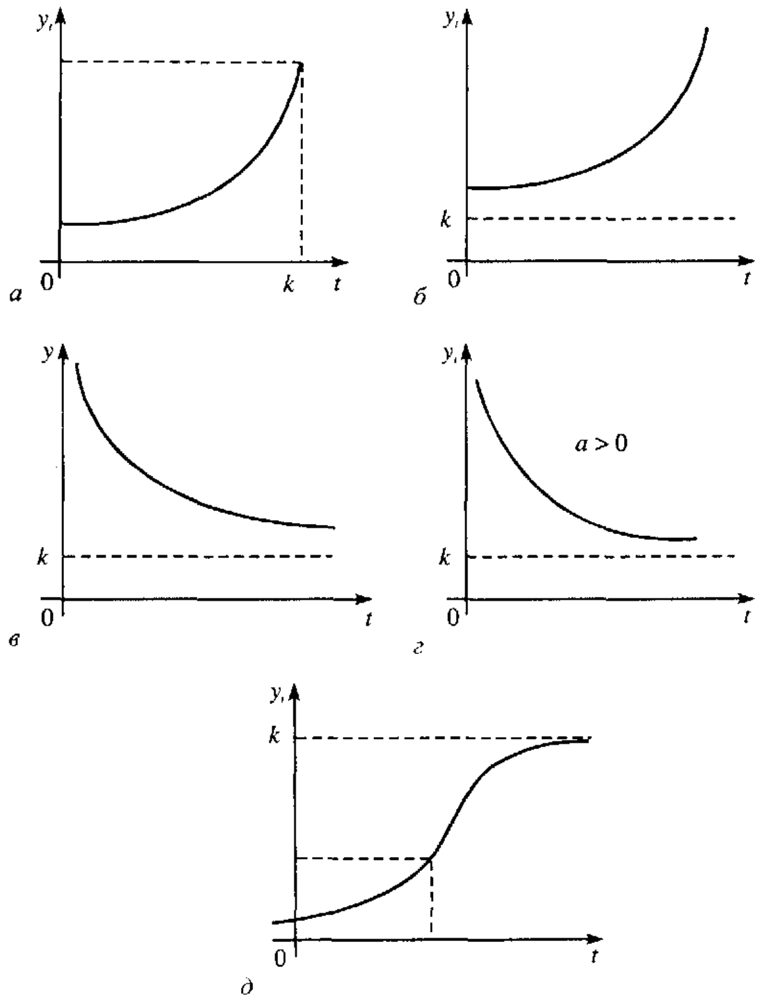


Рис. 11.6. Графіки різних кривих зростання:
а — параболічної; *б*, *в*, — модифікованої експоненти;
г — кривої Гомперця; *д* — логістичної кривої

Другий спосіб полягає у використанні методу послідовних різниць, згідно з яким обчислюються ***перший, другий*** та вищий порядки різниць рівнів часового ряду:

$$\Delta_t^{(1)} = y_t - y_{t-1}; \qquad \Delta_t^{(3)} = \Delta_t^{(2)} - \Delta_{t-1}^{(2)};$$

$$\Delta_t^{(2)} = \Delta_t^{(1)} - \Delta_{t-1}^{(1)}; \qquad \Delta_t^{(n)} = \Delta_t^{(n-1)} - \Delta_{t-1}^{(n-1)}.$$

Обчислення проводяться доти, доки різниці не будуть майже однаковими. Порядок рівності таких різниць беруть за степінь многочлена для вирівнювання основної тенденції динаміки. Якщо перші різниці майже рівні, тренд ***описують прямою***; якщо однакові значення мають другі різниці, динаміку вирівнюють ***параболою другого порядку*** і т. д.

Третій спосіб полягає в тому, що за критерій вибору форми тренду беруть суму квадратів відхилень значень рівнів від розрахункових, здобутих на основі вирівнювання часового ряду. Із множини функцій вибирають таку, якій відповідає мінімальне значення цього критерію.

Четвертий спосіб — метод характеристик приростів — полягає в тому, що вибір форми кривої відбувається за попередньою статистичною обробкою динамічного ряду.

Попередня обробка складається з таких етапів:

1) згладжування часового ряду методом ковзної середньої;

2) обчислення середніх приростів для згладженого ряду;

3) обчислення похідних характеристик приростів.

Згладжування часового ряду ковзною середньою дає можливість ***«грубо»*** згладити тенденцію зміни ряду — тренд;

4) далі визначають середні прирости і їхні похідні характеристики (табл. 11.6)

$$\Delta_t, \quad \Delta_t^{(2)}, \quad \frac{\Delta_t}{y_t}, \quad \log\frac{\Delta_t}{y_t}, \quad \log\frac{\Delta_t}{y_t^2}.$$

Зауважимо, що вибір кривої зростання, навіть за табл. 11.6, потребує копіткого аналізу. Як правило, це рішення неоднозначне. Воно зводиться до одержання кількох альтернатив вибраної кривої. Далі за допомогою специфікації потрібно вибрати найкращий варіант, використовуючи певний кількісний критерій.

Таблиця 11.6

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗМІНИ ПОКАЗНИКІВ СЕРЕДНІХ ПРИРОСТІВ ДЛЯ ДЕЯКИХ ВИДІВ ФУНКЦІЙ

Характеристика приростів	Характер зміни	Вид функції
Δ_t	Майже рівні	Пряма $y = a_0 + a_1 t$
$\Delta_t^{(2)}$	Змінюється лінійно	Парабола 2-го порядку $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
$\Delta_t^{(3)}$	Те саме	Парабола 3-го порядку $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
$\dfrac{\Delta_t}{y_t}$	Майже рівні	Експонента $y = ab^t$
$\log \Delta_t$	Змінюється лінійно	Модифікована експонента $y = k + ab^t$
$\log \dfrac{\Delta_t}{y_t}$	Те саме	Функція Гомперця $y_t = ka^{b^t}$
$\log \dfrac{\Delta_t}{y_t^2}$	— // —	Логістична функція $y_t = \dfrac{1}{1+10^{a+bt}}$ або $\dfrac{k}{1+be^{-at}}$

11.5.3. Розрахунок параметрів кривих зростання методом найменших квадратів. Після того як було вибрано апроксимуючу модель (криву зростання), розглянемо методи визначення параметрів кривих зростання.

Параметри поліноміальних кривих оцінюються, як правило, ***методом найменших квадратів*** (1МНК). Цільовою функцією тут буде мінімізація суми квадратів відхилень фактичних рівнів ряду від відповідно вирівняних за певною кривою зростання.

З попередніх розділів (розд. 2; 4) відомо, що згідно з цим методом необхідно розв'язати систему нормальних рівнянь, яка може мати різну кількість параметрів залежно від виду функції зростання. Пояснювальною змінною в цих рівняннях буде змінна часу t. Розв'язуючи цю систему нормальних рівнянь відносно параметрів $a_0, a_1, \dots a_p$, знаходимо їхні оцінки.

Наведемо системи нормальних рівнянь для різних видів функцій.

• Пряма $y_t = a_0 + a_1 t + u_t$, де u_t — випадкова складова (залишки), яким відповідають припущення 1 МНК (див. розд. 4).

Система нормальних рівнянь

$$\begin{cases} na_0 + a_1\Sigma t = \Sigma y_t; \\ a_0\Sigma t + a_1\Sigma t^2 = \Sigma y_t t, \end{cases}$$

де знак суми поширюється на весь часовий ряд $t = 1, 2, 3, ..., n$.

• Парабола другого порядку $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + u_t$.

Система нормальних рівнянь

$$\begin{cases} na_0 + a_1\Sigma t + a_2\Sigma t^2 = \Sigma y_t; \\ a_0\Sigma t + a_1\Sigma t^2 + a_2\Sigma t^3 = \Sigma y_t t; \\ a_0\Sigma t^2 + a_1\Sigma t^3 + a_2\Sigma t^4 = \Sigma y_t t^2. \end{cases}$$

• Парабола третього порядку $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + u_t$.

Система нормальних рівнянь

$$\begin{cases} na_0 + a_1\Sigma t + a_2\Sigma t^2 + a_3\Sigma t^3 = \Sigma y_t; \\ a_0\Sigma t + a_1\Sigma t^2 + a_2\Sigma t^3 + a_3\Sigma t^4 = \Sigma y_t t; \\ a_0\Sigma t^2 + a_1\Sigma t^3 + a_2\Sigma t^4 + a_3\Sigma t^5 = \Sigma y_t t^2; \\ a_0\Sigma t^3 + a_1\Sigma t^4 + a_2\Sigma t^5 + a_3\Sigma t^6 = \Sigma y_t t^3. \end{cases}$$

У матричному вигляді система нормальних рівнянь записується так:

$$T'T\hat{A} = T'Y,$$

де T — матриця розміром $n \times m$, n — кількість рівнів ряду; m — кількість параметрів у функції зростання;

T' — матриця розміром $m \times n$, транспонована до матриці T.

Наприклад, для кривої зростання $y_t = a_0 + a_1 t + u_t$ матриця

$$T = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & y_n \end{pmatrix}, \qquad T' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & . & . & . & y_n \end{pmatrix};$$

Y — вектор-стовпець рівнів ряду;

$\hat{A}$ — вектор-стовпець розміром $m \times 1$ оцінок параметрів функції зростання.

Розв'язуючи систему нормальних рівнянь відносно $\hat{A}$, знаходимо його значення

$$\hat{A} = (T'T)^{-1} T'Y.$$

Параметри експоненційних і S-подібних кривих відшукуються складнішими методами.

Так, для простої експоненти

$$\hat{y}_t = ab^t$$

спочатку прологарифмуємо:

$\lg\hat{y}_t = \lg a + t\lg b$ — дістали лінійно-логарифмічну функцію.

Позначивши $\lg\hat{y}_t = y_t^*$; $\lg a = a^*$; $\lg b = b^*$, дістанемо лінійну функцію

$$y_t^* = a^* + b^* t + u_t.$$

Наведемо систему нормальних рівнянь для цієї функції:

$$\begin{cases} na^* + b^*\Sigma t = \Sigma y_t^*; \\ a^*\Sigma t + b^*\Sigma t^2 = \Sigma y_t^* t. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему нормальних рівнянь, знайдемо a^* і b^*. Застосуємо формули розрахунку параметрів для простої регресії:

$$b^* = \frac{n\Sigma y_t^* t - \Sigma y_t^* \Sigma t}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2} = \lg b\,; \quad a^* = \overline{y}^* - b^*\overline{t} = \lg a.$$

Знаючи $\lg a$ і $\lg b$, неважко знайти й самі оцінки $\hat{a}$ і $\hat{b}$.

Визначаючи параметри кривих зростання, що мають асимптоти (модифікована експонента, крива Гомперця, логістичні криві), розрізняють два випадки. Якщо значення асимптоти k відоме раніше, то логарифмуванням і нескладними перетвореннями формул складаємо системи нормальних рівнянь, де невідомими є логарифми параметрів кривої.

Наприклад, нехай необхідно знайти параметри модифікованої експоненти $\hat{y}_t = k + ab^t$, де k — асимптота, значення якої відоме.

Перенесемо значення k в ліву частину й, прологарифмувавши вираз $y_t - k = ab^t$, дістанемо: $\lg(y_t - k) = \lg a + t\cdot\lg b$.

Позначимо $\lg(y_t - k) = y^*$; $\lg a = a^*$; $\lg b = b^*$.

Тоді $y_t^* = a^* + tb^*$, тобто функцію перетворили на лінійно-логарифмічну.

Запишемо для неї систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} na^* + b^*\Sigma t = \Sigma y_t^*; \\ a^*\Sigma t + b^*\Sigma t^2 = \Sigma y_t^* t. \end{cases}$$

Отже, розв'язок системи дістанемо як у випадку функції простої експоненти.

У разі, коли значення асимптоти k невідоме, для знаходження параметрів зазначених кривих зростання використовують наближені методи: метод трьох точок, метод трьох сум і т. ін. [1].

✓***Приклад 11.6.*** За одинадцять років (1991—2001) відомі дані випуску гранульованого фосфату підприємствами України. Припускаючи, що випуск продукції відбувається за простою експонентою $\hat{y}_t = a10^{bt} = a(1+r)^t$, розрахувати параметри кривої зростання; визначити середньорічний приріст і коефіцієнт варіації випуску продукції.

Вихідні дані і розрахунки відповідних величин наведено в табл. 11.6.

Оцінимо параметри кривої зростання $\hat{y}_t = a10^{bt}$.

Прологарифмуємо функцію: $\lg \hat{y}_t = \lg a + bt$.

Позначимо $\lg \hat{y}_t = y_t^*$; $\lg a = a^*$.

Складемо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} na^* + b\Sigma(t - t_0) = \Sigma y_t^*; \\ a^*\Sigma(t - t_0) + b^*\Sigma(t - t_0)^2 = \Sigma y_t^*(t - t_0), \end{cases}$$

або, якщо $t_0 = 6$, маємо

$$\begin{cases} 11\hat{a}^* + 0 \cdot \hat{b}^* = 22{,}4687; \\ 0 \cdot \hat{a}^* + 110\hat{b}^* = 4{,}4708. \end{cases}$$

З першого рівняння: $\hat{a}^* = \lg\hat{a} = 2{,}0426$; отже, $\hat{a} = 110{,}04$.

З другого рівняння $\hat{b} = 0{,}0406$.

Згідно з цим крива зростання має вигляд:

$$\hat{y}_t = 110{,}04 \cdot 10^{0{,}0406t} = 110{,}04(1 + 0{,}098)^t.$$

Отже, дістали функцію зростання за законом складних процентів із річним приростом продукції 9,8 %.

Таблиця 11.6

Рік	t	y_t	$t - t_0$ ($t_0 = 6$)	$(t - t_0)^2$	$\lg y_t$	$t\lg y_t$	$\hat{y}_t$	Залишки u_t	u_t^2
1991	1	68	–5	25	1,8325	–9,1625	69,11	–1,1	1,23
1992	2	75	–4	16	1,8751	–7,5004	75,90	–0,90	0,81
1993	3	84	–3	9	1,9243	–5,7729	83,53	+0,47	0,22
1994	4	93	–2	4	1,9685	–3,9370	91,49	+1,51	2,28
1995	5	101	–1	1	2,0043	–2,0043	100,50	–0,50	0,25
1996	6	110	0	0	2,0414	0	110,40	–0,40	0,16
1997	7	121	1	1	2,0528	2,0828	121,20	–0,20	0,04
1998	8	135	2	4	2,1303	4,2606	132,90	+2,10	4,41
1999	9	150	3	9	2,1761	6,5283	146,0	+4,0	16,0
2000	10	155	4	16	2,1903	8,7612	160,3	–5,3	28,09
2001	11	175	5	25	2,2430	11,2150	176,0	–1,0	1,0
Сума		1267	0	110	22,4686	4,4708		1,33	54,69

Середнє значення випуску гранульованого фосфату становить

$$\bar{y}_t = \frac{1267}{11} = 115,18\,.$$

Середній квадрат відхилень фактичних значень випуску продукції від вирівняних за експонентою подається так:

$$\sigma_u^2 = \frac{54,69}{11} = 4,97,$$

а середнє квадратичне відхилення буде $\sigma_u = \sqrt{4,97} = 2,23$.

Таким чином, коефіцієнт варіації

$$(\sigma_u / \bar{y}_t) \cdot 100 = (2,23/115,18) \cdot 100\ \% = 1,9\ \%.$$

Звідси маємо, що розраховану криву зростання

$$\hat{y}_t = 110,04 \cdot 10^{0,0406t} = 110,04(1 + 0,098)^t$$

дістанемо з досить високою точністю, бо коефіцієнт варіації менший ніж 5 %.

11.5.4. Оцінка адекватності й точності трендових моделей. Незалежно від того, яким способом вибрано функцію зростання і розраховано її параметри, питання про можливість її застосування для аналізу і прогнозування того чи іншого економічного явища може бути розв'язане тільки після встановлення її ***адекватності***, тобто встановлення відповідності розрахованої моделі досліджуваному об'єктові чи процесу.

Звичайно, адекватність розглядається не взагалі, а саме за тими властивостями моделі, що їх дослідник вважає істотними. Трендова модель $\hat{y}_t$ конкретного часового ряду y_t буде адекватною, якщо вона правильно відбиває систематичні компоненти часового ряду. Ця вимога еквівалентна тому, щоб залишки $u_t = y_t - \hat{y}_t\ (t = \overline{1, n})$ задовольняли властивостям випадкової складової часового ряду, котрі наводились в розділі 4 (див. підрозд. 4.3), а саме: *випадковість коливань послідовності залишків і відповідність їх нормальному законові розподілу; рівність нулю математичного сподівання; незалежність значень їхніх рівнів.*

Розглянемо перевірку деяких основних властивостей випадкової складової часового ряду.

11.5.4.1. Перевірка випадковості коливань рівнів послідовності залишків. Ця перевірка має бути проведена передусім для підтвердження гіпотези про достовірність вибору виду тренду.

Для дослідження випадковості відхилень від тренду нам потрібно розрахувати послідовність залишків $u_t = y_t - \hat{y}_t$ ($t = \overline{1, n}$).

Характер цих відхилень вивчається за допомогою низки критеріїв. Одним з них є ***метод серій***, що ґрунтується на ***медіані*** вибірки.

Алгоритм методу серій:

Крок 1.

Ряд залишків u_t ранжується в порядку зростання (або спадання) і знаходиться медіана $u_{Me} = u_{(n+1)/2}$, коли n — непарне,

і $u_{Me} = (u_{n/2} + u_{(n/2)+1})/2$, коли n — парне.

Крок 2.

Повертаючись до початкової послідовності залишків (перед ранжуванням їх), кожне значення порівнюється з медіаною u_{Me}:

якщо $u_t > u_{Me}$, то ставиться знак «+»;

якщо $u_t < u_{Me}$, то ставиться знак «–»;

якщо $u_t = u_{Me}$, відповідне значення u_t не враховується.

Утворюється послідовність, що складається з плюсів і мінусів.

Означення. *Послідовність плюсів або мінусів, що йдуть підряд, має назву* ***серії.***

> ***Примітка:***
> Якщо є один плюс (мінус), що чергується з мінусом (плюсом), то його потрібно вважати ***окремою серією.***

Крок 3.

Визначається загальна кількість серій V і найбільша протяжність однієї з серій k_{max}.

Для того, щоб послідовність залишків мала випадковий характер, k_{max} не може бути досить великою, а кількість серій — не досить малою.

Крок 4.

Для 5 %-го рівня значущості розраховуються дві нерівності, що мають виконуватись одночасно:

$$k_{max} < [3{,}3\ (\lg n + 1)];$$

$$V > [1/2(n + 1 - 1{,}96\sqrt{n-1})],$$

де квадратні дужки визначають цілу частину числа.

Якщо хоча б одна нерівність порушується, то гіпотеза про випадковий характер залишків часового ряду відхиляється і, відповідно, трендова модель (крива зростання) є ***неадекватною***.

Іншим критерієм, який досить часто застосовується для перевірки випадковості залишків, є ***критерій піків (поворотних точок).***

Сутність його полягає в такому.

Крок 1.

У послідовності залишків вибираються поворотні точки.

Означення. *Поворотною точкою є значення рівня залишків, що більше (менше) від обох сусідніх рівнів, тобто*

$u_{t-1} < u_t > u_{t+1}$, або $u_{t-1} > u_t < u_{t+1}$.

Крок 2.

Визначається загальна кількість поворотних точок П.

Крок 3.

Обчислюється математичне сподівання поворотних точок $\overline{П}$ і їх дисперсія $\sigma_п^2$ за умови випадкової вибірки залишків:

$$\overline{П} = 2/3(n-2);\ \sigma_п^2 = (16n-29)/90.$$

Крок 4.

Критерієм випадковості залишків з 5 %-м рівнем значущості має бути виконання нерівності

$$П > [\,\overline{П} - 1{,}96\sqrt{\sigma_П^2}\,],$$

де квадратні дужки тут теж означають цілу частину числа. Якщо ця нерівність не виконується, трендова модель вважається ***неадекватною.***

11.5.4.2. Перевірка відповідності розподілу випадкової компоненти нормальному закону. Ця перевірка може бути проведена лише наближено за допомогою дослідження показників асиметрії γ_1 і ексцесу γ_2.

Для нормального закону розподілу ці показники в генеральній сукупності дорівнюють нулю.

Припускаємо, що відхилення від тренду є вибіркою з генеральної сукупності.

Обчислимо вибіркові значення асиметрії та ексцесу і їхні похибки.

Вибіркова асиметрія $\hat{\gamma}_1$ і її похибка $\hat{\sigma}_{\gamma_1}$ дорівнює:

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{n}^{1} u_t^2\right)^3}}; \qquad \hat{\sigma}_{\gamma_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}.$$

Вибірковий ексцес $\hat{\gamma}_2$ і його похибка $\hat{\sigma}_{\gamma_2}$ дорівнюють:

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^2\right)} - 3\,;$$

$$\hat{\sigma}_{\gamma_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}\,.$$

Якщо одноразово виконуються дві нерівності

$$|\,\hat{\gamma}_1| < 1{,}5\,\hat{\sigma}_{\gamma_1}; \qquad |\,\hat{\gamma}_2 + 6/(n+1)\,| < 1{,}5\,\hat{\sigma}_{\gamma_2},$$

то гіпотеза про нормальний розподіл випадкових залишків приймається і модель вважається ***адекватною.***

Якщо виконується хоча б одна нерівність

$$|\,\hat{\gamma}_1| \geq 2\,\hat{\sigma}_{\gamma_1}; \qquad |\,\hat{\gamma}_2 + 6/(n+1)| \geq 1{,}5\,\hat{\sigma}_{\gamma_2},$$

то гіпотеза про нормальний закон розподілу випадкової компоненти u_t відхиляється і модель вважається ***неадекватною.***

Крім розглянутих методів відома ще ціла низка інших методів: метод Вестергарда, *RS*-критерій і т. ін.

Найбільш простий з них *RS*-метод полягає в наступному.

Розраховуємо величину розмаху *R* між рівнями ряду залишків і їх стандартне відхилення *S*: $R = u_{\max} - u_{\min}$; $S = S_{\hat{y}} = \sqrt{u_t^2 / n-1}$.

Тоді розрахункове значення величини *RS* дорівнює відношенню $RS = R\,/\,S$.

Розраховане значення величини *RS* порівнюється з табличним *RS*-критерієм (а саме, з його нижньою і верхньою межею для рівня значущості α). Якщо ці значення не потрапляють в інтервал між критичними (табличними) межами, то гіпотеза про нормальний закон випадкової складової відхиляється.

Наведемо декілька табличних значень меж *RS*-критерію (для $\alpha = 0{,}05$):

для $n = 10$ нижня межа: 2,67; верхня межа: 3,685;
для $n = 20$ нижня межа: 3,18; верхня межа: 4,49;
для $n = 30$ нижня межа: 3,47; верхня межа: 4,849.

11.5.4.3. Перевірка рівності нулю математичного сподівання випадкової складової. Ця перевірка має бути тоді, коли ряд залишків ε_t підпорядкований нормальному закону розподілу. Розраховуємо значення t_p за формулою:

$$t_p = \frac{\bar{u}_t - 0}{\sigma_u}\sqrt{n},$$

де $\bar{u}_t$ — середнє значення рівнів залишків, σ_u — середнє квадратичне відхилення залишків.

Якщо розрахункове значення t_p менше табличного t_α для рівня значущості α і ступенів свободи $n - 1$, тобто $t_p < t_\alpha$, то гіпотеза про рівність нулю математичного сподівання випадкової складової приймається; у протилежному випадку — відхиляється.

Перевірка незалежності значень рівнів залишків відбувається за критерієм Дарбіна—Уотсона, фон Неймана і т. ін. (див. підрозд. 8.2).

11.5.4.4. Розрахунок точності трендових моделей. Висновок про адекватність трендової моделі робиться тоді, коли всі попередні перевірки властивостей залишків дають позитивні результати.

Для адекватних моделей повинно бути поставлене питання про ***точність*** моделі.

Точність характеризується величиною відхилень значень рівнів ряду за кривою зростання від фактичного рівня. Далі наведемо кілька показників, які можна застосувати як статистичні показники точності моделі.

- Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{1}{n-m}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2},$$

де n — кількість рівнів ряду; m — кількість параметрів, що має функція зростання; y_t — фактичний рівень ряду; $\hat{y}_t$ — значення рівня ряду за трендовою моделлю.

- Середня відносна похибка апроксимації

$$\varepsilon_b = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\left|y_t - \hat{y}_t\right|}{\left|y_t\right|}100\ \%.$$

• Коефіцієнт збіжності

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2}.$$

• Коефіцієнт детермінації $R^2 = 1 - \varphi^2$

і т. ін.

За цими показниками можна зробити вибір із декількох трендових моделей і обрати найбільш точну. Слід зауважити, що можуть бути випадки, коли за деякими показниками буде точна одна з моделей, а за другими — інша. Тоді потрібні додаткові дослідження і уточнення моделі.

✓***Приклад 11.7.*** Для часового ряду, що описує динаміку фірми за дев'ять років, розрахована трендова модель лінійного типу $\hat{y}_t = 87{,}8 - 3{,}4t$.

Потрібно оцінити адекватність і точність побудованої моделі.

У табл. 11.7 наведені вихідні дані й відповідні величини, що необхідні для розв'язання задачі.

1. ***Перевірка випадковості залишків.***

Скористаємося критерієм поворотних точок.

З табл. 11.7 бачимо (графу 5), що в даному ряду є шість піків, тобто П = 6.

Розрахуємо:

$$\overline{\Pi} = 2/3(9-2) = 14/3;\ \sigma^2_{\text{п}} = (16 \times 9 - 29) / 90 = 115/90 \approx 1{,}3.$$

Обчислимо цілу частину виразу:

$$[\overline{\Pi} - 1{,}96\sqrt{\sigma^2_{\Pi}}] = [14/3 - 1{,}96\sqrt{1{,}3}] = 2.$$

Отже, видно, що П > 2 (тобто 6 > 2), і робимо висновок, що з імовірністю 0,95 випадковість залишків підтверджується.

2. ***Перевірка відповідності випадкового компонента нормальному закону розподілу.***

Скористаємось RS-критерієм.

Розмах $R = t_{\max} - t_{\min} = 2{,}7 - (-2{,}1) = 4{,}8$;

Середнє квадратичне відхилення $S_u = \sqrt{u_t^2/(n-1)} = \sqrt{15{,}51/8} = 1{,}39$.

Обчислимо $RS = R/S = 4{,}8 / 1{,}39 = 3{,}45$.

Таблиця 11.7

t	Фактичні значення обсягів виручки, тис. грн y_t	Значення обсягів виторгу за моделлю $\hat{y}_t$	Залишки u_t	Точки піків	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$\frac{\lvert u_t \rvert}{y_t}100$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	85	84,4	0,6	—	0,36	—	-	0,71
2	81	81,0	0,0	1	0,00	–0,6	0,36	0,00
3	78	77,6	0,4	1	0,16	0,4	0,16	0,49
4	72	74,1	–2,1	1	4,41	–2,5	6,25	2,69
5	69	70,7	–1,7	0	2,89	0,4	0,16	2,46
6	70	67,3	2,7	1	7,29	4,4	19,36	3,86
7	64	63,8	0,2	1	0,04	–2,5	6,25	0,31
8	61	60,4	0,6	1	0,36	0,4	0,16	0,98
9	56	57,0	–1,0	—	1	–1,6	2.56	1,79
45	636	636,3	–0,3	6	15,51		35,26	13,29

Розрахункове значення RS потрапляє в інтервал між нижньою (НМ) і верхньою межею (ВМ) табличних значень для $n = 10$; $\alpha = 0{,}05$; НМ = 2,7 і ВМ = 3,7). Доходимо висновку, що властивість нормального розподілу залишків виконується.

3. ***Перевірка наближення до нуля математичного сподівання ряду залишків.***

За результатами обчислення з табл. 11.7 (графа) середнє значення залишків дорівнює (–0,3) : 9 ≈ –0,03 і, отже, можна підтвердити виконання цієї властивості без застосування критерію Стьюдента.

4. ***Перевірка незалежності рівнів ряду залишків.***

Скористаємось критерієм Дарбіна—Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(u_t - u_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}.$$

Розрахунки за цією формулою наведені в таблиці 11.7 (результати графи 8: результати графи 6). Згідно з цим $DW = 35{,}26/15{,}51 = 2{,}27$.

Ця величина більша 2, що відповідає від'ємній автокореляції. Перетворимо критерій Дарбіна—Уотсона $DW' = 4 - DW = 4 - 2{,}27 = 1{,}78$.

Це значення порівнюється з двома критичними табличними рівнями

$$DW_1 = 1{,}08 \text{ і } DW_2 = 1{,}36.$$

Розраховане значення $DW' = 1{,}78$ більше від табличного верхнього рівня критерію Дарбіна—Уотсона, і потрапляє в проміжок від DW_2 до 2, тобто $1{,}78 > 1{,}36$, звідки зробимо висновок про незалежність рівнів послідовності залишків.

Отже, послідовність залишків задовольняє усі властивості випадкового компонента часового ряду, і тому побудовану модель $\hat{y} = 87{,}8 - 3{,}4t$ вважаємо адекватною.

Для характеристики точності трендової моделі розрахуємо показник середньої відносної похибки (див. табл. 11.7, графа 9): $\varepsilon_{\text{відн.}} = 13{,}29 : 9 = 1{,}48$ %.

Ця похибка не перевищує 5 %, що відповідає достатній точності побудованої трендової моделі.

11.6. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями

Головною метою дослідження трендових моделей економічної динаміки є розрахунок прогнозів про розвиток досліджуваного процесу.

Прогнозування часового ряду ґрунтується на ***методі екстраполяції***, тобто, спостерігаючи ту чи іншу тенденцію зміни процесу в минулому, продовжуємо її з певною ймовірністю у майбутній період. Згідно з цим припускається, що прогнозуючий економічний показник формується під упливом великої кількості факторів, визначити кожний з яких або неможливо, або відсутня кількісна інформація про їхній рівень.

У цьому випадку зміну тенденції певного економічного показника пов'язують не з факторами, а з плином часу, що відбивається на рівнях часового ряду. Застосування методу екстраполяції, використовуючи криві зростання, базується на двох припущеннях:

- часовий ряд справді має тренд;
- тенденція, що виявлена в минулому періоді, не буде мати суттєвих змін у майбутньому.

Процес екстраполяційного прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями складається з таких етапів:

- попередній аналіз даних;
- вибір найбільш ефективної моделі — кривої зростання;
- чисельне оцінювання параметрів моделі;
- визначення адекватності моделі;
- оцінювання точності моделі;
- розрахунок точкового й інтервального прогнозів;
- верифікація прогнозу.

У розд. 11.5 показано реалізацію перших п'яти етапів.

Розглянемо два завершуючих етапи процесу прогнозування.

11.6.1. Розрахунок точкового й інтервального прогнозів. Прогноз за трендовими моделями містить дві складові: ***точковий й інтервальний***.

Точковий прогноз визначається окремим показником прогнозованого процесу, коли в рівняння його трендової моделі підставлено значення часу t, що відповідає ***періоду упередження*** $t = n + 1, n + 2, ..., n + L$.

Період упередження (або прогнозований період) визначає період часу від моменту, для якого є останні статистичні дані про об'єкт, до моменту його прогнозованого значення.

Його довжина залежить від специфіки об'єкта прогнозування, а саме від часу його функціонування, інтенсивності зростання показників, довготривалості дії виявлених тенденцій і закономірностей.

Інтервальний прогноз розраховується визначенням ***довірчого інтервалу*** — такого інтервалу, де з певною імовірністю можна очікувати появу фактичного значення прогнозованого економічного показника. Розрахунок довірчих інтервалів у прогнозуванні з використанням кривих зростання базується на висновках і формулах теорії регресії (див. розд. 4).

Методи, які розроблені для статистичних сукупностей, дозволяють розрахувати довірчий інтервал, що залежить від стандартної помилки оцінки прогнозуючого показника, періоду упередження, кількості рівнів в часовому ряду і рівня значущості α.

Стандартна (середня квадратична похибка) $S_{\hat{y}}$ оцінки прогнозованого показника визначається за формулою:

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{n-m}}, \qquad (11.11)$$

де y_t — фактичні значення рівнів часового ряду для періоду t; $\hat{y}_t$ — розрахункові значення відповідного показника за кривою зростання; n — кількість рівнів ряду; m — кількість параметрів моделі.

У випадку прямолінійного тренду, розраховуючи інтервал довіри U_y, часто використовують аналогічну формулу для парної регресії:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}, \qquad (11.12)$$

де L — період упередження;

$\hat{y}_{n+L}$ — точковий прогноз за моделлю на $(n+L)$-й період часу;

$S_{\hat{y}}$ — стандартна похибка, розрахована за формулою (11.11), коли $m = 2$;

t_α — табличне значення критерію Стьюдента для рівня значущості α.

Якщо вираз

$$t_\alpha\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}$$

позначити через K, то формулу (11.12) для інтервалу довіри запишемо так: $U_y = \hat{y}_{n+L} \pm S_{\hat{y}} K$.

Значення величини K для оцінки інтервалів довіри прогнозу табульовано залежно від довжини ряду n і рівня значущості α.

Фрагменти значень K для рівня значущості $\alpha = 0{,}2$ наводяться в табл. 11.8.

Таблиця 11.8

Кількість рівнів ряду (n)	Період упередження L					
	1	2	3	4	5	6
7	1,932	2,106	2,300	2,510	2,733	2,965
10	1,692	1,774	1,865	1,964	2,069	2,180
13	1,581	1,629	1,682	1,738	1,799	1,863
15	1,536	1,572	1,611	1,653	1,697	1,745

Іноді для розрахунку інтервалів довіри прогнозу відносно лінійного тренду застосовують наведену раніше формулу (11.12) в дещо іншому вигляді, а саме:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(t_L-\bar{t})^2}{\sum(t-\bar{t})^2}}\,, \qquad (11.13)$$

де t — порядковий номер рівня ряду ($t = 1, 2, \ldots n$); підсумовування ведеться за всіма спостереженнями; t_L відповідає $n + L$-му періоду часу, для якого робиться прогноз; $\bar{t}$ — час, що відповідає середині періоду спостережень для вихідного ряду, наприклад, $\bar{t} = (n + 1) : 2$.

Формулу (11.13) можна дещо спростити, якщо перенести початок розрахунку часу на середину періоду спостережень* ($\bar{t} = 0$).

Тоді

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{t_L^2}{\sum t^2}}\,. \qquad (11.14)$$

* Такий розрахунок наводиться в табл. 11.6 підрозд. 11.5.3.1.

Розрахунок інтервалів довіри прогнозу відносно тренду, що має вид полінома другого чи третього порядку, наводиться далі:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{t_L^2}{\sum t^2}+\frac{\sum t^4 - 2t_L^2 \sum t^2 + nt_L^4}{n\sum t^4 - \left(\sum t^2\right)^2}} \,. \qquad (11.15)$$

Аналогічно розраховуються інтервали довіри для експоненціальної кривої зростання, а також для кривих, що мають асимптоту (модифікована експонента, крива Гомперця, логістична крива), якщо значення асимптоти відоме.

Таким чином, формули розрахунку інтервалу довіри (11.12) — (11.15) для трендових моделей різного типу відрізняються одна від одної, але кожна з них відображає динамічний характер прогнозування, тобто зростання невизначеності процесу зі збільшенням періоду упередження, що проявляється в постійному розширенні інтервалу довіри.

Незважаючи на достатньо просту процедуру виявлення точкових й інтервальний прогнозів трендових моделей, не слід їх розраховувати на великий період упередження, бо це неодмінно призведе до грубих помилок.

Оптимальна довжина періоду упередження визначається окремо для кожного економічного явища з урахуванням статистичного коливання початкових даних, ґрунтуючись на змістовному міркуванні про стабільність явища. Ця довжина, як правило, не перевищує для рядів річних спостережень ***однієї третьої обсягу даних***, а для квартальних і помісячних рядів — ***двох років***.

Вирівнюючи часові ряди за допомогою кривих зростання, потрібно вирішувати питання і про те, якої довжини має бути ряд, що вибирається для прогнозування. Очевидно, у разі короткого динамічного ряду, тенденція може бути не виявлена. З іншого боку, досить довгий часовий ряд може охоплювати періоди з різними трендами і його описування за допомогою однієї і тієї ж кривої зростання не дасть позитивних результатів. Тому рекомендується наступне. Якщо немає змістовних якісних і кількісних міркувань стосовно динаміки того чи іншого явища, то для його прогнозування слід обирати ряди більш-менш довгих часових періодів.

Якщо динаміка економічного явища має циклічну складову, слід брати період ряду від середини першого до середини останнього періоду циклу.

Коли ряд охоплює періоди з різними трендами, краще скоротити його, відкинувши найбільш ранні рівні, що стосуються іншої тенденції розвитку.

11.6.2. Верифікація прогнозу. Для екстраполяційного прогнозування економічної динаміки з використанням трендових моделей важливим є заключний етап — ***верифікація прогнозу***.

Верифікація будь-яких дескриптивних моделей, до яких належать і трендові моделі, зводиться до зіставлення розрахункових значень за моделлю з відповідними дійсними даними певного економічного показника.

Верифікація прогнозної моделі являє собою ***сукупність критеріїв, способів і процедур, які дають змогу, спираючись на багатосторонній аналіз, оцінити якість прогнозу***.

Однак найчастіше на етапі верифікації в більшій мірі відбувається оцінка ***методу прогнозування***, за допомогою якого був здобутий результат, ніж ***оцінка якості*** самого результату. Це пов'язано з тим, що досі не знайдено ефективного підходу до оцінки якості прогнозу.

Навіть в тих випадках, коли прогноз не справдився, не можна категорично стверджувати, що він був некорисним, оскільки дослідник, якщо він хоча б частково контролює хід подій і може впливати на економічний процес, має можливість використати прогнозну інформацію бажаним для себе способом.

Так, якщо дістати прогноз, що визначає небажану динаміку розвитку, дослідник може приймати дії, щоб прогноз не справдився. Такий прогноз має назву ***самодеструктивного***.

Коли ж прогноз передбачить хід подій, котрі задовольняють користувача, то він може сприяти своїми діями збільшенню ймовірності цього прогнозу. Такий прогноз має назву ***саморегулюючого***.

Отже, показником цінності прогнозу є не тільки його достовірність, але й корисність для дослідників.

Про точність прогнозу слід вирішувати за величиною його похибки — різницею між фактичними і прогнозними значеннями показника, що досліджується. Звісно, визначити вказану різницю можна лише у двох випадках: або коли період упередження вже закінчився і відомі фактичні значення прогнозованого показника, або коли прогнозування відбулося для деякого моменту в минулому, для якого відомі фактичні дані.

У другому з названих випадків інформація ділиться на дві частини: за частиною, котра охоплює більш ранні періоди часу, відбувається розрахунок оцінок параметрів кривої зростання; друга частина ряду, більш пізня, розглядається як ***реалізація прогнозу***. Виявлені таким чином помилки в якійсь мірі характеризують точність методики прогнозування, що була застосована.

Перевірка точності лише одного прогнозу недостатня для оцінювання якості прогнозування, бо вона може бути результатом випадкового збігу. Найбільш простою мірою якості прогнозів за умови, що є дані про їх реалізацію, буде відношення μ кількості випадків прогнозів, підтверджених фактичними даними, до загальної їх кількості, а саме:

$$\mu = \frac{c}{c_1 + c},$$

де c — кількість прогнозів, що підтверджені фактичними даними; c_1 — кількість прогнозів, не підтверджених фактичними даними.

Однак у практичній роботі проблему якості прогнозів найчастіше потрібно вирішувати, коли період упередження ще не закінчився і фактичне значення прогнозованого показника невідоме. У цьому випадку точнішою буде модель, що дає вужчі довірчі інтервали прогнозу. На практиці не завжди вдається відразу побудувати достатньо якісну модель прогнозування, тому описані в цьому розділі етапи побудови трендових моделей економічної динаміки можуть виконуватися неодноразово.

Розглянемо розрахунок точкового й інтервального прогнозів за трендовою моделлю, розрахованою у прикладі 11.7.

✓***Приклад 11.8.*** Нехай для часового ряду, що наводиться в табл. 11.8, потрібно дати прогноз на два роки вперед ($t = 10$; $t = 11$).

У прикладі 11.7 розрахована економетрична модель за лінійним трендом: $\hat{y}_t = 87{,}8 - 3{,}4t$.

Точкові прогнози дістаємо, підставляючи в рівняння моделі значення $t = 10$ і $t = 11$:

$$\hat{y}_{10} = 87{,}8 - 3{,}4 \cdot 10 = 53{,}8;$$

$$\hat{y}_{11} = 87{,}8 - 3{,}4 \cdot 11 = 50{,}4.$$

Нагадаємо, що для розрахунку довірчих інтервалів потрібно знайти середню квадратичну помилку показника, що прогнозується. Її величина була знайдена в прикладі 11.7 і дорівнювала $S_{\hat{y}} = 1{,}39$, а значення величини K для ряду з дев'яти рівнів можна дістати з табл. 11.8 лінійною інтерполяцією наведених значень для $n = 7$ і $n = 10$ для $n = 7$, що відповідає $L = 2$, $K = 2{,}106$. Для $n = 10$, що відповідає періоду упередження ($L = 2$), $K = 1{,}774$; для $n = 11$ ($L = 2$) $K = 1{,}89$.

Результати розрахунку за формулою (11.12) наводяться в табл. 11.9.

Таблиця 11.9

Час t	Період упередження L	Точковий прогноз $\hat{Y}_{t+L}$	Довірчий інтервал прогнозу	
			Нижня межа	Верхня межа
10	1	53,8	51,3	56,3
11	2	50,4	47,8	53,0

Отже, модель прогнозу є адекватною (див. приклад 11.7 підрозд. 11.5.4); враховуючи наведений рівень значущості $\alpha = 0{,}20$ (тобто з імовірністю 0,80), можна стверджувати, що при збереженні закономірностей, які склалися у минулому, прогнозоване значення виручки фірми на десятий і одинадцятий рік потрапляє в інтервал, утворений нижньою і верхньою межами:

$$51{,}3 < 53{,}8 < 56{,}3;$$
$$47{,}8 < 50{,}4 < 53{,}0.$$

11.7. Стислі висновки

1. Початковою інформацією для економетричного аналізу економічного процесу в розвитку є одновимірний часовий ряд.

2. Послідовність спостережень певного показника (ознаки), котра впорядкована в залежності від послідовно зростаючих або спадаючих значень іншого показника, має назву одновимірного ряду динаміки.

3. Якщо ознакою, за котрою відбувається упорядкування ряду, є час, то такий ряд має назву часового.

4. Часові ряди, що характеризують економічні явища на певний конкретний момент часу, називаються моментними.

5. Якщо рівні часового ряду утворені агрегуванням за певний проміжок часу, то вони мають назву інтервальних.

6. Динамічні ряди, характер яких не змінюється з часом, називаються стаціонарними.

7. Динаміка рядів економічних явищ і процесів у загальному випадку формується під упливом чотирьох груп факторів: довготривалі, що формують загальну тенденцію або тренд; сезонні —

формують періодично повторювані коливання за певний час року того чи іншого показника; циклічні — формують зміни динаміки ряду, зумовлені дією довготривалих циклів економічної, демографічної, астрофізичної природи і т. ін.; випадкові (нерегулярні), котрі не піддаються реєстрації й обліку. Саме їхня дія на формування рівнів часового ряду обумовлює стохастичну природу ряду.

8. Однією з основних задач моделювання часових рядів є виявлення їх трендів.

9. Для моделювання тренду потрібно провести попередній аналіз часового ряду, котрий полягає у виявленні й усуненні перш за все аномальних його значень, що може бути здійснено, наприклад, методом Ірвіна.

10. До попереднього аналізу ряду відносять також перевірку наявності тренду в динамічному ряду. Найчастіше для цього використовують такі методи: перевірка різниць середніх рівнів ряду, метод Фостера—Стюарта.

За методом перевірки різниць середніх визначають:

$$t_p = \frac{\left|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

де σ — середньоквадратичне відхилення різниці середніх, що визначається:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Якщо розрахункове значення $t_p < t_\alpha$ (для рівня значущості α), то гіпотеза про відсутність тренду приймається; у протилежному випадку, тобто коли $t_p \geq t_\alpha$, то з імовірністю $1 - \alpha$ гіпотеза відхиляється.

За методом Фостера—Стюарта визначають:

$$t_p^{(1)} = \frac{D}{\sigma_2}; \qquad t_p^{(2)} = \frac{W - \overline{W}}{\sigma_1},$$

де σ_1 і σ_2 — середні квадратичні відхилення для W і D;

$$W = \sum_{t=1}^{n} \omega_t \text{ і } D = \sum_{t=1}^{n} d_t;\ \omega_t = C_t + V_t;\ \ d_t = C_t - V_t;$$

параметри C_t і V_t мають такі значення

$$C_t = \begin{cases} 1, \text{коли } y_t > y_{t-1}, \dots y_1; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad V_t = \begin{cases} 1, \text{коли } y_t < y_{t-1}, \dots y_1; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

$\overline{W}$ — середнє значення параметра W.

Якщо розрахункове значення $t_p^{(1)} > t_{\text{теор}}$ і $t_p^{(2)} > t_{\text{теор}}$ (за рівнем значущості α), то гіпотеза про відсутність тренду відхиляється; у протилежному випадку, тобто, коли $t_p^{(1)} < t_{\text{теор}}$ і $t_p^{(2)} < t_{\text{теор}}$, то з імовірністю $1 - \alpha$ гіпотеза про відсутність тренду приймається.

11. Методи визначення тренду поділяються на механічні й аналітичні.

Механічні методи згладжування ряду: метод простої ковзної середньої; метод експоненціального згладжування.

12. Якщо існує певна закономірність в динаміці будь-якого економічного процесу, то тенденція (тренд) цієї зміни може бути встановлена аналітично підбором потрібної функції $y_t = f(t)$. Така емпірична функція має назву кривої зростання.

13. Найбільш вживані в економічних процесах криві зростання:

$y_t = a_0 + a_1 t$ (поліном першого степеня);
$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ (поліном другого степеня);
$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ (поліном третього степеня);
....
$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p$ (поліном p-го степеня),

де a_1, a_2, a_p — параметри многочлена, t — незалежна змінна;

- $y_t = a_0 + a_1/x$ — гіперболічна функція;
- експоненціальні функції: $Y_t = a(1 + r)^t$ або $Y_t = ab^t$, де $Y_t = ae^{bt}$; $r = \text{const}$;
- модифікована експоненціальна функція: $Y_t = k + ab^t$;
- логістична крива:

$$y_t \frac{k}{1 + be^{-at}}, \quad \text{або} \quad y_t = \frac{k}{1 + 10^{a+bt}};$$

- крива Гомперця: $y_t = ka^{b^t}$; $0 < b < 1$

і т. ін.

14. Існує кілька методів вибору форми тренду: візуальний (графічний), метод послідовних різниць, метод характеристик приростів і т. ін.

15. Оцінка параметрів кривих зростання відбувається за методом 1МНК, а саме: розраховується система нормальних рівнянь. У матричному вигляді:

$$T'T\hat{A} = T'Y,$$

де T — матриця розміром $(n \times m)$, n — кількість рівнів ряду; m — кількість параметрів у функції зростання; T' — транспонована матриця розміром $(n \times m)$ до матриці t; Y — вектор-стовпець рівнів ряду; $\hat{A}$ — вектор-стовпець розміром $(n \times 1)$ оцінок параметрів функції зростання.

Розв'язуючи систему нормальних рівнянь відносно $\hat{A}$, знаходимо його значення

$$\hat{A} = (T'T)^{-1} T'Y.$$

16. Оцінка адекватності і точності трендових моделей охоплює наступні перевірки поетапно:

- випадковості коливань рівнів залишків;
- відповідності розподілу залишків нормальному закону;
- рівності нулю математичного сподівання залишків;
- незалежності значень рівнів залишків між собою.

17. Висновок про адекватність трендової моделі можна зробити тоді, коли всі чотири перевірки п.16 дають позитивні результати.

Для адекватних моделей розраховують їх точність за такими формулами:

- Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n-m}\sum\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2},$$

де n — кількість рівнів ряду; m — кількість параметрів, що має функція зростання; y_t — фактичний рівень ряду; $\hat{y}_t$ — значення рівня ряду за трендовою моделлю.

- Середня відносна помилка апроксимації

$$\varepsilon_b = \frac{1}{n}\sum\frac{\left|y_t - \hat{y}_t\right|}{\left|y_t\right|}100\ \%.$$

- Коефіцієнт збіжності

$$\varphi^2 = \frac{\sum\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{\sum\left(y_t - \bar{y}\right)^2}.$$

• Коефіцієнт детермінації $R^2 = 1 - \varphi^2$
і т. ін.

За цими показниками можна зробити вибір із кількох трендових моделей і обрати найбільш точну.

18. Однією з головних цілей дослідження трендових моделей є розрахунок прогнозів економічної динаміки.

19. Прогнозування часового ряду за кривими зростання ґрунтується на методі екстраполяції: спостерігаючи ту чи іншу зміну процесу в минулому, продовжуємо її з певною ймовірністю у майбутній період.

20. Метод екстраполяції базується на двох припущеннях:

• часовий ряд дійсно має тренд;

• тенденція, що виявлена у минулому періоді, не буде мати суттєвих змін у майбутньому.

21. Процес екстраполяційного прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями складається з таких етапів:

• попередній аналіз даних;
• вибір найбільш ефективної моделі — кривої зростання;
• чисельне оцінювання параметрів моделі;
• визначення адекватності моделі;
• оцінювання точності моделі;
• розрахунок точкового й інтервального прогнозів;
• верифікація прогнозу.

22. Прогноз за трендовими моделями містить дві складові: точковий і інтервальний.

Точковий прогноз визначається окремим показником прогнозованого процесу, коли в рівняння його трендової моделі підставлено значення часу t, котре відповідає періоду упередження $t = n + 1, n + 2, ..., n + L$.

23. Період упередження (або прогнозований період) визначає період часу від моменту, для якого є останні статистичні дані про об'єкт, до моменту його прогнозованого значення.

24. Інтервальний прогноз розраховується визначенням довірчого інтервалу — такого інтервалу, де з певною ймовірністю можна очікувати появу фактичного значення прогнозувального економічного показника.

25. Стандартна середня квадратична похибка $S_{\hat{y}}$ оцінки прогнозованого показника визначається за формулою:

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{n - m}},$$

де y_t — фактичні значення рівнів часового ряду для періоду t; $\hat{y}_t$ — розрахункові значення відповідного показника за кривою зростання; n — кількість рівнів ряду; m — кількість параметрів моделі.

26. У випадку прямолінійного тренду, розраховуючи інтервал довіри U_y, часто використовують формулу, аналогічну для парної регресії:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n + 2L - 1)^2}{n(n^2 - 1)}},$$

де L — період упередження; $\hat{y}_{n+L}$ — точковий прогноз за моделлю на $(n + L)$-й період часу; $S_{\hat{y}}$ — стандартна похибка, коли $m = 2$; t_α — табличне значення критерію Стьюдента для рівня значущості α.

27. Іноді для розрахунку довірчих інтервалів прогнозу відносно лінійного тренду застосовують іншу формулу:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_L - \bar{t})^2}{\sum (t - \bar{t})^2}},$$

де t — порядковий номер рівня ряду ($t = 1,2, \ldots n$); сумування ведеться за всіма спостереженнями; t_L відповідає $n + L$-му періоду часу, для якого робиться прогноз; $\bar{t}$ — час, що відповідає середині періоду спостережень для вихідного ряду, наприклад, $\bar{t} = (n + 1) : 2$.

Цю формулу можна дещо спростити, якщо перенести початок розрахунку часу на середину періоду спостережень ($\bar{t} = 0$).

Тоді

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum t^2}}.$$

28. Розрахунок довірчих інтервалів прогнозу відносно тренду, що має вигляд полінома другого чи третього порядку:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum t^2} + \frac{\sum t^4 - 2t_L^2 \sum t^2 + n t_L^4}{n \sum t^4 - \left(\sum t^2\right)^2}}.$$

Аналогічно розраховуються довірчі інтервали для експоненційної кривої зростання, а також для кривих, що мають асимптоту (модифікована експонента, крива Гомперця, логістична крива), якщо значення асимптоти відоме.

29. Оптимальна довжина періоду упередження визначається окремо для кожного економічного явища з урахуванням статистичного коливання початкових даних, ґрунтуючись на змістовному міркуванні про стабільність явища. Ця довжина, як правило, не перевищує для рядів річних спостережень однієї третьої обсягу даних, а для квартальних і помісячних рядів — двох років.

30. Верифікація прогнозної моделі являє собою сукупність критеріїв, способів і процедур, що дають змогу, спираючись на багатосторонній аналіз, оцінити якість прогнозу.

31. Про точність прогнозу слід вирішувати за величиною його помилки — різницею між фактичними і прогнозними значеннями показника, що досліджується. Визначити зазначену різницю можна лише у двох випадках: або коли період упередження вже закінчився і відомі фактичні значення прогнозованого показника, або коли прогнозування відбулося для деякого моменту в минулому, для якого відомі фактичні дані.

32. Найбільш простою мірою якості прогнозів за умови, що є дані про їх реалізації, буде відношення кількості випадків прогнозів, підтверджених фактичними даними, до загальної їх кількості, а саме:

$$\mu = \frac{c}{c_1 + c},$$

де c — кількість прогнозів, що підтверджені фактичними даними; c_1 — кількість прогнозів, не підтверджених фактичними даними.

11.8. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення часового ряду.
2. Які часові ряди мають назву моментних і інтервальних?
3. Що характерно для стаціонарних рядів?
4. Під впливом яких факторів формуються рівні часового ряду?

5. Дайте визначення тренду часового ряду.

6. В чому полягає попередній аналіз часових рядів?

7. Які ви знаєте попередні методи виявлення тренду в часовому ряду?

8. В чому полягає згладжування рядів динаміки за методом простої середньої і експоненціального згладжування?

9. Які ви знаєте криві зростання, що найчастіше застосовуються в економічних дослідженнях? Запишіть їх аналітичний вираз. Коли вживається та чи інша крива зростання?

10. Часовий ряд за 17 періодів (t = 1, 2, ... 17) наводиться в табл. 11.10.

Таблиця 11.10

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
y_t	15	12	13	25	24	33	30	37	43	53	51	62	60	71	78	83	86

Для визначення форми тренду:

1) знайдіть згладжувальні рівні ряду за методом простої середньої (m = 3) і експенціального згладжування (α = 0,1);

2) виберіть і розрахуйте параметри кривої зростання, яка, на ваш погляд, найбільш якісно апроксимує наведений ряд динаміки.

11. Часовий ряд наведено в табл. 11.11 за 10 періодів

Таблиця 11.11

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	43	47	50	48	54	57	61	59	65	62

Зробіть попередній вибір найкращої кривої зростання для цього ряду.

1. Для ряду (табл. 11.10) побудуйте: трендові моделі такого типу:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t; \quad \hat{y}_t = a10^{bt}.$$

Визначте їхні параметри методом 1МНК.

2. Для кривих зростання п. 11 оцініть адекватність і точність моделей. Виберіть більш точну криву зростання.

3. Розрахуйте за вибраною моделлю п. 11 екстраполяційні прогнози на два часових періоди: t = 11, 12. Оцініть їхню точність.

11.9. Основні терміни і поняття

Часовий ряд • Моментний ряд • Інтервальний ряд • Стаціонарний ряд • Тренд часового ряду • Сезонна складова ряду • Циклічна складова • Випадкова складова • Згладжування ряду • Криві зростання • Трендова модель • Поліноміальні криві зростання • Експоненційні криві зростання • Модифікована експонента • Логістичні криві зростання • Крива Гомперця • Адекватність і точність трендової моделі • Екстраполяційний прогноз • Період упередження • Точковий прогноз • Інтервальний прогноз • Самодеструктивний прогноз • Саморегулюючий прогноз • Верифікація прогнозу

Розділ 12

ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ СТРУКТУРНИХ РІВНЯНЬ

12.1. Системи одночасних структурних рівнянь

Наявність прямих і зворотних зв'язків між економічними показниками вимагає побудови економетричної моделі на основі системи рівнянь.

✓***Приклад 12.1.*** Нехай треба побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між обсягом валового національного продукту від виробничих ресурсів: основних виробничих фондів, робочої сили і матеріальних ресурсів. У такому разі доцільно будувати економетричну модель на основі системи одночасних структурних рівнянь:

$$X_t = f(F_t, L_t, u_t),$$

$$M_t = f(X_t, v_t),$$

$$Y_t = X_t - M_t,$$

де X_t — випуск продукції; Y_t — валовий національний продукт; F_t — основні виробничі фонди; L_t — робоча сила; M_t — матеріальні ресурси; t — період часу.

Запишемо два перших рівняння аналітично:

$$X_t = a_0 F_t^{a_1} L_t^{a_2} u_t,$$

$$M_t = b_0 + b_1 X_t + v_t,$$

$$Y_t = X_t - M_t,$$

де a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 — параметри моделі, u_t, v_t — залишки.

Отже, економетрична модель складається з трьох одночасних рівнянь, два перших є регресійними, а третє — тотожність. Оскільки вони описують економічні процеси, які відбуваються одночасно, то всі ці рівняння повинні мати спільний розв'язок.

✓***Приклад 12.2.*** Нехай потрібно визначити залежність між заробітною платою і продуктивністю праці на підприємстві.

Такий взаємозв'язок можна визначити на основі економетричної моделі, яка також описується системою одночасних структурних рівнянь:

$$Y_1 = f(Y_2, X_1, X_2, X_3, u_1),$$

$$Y_2 = f(Y_1, X_1, X_2, X_4, X_5, u_2),$$

де Y_1 — заробітна плата; Y_2 — продуктивність праці; X_1 — рівень кваліфікації працюючих; X_2 — стаж працюючих; X_3 — форма оплати праці; X_4 — фондовіддача; X_5 — плинність робочої сили; u_1, u_2 — залишки, відповідно, в першому та другому рівняннях моделі.

Ця економетрична модель містить два регресійні рівняння.

Економетрична модель, яка наведена в прикладі 12.1, застосовується для кількісного вимірювання взаємозв'язку на макрорівні, а модель, що наведена в прикладі 12.2, — на мікрорівні. Згадані моделі є найпростішими, бо в них відсутні лагові змінні.

Повернемося до системи рівнянь економетричної моделі, яка наведена в прикладі 12.1. У перше рівняння цієї моделі доцільно ввести лагову змінну x_{t-1}, бо обсяг виробництва продукції в період t залежить від виробництва в попередній період ($t-1$). Звідси модель запишеться так:

$$X_t = a_0 X_{t-1}^{a_1} F_t^{a_2} L_t^{a_3} u_t;$$

$$M_t = b_0 + b_1 X_t + v_t;$$

$$Y_t = X_t - M_t.$$

А це означає, що залишки u_t в першому рівнянні будуть залежними від X_t. Така залежність вимагає застосування методів оцінки параметрів моделі, які забезпечили б їх незміщеність за наявності кореляції між u_t і X_t.

Узагальнюючи моделі наведених раніше прикладів, можна сказати, що економетрична модель містить сукупність рівнянь, які описують зв'язки між економічними показниками. Взаємозв'язки між змінними можуть мати стохастичний і детермінований характер. Стохастичні зв'язки реалізуються з деяким рівнем імовірності і описуються регресійними рівняннями. Детерміновані співвідношення виражаються тотожностями і не містять випадкових величин.

Системи одночасних структурних рівнянь, як правило, включають лінійні рівняння. Нелінійність зв'язків здебільшого апроксимується лінійними співвідношеннями. Динаміка економічних зв'язків враховується за допомогою часових лагів, або лагових змінних.

Запишемо економетричну модель на основі системи одночасних рівнянь:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= a_{11}y_{1t} + \ldots + a_{1k}y_{kt} + b_{10}x_{0t} + \ldots + b_{1m}x_{mt} + u_{1t};\\ y_{2t} &= a_{21}y_{1t} + \ldots + a_{2k}y_{kt} + b_{20}x_{0t} + \ldots + b_{2m}x_{mt} + u_{2t};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{kt} &= a_{k1}y_{1t} + \ldots + a_{kk}y_{kt} + b_{k0}x_{0t} + \ldots + b_{km}x_{mt} + u_{kt}. \end{aligned} \tag{12.1}$$

У цій моделі $x_{0t} = 1$. Окремі коефіцієнти $a_{11} \ldots,\ a_{kk},\ b_{10} \ldots,\ b_{km}$ можуть дорівнювати нулю, якщо відповідна змінна не входить до рівняння. Залишки u_{st}, де $s = 1, 2, \ldots, k$, також можуть дорівнювати нулю, якщо відповідне рівняння є тотожністю. Систему (12.1) можна переписати в матричній формі

$$Y = AY + BX + u, \tag{12.2}$$

де Y — вектор ендогенних залежних змінних; X — матриця екзогенних пояснювальних змінних; u — вектор залишків; A — матриця коефіцієнтів для змінних Y розміром $k \times k$; B — матриця коефіцієнтів для змінних X розміром $k \times m$; k — кількість рівнянь в моделі $s = \left(\overline{1, k}\right)$; m — кількість екзогенних змінних $j = \left(\overline{1, m}\right)$.

Змінні, які містяться у правій частині системи рівнянь, є наперед заданими і називаються екзогенними, а змінні, які містяться в лівій частині, знаходяться в результаті реалізації моделі і називаються ендогенними. Отже, змінна y_{st} є ендогенною для одного рівняння і одночасно екзогенною для іншого.

Означення 12.1. *Економетрична модель у вигляді (12.1) безпосередньо відображає структуру зв'язків між змінними і тому називається* ***структурною формою економетричної моделі.***

Розв'яжемо систему рівнянь (12.1) відносно y_{st} і дістанемо систему виду:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= r_{10}x_{0t} + r_{11}x_{1t} + \ldots + r_{1m}x_{mt} + v_{1t};\\ y_{2t} &= r_{20}x_{0t} + r_{21}x_{2t} + \ldots + r_{2m}x_{mt} + v_{2t};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{kt} &= r_{k0}x_{0t} + r_{k1}x_{kt} + \ldots + r_{km}x_{mt} + v_{kt}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

У матричній формі систему цих рівнянь можна переписати так:

$$Y = RX + v.$$

Матриця оцінок параметрів R має вигляд:

$$R = (E - A)^{-1} B, \tag{12.4}$$

де E — одинична матриця.

Щоб показати справедливість співвідношення (12.4), розв'яжемо систему рівнянь (12.2) відносно Y:

$$Y - AY = BX + u;$$
$$(E - A)Y = BX + u;$$
$$Y = (E - A)^{-1} BX + u.$$

Враховуючи, що $Y = RX + v$, $R = (E - A)^{-1} B$.
Вектор залишків $v_{1t}, v_{2t}, ..., v_{kt}$ є лінійною комбінацією залишків $u_{1t}, u_{2t} ... u_{kt}$.

Означення 12.2. *Економетрична модель, яка записується системою рівнянь (12.3), називається* ***зведеною формою моделі.***

Оскільки економетрична модель складається з системи одночасних рівнянь, то постає запитання: чи можна застосувати для оцінювання параметрів кожного рівняння або системи в цілому ті методи, які були розглянуті в попередніх розділах?

Запишемо просту модель, яка складається з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} C_t &= a_0 + a_1 Y_t + u_t, \\ Y_t &= C_t + S_t, \end{aligned} \tag{12.5}$$

де C_t — споживчі витрати; Y_t — дохід; S_t — неспоживчі витрати; u_t — залишки; t — період часу.

Перше рівняння моделі характеризує залежність між споживчими витратами і доходом. Друге рівняння є тотожністю, в якій показано, що дохід визначається як сума двох видів витрат — споживчих і неспоживчих.

Нехай в цій моделі залишки u_t є випадковими,

$$M(u) = 0,$$
$$M(uu') = \sigma_u^2.$$

S і u незалежні. Для застосування 1МНК треба тільки вирішити питання, чи є незалежними Y_t і u_t. Підставивши значення C_t з першого рівняння моделі в друге, дістанемо:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_t + S_t + u_t.$$

Розв'яжемо його відносно Y_t:

$$Y_t = \frac{a_0}{1 - a_1} + \frac{a_1}{1 - a_1} S_t + \frac{u_t}{1 - a_1}. \qquad (12.6)$$

Наявність коефіцієнта при u_t свідчить про те, що між Y_t і u_t існує залежність. Щоб переконатись у цьому, запишемо:

$$M(Y_t) = \frac{a_0}{1 - a_1} + \frac{1}{1 - a_1} S_t,$$

$$M\{u_t[Y_t - M(Y_t)]\} = u_t \cdot \frac{1}{1 - a_1} M(u_t) = \frac{1}{1 - a_1} M(u_t^{\,2}) \neq 0.$$

Таким чином, залишки в моделі (12.5) корелюють з пояснюючою змінною Y_t, отже, безпосереднє застосування до (12.5) 1МНК призведе до зміщення оцінок параметрів $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$. Це зміщення виникає, коли вибіркова сукупність є кінцевою. Але оскільки ці оцінки будуть необґрунтованими, то зміщення збережеться і для великих вибіркових сукупностей.

Щоб визначити величину зміщення, запишемо моменти другого порядку:

$$m_{cy} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(C_t - \overline{C})(Y_t - \overline{Y}); \quad m_{cc} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(C_t - \overline{C})^2;$$

$$m_{yy} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2.$$

Тоді оцінки 1МНК параметрів моделі (12.5) будуть дорівнювати:

$$\hat{a}_1 = \frac{m_{cy}}{m_{yy}}; \qquad \hat{a}_0 = \frac{m_{yy}\overline{C} - m_{cy}\overline{Y}}{m_{yy}}.$$

Розв'язавши систему рівнянь (12.5) відносно залежних змінних C_t і Y_t, дістанемо:

$$C_t = \frac{a_1}{1-a_1}S_t + \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{u_t}{1-a_1}; \qquad (12.7)$$

$$Y_t = \frac{1}{1-a_1}S_t + \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{u_t}{1-a_1}. \qquad (12.8)$$

Знайдемо відхилення від середніх:

$$C_t - \overline{C}_t = \frac{a_1}{1-a_1}(S_t - \overline{S}_t) + \frac{1}{1-a_1}(u_t - \overline{u}_t);$$

$$Y_t - \overline{Y}_t = \frac{1}{1-a_1}(S_t - \overline{S}_t) + \frac{1}{1-a_1}(u_t - \overline{u}_t).$$

Підставивши ці значення у формулу моментів, запишемо:

$$m_{cy} = \frac{a_1}{(1-a_1)^2}m_{ss} + \frac{1+a_1}{(1-a_1)^2}m_{su} + \frac{1}{(1-a_1)^2}m_{uu};$$

$$m_{yy} = \frac{1}{(1-a_1)^2}m_{ss} + \frac{2}{(1-a_1)^2}m_{su} + \frac{1}{(1-a_1)^2}m_{uu}.$$

Тоді

$$\hat{a}_1 = \frac{a_1 m_{ss} + (1+a_1)m_{su} + m_{uu}}{m_{ss} + 2m_{su} + m_{uu}}.$$

На основі прийнятих гіпотез, коли $n \to \infty$ S і u незалежні, дістанемо:

$$m_{su} = 0, \qquad\qquad m_{ss} = \sigma^2.$$

Додатково вважатимемо, що m_{ss} прямує до деякої константи $\overline{m}_{ss}$. Тоді

$$p\lim \hat{a}_1 = \frac{a_1 \overline{m}_{ss} + \sigma^2}{\overline{m}_{ss} + \sigma^2} = a_1 + \frac{(1-a_1)\sigma^2/\overline{m}_{ss}}{1+\sigma^2/\overline{m}_{ss}}, \qquad (12.9)$$

тобто значення параметра $\hat{a}_1$ буде завищеним порівняно зі справжнім значенням a_1, де $\dfrac{(1-a_1)\sigma^2/\overline{m}_{ss}}{1+\sigma^2/\overline{m}_{ss}}$ — величина зміщення.

12.2. Проблеми ідентифікації

Проблеми чисельної оцінки параметрів в структурній формі і можливість перетворення структурної форми на зведену тісно пов'язані з поняттям ідентифікації моделі.

Означення 12.3. *Якщо лінійна комбінація рівнянь структурної форми не може привести до рівняння, що має ті самі змінні, що й деяке рівняння в структурній формі, то модель буде* ***ідентифікованою.***

Для ідентифікованих моделей зведена форма визначається однозначно за допомогою співвідношень (12.3). Матриця $E-A$ завжди невироджена. Умова ідентифікації має перевірятися для кожного рівняння системи.

Необхідна умова ідентифікації системи — справедливість нерівності для кожного рівняння моделі (12.1):

$$k_s - 1 \leq m - m_s, \tag{12.10}$$

де k_s — кількість ендогенних змінних, які входять в s-те рівняння структурної форми; m — загальна кількість екзогенних змінних моделі; m_s — кількість екзогенних змінних, які входять в s-те рівняння структурної форми моделі.

Кількість екзогенних змінних, які не входять у s-те рівняння структурної форми, дорівнює $m - m_s$.

Означення 12.4. *Якщо для всіх рівнянь моделі (12.1) співвідношення (12.10) виконується як рівність, то система рівнянь є* ***точно ідентифікованою.***

Зауважимо, що проблема ідентифікації стосується структурних параметрів, а не параметрів зведеної форми. Вона може бути сформульована так: чи можна однозначно визначити деякі чи всі елементи матриць A і B, знаючи елементи матриці R?

Означення 12.5. *Якщо для всіх рівнянь моделі співвідношення (12.10) виконується як нерівність, то система рівнянь є* ***надідентифікованою.***

Означення 12.6. *Якщо для всіх рівнянь моделі співвідношення (12.10) не виконується, то система рівнянь є* ***неідентифікованою***. В цьому випадку необхідно переглянути специфікацію моделі.

12.3. Рекурсивні системи

Означення 12.7. *Якщо в економетричній моделі (12.2) матриця A має трикутний вигляд, а залишки характеризуються діагональною матрицею Σ, то така система рівнянь називається* ***рекурсивною.***

Нехай економетрична модель на основі одночасних структурних рівнянь запишеться так:

$$\begin{gathered} y_{1t} + b_{11}x_t = u_{1t}; \\ a_{21}y_{1t} + y_{2t} + b_{21}x_t = u_{2t}; \\ a_{31}y_{1t} + a_{32}y_{2t} + y_{3t} + b_{31}x_t = u_{3t}, \end{gathered} \tag{12.11}$$

матриця коваріацій залишків для неї

$$\sum = M(uu') = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{12.12}$$

Як відомо, труднощі оцінки системи рівнянь виникають тоді, коли спостерігається кореляція між залишками і пояснюючими змінними. Тому нам потрібно переконатися в тому, що спеціальні властивості рекурсивної моделі дають змогу подолати ці труднощі.

Запишемо структурні рівняння в матричному вигляді

$$YA' + XB' = u, \tag{12.13}$$

де A' та B' — транспоновані матриці параметрів моделі до матриць A і B.

Їхня зведена форма запишеться так:

$$Y = XR' + v, \tag{12.14}$$

де
$$v = u(B')^{-1}. \tag{12.15}$$

Помножимо (12.14) ліворуч на $\frac{1}{n}u'$ і перейдемо в обох частинах здобутої рівності до границі за ймовірністю:

$$p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}u'Y\right) = p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}u'v\right) + p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}u'X\right).$$

Оскільки згідно з припущенням $p\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}u'X\right)=0$, то справджується рівність

$$p\lim\left(\frac{1}{n}u'Y\right)=p\lim\left(\frac{1}{n}u'v\right).$$

Запишемо ліву частину рівності, скориставшись (12.15):

$$p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}u'Y\right)=p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}u'u\right)(B')^{-1}=\sum(B')^{-1}. \qquad (12.16)$$

Коли економетрична модель має три структурні рівняння і три залежні змінні, то (12.16) можна записати так:

$$\begin{pmatrix} p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{1t}y_{1t}\right) & p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{1t}y_{2t}\right) & p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{1t}y_{3t}\right) \\ p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{2t}y_{1t}\right) & p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{2t}y_{2t}\right) & p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{2t}y_{3t}\right) \\ p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{3t}y_{1t}\right) & p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{3t}y_{2t}\right) & p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_t u_{3t}y_{3t}\right) \end{pmatrix}= \qquad (12.17)$$

$$=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{11}A^{21} & \sigma_{11}A^{31} \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{22}A^{32} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

де
$$(A')^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & A^{21} & A^{31} \\ 0 & 1 & A^{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а через A^{kj} позначено алгебраїчне доповнення елемента a_{kj}, звідси матриця $(A')^{-1}$ — матриця, обернена до транспонованої матриці алгебраїчних доповнень елементів a_{kj}.

Таким чином, ми дістали основний результат, який полягає в тому, що u_2 не корелює гранично з Y_1, u_3 не корелює гранично з Y_1 і Y_2. А це означає, що для оцінки параметрів системи можна застосувати 1МНК. У численних публікаціях Волда [2] показано, що реальні економічні системи найчастіше описуються рекурсивними системами рівнянь. Цей висновок він аргументує тим, що реальне формування кожного з показників, які входять до моделі, здійснюється в різні проміжки часу. Наприклад, залежність ціни від пропозиції товару на ринку. Якщо часовий період дорівнює одному дню, то ціна на товар в t-й день встановлюється з урахуванням продажу в $t-1$ день, тоді як попит на товар залежить від ціни, за якою продавався товар в цей самий день. Запишемо ці рівняння:

$$\begin{aligned} p_t &= a_0 + a_1 g_{t-1} + u_t; \\ g_t &= b_0 + b_1 p_t + v_t, \end{aligned} \tag{12.18}$$

де p_t — ціна на товар в t-й день; g_t — попит на товар в t-й день; g_{t-1} — попит на товар в $(t-1)$ день; u_t — залишки рівня ціни; v_t — залишки рівня попиту.

Наведена модель є рекурсивною, бо p_t і g_t — поточні значення ендогенних змінних, а g_{t-1} розглядається як екзогенна змінна, яка бере участь у послідовності причинних зв'язків.

$$g_{t-1} \to p_t \to g_t.$$

Ця послідовність містить тільки прямі зв'язки, що дає нам підстави вважати залишки незалежними.

Оскільки залишки в рівняннях нормально розподілені, то для оцінювання параметрів моделі можна використати 1МНК.

✓***Приклад 12.3.*** Розглянемо модель, яка складається з рівняння пропонування та рівняння попиту на свинину. Нехай ці рівняння специфікуються на основі степеневих або логарифмічних функцій:

$$\begin{aligned} g_t &= a_{10} + a_{11} p_{t-1} + u_t; \\ p_t &= a_{20} + a_{21} g_t + v_t. \end{aligned} \tag{12.19}$$

У цій моделі g_t — логарифм пропонування свинини в період t, p_t — логарифм ціни свинини в період t, p_{t-1} — логарифм ціни в період t – 1. Таким чином, перше рівняння моделі — це рівняння пропонування: її кількість на ринку в період t залежить від ціни в періоді $t-1$ (p_{t-1}). Випадкова змінна u_t характеризує залишки, на величину яких можуть впливати ті чинники, якими знехтували: витрати кормів, технологічні зміни і т. ін.

Друге рівняння моделі — це рівняння попиту на свинину. Ціна на свинину p_t на ринку в період t залежить від пропонування її g_t в цьому самому періоді. Змінна v_t характеризує залишки в цьому рівнянні.

Покажемо, що рівняння ідентифіковані. Для цього визначимо згідно з умовою (12.10) $k_s - 1 \le m - m_s$ $(s = 1, 2)$.

$k_1 = 1$ — кількість ендогенних змінних, які входять в перше рівняння;

$k_2 = 2$ — кількість ендогенних змінних, які входять в друге рівняння; $m = 1$ — кількість екзогенних змінних моделі; $m_1 = 1$ — кількість екзогенних змінних у першому рівнянні; $m_2 = 0$ — кількість екзогенних змінних в другому рівнянні.

Оскільки:

для I рівняння: $k_1 - 1 \leq m - m_1 \quad 0 = 0;$

для II рівняння: $k_2 - 1 \leq m - m_2 \quad 1 = 1,$

то система рівнянь точно ідентифікована.

Застосувавши 1МНК для оцінювання параметрів моделі, маємо

$$g_t = 0{,}80065 + 0{,}74171 p_{t-1};$$
$$p_t = 0{,}79513 - 0{,}14640 g_t.$$

Коефіцієнти при пояснюючих змінних характеризують еластичність: у першому рівнянні — еластичність пропонування свинини від ціни на неї в попередньому році, тобто якщо ціна в періоді $t-1$ підвищиться на 1 %, то пропонування свинини в наступному році збільшиться на 0,74 %; у другому рівнянні — еластичність ціни від попиту. Для визначення еластичності попиту знайдемо: $\dfrac{1}{-0{,}14640} = -6{,}83060$, тобто якщо ціна підвищиться на 1 %, то попит на свинину знизиться на 6,83 %.

12.4. Непрямий метод найменших квадратів (НМНК)

Повернемося до моделі (12.5), яка має два структурних рівняння. В параграфі 12.1 було показано, що між залежною змінною Y_t і залишками u_t існує кореляція. Застосування 1МНК для оцінки параметрів цієї моделі дає зміщення. Тому необхідно розглянути альтернативні методи оцінки параметрів, які дозволили б уникнути зміщення. Один з таких методів є непрямий метод найменших квадратів. Він складається з двох процедур. Спочатку застосовується 1МНК для оцінки параметрів кожного рівняння зведеної форми моделі (12.7) — (12.8). Основна особливість такої форми полягає в тому, що її здобуто в результаті розв'язування структурної системи рівнянь відносно поточних значень ендогенних змінних, і зведена форма виражає їх як функції решти змінних моделі таким чином, що кожне рівняння в такій формі має поточне значення тільки однієї ендогенної змінної.

Припущення (12.6) дозволяють безпосередньо застосувати 1МНК для оцінювання коефіцієнтів рівнянь зведеної форми, тобто рівнянь (12.7) і (12.8). Звідси:

$\dfrac{m_{cs}}{m_{ss}}$ — найкраща незміщена оцінка параметра $\dfrac{a_1}{1-a_1}$; (12.20)

$\dfrac{m_{ys}}{m_{ss}}$ — найкраща незміщена оцінка параметра $\dfrac{1}{1-a_1}$; (12.21)

$\dfrac{m_{ss}\overline{C}-m_{cs}\overline{S}}{m_{ss}}$ — найкраща незміщена оцінка параметра $\dfrac{a_0}{1-a_1}$ першого рівняння; (12.22)

$\dfrac{m_{ss}\overline{Y}-m_{ys}\overline{S}}{m_{ss}}$ — найкраща незміщена оцінка параметра $\dfrac{a_0}{1-a_1}$ другого рівняння. (12.23)

З (12.20) знайдемо значення параметра a_1^* для першого рівняння структурної форми:

$$a_1^*=\frac{m_{cs}}{m_{ss}+m_{cs}}.$$

Оскільки $Y=C+S$, або $y=c+s$, де малими буквами позначені відхилення від середніх, то справджується рівність: $m_{ys}=m_{cs}+m_{ss}$.

Звідси
$$a_1^*=\frac{m_{cs}}{m_{ys}}. \qquad (12.24)$$

Це значення оцінки параметра також можна було дістати на основі (12.21):

$$a_1^*=\frac{m_{ys}-m_{ss}}{m_{ys}}=\frac{m_{cs}}{m_{ys}}.$$

Отже, обидва рівняння приводять до ідентичної оцінки параметра a_1. Інші два рівняння ((12.22) і (12.23)) дадуть нам одну й ту саму оцінку параметра a_0:

$$a_0^*=\frac{m_{ss}\overline{S}-m_{cs}\overline{Z}}{m_{ys}}. \qquad (12.25)$$

Хоча оцінки (12.24) і (12.25) є незміщеними оцінками параметрів зведеної форми, вони не будуть незміщеними оцінками параметра a_0 і a_1 структурної форми (12.5). Але вони будуть обґрунтованими. Покажемо це. На основі рівнянь (12.7) і (12.8) і оцінки параметра a_1^*, знайденої за формулою (12.24), запишемо:

$$a_1^* = \frac{m_{cs}}{m_{ys}} = \frac{a_1 m_{ss} + m_{su}}{m_{ss} + m_{su}}.$$

Оскільки $m_{su} = 0$ при $n \to \infty$, то $p\lim a_1^* = a_1$. Щоб визначити зміщення для кінцевої вибіркової сукупності, обчислимо математичне сподівання

$$M(a_1^*) = M\left(\frac{a_1 + m_{su} / m_{ss}}{1 + m_{su} / m_{ss}}\right).$$

Нехай змінна S набуває фіксованих значень, при яких m_{ss} — константа. Згідно з припущенням відносно u для заданої вибіркової сукупності маємо $M(m_{su}) = 0$. А це означає, що оцінка a_1^* є незміщеною. Розглянемо приклад, коли отримані такі значення u, що дають змогу розрахувати значення m_{su} / m_{ss} з відповідними їм імовірностями, і при цьому буде виконуватись умова: $M(m_{us}) = 0$.

✓***Приклад 12.4.*** Задамо значення $a_1 = 0{,}5$ і знайдемо a_1^* на основі (12.24). Тоді $M(a_1^*) = 0{,}4870$, тобто параметр має зміщення в бік заниження. У табл. 12.1 покажемо розрахунок $M(a_1^*)$:

Таблиця 12.1

m_{su} / m_{ss}	Імовірності	a_1^*
–0,2	0,25	3/8 = 0,3750
–0,1	0,25	4/9 = 0,4444
0,1	0,25	6/11 = 0,5454
0,2	0,25	7/12 = 0,5833
		$M(a_1^*)$ = 0,4870

Виходячи із викладеного вище та наведеного прикладу, можна сказати, що непрямий метод найменших квадратів дає обґрунтовану оцінку параметрів рівнянь структурної форми моделі, але вона буде мати зміщення в бік заниження її рівня. Тому цей метод застосовується тільки за деяких спеціальних умов, а саме — ***точної ідентифікованості рівнянь структурної форми.***

Алгоритм непрямого методу найменших квадратів

Крок 1. Перевіряється умова ідентифікованості для кожного рівняння структурної форми моделі. Якщо кожне рівняння точно ідентифіковане, то переходимо до кроку 2.

Крок 2. Кожне рівняння структурної форми розв'язується відносно однієї з $\boldsymbol{k}$ ендогенних змінних моделі, у результаті приходимо до зведеної форми моделі.

Крок 3. Застосовуючи 1МНК, визначається оцінка параметрів окремо для кожного рівняння зведеної форми.

Крок 4. Розраховується оцінка параметрів рівнянь структурної форми за допомогою співвідношення $AR = -B$, де A і B — параметри структурних рівнянь, а R — матриця оцінок параметрів зведеної форми.

✓***Приклад 12.5.*** Необхідно побудувати економетричну модель на основі системи одночасних структурних рівнянь, яка включає два регресійні рівняння: *прибутку* та *інвестицій*.

Вихідні дані наведені в табл. 12.2.

Таблиця 12.2

Місяці	Прибуток, гр. од.	Інвестиції, гр. од.	Основні виробничі фонди, гр. од.	Фонд робочого часу (людино-днів)	Процентна ставка, %
1	39	62	22	104	20
2	41	65	25	109	19
3	38	57	17	99	22
4	42	66	27	114	20
5	44	69	28	116	21
6	49	58	20	110	23
7	44	72	32	119	18
8	45	70	30	116	17,5
9	48	75	34	114	17
10	51	79	35	120	16
11	49	77	33	124	15,5
12	54	82	37	119	14
13	55	80	37	129	16
14	57	75	39	129	15,5
15	56	83	38	132	14
16	54	81	36	130	15
17	59	87	40	124	13
18	61	92	42	134	12
19	62	95	43	137	11
20	64	97	42	139	10

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні моделі для періоду t:

y_{1t} — прибуток, ендогенна, залежна змінна;

y_{2t} — інвестиції, ендогенна, залежна змінна;

x_{1t} — основні виробничі фонди, екзогенна, пояснювальна змінна;

x_{2t} — фонд робочого часу, екзогенна, пояснювальна змінна;

x_{3t} — відсоткова ставка, екзогенна, пояснювальна змінна.

2. Специфікуємо модель в структурній формі на основі системи одночасних структурних рівнянь:

$$y_{1t} = b_{11}y_{2t} + a_{10}x_{0t} + a_{11}x_{1t} + a_{12}x_{2t} + u_{1t};$$

$$y_{2t} = b_{21}y_{1t} + a_{20}x_{0t} + a_{21}x_{1t} + a_{22}x_{3t} + u_{2t}.$$

3. Запишемо економетричну модель у зведеній формі:

$$y_{1t} = r_{10}x_{0t} + r_{11}x_{1t} + r_{12}x_{2t} + r_{13}x_{3t} + v_{1t};$$

$$y_{2t} = r_{20}x_{0t} + r_{21}x_{1t} + r_{22}x_{2t} + r_{23}x_{3t} + v_{2t}.$$

4. Ідентифікуємо рівняння структурної моделі, склавши нерівності для кожного з рівнянь: $k_s - 1 \le m - m_s$, де k_s — кількість ендогенних змінних в s-му рівнянні; m — загальна кількість екзогенних змінних моделі; m_s — кількість екзогенних змінних s-го рівняння моделі.

Для першого рівняння: $2 - 1 \le 3 - 2$;
$1 = 1$.

Для другого рівняння: $2 - 1 \le 3 - 2$;
$1 = 1$.

Отже, обидва рівняння моделі є точно ідентифіковані.

5. Оцінимо параметри моделі непрямим методом найменших квадратів. За цим методом необхідно спочатку оцінити параметри зведеної форми моделі 1МНК. У результаті дістанемо:

$$\hat{y}_{1t} = 8{,}89 + 0{,}119x_{1t} + 0{,}399x_{2t} - 0{,}632x_{3t};$$

$$\hat{y}_{2t} = 80{,}19 + 0{,}256x_{1t} + 0{,}183x_{2t} - 2{,}103x_{3t}.$$

6. Визначимо оцінки параметрів рівнянь структурної форми. Для цього розв'яжемо ***друге рівняння*** зведеної форми відносно x_{3t} і підставимо отриманий вираз у перше регресійне рівняння. У результаті дістанемо:

$$\hat{y}_{1t} = 0{,}3y_{2t} - 15{,}202 + 0{,}042x_{1t} + 0{,}344x_{2t}.$$

Розв'яжемо ***перше рівняння*** зведеної форми відносно x_{2t} і підставимо отриманий вираз у друге рівняння. У результаті дістанемо:

$$\hat{y}_{2t} = 0{,}46y_{1t} + 76{,}103 + 0{,}201x_{1t} - 1{,}812x_{3t}.$$

Таким чином, економетрична модель в структурній формі запишеться:

$$\hat{y}_{1t} = 0{,}3y_{2t} - 15{,}202 + 0{,}042x_{1t} + 0{,}344x_{2t};$$

$$\hat{y}_{2t} = 0{,}46y_{1t} + 76{,}103 + 0{,}201x_{1t} - 1{,}812x_{3t}.$$

12.5. Двокроковий метод найменших квадратів (2МНК)

Якщо рівняння структурної форми моделі надідентифіковані, то непрямий метод найменших квадратів застосувати не можна, а користуватись 1МНК недоцільно, тому необхідно розглянути інші методи, розроблені спеціально для таких моделей. Одним з цих методів є ***двокроковий метод найменших квадратів (2МНК).***

Розглянемо спочатку ідею методу. Вона полягає в тому, щоб «очистити» поточні ендогенні змінні y_t від стохастичної складової, бо вони пов'язані із залишками u_t. Так, на основі моделі (12.6) застосуємо 1МНК для економетричної моделі:

$$Y_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 S_t + \varepsilon_t, \tag{12.26}$$

де

$$\hat{b}_1 = \frac{m_{ys}}{m_{ss}} \tag{12.27}$$

і $\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1\bar{s}$.

Згідно з (12.26) обчислюються значення:

$$\hat{Y}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 S_t. \tag{12.28}$$

На наступному кроці підставляємо ці значення $\hat{Y}_t$ в перше рівняння моделі (12.5) і дістаємо:

$$C_t = a_0 + a_1\hat{Y}_t + (u_t + a_1\varepsilon_t). \tag{12.29}$$

У цьому співвідношенні змінна $\tilde{Y}_t$ є функцією змінної S_t, яка не корелює із залишками u_t. Крім того, на основі властивостей 1МНК значення ε_t не корелюють з S_t. Звідси значення $\tilde{Y}_t$ не корелюють з комбінованими залишками $(u_t + a_1\varepsilon_t)$ в рівнянні (12.29). Це дає нам змогу на другому кроці застосувати 1МНК безпосередньо для оцінки параметрів рівняння (12.29) і дістати оцінки параметрів a_0 і a_1.

Так, $\hat{a}_t = \dfrac{m_{c\hat{y}}}{m_{\hat{y}y}}$. Із (12.26) маємо $\hat{y}_t = \hat{b}_1 s_t$, де $\hat{y}_t$ і s_t узяті як відхилення від своєї середньої, тому $m_{c\bar{y}} = \hat{b}_1 m_{c\bar{s}}$ і $m_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{b}_1^2 m_{ss}$.

Використаємо (12.30) і отримаємо: $\hat{a}_1 = \dfrac{m_{cs}}{\hat{b}_1 m_{ss}} = \dfrac{m_{cs}}{m_{ys}}$.

Отже, знайдена оцінка збігається з оцінкою непрямого методу найменших квадратів. ***Це означає, що коли рівняння моделі точно ідентифіковані, то непрямий і двокроковий методи дають однакову оцінку параметрів моделі. Якщо рівняння надідентифіковані, то ці оцінки будуть різними.***

Розглянемо двокроковий метод найменших квадратів для загальної економетричної моделі. Нехай окреме рівняння моделі має вигляд

$$Y = Y_1 A + X_1 B + u, \tag{12.30}$$

де Y — вектор ендогенної змінної розміром $n \times 1$; Y_1 — матриця поточних екзогенних змінних, які входять в праву частину рівняння розміром $n \times r$; X_1 — матриця екзогенних змінних розміром $n \times m$ (включаючи стовпець одиниць, якщо потрібно визначити вільний член); A — вектор структурних параметрів розміром $k \times 1$, які стосуються змінних матриці Y_1; B — вектор структурних параметрів розміром $m \times 1$, які стосуються змінних матриці X_1; u — вектор залишків розміром $n \times 1$; n — кількість спостережень; m — кількість екзогенних змінних; k — кількість ендогенних змінних (рівень моделі).

На першому кроці розв'язуються $\hat{Y}_1 = f(X_1)$ на основі 1МНК. Заміна елементів матриці Y_1 елементами матриці $\hat{Y}_1$ в рівняннях моделі допоможе звільнитися від кореляції Y_1 і u. Розрахунок елементів матриці $\hat{Y}_1$ виконується на основі співвідношення:

$$\hat{Y}_1 = X(X'X)^{-1} X' Y_1, \tag{12.31}$$

де $X = (X_1, X_2)$.

Матриця X включає всі екзогенні змінні моделі. Матриця X_1 — значення екзогенних змінних даного рівняння. Матриця X_2 — значення екзогенних змінних моделі, які не ввійшли в це рівняння.

На другому кроці знаходиться залежність $\hat{Y}_1$ від Y і X_1. Це приводить до процедури оцінювання параметрів на основі такої системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_1'\hat{Y}_1 & \hat{Y}_1'X_1 \\ X_1'\hat{Y}_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{Y}_1 Y \\ X_1'Y \end{pmatrix}, \tag{12.32}$$

де $\hat{A}$ і $\hat{B}$ — вектори оцінок параметрів A і B.

Для обчислення оцінок $\hat{A}$ і $\hat{B}$ насправді немає потреби визначати $\hat{Y}_1$. Можна вивести альтернативне співвідношення для (12.28), коли для знаходження оцінок параметрів використовуються лише реальні спостереження. Для цього запишемо:

$$Y_1=\hat{Y}_1+v_1, \tag{12.33}$$

де V_1 — матриця залишків розміром $n \times k$ для регресії $\hat{Y}_1=f(X)$. 1МНК дає:

$$\hat{Y}_1 v=0;\ X'v_1=0. \tag{12.34}$$

Тому $\hat{Y}_1'\hat{Y}_1=\hat{Y}_1'(Y_1-v_1)=\hat{Y}_1'Y_1=Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1$

і $\hat{Y}_1'X_1=(Y_1-v_1)'X_1=Y_1'X_1$.

Оскільки $X'v_1=0$, то і $X_1'v=0$. Отже, рівняння для обчислення оцінок двокрокового методу найменших квадратів можна записати так:

$$\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{pmatrix}. \tag{12.35}$$

Альтернативну форму для (12.32) можна подати так:

$$\begin{pmatrix} Y_1'Y_1-v_1'v_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (Y_1-v_1)Y \\ X_1'Y \end{pmatrix}. \tag{12.36}$$

12.6. Алгоритм двокрокового методу найменших квадратів (2МНК)

Крок 1. Перевіряється кожне рівняння моделі на ідентифікованість. Якщо рівняння надідентифіковані, то для оцінювання параметрів кожного з них можна використати оператор оцінювання:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 & Y_1' X_1 \\ X_1' Y_1 & X_1' X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X' Y \\ X_1' Y \end{bmatrix}.$$

Крок 2. Знаходження добутку матриць поточних ендогенних змінних, які містяться у правій частині моделі, на матрицю всіх екзогенних змінних моделі, тобто $Y_1' X$.

Крок 3. Обчислення матриці $X'X$ і знаходження оберненої матриці $(X'X)^{-1}$.

Крок 4. Визначення добутку матриць всіх екзогенних і ендогенних змінних у правій частині моделі, тобто $X' Y_1$.

Крок 5. Знаходження добутку матриць, що здобуті на кроках 2—4, тобто $Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1$.

Крок 6. Визначення добутку матриць ендогенних змінних у правій частині моделі і екзогенних змінних, які внесені до даного рівняння, тобто $Y_1'X_1$.

Крок 7. Знаходження добутку матриць екзогенних змінних, які входять в дане рівняння, і ендогенних змінних правої частини системи рівнянь, тобто $X_1' Y_1$.

Крок 8. Визначення добутку матриць екзогенних змінних даного рівняння, тобто $X_1' X_1$.

Крок 9. Знаходження матриці, оберненої до блочної:

$$Q_s^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1} X'Y_1 & Y_1' X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1' X_1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Крок 10. Визначення добутку матриць $X'Y_1$, де X' — матриця всіх екзогенних змінних моделі, Y_1 — вектор ендогенної змінної лівої частини рівняння.

Крок 11. Знаходження добутку матриць:

$$G_s = Y_1'X_1' X_1(X'X)^{-1} X'Y_1.$$

Крок 12. Визначення оцінок параметрів моделі:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_s \\ \hat{B}_s \end{bmatrix} = Q_s^{-1} G_s .$$

Крок 13. Обчислення s-ї ендогенної змінної на основі знайдених параметрів $\hat{A}_s$ і $\hat{B}_s$:

$$\hat{Y}_s = Y_1 \hat{A}_s + X_1 \hat{B}_s .$$

Крок 14. Обчислення вектора залишків в s-му рівнянні системи:

$$u_s = Y_s - \hat{Y}_s .$$

Крок 15. Визначення дисперсії залишків для кожного рівняння:

$$\sigma_{u_s}^2 = \frac{1}{n-k-m+1} u_s' u_s .$$

Крок 16. Знаходження матриці коваріацій для параметрів кожного рівняння:

$$asy\,\mathrm{cov}\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \sigma_{u_s}^2 Q_s^{-1} .$$

Крок 17. Знаходження стандартної похибки параметрів і визначення інтервалів довіри:

$$S\begin{bmatrix} \hat{a}_{js} \\ \hat{b}_{js} \end{bmatrix} = \sqrt{\sigma_{u_s}^2 Q_s^{-1}} .$$

$$\hat{a}_{js} - t_{(\alpha)} S_a \le a_{js} \le \hat{a}_{js} + t_{(\alpha)} S_a ;$$

$$\hat{b}_{js} - t_{(\alpha)} S_b \le b_{js} \le \hat{b}_{js} + t_{(\alpha)} S_b .$$

✓***Приклад 12.6.*** Нехай спостереження вихідних даних задані у вигляді таких матриць:

$$Y'Y = \begin{pmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 15 & 60 & -45 \\ -5 & -45 & -70 \end{pmatrix}; \quad Y'X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix};$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель, яка може бути побудована на основі цих даних, складається з трьох рівнянь, одне з яких має такий вигляд:

$$y_{1t} = a_{12}y_{2t} + a_{13}y_{3t} + b_{11}x_{1t} + u_{1t}.$$

Модель має ще три екзогенні змінні — x_{2t}, x_{3t}, x_{4t}. Необхідно знайти оцінки параметрів цього рівняння моделі на основі двокрокового методу найменших квадратів та оцінити їхні стандартні похибки, якщо дисперсія залишків дорівнює 0,6.

Розв'язання

Крок 1. Перевіримо рівняння моделі на ідентифікованість. Для цього розглянемо нерівність

$$k_s - 1 \le m - m_s,$$

$k_s = 3$ — кількість ендогенних змінних, які входять в це рівняння;

$m = 4$ — загальна кількість екзогенних змінних;

$m_s = 1$ — кількість екзогенних змінних, що входить в це рівняння моделі.

$$3 - 1 \le 4 - 1, \qquad 2 < 3.$$

Таким чином, наведене рівняння моделі є надідентифікованим.

Крок 2. Запишемо оператор оцінювання параметрів 2МНК

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{bmatrix}.$$

У цьому операторі Y — вектор ендогенної змінної: $Y = (y_{1t})$;

Y_1 — матриця поточних ендогенних змінних, які входять в праву частину рівняння: $Y_1 = (y_{2t}\ y_{3t})$;

X — матриця всіх екзогенних змінних моделі: $X = (x_{1t}\ x_{2t}\ x_{3t}\ x_{4t})$;

X_1 — матриця екзогенних змінних даного рівнянн $X_1 = (\ x_{1t})$.

Крок 3. Знайдемо добуток матриць згідно з оператором оцінювання 2МНК:

3.1. $Y_1'X = \begin{pmatrix} Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{1t} & X_{2t} & X_{3t} & X_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix}$.

Ці дані взяті з матриці $Y'X$ (другий та третій рядки).

3.2. $(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Оскільки матриця $X'X$ є діагональною (це означає, що всі змінні взяті як відхилення від свого середнього значення). Звідси $(X'X)^{-1}$ також діагональна матриця.

3.3.
$$Y_1'X \cdot (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} = .$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.4.
$$Y_1'X \cdot (X'X)^{-1} \cdot X'Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \\ 12 & -12 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = .$$
$$= \begin{pmatrix} 49 & -50 \\ -50 & 58 \end{pmatrix}.$$

3.5. $Y_1'X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_1'Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$; $X_1'X_1 = 1$.

Звідси блочна матриця має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -50 & 0 \\ -50 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6. Знайдемо матрицю, обернену до матриці Q

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1695 & 0{,}1462 & 0 \\ 0{,}1462 & 0{,}1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7. Обчислимо добуток матриць, що знаходяться в правій частині оператора:

$$Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad X_1'Y = 2\,.$$

Маємо вектор $$\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Визначимо оцінки параметрів рівняння

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1695 & 0{,}1462 & 0 \\ 0{,}1462 & 0{,}1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}28 & 1{,}04 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перше рівняння економетричної моделі запишеться так:

$$\hat{y}_{1t} = 1{,}28y_{2t} + 1{,}04y_{3t} + 2x_{1t}.$$

Крок 5. Визначимо асимптотичні стандартні похибки знайдених оцінок параметрів рівняння:

$$asy\operatorname{cov}\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \sigma_u^2 Q^{-1} = 0{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1695 & 0{,}1462 & 0 \\ 0{,}1462 & 0{,}1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$asy\operatorname{var}(\hat{a}_{12}) = 0{,}6 \cdot 0{,}1695 = 0{,}1087; \quad S_{\hat{a}_{12}} = \sqrt{0{,}1087} \approx 0{,}32;$$

$$asy\operatorname{var}(\hat{a}_{13}) = 0{,}6 \cdot 0{,}1433 = 0{,}08597; \quad S_{\hat{a}_{13}} = \sqrt{0{,}08597} \approx 0{,}29;$$

$$asy\operatorname{var}(\hat{b}_{11}) = 0{,}6 \cdot 1 = 0{,}6; \quad S_{\hat{b}_{11}} = \sqrt{0{,}6} \approx 0{,}78.$$

Відношення стандартних похибок до абсолютних значень оцінок становлять відповідно 24,9 %, 28,8 %, 38,7 %, а це свідчить про те, що оцінки параметрів рівняння є зміщеними і неефективними.

✓***Приклад 12.7.*** Побудувати економетричну модель, яка містить регресійні рівняння продуктивності праці та заробітної плати.

Для побудови цієї економетричної моделі скористаємося вихідними даними з табл.12.3.

Таблиця 12.3

Місяць	Продуктивність праці, гр. од.	Заробітна плата, гр. од.	Фондомісткість продукції, гр. од.	Плинність робочої сили, %	Рівень втрат робочого часу, %	Середній стаж, років
	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4
1-й	52	220	72	13,0	2,7	5,0
2-й	53	228	74	12,5	2,8	5,5
3-й	50	210	72	12,0	3,0	5,0
4-й	51	220	73	11,0	3,2	6,0
5-й	54	245	70	10,1	3,2	7,0
6-й	55	250	67	9,0	3,3	8,0
7-й	57	260	67	8,5	3,4	10,0
8-й	52	222	62	8,2	3,6	10,0
9-й	60	270	72	8,0	3,7	10,5
10-й	60	265	72	5,5	3,7	11,0
11-й	62	275	74	5,0	3,4	13,0
12-й	64	280	75	4,7	4,0	10,0
13-й	65	280	76	4,6	4,2	12,0
14-й	67	290	80	4,0	4,3	13,0
15-й	67	285	82	4,1	4,7	14,0
16-й	62	273	84	4,2	4,8	14,5
17-й	63	278	84	4,5	4,8	15,5

Розв'язання

Ідентифікуємо змінні моделі

Y_1 — продуктивність праці, ендогенна змінна;

Y_2 — заробітна плата, ендогенна змінна;

X_1 — фондомісткість продукції, екзогенна змінна;
X_2 — плинність робочої сили, екзогенна змінна;
X_3 — рівень втрат робочого часу, екзогенна змінна;
X_4 — стаж працюючих, екзогенна змінна.

У загальному вигляді економетрична модель подається так:

$$Y_1 = f(Y_2, X_1, X_2, u_1);$$

$$Y_2 = f(Y_1, X_2, X_3, X_4, u_2).$$

Звідси випливає, що продуктивність праці у першому рівнянні є ендогенною (залежною) змінною, а в другому — екзогенною (незалежною) змінною. Заробітна плата є ендогенною (залежною) змінною у другому рівнянні і одночасно — екзогенною (незалежною) змінною у першому. Така взаємозалежність цих двох економічних показників є реальною, й економетрична модель описує цю залежність, не виключаючи решту чинників, які також впливають на продуктивність праці та зарплату. З рівнянь випливає, що між пояснювальними змінними і залишками параметрів моделі існує залежність. Тому застосовувати метод 1МНК недоцільно.

Специфікуємо модель у лінійній (структурній) формі

$$Y_1 = a_{12}Y_2 + b_{10} + b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_4 + u_1;$$

$$Y_2 = a_{21}Y_1 + b_{20} + b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}X_4 + u_2.$$

На основі вибіркових даних розрахункову модель можна записати так:

$$\hat{Y}_1 = \hat{a}_{12}Y_2 + \hat{b}_{10} + \hat{b}_{11}X_1 + \hat{b}_{12}X_2 + \hat{b}_{13}X_4;$$

$$\hat{Y}_2 = \hat{a}_{21}Y_1 + \hat{b}_{20} + \hat{b}_{22}X_2 + \hat{b}_{23}X_3 + \hat{b}_{24}X_4.$$

Ідентифікуємо рівняння моделі в структурній формі, перевіривши для кожного рівняння співвідношення:

$$k_s - 1 \le m - m_s,$$

де k_s — кількість ендогенних змінних у рівнянні; m — загальна кількість екзогенних змінних у моделі; m_s — кількість екзогенних змінних в s-му рівнянні.

Перше рівняння: $2 - 1 \le 4 - 3;$

$$1 = 1.$$

Рівняння точно ідентифіковане.

Друге рівняння: $2 - 1 \le 4 - 3;$

$$1 = 1.$$

Рівняння точно ідентифіковане.

У зведеній формі економетрична модель набирає вигляду

$$\hat{Y}_1 = \hat{r}_{10} + \hat{r}_{11}X_1 + \hat{r}_{12}X_2 + \hat{r}_{13}X_3 + \hat{r}_{14}X_4;$$

$$Y_2 = \hat{r}_{20} + \hat{r}_{21}X_1 + \hat{r}_{22}X_2 + \hat{r}_{23}X_3 + \hat{r}_{24}X_4,$$

де $\hat{r}_{1j}$, $\hat{r}_{2j}$ $\left(j=\overline{0,4}\right)$ — оцінки параметрів зведеної форми моделі.

Як бачимо, зведена модель включає регресійні рівняння, що характеризують взаємозалежність кожної ендогенної змінної зі всіма екзогенними змінними.

Оцінюємо параметри зведеної форми моделі 1МНК на основі даних табл. 12.3.

Економетрична модель у зведеній формі запишеться так:

$$\hat{Y}_1 = 60{,}145 + 0{,}316X_1 - 1{,}936X_2 - 2{,}315X_3 - 0{,}182X_4;$$
$$(5{,}558)\quad (2{,}419)\quad (-3{,}886)\quad (-1{,}003)\quad (-0{,}354)$$
$$R^2 = 0{,}902 \qquad F = 27{,}54;$$

$$\hat{Y}_2 = 292{,}378 + 0{,}970X_1 - 8{,}287X_2 - 14{,}740X_3 + 0{,}917X_4;$$
$$(4{,}916)\quad (1{,}342)\quad (-3{,}010)\quad (-1{,}155)\quad (-0{,}323)$$
$$R^2 = 0{,}856 \qquad F = 17{,}92.$$

Знайдемо розрахункові значення продуктивності праці $\hat{Y}_1$ (на основі першого) і зарплати $\hat{Y}_2$ (на основі другого рівняння). Результати подамо у вигляді табл. 12.4.

Таблиця 12.4

Місяць	Продуктивність праці $\hat{Y}_1$, %	Зарплата $\hat{Y}_2$	Місяць	Продуктивність праці $\hat{Y}_1$, %	Зарплата $\hat{Y}_2$
1-й	50,5	219,284	10-й	61,712	272,203
2-й	51,874	224,353	11-й	63,644	284,543
3-й	51,837	223,150	12-й	63,696	276,404
4-й	53,445	230,376	13-й	63,380	277,089
5-й	54,057	235,842	14-й	65,395	285,386
6-й	54,824	241,490	15-й	64,725	281,318
7-й	55,198	245,995	16-й	64,842	281,615
8-й	53,734	240,682	17-й	64,080	280,046
9-й	56,962	251,026			

Оцінимо параметри економетричної моделі у структурній формі, взявши замість фактичних значень продуктивності праці Y_1 та зарплати Y_2 їх розрахункові значення $\hat{Y}_1$ і $\hat{Y}_2$. Масив змінних для побудови рівняння продуктивності праці запишеться у вигляді табл. 12.5:

Таблиця 12.5

Місяць	Y_1	$\hat{Y}_2$	X_1	X_2	X_4	Місяць	Y_1	$\hat{Y}_2$	X_1	X_2	X_4
1-й	52	219,2844	72	13,0	5,0	10-й	60	272,2026	72	5,5	11,0
2-й	53	224,3530	74	12,5	5,5	11-й	62	284,5432	74	5,0	13,0
3-й	50	223,1496	72	12,0	5,0	12-й	64	276,4036	75	4,7	10,0
4-й	51	230,3763	73	11,0	6,0	13-й	65	277,0891	76	4,6	12,0
5-й	54	235,8416	70	10,1	7,0	14-й	67	285,3855	80	4,0	13,0
6-й	55	241,4904	67	9,0	8,0	15-й	67	281,5183	82	4,1	14,0
7-й	57	245,9946	67	8,5	10,0	16-й	62	281,6146	84	4,2	14,5
8-й	52	240,6818	62	8,2	10,0	17-й	63	280,0457	84	4,5	15,5
9-й	60	251,0257	72	8,0	10,5						

Маємо масив змінних для побудови рівняння зарплати (таблиця 12.6):

Таблиця 12.6

Y_2	$\hat{Y}_1$	X_2	X_3	X_4	Y_2	$\hat{Y}_1$	X_2	X_3	X_4
220	50,59577	13.0	2,7	5,0	265	61,71150	5,5	3,7	11,0
228	51,87419	12,5	2,8	5.5	275	63,64387	5,0	3,4	13,0
210	51,83715	12.0	3,0	5,0	280	63,69624	4,7	4,0	10,0
220	53,44493	11,0	3,2	6.0	280	63,38007	4,6	4,2	12,0
245	54,05680	10.1	3.2	7,0	290	65,39404	4,0	4,3	13,0
250	54,82433	9,0	3,3	8,0	285	64,72541	4,1	4,7	14,0
260	55,19777	8,5	3,4	10.0	273	64,84220	4,2	4,8	14,5
222	53,73371	8,2	3,6	10,0	278	64,07987	4,5	4,8	15,5
270	56,96214	8.0	3,7	10,5					

Звідси економетрична модель у структурній формі набирає вигляду:

$$\hat{Y}_1 = 14{,}216 + 0{,}157Y_1 + 0{,}164X_1 - 0{,}634X_2 - 0{,}325X_4;$$
$$(0{,}318)\quad(1{,}002)\quad(1{,}193)\quad(-0{,}508)\quad(-0{,}689)$$

$$R^2 = 0{,}902 \qquad F = 27{,}54;$$

$$\hat{Y}_2 = 107{,}92 + 3{,}067Y_1 - 2{,}350X_2 - 7{,}639X_3 + 1{,}474X_4;$$
$$(0{,}632)\quad(1{,}343)\quad(-0{,}491)\quad(-0{,}702)\quad(0{,}514)$$

$$R^2 = 0{,}856 \qquad F = 17{,}92.$$

Коефіцієнти кореляції та критерій Фішера свідчать, що рівняння економетричної моделі достовірні. Але в рівнянні продуктивності праці лише дві оцінки статистично значущі — $\hat{b}_{11} = 0{,}157$ і $\hat{a}_{11} = 0{,}164$, решта — статистично незначущі. У регресійному рівнянні зарплати статистично значущий лише один параметр $\hat{b}_{22} = 3{,}067$, решта — статистично незначущі.

У реальних дослідженнях ті екзогенні змінні, оцінки параметрів яких незначущі, вилучають або, збільшивши кількість спостережень, знову оцінюють параметри моделі, тобто змінюють специфікацію моделі.

Розрахуємо коефіцієнти еластичності чинників, які ввійшли до кожного рівняння моделі.

Для рівняння продуктивності праці, %	Для рівняння заробітної плати, %
$E_{Y_1/Y_2} = 0{,}687;$ $E_{Y_1/X_1} = 0{,}207;$ $E_{Y_1/X_2} = -0{,}082;$ $E_{Y_1/X_4} = -0{,}056;$ $\sum_{j=1}^{4} E_{Y_1/X_j} = 0{,}757$	$E_{Y_2/Y_1} = 0{,}7;$ $E_{Y_2/X_2} = -0{,}07;$ $E_{Y_2/X_3} = -0{,}11;$ $E_{Y_2/X_4} = -0{,}06;$ $\sum_{i=1}^{4} E_{Y_2/X_i} = 0{,}578$

Коефіцієнти еластичності показують, що зі зростанням зарплати на 1 % продуктивність праці зростає на 0,687 %, при збільшенні фондомісткості на 1 % продуктивність праці зростає на 0,207 %. Збільшення плинності робочої сили на 1 % може знизити рівень продуктивності праці на 0,08 %. Таку саму приблизно залежність визначає зміна стажу працюючих.

Аналізуючи взаємозв'язок, що базується на коефіцієнтах еластичності, необхідно пам'ятати, що решта екзогенних змінних, які не пов'язані з цим коефіцієнтом, не змінюються. Загальна еластичність показує: якщо всі екзогенні змінні зростуть на 1 %, то продуктивність праці зросте на 0,757 %.

Коефіцієнти еластичності рівняння характеризують такий взаємозв'язок:

- якщо продуктивність праці зростає на 1 %, а решта чинників сталі, то заробітна плата знижується на 0,11 %;
- якщо плинність робочої сили зростає на 1 %, а решта чинників сталі, то зарплата зменшується на 0,07 %;
- якщо втрати робочого часу збільшуються на 1 %, а решта чинників сталі, то зарплата зменшується на 0,11 %;
- якщо стаж працюючих збільшується на 1 %, а решта чинників сталі, то зарплата збільшується на 0,06 %.

Сумарний коефіцієнт еластичності свідчить про те, що при одночасному зростанні всіх екзогенних змінних на 1 % зарплата збільшується на 0,578 %.

Оцінимо параметри структурної економетричної моделі, скориставшись оператором 2МНК:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X'Y_1 & Y'X_1 \\ X_1' Y_1 & X'X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X'Y \\ X_1' Y \end{bmatrix},$$

де Y_1 — матриця поточних ендогенних змінних, тобто таких, які містяться у правій частині рівняння; X — матриця всіх екзогенних змінних моделі; X_1 — матриця екзогенних змінних того рівняння, яке оцінюється; Y — матриця тих ендогенних змінних, які містяться в лівій частині рівняння; $\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів моделі при екзогенних змінних; $\hat{B}$ — вектор оцінок параметрів моделі при поточних ендогенних змінних.

Застосуємо наведений щойно оператор 2МНК для оцінювання параметрів рівняння зарплати. Запишемо матриці змінних для цього рівняння відповідно до оператора:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 2{,}7 & 5 \\ 1 & 12{,}5 & 2{,}8 & 5{,}5 \\ 1 & 12 & 3 & 5 \\ 1 & 11 & 3{,}2 & 6 \\ 1 & 10{,}1 & 3{,}2 & 7 \\ 1 & 9 & 3{,}3 & 8 \\ 1 & 8{,}5 & 3{,}4 & 10 \\ 1 & 8{,}2 & 3{,}6 & 10 \\ 1 & 8 & 3{,}7 & 10{,}5 \\ 1 & 5{,}5 & 3{,}7 & 11 \\ 1 & 5 & 3{,}4 & 13 \\ 1 & 4{,}7 & 4 & 10 \\ 1 & 4{,}6 & 4{,}2 & 12 \\ 1 & 4 & 4{,}3 & 13 \\ 1 & 4{,}1 & 4{,}7 & 14 \\ 1 & 4{,}2 & 4{,}8 & 14{,}5 \\ 1 & 4{,}5 & 4{,}8 & 15{,}5 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 220 \\ 228 \\ 210 \\ 220 \\ 245 \\ 250 \\ 260 \\ 222 \\ 270 \\ 265 \\ 275 \\ 280 \\ 280 \\ 290 \\ 285 \\ 273 \\ 278 \end{pmatrix}; \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 52 \\ 53 \\ 50 \\ 51 \\ 54 \\ 55 \\ 57 \\ 52 \\ 60 \\ 60 \\ 62 \\ 64 \\ 65 \\ 67 \\ 67 \\ 62 \\ 63 \end{pmatrix};$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 2{,}7 & 5 \\ 1 & 12{,}5 & 2{,}8 & 5{,}5 \\ 1 & 12 & 3 & 5 \\ 1 & 11 & 3{,}2 & 6 \\ 1 & 10{,}1 & 3{,}2 & 7 \\ 1 & 9 & 3{,}3 & 8 \\ 1 & 8.5 & 3.4 & 10 \\ 1 & 8{,}2 & 3{,}6 & 10 \\ 1 & 8 & 3{,}7 & 10{,}5 \\ 1 & 5{,}5 & 3{,}7 & 11 \\ 1 & 5 & 3{,}4 & 13 \\ 1 & 4{,}7 & 4 & 10 \\ 1 & 4{,}6 & 4.2 & 12 \\ 1 & 4 & 4{,}3 & 13 \\ 1 & 4{,}1 & 4{,}7 & 14 \\ 1 & 4{,}2 & 4{,}8 & 14{,}5 \\ 1 & 4{,}5 & 4{,}8 & 15{,}5 \end{pmatrix};$$

$$\left(X_1' X\right) = \begin{pmatrix} 17 & 1256 & 128{,}9 & 62{,}8 & 170 \\ 1256 & 93376 & 9347 & 4686{,}7 & 12761 \\ 128{,}9 & 9347 & 1145{,}95 & 445{,}04 & 1121{,}2 \\ 62.8 & 4686{,}7 & 445{,}04 & 239{,}26 & 661{,}75 \\ 170 & 12761 & 1121{,}2 & 661{,}75 & 1889 \end{pmatrix};$$

$$\left(X_1' X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 26{,}00577 & -0{,}13123 & -0{,}8986 & -1{,}21882 & -0{,}49351 \\ -0{,}13123 & 0{,}003839 & -0{,}00256 & -0{,}03638 & 0{,}000139 \\ -0{,}8986 & -0{,}00256 & 0{,}55734 & 0{,}075028 & 0{,}038809 \\ -1{,}21882 & -0{,}03638 & 0{,}075028 & 1{,}197125 & -0{,}10847 \\ -0{,}49351 & 0{,}000139 & 0{,}038809 & -0{,}10847 & 0{,}058969 \end{pmatrix};$$

$$Y_1'X = \begin{pmatrix} 944 & 73819 & 7257{,}2 & 3724{,}1 & 10216 \end{pmatrix};$$

$$Y' = (52 \;\; 53 \;\; 50 \;\; 51 \;\; 54 \;\; 55 \;\; 57 \;\; 52 \;\; 60 \;\; 60 \;\; 62 \;\; 64 \;\; 65 \;\; 67 \;\; 67 \;\; 62 \;\; 63);$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 72 & 74 & 72 & 73 & 70 & 67 & 67 & 62 & 72 & 72 & 74 & 75 & 76 & 80 & 82 & 84 & 84 \\ 13 & 12{,}5 & 12 & 11 & 10{,}1 & 9 & 8{,}5 & 8{,}2 & 8 & 5{,}5 & 5 & 4{,}7 & 4{,}6 & 4 & 4{,}1 & 4{,}2 & 4{,}5 \\ 2{,}7 & 2{,}8 & 3 & 3{,}2 & 3{,}2 & 3{,}3 & 3{,}4 & 3{,}6 & 3{,}7 & 3{,}7 & 3{,}4 & 4 & 4{,}2 & 4{,}3 & 4{,}7 & 4{,}8 & 4{,}8 \\ 5 & 5{,}5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 10 & 10{,}5 & 11 & 13 & 10 & 12 & 13 & 14 & 14{,}5 & 15{,}5 \end{pmatrix};$$

$$X'Y_1 = \begin{pmatrix} 994 \\ 73819 \\ 7257{,}2 \\ 3724{,}1 \\ 10216 \end{pmatrix}; \qquad X'Y = \begin{pmatrix} 4351 \\ 322980 \\ 31727{,}5 \\ 16300{,}4 \\ 44771{,}5 \end{pmatrix};$$

$$Y_1 X\left(X'X\right)^{-1} X'Y_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} 60{,}14654 & 0{,}316353 & -1{,}93605 & -2{,}3155548 & -0{,}18151 \end{pmatrix};$$

$$Y_1 X\left(X'X\right)^{-1} X'Y = 58610{,}55;$$

$$Y_1' X_1 = \begin{pmatrix} 994 & 7257{,}5 & 3724{,}5 & 10216 \end{pmatrix};$$

$$Y_1 X_1 X\left(X'X\right)^{-1} X'Y_1 = 25657{,}3;$$

$$\left(X_1'Y\right) = \begin{pmatrix} 4351 \\ 31727{,}5 \\ 1630{,}4 \\ 44771{,}5 \end{pmatrix}; \quad \left(X_1' X_1\right) = \begin{pmatrix} 17 & 128{,}9 & 62{,}8 & 170 \\ 128{,}9 & 1145{,}95 & 445{,}04 & 1121{,}2 \\ 62{,}8 & 445{,}04 & 239{,}26 & 661{,}75 \\ 170 & 1121{,}2 & 661{,}75 & 1889 \end{pmatrix}.$$

$$X_1' =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 13 & 12{,}5 & 12 & 11 & 10{,}1 & 9 & 8{,}5 & 8{,}2 & 8 & 5{,}5 & 5 & 4{,}7 & 4{,}6 & 4 & 4{,}1 & 4{,}2 & 4{,}5 \\ 2{,}7 & 2{,}8 & 3 & 3{,}2 & 3{,}2 & 3{,}3 & 3{,}4 & 3{,}6 & 3{,}7 & 3{,}7 & 3{,}4 & 4 & 4{,}2 & 4{,}3 & 4{,}7 & 4{,}8 & 4{,}8 \\ 5 & 5{,}5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 10 & 10{,}5 & 11 & 13 & 10 & 12 & 13 & 14 & 14{,}5 & 15{,}5 \end{pmatrix}$$

Сформуємо блочну матрицю:

$$X_1' = \begin{pmatrix} 994 \\ 7257{,}2 \\ 3724{,}1 \\ 10216 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 58610{,}55 & 944 & 7257{,}2 & 3724{,}1 & 10216 \\ 944 & 17 & 128{,}9 & 62{,}8 & 170 \\ 7257{,}2 & 128{,}9 & 1145{,}95 & 445{,}04 & 1121{,}5 \\ 3724{,}1 & 62{,}8 & 445{,}04 & 239{,}26 & 661{,}75 \\ 10216 & 170 & 1121{,}2 & 661{,}75 & 1889 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену до неї:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}038356187 & -2722177 & 0{,}066164 & -0{,}02616 & 0{,}007401 \\ -2{,}72176806 & 214{,}6574 & -5{,}68118 & 0{,}60609 & -1{,}01396 \\ 0{,}0661163953 & -5{,}68118 & 0{,}168157 & 0{,}005635 & 0{,}051669 \\ -0{,}02615851 & 0{,}60609 & 0{,}005635 & 0{,}870276 & -0{,}1122 \\ 0{,}00740134 & -1{,}01396 & 0{,}051669 & -0{,}1122 & 0{,}060392 \end{pmatrix}.$$

Вектор оцінок параметрів моделі такий:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 3{,}066347006 \\ 107{,}9524665 \\ -2{,}35060697 \\ -7{,}63858041 \\ 1{,}473854315 \end{pmatrix};$$

$$X'Y = (50{,}59677 \quad 51{,}87419 \quad 51{,}83715 \quad 53{,}44492961 \quad 54{,}0568$$
$$54{,}82433 \quad 55{,}1977 \quad 53{,}73371 \; 56{,}96214 \quad 61{,}7115 \quad 63{,}64387$$
$$63{,}69624 \quad 63{,}38007 \quad 65{,}39404 \quad 64{,}72541 \quad 64{,}8422 \quad 64{,}07987).$$

Скориставшись вектором оцінок параметрів моделі, запишемо регресійне рівняння зарплати, оцінене за допомогою 2МНК:

$$\tilde{Y}_2 = 107{,}925 + 3{,}066Y_1 - 2{,}351X_2 - 7{,}638X_3 + 1{,}474X_4.$$

Порівняння оцінок параметрів цього рівняння з оцінками рівняння заробітної плати, здобутого за допомогою 2МНК раніше, свідчить про їх ідентичність. Звідси очевидно, що обидва підходи реалізують 2МНК.

12.7. Трикроковий метод найменших квадратів (3МНК)

Розглянуті вище два методи — непрямий і двокроковий методи найменших квадратів застосовуються для оцінки параметрів кожного окремого рівняння моделі. Трикроковий метод найменших квадратів призначений для одночасної оцінки параметрів всіх рівнянь моделі.

Зельнер і Гейл [2] запропонували трикроковий метод найменших квадратів, який за певних обставин є більш ефективним, ніж двокроковий.

Розглянемо загальну лінійну модель, яка містить k взаємозв'язаних ендогенних і m екзогенних змінних. Запишемо s-те рівняння цієї моделі у вигляді

$$Y_s = Y_s A_s + X_s B_s + u_s, s = 1, \ldots, S, \qquad (12.37)$$

де Y_s — вектор значень ендогенної змінної s-го рівняння розміром $n \times 1$; Y_s — матриця поточних ендогенних змінних s-го рівняння розміром $n \times k$; X_s — матриця екзогенних змінних s-го рівняння розміром $n \times m$; A_s і B_s — вектори параметрів; u_s — вектор залишків.

Об'єднавши дві матриці Y_s і X_s в матрицю Z_s, перепишемо (12.37) у вигляді:

$$Y_s = Z_s \delta_s + u_s, \; s = \overline{1, r}, \qquad (12.38)$$

де

$$Z_s = \left[Y_s X_s\right] \quad \text{і} \quad \delta_s = \begin{bmatrix} A_s \\ B_s \end{bmatrix}. \tag{12.39}$$

Помножимо рівняння (12.38) зліва на X', де X — матриця всіх екзогенних змінних моделі розміром $n \times m$

$$X'Y_s = X'Z_s\delta_s + X'u_s \, (s = \overline{1, r}). \tag{12.40}$$

Для цієї моделі коваріаційна матриця залишків має вигляд

$$M(X'u_s u_s' X) = \sigma_{ss}^2 X'X, \tag{12.41}$$

де σ_{ss}^2 — стала дисперсія залишків s-го рівняння, а $\sigma_{ss}^2 X'X$ — дисперсія залишків системи рівнянь моделі. З урахуванням (12.41) оцінка параметрів моделі (12.40) може бути виконана узагальненим методом найменших квадратів.

$$\delta_s^* = \left[Z_s' X(X'X)^{-1} X'Z_s \right]^{-1} Z_s' X(X'X)^{-1} X'Y_s. \tag{12.42}$$

Запишемо систему рівнянь (12.38) у вигляді такої матричної форми:

$$\begin{bmatrix} X'Y_1 \\ X'Y_2 \\ \dots \\ X'Y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X'Z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X'Z_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X'u_1 \\ X'u_2 \\ \dots \\ X'u_r \end{bmatrix}. \tag{12.43}$$

Матриця коваріацій для вектора залишків, який входить в рівняння (12.43), буде мати вигляд:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 X'X & \sigma_{12}^2 X'X & \dots & \sigma_{1r}^2 X'X \\ \sigma_{21}^2 X'X & \sigma_{22}^2 X'X & \dots & \sigma_{2r}^2 X'X \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{r1}^2 X'X & \sigma_{r2}^2 X'X & \dots & \sigma_{rr}^2 X'X \end{bmatrix}. \tag{12.44}$$

Нехай елементи матриці σ_{ri}^2 створюють матрицю Σ, тоді $V = \Sigma \otimes (X'X)$ і $V^{-1} = \Sigma^{-1} \otimes (X'X)^{-1}$. Метод Ейткена дає наближені оцінки параметрів системи (12.43). Але для того щоб дістати ці оцінки, необхідно знати матрицю V, яка залежить від невідомої матриці Σ.

Зельнер і Гейл [2] запропонували обчислювати елементи матриці Σ на основі залишків, здобутих за допомогою двокрокового методу найменших квадратів. Отже, двокроковий метод застосовується для оцінювання параметрів δ_s за формулою (12.42) у кожному структурному рівнянні. Після чого знайдені оцінки δ_s підставляються в (12.38). Обчислюються значення $\hat{Y}_s$, з допомогою яких можна знайти $\hat{u}_s$ $(s = \overline{1,r})$.

На основі $\hat{u}_s$ визначаються дисперсії залишків для кожного рівняння S_{rj}^2, які є наближеною оцінкою σ_{rj}^2.

Звідси оператор оцінювання на основі трикрокового методу найменших квадратів матиме вигляд:

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} (S_{11}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X' Z_1 & \dots & (S_{1r}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X^{\copyright} Z_r \\ \dots & \dots & \dots \\ (S_{r1}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X' Z_1 & \dots & (S_{rr}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X^{\copyright} Z_r \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{r} (S_{1j}^2)^{-1} Z_1' X (X'X)^{-1} X' Y_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{r} (S_{rj}^2)^{-1} Z_r' X (X'X)^{-1} X' Y_j \end{bmatrix}. \qquad (12.45)$$

Оцінку асимптотичної матриці коваріацій параметрів дає обернена матриця, яка міститься в правій частині виразу (12.45), тобто

$$asy\operatorname{cov}(\hat{\delta}) = \begin{bmatrix} (S_{11}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X' Z_1 & \dots & (S_{1r}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X' Z_r \\ \dots & \dots & \dots \\ (S_{r1}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X' Z_1 & \dots & (S_{rr}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X' Z_r \end{bmatrix}^{-1}. \qquad (12.46)$$

Трикроковий метод найменших квадратів забезпечує кращу порівняно з двокроковим методом асимптотичну ефективність оцінок лише в тому разі, коли матриця Σ не є діагональною, тобто коли залишки, які входять в різні рівняння моделі, корелюють між собою.

Щоб застосувати трикроковий метод найменших кввадратів на практиці, необхідне виконання таких вимог:

1) усі тотожності, які входять в систему рівнянь, треба виключити, приступаючи до знаходження оцінок параметрів;

2) кожне неідентифіковане рівняння також треба виключити з системи;

3) якщо система рівнянь, що залишилась, має точно ідентифіковані і надідентифіковані рівняння, то трикроковий метод оцінки доцільно застосовувати до кожної з цих груп;

4) для групи надідентифікованих рівнянь оцінки параметрів знаходяться на основі співвідношення (12.46), взявши значення k таким, що дорівнює числу надідентифікованих рівнянь;

5) якщо група надідентифікованих рівнянь має тільки одне рівняння, то трикроковий метод перетворюється на двокроковий;

6) якщо матриця коваріацій Σ для структурних залишків блочно-діагональна, то вся процедура оцінювання на основі трикрокового методу найменших квадратів може бути застосована окремо до кожної групи рівнянь, які відповідають одному блоку.

12.8. Прогноз ендогенних змінних

Під час побудови економетричних моделей, як правило, ставиться дві основні цілі. Одна ціль полягає в оцінці параметрів структурних рівнянь, а також рівнянь зведеної форми. Друга ціль — дістати за допомогою моделі умовний прогноз залежних змінних за певних припущень відносно майбутніх значень пояснювальних змінних.

Якщо необхідно здобути оцінку структурних коефіцієнтів, то, як було сказано вище, треба скористатись обґрунтованим оператором оцінювання. Якщо досліджувача задовольняють коефіцієнти рівнянь зведеної форми, то їх незміщеність і обґрунтованість може бути досягнута під час застосування 1МНК до кожного рівняння, або узагальненого методу найменших квадратів, що базується на процедурі Зельнера, яка дає змогу оцінити декілька зовні не пов'язаних одне з одним рівнянь. Але ні 1МНК, ні метод Зельнера не накладають будь-яких обмежень на параметри зведеної форми, тоді як такі обмеження існують і вони містяться в системі рівнянь, що зв'язує параметри структурної і зведеної форми, тобто матриці $R=-A^{-1}B$. Клейн допускає, що коли специфікацію моделі у структурній формі вибрано правильно, то більш ефективно розрахувати спочатку коефіцієнти матриць A і B, а потім оцінити параметри матриці R, тобто він пропонує знаходити оцінку матриці R так:

$$\hat{R} = -\hat{A}^{-1}\hat{B}.$$

Якщо оцінки $\hat{A}$ і $\hat{B}$ будуть обґрунтованими, то і оцінка $\hat{R}$ також буде обґрунтованою. Але проблемою залишається формування й оцінювання вибіркових дисперсій елементів матриці $\hat{R}$. Звідси задачу можна сформулювати так: відомі обґрунтовані оцінки елементів матриць $\hat{A}$ і $\hat{B}$ та їх асимптотичні матриці коваріацій. Необхідно знайти асимптотичну матрицю коваріацій для елементів матриці $\hat{R}$.

Така матриця може бути знайдена на основі співвідношення

$$asy\mathrm{var}(r) = n^{-1}D'VD, \tag{12.47}$$

де

$$D = (A^{-1})' \otimes \begin{bmatrix} R \\ E_s \end{bmatrix}, \tag{12.48}$$

$n^{-1}V$ — асимптотична коваріаційна матриця структурних оцінок $\hat{A}$ і $\hat{B}$.

Розглянемо прогноз ендогенних змінних при заданих значеннях екзогенних змінних. Точковий прогноз одержати досить просто, підставивши значення екзогенних змінних в приведену форму рівнянь. Тому, якщо позначити через X_f вектор прогнозних екзогенних змінних, то точковий прогноз залежних ендогенних змінних буде визначатись так:

$$Y_f = \hat{R}X_f. \tag{12.49}$$

Визначення довірчих інтервалів для цього прогнозу залежить від методу, за допомогою якого була отримана матриця $\hat{R}$. Як було сказано раніше, матриця $\hat{R}$ може бути отримана на основі застосування 1МНК окремо до кожного рівняння зведеної форми, або як $\hat{R} = -\hat{A}^{-1}\hat{B}$, де структурні коефіцієнти оцінені на основі дво- або трикрокового методу найменших квадратів. Якщо специфікацію моделі в структурній формі вибрано правильно, то останній спосіб має перевагу. Якщо ж про точну специфікацію моделі не можна сказати нічого конкретного, то краще оцінювати рівняння зведеної форми за допомогою 1МНК. У такому разі

$$\hat{R} = Y'X(X'X)^{-1}, \tag{12.50}$$

де Y — матриця елементів усіх залежних ендогенних змінних розміром $n \times k$; X — матриця елементів усіх екзогенних змінних розміром $n \times m$.

Дійсні значення прогнозних залежних змінних дорівнюватимуть

$$Y_f = RX_f + v_f, \qquad (12.51)$$

де v_f — вектор залишків для прогнозного періоду.

Похибка прогнозу тоді дорівнює:

$$Y_f' - Y_f = (\hat{R} - R)X_f - v_f. \qquad (12.52)$$

12.9. Приклади економетричних моделей на основі систем одночасних структурних рівнянь

12.9.1. Модель Кейнса. Класична економічна теорія не вивчала спеціально фаз безробіття. Вона розглядала їх як тимчасові випадковості й довгостроковими проблемами рівноваги і зростання цікавилася більше, ніж короткостроковими змінами. Проте впродовж 1930—1940 рр. у більшості розвинутих країн спостерігалося тривале масове безробіття. Щоб передбачити розвиток економіки та вжити певних заходів впливу на економічний розвиток, потрібно було знати, як в даний момент фіксувати рівень випуску продукції та зайнятості й чому остання не буває ні дуже високою, ні дуже низькою.

Розв'язання цієї проблеми було головною турботою Кейнса. Він намагався пояснити рівень виробництва в період неповного завантаження робочої сили та обладнання. Згодом численні дослідники вивчали це питання, намагаючись висвітлити нечіткі місця теорії Кейнса або запропонувати власні варіанти розв'язання проблеми. Ці намагання привели до висновків, що капіталовкладення відіграють основну роль в кон'юнктурній еволюції з двох причин:

1) рішення про інвестиції значною мірою є автономними, вони впливають на зростання обсягів виробництва у двох секторах — предметів споживання та засобів виробництва;

2) зростання обсягів виробництва збільшує доходи, а останні, у свою чергу, впливають на збільшення обсягу виробництва предметів споживання.

Покажемо, як наведені щойно міркування можна спрощено подати у вигляді моделі.

Нехай P — загальний обсяг продукції; C — виробництво предметів споживання; I — виробництво засобів виробництва (що дорівнює капіталовкладенням); R — доходи, які розподіляються. Тоді модель запишеться так:

$$P = C + I;$$
$$C = F(R, u), \tag{12.53}$$

де u — стохастична складова;

$$R = P.$$

У цій моделі I задається автономно, а F є функція, що визначає відповідність між споживанням і розподіленими доходами.

Наведена модель спрощена і повністю не відтворює ні ідей Кейнса, ні справжньої складності фактів. Проте вона порівняно добре пояснює досягнутий рівень виробництва. Адже з трьох записаних щойно рівнянь можна дістати таке рівняння:

$$P - F(R, u) = I. \tag{12.54}$$

Розв'язавши його відносно P, знайдемо рівень виробництва, який пов'язаний з рівнем капіталовкладень. Так, наприклад, якщо $F(R)$ є лінійна функція

$$C = F\left(R\right) = \hat{\alpha}R + \hat{\beta} = \hat{\alpha}P + \hat{\beta}, \tag{12.55}$$

то рівняння (12.53) набирає вигляду $(1-\hat{\alpha})P - \hat{\beta} = I$,
звідки

$$P = \frac{I}{1-\hat{\alpha}} + \frac{\hat{\beta}}{1-\hat{\alpha}}. \tag{12.56}$$

Рівняння (12.56) визначає залежність обсягу виробництва P від обсягу капіталовкладень I, які задаються автономно. Коефіцієнти $\hat{\alpha}$ і $\hat{\beta}$ в цьому рівнянні залежать від функції споживання (2.56), тобто від рівня зв'язку між R і C. Зокрема, ця функція вимірює збільшення споживання $\hat{\alpha}$, яке пов'язане зі збільшенням доходу на одиницю і називається «граничною схильністю до споживання». Значення $\hat{\alpha}$, як правило, менше за одиницю. Зокрема, у моделі Кейнса $\hat{\alpha} = 0{,}6$. Згідно з цим залежність (12.56) показує, що збільшення капіталовкладень на одиницю зумовлює зростання обсягу виробництва на $1/(1-\hat{\alpha})$ — коефіцієнт, який завжди більший за одиницю (при $\tilde{\alpha} = 0,6$ маємо $1/(1-\tilde{\alpha}) = 2,5$). Цей коефіцієнт вимірює ефект взаємозв'язку між автономним зростанням капіталовкладень та обсягом виробництва і називається ***мультиплікатором***.

Модель (12.53) формалізує теорію Кейнса в її найпростішому вигляді. Але цінність згаданої моделі виходить за ці межі, бо вона дає змогу вивчати різні конкретні питання економічної кон'юнктури в країні, для якої було б знайдено адекватну форму функції $F(R, u)$. Для забезпечення надійності результатів необхідно, щоб модель з потрібним ступенем точності відповідала дійсності, але досягти цього за такої вельми віддаленої схематизації не можна. Кон'юнктурні моделі, застосовувані для короткострокового прогнозування, використовують набагато більше змінних і рівнянь, але їх логічна природа досить близька до природи моделі (12.53).

12.9.2. Економетричні моделі Укр. 1-3. Протягом 1960—1970-х років в розвинутих країнах (США, Франції, Німеччині, а також в Україні) для аналізу та прогнозування узагальнених економічних показників було розроблено економетричні моделі розвитку національних економік.

Модель Укр—1 має відносно невелику кількість вхідних показників — екзогенних факторів. Вихідні (ендогенні) фактори розраховуються як розв'язок певної системи рівнянь, яка враховує функціональні взаємозв'язки і структурні співвідношення між економічними показниками, Більшість зв'язків ураховується завдяки регресійному аналізу.

Основні співвідношення моделі Укр—1:

$$
\begin{aligned}
&P_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_t + \alpha_2 \Phi_t\,;\\
&\Phi_t = \Phi_{t-1} + \Delta\Phi_t\,;\\
&M_t = \beta_0 + \beta_1 P_t\,;\\
&Y_t = P_t - M_t\,;\\
&\tilde{Y}_t = Y_t - \Omega_t - W_t\,;\\
&C_t = \tilde{Y}_t - S_t\,;\\
&S_t = \nu_0 + \nu_1 \tilde{Y}_t\,;\\
&I_t = \lambda_0 + \lambda_1 S_t + \lambda_2 A_t\,; \qquad (12.57)
\end{aligned}
$$

$$A_t = \mu_0 + \mu_1\Phi_t;$$

$$\Delta\Phi_t = \eta_0 + \eta_1 I_t + \eta_2 I_{t-1} + \eta_3 I_{t-2};$$

$$R_t = \varphi_0 + \varphi_1 L_t;$$

$$\frac{B_t}{L_t} = \delta_0 + \delta_1 \frac{C_t}{L_t};$$

$$\frac{Ж_t}{L_{mt}} = \theta_0 + \theta_1 \frac{Y_t}{L_t},$$

де P_t — валовий внутрішний продукт;

R_t — чисельність робітників і службовців, які зайняті в галузях матеріального виробництва;

Φ_t — середньорічний обсяг основних виробничих фондів (ОВФ)

$\Delta\Phi_t$ — приріст основних виробничих фондів ОВФ;

M_t — матеріальні витрати;

Y_t — вироблений національний дохід;

$\tilde{Y}_t$ — національний дохід, який використовується в державі;

Ω_t — сальдо експорту-імпорту;

W_t — втрати продукції;

C_t — фонд споживання;

S_t — фонд нагромадження;

A_t — амортизаційні відрахування;

I_t — капітальні вкладення виробничого призначення;

L_t — чисельність населення;

B_t — споживання матеріальних благ та послуг;

L_{mt} — чисельність міського населення,

$Ж_t$ — житловий фонд у містах.

Параметри α_0, β_0, ν_0, λ_0 μ_0. η_0. φ_0, δ_0, θ_0 — це вільні члени рівнянь, α_1, α_2, x, β_1, ν_1, λ_1, λ_2, μ_1, η_1, η_2, η_3, φ_1, δ_1, θ_1 — оцінки параметрів екзогенних змінних (коефіцієнти регресії).

Щоб визначити місце моделі Укр—1, необхідно з'ясувати, наскільки вона віддзеркалює схему взаємодії елементів і чинників валового національного продукту (ВНП) в сучасних умовах (рис. 12.1). Але експериментальні модельні прогнози мали похибки 1—4 %.

У моделі Укр—2 система рівнянь Укр—1 поширюється на галузеві блоки: 1) промисловість; 2) сільське господарство; 3) будівництво; 4) транспорт і зв'язок; 5) торгівля і громадське харчування; 6) інші галузі матеріального виробництва; 7) зведені показники.

<table>
<tr><td colspan="9">Валовий національний продукт</td></tr>
<tr><td colspan="3">Додатковий продукт</td><td>Жива праця</td><td colspan="5">Минула праця</td></tr>
<tr><td colspan="4">Національний дохід</td><td colspan="5">Матеріальні витрати</td></tr>
<tr><td colspan="2">Фонд накопичення</td><td colspan="2">Фонд споживання</td><td>Знаряддя праці</td><td colspan="4">Предмети праці</td></tr>
<tr><td>Податки</td><td>Прибуток</td><td>Заробітна плата</td><td>Нарахування на зарплату</td><td>Амортизаційні відрахування</td><td>Сировина та основні матеріали</td><td>Допоміжні матеріали</td><td>Енергія</td><td>Паливо</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чистий дохід</td><td colspan="7">Собівартість продукції</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="10">Чинники впливу</td></tr>
<tr><td colspan="6">на прибуток</td><td colspan="4">на собівартість</td></tr>
<tr><td colspan="3">Обсяг виробництва</td><td colspan="3">Собівартість</td><td>Структура та асортимент продукції</td><td>Продуктивність праці</td><td>Фондовіддача</td><td>Заощадження матеріальних витрат</td></tr>
<tr><td colspan="6">Норма прибутку в ціноутворенні</td><td rowspan="4"></td><td colspan="2" rowspan="3">Організація виробництва і праці. Технічний рівень виробництва</td><td rowspan="3">Покращення використання матеріалів. Застосування нових видів сировини</td></tr>
<tr><td colspan="6">Розподіл прибутку</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Фонд розвитку виробництва</td><td rowspan="2">Фонд матеріального заохочення</td><td rowspan="2">Фонд соціально-культурних заходів</td><td rowspan="2">Плата за фонди</td><td rowspan="2">Рентні (фіксовані) платежі</td><td rowspan="2">Вільний залишок прибутку</td></tr>
<tr><td>Норми оплати праці</td><td>Норми амортизації</td><td>Норми витрати матеріалів</td></tr>
</table>

Рис. 12.1. Елементи і чинники валового національного продукту

Особливості моделі Укр—2:

✓ у рівнянні для промисловості як додатковий самостійний фактор введено час t, а для сільського господарства — фонд посівних площ G;

✓ у рівнянні фонду заробітної плати V до галузевих блоків введено також регресійні рівняння:

$$
\begin{aligned}
&V_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t\,;\\
&\mathrm{O}_t = \omega_0 + \omega_1 M_t\,;\\
&\Pi_t = l_0 + l_1 Y_t\,;\\
&G_t = \pi_0 + \pi_1 Q_t\,;\\
&Q_t = \xi_0 + \xi_1 P_{1t}\,;\\
&CM_t = i_0 + i_1 I_t\,;\\
&\Gamma_t = \tau_0 + \tau_1 \Phi_{4t} + \tau_2 P_t\,;\\
&\Pi\mathrm{O}_4 = h_0 + h_1 L_t + h_2 \Phi_{4t} + h_3 t\,;\\
&З_t = x_0 + x_1 Y_t + x_2 L_t + x_3 \Phi_{4t}\,;\\
&\mathrm{T} = \psi_0 + \psi_1 C_t\,,
\end{aligned}
\qquad (12.58)
$$

де O_t — середньорічний обсяг обігових засобів;

Π_t — прибуток;

Q_t — постачання мінеральних добрив;

CM_t — обсяг будівельно-монтажних робіт;

Γ_t — вантажообіг транспорту;

$\Pi\mathrm{O}_t$ — пасажирообіг;

$З_t$ — обсяг продукції зв'язку;

T_t — роздрібний товарообіг;

P_{1t} — валова продукція промисловості;

Φ_{4t} — основні виробничі фонди транспорту і зв'язку.

$\gamma_0, \gamma_1, w_0, w_1, l_0, l_1, \pi_0, \pi_1, \xi_0, \xi_1, i_0, i_1, \tau_0, \tau_1, \tau_2, h_0, h_1, h_2, x_0, x_1, x_2, x_3, \psi_0, \psi_1$ — оцінки параметрів регресії.

Модель Укр—2, як і модель Укр—1, є замкненою системою рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих. Завдяки взаємній ув'язці, зміна якого-небудь показника веде до перерахунку більшості інших. Кількість показників моделі Укр — 2 дорівнює *101*.

Модель Укр—3 розроблена на базі моделі Укр—2 з поширенням на економічні райони й адміністративно-господарські області, що дає можливість враховувати регіональний характер багатьох видів ресурсів, насамперед матеріально-технічних і трудових. Ці ресурси виступають як обмеження розвитку певних виробничих комплексів на певній території.

Використання економетричних моделей типу ***Укр 1—3*** з адаптацією до нових економічних і соціальних умов дозволить вирішувати питання комплексного прогнозування основних макроекономічних показників України, здійснювати перевірку нових концепцій і альтернатив економічного розвитку методом імітації, своєчасно виявляти «вузькі» місця в розвитку виробництва і готувати пропозиції щодо поліпшення використання виробничих ресурсів.

Основні параметри регулювання моделей: продуктивність праці за валовим внутрішнім продуктом і за національним доходом; питома вага приросту основних фондів в обсязі кінцевого продукту; коефіцієнти переведення приросту ОВФ у середньорічний приріст; відношення приросту незавершеного будівництва до величини введених ОВФ; частка амортизації, яка спрямовується на реновацію ОВФ, а також основних невиробничих фондів з фонду споживання; частка фонду нагромадження у національному доході; частка капітальних вкладень у фонді нагромадження; питома вага запасів товарно-матеріальних цінностей в обсязі оборотних засобів; робочий час; чисельність зайнятих і їх розподіл за галузями.

Деякі додаткові критерії регулювання в економетричних моделях:

✓ виробництво валового національного продукту у певних галузях не повинно зменшуватися нижче від встановленого рівня;

✓ забезпечення необхідної кількості зайнятих відповідно до встановленого мінімуму виробництва національного продукту;

✓ своєчасне оновлення продукції.

Економетричні моделі в нових умовах мали значну трансформацію. На перше місце вийшли показники експорту, імпорту стратегічно важливих для України видів продукції — електроенергії, вугілля, нафти, газу, металу, цементу, металорізальних верстатів, тракторів, зерна, цукру, м'яса, картоплі, молока тощо.

12.9.3. Динамічна макроеконометрична модель. Незважаючи на загальноприйняті принципи побудови економетричної моделі на макрорівні на основі системи одночасних структурних рівнянь, ми стикаємося з певним колом теоретичних і практичних питань, які не розв'язані на сьогоднішній день або не мають єдиного рішення для всього класу макромоделей. У цьому підрозділі пропонується один з підходів до побудови макроеконометричної моделі України, яка враховує особливості сучасног стану економіки і спроможна оцінити очікувані зміни її на корот кий період.

Важливою ознакою економетричної моделі України, побудо ваної на основі системи одночасних структурних рівнянь, є її ди намічний характер. Економетрична модель стає динамічною, як що в її рівняння вводяться змінні з відхиленням у часі або ж якщ час є самостійною трендовою змінною. Такі моделі дуже складн з погляду оцінювання параметрів моделі, але специфікація їх з допомогою лагових змінних більш об'єктивно відтворює реальн економічні процеси.

Структура економетричної моделі України включає п'ять вза ємопов'язаних блоків:

- ✓ виробництво і споживання;
- ✓ інвестиції та основні фонди;
- ✓ кількість зайнятих і зарплата;
- ✓ ціни та грошова маса;
- ✓ експорт-імпорт.

Ці блоки містять чотирнадцять регресійних рівнянь і чотир тотожності.

I. Виробництво і споживання

$$X_t = F_t^{b_{11}} L_t^{b_{12}} a_{10} X_{t-1}^{a_{11}} u_{1t}; \tag{12.59}$$

$$M_t = b_{20} + b_{21} X_t + u_{2t}; \tag{12.60}$$

$$Y_t^1 = X_t - M_t - A_t; \tag{12.61}$$

$$S_t = b_{31}\left(Y_t^1 - N_t\right) + a_{30} + a_{31} S_{t-1} + u_{31}. \tag{12.62}$$

II. Інвестиції та основні фонди

$$K_t = b_{41}\left(X_t - X_{t-1}\right) + a_{40} + a_{41} K_{t-1} + a_{42} r_t + u_{4t}; \tag{12.63}$$

$$F_t = a_{50} X^{b_{51}} P_t^{a_{51}} t^{a_{52}} u_{5t}; \tag{12.64}$$

$$\Delta F_t = b_{61} K_t + a_{60} + a_{61} K_{t-1} + a_{62} K_{t-2} + a_{63} K_{t-1} + u_{6t}; \tag{12.65}$$

$$A_t = b_{71} F_t + a_{70} + a_{71} F_{t-1} + u_{7t}; \tag{12.66}$$

$$K_t^0 = K_t + A_t. \tag{12.67}$$

III. Кількість зайнятих і зарплата

$$L_t^1 = a_{80} X_t^{b_{81}} L_t^{b_{82}} u_{8t}; \tag{12.68}$$

$$d_t = L_t - L_t^1; \tag{12.69}$$

$$З_t = a_{90} + a_{91} \overline{d}_t + b_{91} \Delta P_t + u_{9t}; \tag{12.70}$$

$$З_t^R = b_{10,1} Y_t + b_{10,2} \Delta P_t + a_{10,0} + a_{10,1} H_t + u_{10,t}. \tag{12.71}$$

IV. Ціна і грошова маса

$$\begin{aligned} \Delta P_t = b_{11,1}(m_t - m_{t-1}) + b_{11,2}(X_t - X_{t-1}) + \\ + b_{11,3}(З_t - З_t^R) + a_{11,0} + a_{11,1}\Delta P_{t-1} + u_{11,t}; \end{aligned} \tag{12.72}$$

$$m_t = b_{12,1} Y_t + a_{12,0} + a_{12,2} P_t + a_{12,2} r_t + u_{12,t}. \tag{12.73}$$

V. Експорт–імпорт

$$E_t = b_{13,1} X_t + a_{13,0} + a_{13,1} E_{t-1} + a_{13,2} P_t + a_{13,3} P_t^* + u_{13,t}; \tag{12.74}$$

$$I_t = b_{14,1} S_t + b_{14,2} K_t + a_{14,0} + a_{14,1} G_t + u_{14,t}. \tag{12.75}$$

Тотожність національних рахунків.

$$Y_t = S_t + K_t^0 + E_t - I_t + G_t.$$

Економетрична модель містить 17 ендогенних і 16 екзогенних змінних.

Ендогенні змінні:

X_t — валовий внутрішній продукт у період t;
F_t — основні виробничі фонди в період t;
L_t^1 — кількість зайнятих у цілому по народному господарстві у період t;
M_t — фонд поточного виробничого споживання у період t;
S_t — обсяг невиробничого споживання у період t;
K_t — чисті інвестиції у період t;
K_t^0 — загальний обсяг інвестування у період t;
A_t — фонд амортизації у період t;
Y_t^1 — внутрішній національний продукт у період t;
d_t — кількість безробітних у період t;

$З_t$ — номінальна заробітна плата у період t;

$З_t^R$ — реальна заробітна плата в період t;

ΔP_t — приріст індексу цін на споживчі товари в період t;

m_t — грошова маса в період t;

E_t — експорт товарів і послуг у період t;

I_t — імпорт товарів і послуг у період t;

Y_t — валовий національний продукт у період t.

Екзогенні змінні

r_t — норма відсотка у період t;

P_t — індекс споживчих цін у період t;

$\overline{d}_t$ — частка безробітних у загальній кількості працездатного населення;

X_{t-1} — валовий внутрішній продукт у період $t-1$;

K_{t-1} — чисті інвестиції у період $t-1$;

S_{t-1} — невиробниче споживання у період $t-1$;

H_t — обсяг невиплат по заробітній платі у період t;

m_{t-1} — грошова маса у період $t-1$;

ΔP_{t-1} — приріст індексу цін на споживчі товари в період $t-1$;

E_{t-1} — експорт товарів і послуг у період $t-1$;

K_{t-2} — чисті інвестиції у період $t-2$;

K_{t-3} — чисті інвестиції у період $t-3$;

G_t — державні витрати у період t;

P_t^* — індекс зміни зовнішніх цін на товари і послуги у період t;

N_t — податки, акцизи, мита;

t — трендова складова, що характеризує науково-технічний прогрес;

u_{kt} — стохастична складова, яка входить до k-го регресійного рівняння моделі $\left(k=\overline{1,14}\right)$.

Екзогенні змінні включають вісім лагових, що дозволяє враховувати динамічний характер залежностей, бо наслідки змін екзогенних змінних виявлятимуться за межами того періоду часу, до якого вони відносяться. Це буде справедливо і для одночасних змін, що набувають форми імпульсу або сплеску.

12.9.4. Моделі пропонування та попиту на конкурентному ринку. На конкурентному ринку рівновага обміну встановлюється через рівновагу між пропонуванням і попитом. Нехай

g_1 і g_2 — обсяги попиту і пропонування деякого продукту в певний день на деякому ринку; p — ціна, за якою реалізується продукція. Функції g_1 і g_2 залежать від p. Оскільки ціна може не влаштовувати покупців і продавців, то кількість проданого товару змінюється. У результаті можна записати дві функції:

$g_1 = f(p, u)$ — функцію попиту;

$g_2 = \Psi(p, \varepsilon)$ — функцію пропонування.

Знаючи ціну p, можна визначити величини попиту і пропонування. Для існування рівноваги на ринку необхідно, щоб між ними виконувалась рівність. Отже, модель має такий вигляд:

$$\begin{aligned} &g_1 = f(p, u); \\ &g_2 = \Psi(p, \varepsilon); \\ &g_1 = g_2. \end{aligned} \tag{12.76}$$

До неї входять дві функції, що характеризують залежність попиту і пропонування від ціни, а також тотожність.

У реальних умовах попит і пропонування певного товару залежать не лише від його ціни, а й від цін товарів, які можуть заміняти або доповнювати даний товар. Попит і пропонування залежать також від інших чинників, наприклад, попит залежить від доходу покупців, а пропонування — від виробничих умов і т. ін. Тоді модель (12.76) можна записати так:

$$\begin{aligned} &g_{1t} = f(p_t, X_{1t}, X_{2t}, \ldots X_{mt}, u_t); \\ &g_{2t} = \Psi(p_{t-1}, X_{1t}, X_{2t}, \ldots X_{mt}, \varepsilon_t); \\ &g_{1t} = g_{2t}. \end{aligned} \tag{12.77}$$

У цій моделі на відміну від попередньої попит у періоді t залежить від ціни в цьому самому періоді, а пропонування в періоді t залежить від ціни попереднього періоду $(t-1)$.

Нехай залежність попиту і пропонування від факторів, що впливають на них, лінійна. Тоді економетрична модель запишеться так:

$$\begin{gathered} g_{1t} = a_0 + a_1 p_t + a_2 X_{1t} + a_3 X_{2t} + \ldots + a_{m+1} X_{mt} + u_t; \\ g_{2t} = b_0 + b_1 p_{t-1} + b_2 X_{1t} + b_3 X_{2t} + \ldots + b_{m+1} X_{mt} + \varepsilon_t; \\ g_{1t} = g_{2t}. \end{gathered}$$

Запишемо модель попиту на товар, включивши до неї такі екзогенні змінні (у гр. од.):

X_{1t} — дохід на душу населення (гр. од.);

P_{1t} — ціна одиниці даного товару (гр. од.);

P_{2t} — ціна одиниці взаємозамінюваного товару (гр. од.);

P_{3t} — ціна доповнювального товару (гр. од.);

До моделі пропонування включимо:
P_{1t} — ціну одиниці даного товару (гр. од.);
P_{2t} — ціну одиниці взаємозамінюваного товару (гр. од.);
P_{3t} — ціну доповнювального товару (гр. од.).
Тоді модель попиту і пропонування запишеться так:

$$g_{1t} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + \hat{a}_2 P_{1t} + \hat{a}_3 P_{2t} + \hat{a}_4 P_{3t};$$

$$g_{2t} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 P_{1t-1} + \hat{b}_2 P_{2t} + \hat{b}_3 P_{3t};$$

$$g_{1t} = g_{2t}.$$

Визначимо ідентифікованість цих рівнянь моделі на основі співвідношення $K_s - 1 = m - m_s$, де k_s — ендогенних змінних в s-му рівнянні; m — загальна кількість екзогенних змінних; m_s — кількість екзогенних змінних в s-му рівнянні моделі.

Перше рівняння моделі

	Умова ідентифікації: $k_1 - 1 \le m - m_1$
$k_1 = 1$ $m = 4$ $m_1 = 4$	$1 - 1 = 4 - 4$

Рівняння точно ідентифіковане.

Друге рівняння моделі

	Умова ідентифікації: $k_2 - 1 \le m - m_2$
$k_2 = 1$ $m = 4$ $m_2 = 3$	$1 - 1 \le 4 - 3$

Рівняння надідентифіковане.
Звідси параметри першого рівняння можна оцінити непрямим методом найменших квадратів, а другого — двокроковим.

12.10. Стислі висновки

1. Наявність прямих та зворотних зв'язків між економічними показниками в багатьох випадках вимагає використання системи одночасних рівнянь. Вони, як правило, містять лінійні рівняння. Нелінійність зв'язків апроксимується лінійними співвідношеннями. Динаміка економічних зв'язків ураховується за допомогою часових лагів або лагових змінних.

2. Система одночасних структурних рівнянь в матричному вигляді запишеться так:

$$Y = AY + BX + u.$$

Якщо кожне рівняння системи розв'язати відносно Y, то одержимо зведену форму моделі, яка має вигляд:

$$Y = RX + v,$$

де залишки v є лінійною комбінацією залишків u.

3. Зв'язок між коефіцієнтами структурної і зведеної форми моделі запишеться так:

$$R = (E - A)^{-1}B \text{ або}$$

$$R = -A^{-1}B, \text{ або}$$

$$AR + B = 0.$$

4. Оцінка параметрів моделі на основі системи одночасних рівнянь 1МНК даватиме зміщення, яке буде дорівнювати:

$$\frac{(1 - a_1)\sigma^2 / \overline{m}_{ss}}{1 + \sigma^2 / \overline{m}_{ss}},$$

де $\overline{m}_{ss}$ — момент другого порядку залежної змінної, який прямує до деякої константи.

5. Чисельна оцінка параметрів моделі на основі одночасових структурних рівнянь пов'язана з проблемою ідентифікації. Необхідна умова ідентифікації системи — справедливість нерівності для кожного рівняння:

$$k_s - 1 \le m - m_s,$$

де k_s — кількість ендогенних змінних, які входять в s-те рівняння структурної форми; m — загальна кількість екзогенних змінних моделі; m_s — кількість екзогенних змінних, які не входять в s-те рівняння структурної форми моделі.

Якщо записане вище співвідношення виконується як рівність, то відповідне рівняння є точно ідентифікованим, а коли як нерівність, то відповідне рівняння є надідентифікованим. Якщо воно не виконується, то потрібно змінити специфікацію моделі.

6. Якщо в структурній формі моделі

$$Y = AY + BX + u$$

матриця A є трикутною, а залишки характеризуються діагональною матрицею вигляду

$$\sum = M(uu') = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

то така система рівнянь називається ***рекурсивною*** і для оцінювання параметрів можна застосувати 1МНК.

7. Якщо кожне рівняння моделі є точно ідентифікованим, то для оцінки параметрів моделі можна застосувати непрямий метод найменших квадратів (НМНК). Алгоритм цього методу складається з чотирьох кроків.

Крок 1. Перевіряється умова ідентифікованості для кожного рівняння. Якщо кожне рівняння точно ідентифіковане, то виконується перехід до кроку 2.

Крок 2. Перехід від структурної форми моделі до зведеної.

Крок 3. Оцінка параметрів кожного рівняння зведеної форми моделі 1МНК.

Крок 4. Розрахунок оцінок параметрів рівнянь структурної форми на основі співвідношення $\hat{A}\hat{R} = -\hat{B}$, де A і B — параметри структурних рівнянь, а $\hat{R}$ — матриця оцінок параметрів зведеної форми моделі.

8. Якщо рівняння структурної форми моделі надідентифіковані, то для оцінки параметрів моделі застосовується двокроковий метод найменших квадратів (2МНК). Система рівнянь для обчислення оцінок двокроковим методом найменших квадратів запишеться так:

$$\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{pmatrix},$$

де Y — вектор залежної або ендогенної змінної; Y_1 — матриця поточних ендогенних змінних, які входять у праву частину рівняння; X — матриця всіх пояснювальних або екзогенних змінних; X_1 — матриця пояснювальних або екзогенних змінних даного рівняння; $\hat{A}$ — вектор оцінок структурних параметрів, які стосуються змінних матриці Y_1; $\hat{B}$ — вектор оцінок структурних параметрів, які стосуються змінних матриці X_1.

9. Оператор оцінювання 2МНК запишеться так:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{bmatrix}.$$

Дисперсія залишків для кожного рівняння має вигляд:

$$\sigma_{u_i}^2 = \frac{1}{n-k-m+1} u_i' u_i.$$

Матриця коваріацій параметрів кожного рівняння визначається на основі співвідношення:

$$asy\ \mathrm{var}\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \sigma_{u_s}^2 \begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

10. Трикроковий метод найменших квадратів (3МНК), на відміну від попередніх, призначений для одночасного оцінювання параметрів всіх рівнянь моделі. Оператор оцінювання 3МНК матиме вигляд:

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} (S_{11}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X'Z_1 & \dots & (S_{1r}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X'Z_r \\ \dots & \dots & \dots \\ (S_{r1}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X'Z_1 & \dots & (S_{rr}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X'Z_r \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{r} (S_{1j}^2)^{-1} Z_1' X(X'X)^{-1} X'Y_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{r} (S_{rj}^2)^{-1} Z_r' X(X'X)^{-1} X'Y_j \end{bmatrix},$$

де $\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$ — оцінки параметрів моделі; $Z_s = (Y_s\, X_s)$ $(s = \overline{1,r})$ – Z_s — змінні моделі в правій частині s-го рівняння; S_{sj}^2 — дисперсії залишків для кожного рівняння, які є наближеною оцінкою σ_{sj}^2.

11. Щоб застосувати 3МНК на практиці необхідне виконання таких вимог:

1) розпочинаючи оцінювати параметри моделі, слід вилучити всі тотожності;

2) виключити з системи кожне неідентифіковане рівняння;

3) за наявності серед рівнянь системи точно ідентифікованих та надідентифікованих 3МНК доцільно застосовувати до кожної з груп рівнянь окремо;

4) якщо група надідентифікованих рівнянь має тільки одне рівняння, то 3МНК перетворюється на 2МНК;

5) якщо матриця коваріацій для структурних залишків є блочно-діагональною, то вся процедура оцінювання на основі 3МНК може бути застосована окремо для кожної групи рівнянь, які відповідають одному блоку.

12. Точковий прогноз залежних ендогенних змінних визначається на основі приведеної форми економетричної моделі

$$Y_f = \hat{R} X_f,$$

де X_f — вектор прогнозних екзогенних змінних.

Визначення довірчих інтервалів для цього прогнозу залежить від методу, за допомогою якого було одержано матрицю $\hat{R}$.

13. Інтервали довіри для кожної ендогенної змінної задаються співвідношенням

$$\hat{Y}_{jf} \pm t_{(\alpha/2)} \sqrt{S_{ss}^2},$$

де S_{ss}^2 — дисперсія залишків s-го рівняння моделі;

$t_{(\alpha/2)} = F_{(\alpha)}$.

14. Інтервали довіри для всіх ендогенних змінних визначаються так:

$$Y_{sf} = \hat{Y}_{jf} \pm \sqrt{\frac{[1 + X_f'(X'X)^{-1} X_f](n-k)m}{n-k-m+1} \cdot S_{ss}^2},$$

де S_{ss}^2 — незміщена дисперсія залишків усіх рівнянь моделі.

Ці інтервали будуть ширшими, ніж тоді, коли їх задавати для кожної ендогенної змінної окремо.

12.11. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Запишіть в загальному вигляді структурну форму моделі на основі системи одночасних рівнянь.

2. Що означає зведена форма моделі? Як її одержати?

3. Дайте визначення рекурсивних систем і запишіть модель на основі рекурсивної системи.

4. Яка система рівнянь називається точно ідентифікованою?

5. Яка система рівнянь називається надідентифікованою?

6. Запишіть умову ідентифікованості системи рівнянь.

7. На основі якого методу можна оцінити параметри моделі, якщо вона складається із системи рекурсивних рівнянь?

8. Який метод оцінки параметрів можна застосувати, коли всі рівняння моделі є точно ідентифікованими?

9. На основі якого методу можна оцінити параметри моделі, якщо вона має надідентифіковані рівняння?

10. Чи можна виконувати оцінювання параметрів моделі окремо для групи точно ідентифікованих і надідентифікованих рівнянь?

11. Доведіть еквівалентність систем рівнянь (12.35) і (12.39). Запишіть оператори оцінювання на основі цих рівнянь.

12. Покажіть, що якщо в системі рівнянь між змінною y_t і залишками u_t існує залежність, то застосування 1МНК дасть зміщення оцінки параметрів. Визначте величину цього зміщення.

13. Якщо в співвідношенні $\widehat{R} = -\widehat{A}^{-1}\widehat{B}$, $\widehat{R}$ — вектор оцінок параметрів зведеної форми моделі, а $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ — вектори оцінок параметрів структурної форми, то які обмеження треба мати, щоб на основі відомого вектора $\widehat{R}$ знайти елементи векторів $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$.

14. Доведіть, що для точно ідентифікованого рівняння оцінки 2МНК еквівалентні оцінкам непрямого методу найменших квадратів.

15. Розгляньте питання ідентифікованості для кожного рівняння моделі:

$$y_{1t} - y_{1(t-1)} = a_{10} + a_{11}[y_{1t} + y_{1(t-1)}] + a_{12}[y_{2t} + y_{2(t-1)}] + u_{1t},$$

$$y_{2t} - y_{2(t-1)} = a_{20} + a_{22}[y_{2t} + y_{2(t-1)}] + a_{23}[y_{3t} + y_{3(t-1)}] + u_{2t},$$

$$y_{3t} - y_{3(t-1)} = a_{30} + a_{31}[y_{1t} + y_{1(t-1)}] + a_{32}[y_{2t} + y_{2(t-1)}] +$$
$$+ a_{33}[y_{3t} + y_{3(t-1)}] + u_{3t}.$$

16. Як можна оцінити параметри моделі, наведеної в завданні 15, якщо

$$M(u_{st})=0; \quad M(u_{st}u_{jt})=\sigma_{sj}, \quad s\neq j;$$
$$M(u_{st}^2)=\sigma_s^2; \quad M(u_{st}u_{j(t-\tau)})=0, \quad \tau\neq 0.$$

17. Розгляньте ідентифікованість кожного рівняння і визначіть, які методи для оцінювання параметрів є придатними, якщо $M(u_{1t}u_{3t})=0$?

$$y_{1t}=a_{10}+a_{11}x_{2t}+u_{1t};$$
$$y_{2t}=a_{20}+a_{22}x_{1t}+a_{23}y_{1t}+u_{2t};$$
$$y_{3t}=a_{30}+a_{31}x_{2t}+a_{33}y_{1t}+u_{3t}.$$

18. Нехай для моделі, яка має таку структурну форму:

$$y_{1t}=a_{12}y_{2t}+b_{11}x_{1t}+u_{1t};$$
$$y_{2t}=a_{21}y_{1t}+b_{22}x_{2t}+b_{23}x_{3t}+u_{2t}$$

розраховані оцінки параметрів зведеної форми

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

При цьому відомо, що:

а) оцінки дисперсій оцінок параметрів першого рівняння зведеної форми: 1; 0,5; 0,1;

б) коваріації оцінок відсутні;

в) дисперсія залишків першого рівняння дорівнює 2,0.

На основі цієї інформації запишіть систему рівнянь 2МНК для оцінювання параметрів першого структурного рівняння і обчисліть ці оцінки.

19. Наведено одне із трьох рівнянь моделі

$$y_{1t}=a_{12}y_{2t}+a_{13}y_{3t}+b_{11}x_{1t}+u_{1t}.$$

Модель має ще три екзогенні змінні: x_{2t}, x_{3t} і x_{4t}.

Вихідні дані задані у вигляді таких матриць:

$$Y'X=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{bmatrix}; \quad Y'Y=\begin{bmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 15 & 60 & -45 \\ -5 & -45 & -70 \end{bmatrix}; \quad X'X=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Знайдіть оцінки параметрів рівняння на основі 2МНК і оцініть їх стандартні помилки, якщо дисперсія залишків $\sigma_{u_t}^2=0{,}3$.

20. Знайдіть оцінки параметрів моделі, яка складається з двох рівнянь:

$$y_{1t} = a_{12} y_{2t} + b_{11} x_{1t} + u_{1t};$$
$$y_{2t} = a_{21} y_{1t} + b_{22} x_{2t} + b_{23} x_{3t} + u_{2t}.$$

1) Використайте для оцінювання параметрів 1МНК;

2) Використайте для оцінювання параметрів 2МНК.

Матриця сум добутків вихідних даних дорівнює:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} Y_1 & Y_2 & X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 100 & 200 & 30 & 20 & 40 \\ 200 & 900 & 0 & 50 & 160 \\ 30 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 20 & 50 & 0 & 50 & 0 \\ 40 & 160 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Оцінка дисперсій залишків для 1МНК — 1,1; для 2МНК — 1,4. Визначте стандартні похибки параметрів моделі і, базуючись на оцінці дисперсій залишків, зробіть висновки щодо оцінок параметрів 1МНК і 2МНК.

12.12. Основні терміни і поняття

Система одночасових структурних рівнянь • Структурна форма економетричної моделі на основі системи одночасових рівнянь • Зведена форма економетричної моделі на основі системи одночасних рівнянь • Моменти другого порядку • Ендогенні змінні • Екзогенні змінні • Ідентифікація • Точно ідентифікована система • Надідентифікована система • Неідентифікована система • Апріорні обмеження на параметри моделі • Рекурсивні системи • Непрямий метод найменших квадратів (НМНК) • Двокроковий метод найменших квадратів (2МНК) • Трикроковий метод найменших квадратів (3МНК) • Точковий прогноз • Інтервальний прогноз

ДОДАТКИ

Додаток 1

НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ

z	X	Y	A	$1-A$
0	μ	0,399	0,0000	1
±0,05	$\mu\pm0,05\sigma$	0,398	0,0399	0,9601
±0,10	$\mu\pm0,10\sigma$	0,397	0,0797	0,9203
±0,15	$\mu\pm0,15\sigma$	0,394	0,1192	0,8808
±0,20	$\mu\pm0,20\sigma$	0,391	0,1585	0,8415
±0,25	$\mu\pm0,25\sigma$	0,387	0,1974	0,8026
±0,30	$\mu\pm0.30\sigma$	0,381	0,2358	0,7642
±0,35	$\mu\pm0,35\sigma$	0,375	0,2737	0,7263
±0,40	$\mu\pm0,40\sigma$	0,368	0,3108	0,6892
±0,45	$\mu\pm0,45\sigma$	0,361	0,3473	0,6527
±0,50	$\mu\pm0,50\sigma$	0,352	0,3829	0,6171
±0,55	$\mu\pm0,55\sigma$	0,343	0,4177	0,5823
±0,60	$\mu\pm0,60\sigma$	0,333	0,4515	0,5485
±0,65	$\mu\pm0,65\sigma$	0,323	0,4843	0,5157
±0,70	$\mu\pm0,70\sigma$	0,312	0,5161	0,4839
±0,75	$\mu\pm0,75\sigma$	0,301	0,5467	0,4533
±0,80	$\mu\pm0,80\sigma$	0,290	0,5763	0,4237
±0,85	$\mu\pm0,85\sigma$	0,278	0,6047	0,3953
±0,90	$\mu\pm0,90\sigma$	0,266	0,6319	0,3681
±0,95	$\mu\pm0,95\sigma$	0,254	0,6579	0,3421
±1,00	$\mu\pm1,00\sigma$	0,242	0,6827	0,3173
±1,05	$\mu\pm1,05\sigma$	0,230	0,7063	0,2937
±1,10	$\mu\pm1,10\sigma$	0,218	0,7287	0,2713
±1,15	$\mu\pm1,15\sigma$	0,206	0,7499	0,2501
±1,20	$\mu\pm1,20\sigma$	0,194	0,7699	0,2301

z	X	Y	A	1–A
±1,25	μ±1,25σ	0,183	0,7887	0,2113
±1,30	μ±1,30σ	0,171	0,8064	0,1936
±1,35	μ±1,35σ	0,160	0,8230	0,11770
±1,40	μ±1,40σ	0,150	0,8385	0,1615
±1,45	μ±1,45σ	0,139	0,8529	0,1471
±1,50	μ±1,50σ	0,130	0,8664	0,1336
±0,000	μ	0,3989	0,0000	1,0000
±0,126	μ±0,126σ	0,3958	019000	0,9000
±0,253	μ±0,253σ	0,3863	0,2000	0,8000
±0,385	μ±0,385σ	0,3704	0,3000	0,7000
±0,524	μ±0,524σ	0,3477	0,4000	0,6000
±0,674	μ±0,674σ	0,3178	0,5000	0,5000
±0,842	μ±0,842σ	0,2600	0,6000	0,4000

ОРДИНАТИ *Y* ДЛЯ ± *z* І ПЛОЩА *A* МІЖ – *z* І + *z* ПІД КРИВОЮ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

z	X	Y	A	1–A
±1,50	μ±1,50σ	0,1295	0,8664	0,1336
±1,55	μ±1,55σ	0,1200	0,8789	0,1211
±1,60	μ±1,60σ	0,1109	0,8904	0,1096
±1,65	μ±1,65σ	0,1023	0,9011	0,0989
±1,70	μ±1,70σ	0,0940	0,9109	0,0891
±1,75	μ±1,75σ	0,0863	0,9199	0,0801
±1,80	μ±1,80σ	0,0790	0,9281	0,0719
±1,85	μ±1,85σ	0,0721	0,9357	0,0643
±1,90	μ±1,90σ	0,0656	0,9426	0,0574
±1,95	μ±1,95σ	0,0596	0,9488	0,0512
±2,00	μ±2,00σ	0,0540	0,9545	0,0455
±2,05	μ±2,05σ	0,0488	0,9596	0,0404

z	X	Y	A	$1–A$
±2,10	μ±2,10σ	0,0440	0,9643	0,0357
±2,15	μ±2,15σ	0,0396	0,9684	0,0316
±2,20	μ±2,20σ	0,0355	0,9722	0,0278
±2,25	μ±2,25σ	0,0317	0,9756	0,0244
±2,30	μ±2,30σ	0,0283	0,9784	0,0214
±2,35	μ±2,35σ	0,0252	0,9812	0,0188
±2,40	μ±2,40σ	0,0224	0,9836	0,0164
±2,45	μ±2,45σ	0,0198	0,9857	0,0143
±2,50	μ±2,50σ	0,0175	0,9876	0,0124
±2,55	μ±2,55σ	0,0154	0,9892	0,0108
±2,60	μ±2,60σ	0,0136	0,9907	0,0093
±2,65	μ±2,65σ	0,0119	0,9920	0,0080
±2,70	μ±2,70σ	0,0104	0,9931	0,069
±2,75	μ±2,75σ	0,0091	0,9940	0,0060
±2,80	μ±2,80σ	0,0079	0,9949	0,0051
±2,85	μ±2,85σ	0,0069	0,9956	0,0044
±2,90	μ±2,90σ	0,0060	0,9963	0,0037
±2,95	μ±2,95σ	0,0051	0,9968	0,0032
±3,00	μ±3,00σ	0,0044	0,9973	0,0027
±4,00	μ±4,00σ	0,0001	0,99994	0,00006
±5,00	μ±5,00σ	0,000001	0,9999994	0,0000006
±1,036	μ±1,036σ	0,02331	0,7000	0,3000
±1,282	μ±1,282σ	0,1755	0,8000	0,2000
±1,645	μ±1,645σ	0,1031	0,9000	0,1000
±1,960	μ±1,960σ	0,0584	0,9500	0,0500
±2,257	μ±2,257σ	0,0145	0,9900	0,0100
±3,291	μ±3,291σ	0,0018	0,9990	0,0010
±3,891	μ±3,891σ	0,0002	0,9999	0,0001

Додаток 2

ПРОЦЕНТИЛІ χ^2-РОЗПОДІЛУ

df	0,5	1	2,5	5	10	90	95	97,5	99	99,5
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,61	5,99	7,38	9,21	10,61
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,646	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
24	9,89	10,86	10,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
120	83,85	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95	163,64

Додаток 3а

F-РОЗПОДІЛ, 1 %-ні ТОЧКИ ($F_{0,99}$)

Ступінь свободи знаменника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	72,1	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,3	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	4,64
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00

Закінчення дод. 3а

Ступінь свободи знаменника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,19	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,53	2,45	2,36	2,27	2,17
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Додаток 36

F-РОЗПОДІЛ, 5 %-НІ ТОЧКИ ($F_{0,95}$)

Ступінь свободи знаменника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,64	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,82	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	3,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07

Ступінь свободи знаменника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	254	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Додаток 4

ПРОЦЕНТИЛІ *t*-РОЗПОДІЛУ

df	$t_{0,60}$	$t_{0,70}$	$t_{0,80}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	3,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,253	0,524	0,842	2,282	1,645	1,960	2,326	2,576
df	$-t_{0.40}$	$-t_{0.30}$	$-t_{0.20}$	$-t_{0.10}$	$-t_{0.05}$	$-t_{0.025}$	$-t_{0.01}$	$-t_{0.005}$

Примітка. Таблицю взято з [2].

КРИТЕРІЙ ДАРБІНА—УОТСОНА (d). ЗНАЧЕННЯ d_L І d_U ПРИ 1 %-МУ РІВНІ ЗНАЧУЩОСТІ

n	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0,49	1,70	0,39	1,96
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,44	0,53	1,66	0,44	1,90
17	0,87	1,10	0,77	1,25	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,90	1,12	0,80	1,26	0,71	1,42	0,61	1,60	0,52	1,80
19	0,93	1,13	0,83	1,26	0,74	1,41	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,86	1,27	0,77	1,41	0,68	1,57	0,60	1,74
21	0,97	1,16	0,89	1,27	0,80	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1,00	1,17	0,91	1,28	0,83	1,40	0,75	1,54	0,66	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,40	0,77	1,53	0,70	1,67
24	1,04	1,20	0,96	1,30	0,88	1,41	0,80	1,53	0,72	1,66
25	1,05	1,21	0,98	1,30	0,90	1,41	0,83	1,52	0,75	1,65
26	1,07	1,22	1,00	1,31	0,93	1,41	0,85	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,51	0,81	1,63
28	1,10	1,24	1,04	1,32	0,97	1,41	0,90	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,85	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,08	1,34	1,02	1,42	0,96	1,51	0,90	1,60
32	1,16	1,28	1,10	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,60
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,05	1,43	1,00	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,30	1,13	1,36	1,07	1,43	1,01	1,51	0,95	1,95
35	1,19	1,31	1,14	1,37	1,08	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,10	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,16	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1,00	1,59
38.	1,23	1,33	1,18	1,39	1,12	1,45	1,07	1,52	1,02	1,58
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,25	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,05	1,58
45	1,29	1,38	1,24	1,42	1,20	1,48	1,16	1,53	1,11	1,58
50	1,32	1,40	1,28	1,45	1,24	1,49	1,20	1,54	1,16	1,59
55	1,36	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
65	1,41	1,47	1,38	1,50	1,35	1,53	1,31	1,57	1,28	1,61
70	1,43	1,49	1,40	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,50	1,42	1,53	1,39	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,43	1,58	1,41	1,60	1,39	1,63
90	1,50	1,54	1,47	1,56	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,60	1,45	1,62	1,42	1,64
100	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,46	1,63	1,44	1,65

Примітки. 1. n — кількість спостережень; 2. k' — кількість пояснювальних змінних.

КРИТЕРІЙ ДАРБІНА—УОТСОНА (d).
ЗНАЧЕННЯ d_L І d_U ПРИ 5 %-МУ РІВНІ ЗНАЧУЩОСТІ

n	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,2
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,1
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,46	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,47	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,48	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,49	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,50	1,28	1,57	1,21	1,21	1,65	1,14	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,51	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,52	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Примітки. 1. n — кількість спостережень; 2. k' — кількість пояснювальних змінних.

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ ВІДНОШЕННЯ фон НЕЙМАНА

$$P\left(\frac{\delta^2}{s^2}<Q\right)=\int_0^Q \omega\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right)d\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right)$$

Q	n								
	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,25				0,00001	0,00001	0,00001	0,00001		0,00001
0,30				0,00007	0,00007	0,00005	0,00004	0,00002	0,00003
0,35			0,00006	0,00027	0,00021	0,00014	0,00009	0,00005	0,00007
0,40			0,00047	0,00065	0,00047	0,00031	0,00019	0,00012	0,00016
0,45			0,00126	0,00126	0,00088	0,00059	0,00038	0,00025	0,00031
0,50		0,00038	0,00246	0,00214	0,00150	0,00103	0,00069	0,00046	0,00055
0,55		0,00223	0,00409	0,00333	0,00237	0,00168	0,00116	0,00080	0,00094
0,60		0,00493	0,00615	0,00486	0,00355	0,00259	0,00185	0,00132	0,00152
0,65		0,00830	0,00865	0,00678	0,00511	0,00382	0,00282	0,00208	0,00235
0,70		0,01225	0,01161	0,00913	0,00710	0,00544	0,00414	0,00313	0,00351
0,75		0,01673	0,01505	0,01197	0,00958	0,00753	0,00587	0,00455	0,00508
0,80	0,00356	0,02171	0,01900	0,01534	0,01263	0,01015	0,00809	0,00642	0,00714
0,85	0,01302	0,02717	0,02348	0,01932	0,01631	0,01338	0,01089	0,00883	0,00980
0,90	0,02257	0,03310	0,02851	0,02403	0,02068	0,01729	0,01436	0,01188	0,01316
0,95	0,03223	0,03949	0,03412	0,02957	0,02579	0,02196	0,01858	0,01565	0,01733
1,00	0,04199	0,04634	0,04035	0,03598	0,03171	0,02745	0,02363	0,02025	0,02241
1,05	0,05186	0,05364	0,04728	0,04325	0,03849	0,03384	0,02959	0,02578	0,02852
1,10	0,06184	0,06140	0,05500	0,05137	0,04618	0,04120	0,03655	0,03232	0,03577
1,15	0,07194	0,06963	0,06361	0,06036	0,05482	0,04957	0,04458	0,03997	0,04425
1,20			0,07323	0,07020	0,06445	0,05901	0,05375	0,04882	0,05407
1,25						0,06956	0,06412	0,05894	0,06531
1,30								0,07040	

Продовження дод. 6

Q	n						
	15	20	25	30	40	50	60
0,35	0,00001						
0,40	0,00002						
0,45	0,00004						
0,50	0,00009	0,00001					
0,55	0,00018	0,00002					
0,60	0,00033	0,00005	0,00001				
0,65	0,00059	0,00012	0,00002				
0,70	0,00100	0,00024	0,00005	0,00001			
0,75	0,00161	0,00044	0,00011	0,00003			
0,80	0,00250	0,00076	0,00023	0,00007	0,00001		
0,85	0,00375	0,00127	0,00044	0,00015	0,00002		
0,90	0,00547	0,00206	0,00079	0,00030	0,00004	0,00001	
0,95	0,00778	0,00323	0,00135	0,00057	0,00010	0,00002	
1,00	0,01079	0,00489	0,00222	0,00102	0,00022	0,00005	0,00001
1,05	0,01465	0,00720	0,00355	0,00176	0,00044	0,00012	0,00003
1,10	0,01950	0,01033	0,00550	0,00294	0,00085	0,00026	0,00008
1,15	0,02550	0,01448	0,00826	0,00474	0,00158	0,00054	0,00019
1,20	0,03280	0,01986	0,01208	0,00738	0,00280	0,00108	0,00043
1,25	0,04155	0,02670	0,01723	0,01117	0,00476	0,00206	0,00092
1,30	0,05189	0,03524	0,02402	0,01644	0,00780	0,00376	0,00185
1,35	0,06396	0,04571	0,03276	0,02357	0,01235	0,00656	0,00355
1,40	0,07787	0,05834	0,04379	0,03298	0,01892	0,01098	0,00649
1,45		0,07333	0,05743	0,04511	0,02810	0,01769	0,01133
1,50			0,07398	0,06038	0,04055	0,02750	0,01893
1,55				0,07920	0,05696	0,04131	0,03034
1,60					0,07797	0,06006	0,04675
1,65						0,08465	0,06942
1,70							0,09949

ЗНАЧЕННЯ Q, ДЛЯ ЯКИХ $P\left(\frac{\delta^2}{s^2} < Q\right) = 0$

n	Q	n	Q
4	0,7811	15	0,0468
5	0,4775	20	0,0259
6	0,3215	25	0,0164
7	0,2311	30	0,0113
8	0,1740	40	0,0063
9	0,1357	50	0,0040
10	0,1088	60	0,0028
11	0,0891		
12	0,0743		

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ СТАТИСТИКИ НЕЙМАНА, Q

Число спостережнь	Додатна автокореляція		Від'ємна автокореляція	
	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
10	1,18	0,84	3,61	3,26
15	1,29	0,99	3,30	2,99
20	1,37	1,10	3,12	2,84
25	1,42	1,17	2,99	2,74
30	1,47	1,24	2,90	2,67

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ЦИКЛІЧНОГО КОЕФІЦІЄНТА АВТОКОРЕЛЯЦІЇ r^0

Число спостережнь	Додатна автокореляція		Від'ємна автокореляція	
	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
10	0,360	0,525	0,564	0,705
15	0,328	0,475	0,462	0,597
20	0,299	0,432	0,399	0,524
25	0,276	0,398	0,356	0,473
30	0,257	0,370	0,325	0,433

ЛІТЕРАТУРА

1. *Айвазян С. А., Мхитарян B.C.* Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник. — М.: ЮНИТИ, 1998.

2. *Джонстон Дж.* Эконометрические методы. — М., 1980.

3. *Доугерти К.* Введение в эконометрику. — М.: Финансы и статистика, 1999.

4. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. — М., 1986.

5. *Дюк В.* Обработка данных на ПК в примерах. — СПб.: Питер, 1997.

6. *Грубер Й.* Економетрія.—К.: Нічлава, 1998. — Т. 1, 2.

7. *Єлейко В. І.* Основи економетрії: У 2 ч. — Львів: Тов. «Марка ЛТД», 1995.

8. *Кейн Э.* Экономическая статистика и эконометрия. — М., 1977. — Вып. 12.

9. Эконометрика / Под ред. чл.-кор. РАН И. И. Елисеевой.— М.: Финансы и статистика, 2001.

10. *Клас А., Гергели К., Колек Ю., Шуян И.* Введение в эконометрическое моделирование. — М., 1978.

11. *Костина Н.І., Алексеєв А. А., Василик О. Д.* Фінанси: система моделей і прогнозів. — К.: «Четверта хвиля», 1998.

12. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М., 1975.

13. *Ланге О.* Введение в эконометрию. — М., 1964.

14. *Лизер С.* Эконометрические методы и задачи. — М., 1971.

15. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений. — М., 1962.

16. *Лук'яненко І. Г., Краснікова Л.І.* Економетрика: Підручник. — К.: Тов. «Знання» КОО, 1998.

17. *Лук'яненко І. Г., Краснікова Л.І.* Економетрика: практикум з використанням комп'ютера. — К.: «Знання» КОО, 1998.

18. *Магнус Я. Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. - М.: Дело, 1977.

19. *Маленво Э.* Статистические методы в эконометрии. — М., 1975—1976. —Вып. 1, 2.

20. *Мальцев А. Н.* Основы линейной алгебры. — М., 1975.

21. *Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П.* Економетрія: Підручн. — К., 2000.

22. *Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П.* Економетрія: Навч. посібник. — К., 1997.

23 *Наконечний С. І., Терещенко Т. О.* Економетрія: Навч.-метод. посібник. — К., 2001.

24. *Пирогов Г., Федоровский Ю.* Проблемы структурного оценивания в эконометрии. — М.: Статистика, 1979.

25. *Титнер Г.* Введение в эконометрию. — М., 1964.

26. *Фишер Ф.* Проблемы идентификации в эконометрии. — М., 1978.

27. *Чупров А. А.* Основные проблемы теории кореляции. — М.: Госстатиздат, 1960.

28. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В. В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 2001.

29. *Чавкин А. М.* Методы рационального управления в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2001.

30. *Klein L. R., Goldberger A.S.* An Ekonometric Model of United States, 1929—1952 North Holland, Amsterdam, 1964.

Навчальне видання

НАКОНЕЧНИЙ Степан Ількович
ТЕРЕЩЕНКО Тетяна Опанасівна
РОМАНЮК Тамара Павлівна

ЕКОНОМЕТРІЯ

Підручник

Видання третє, доповнене та перероблене

Редактор *О. Бондаренко*
Художник обкладинки *О. Стеценко*
Технічний редактор *Т. Піхота*
Коректор *А. Бородавко*
Верстка *О. Михолат*

Підп. до друку 14.06.04. Формат 60×84/16. Папір офсет. № 1.
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсет. Ум. друк. арк. 30,45.
Обл.-вид. арк. 39,62. Наклад 3000 пр. Зам. № 03-2611.

Київський національний економічний університет
03680 м. Київ, просп. Перемоги, 54/1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, №235 від 07.11.2000)

Тел./факс (044) 458-00-66; (044) 456-64-58
E-mail: publish@kneu.kiev.ua

Друк ПП «Гарант Сервіс»
03067, м. Київ, вул. Машинобудівна, 46

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, №1256 від 10.02.2003)

Тел./факс: (044) 206–20–75; 206–20–76

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

П Р О П О Н У Є

ПІДРУЧНИКИ ТА НАВЧАЛЬНІ ПОСІБНИКИ

Арутюнов В. Х., Кірик Д. П., Мішин В. М. Логіка. 144 с.

Береза А. М. та ін. Електронна комерція. 326 с.

Береза А. М. Основи створення інформаційних систем. Вид. 2-ге, перероб. і доп. 214 с.

Білик М.Д. Організація і методика аудиту сільськогосподарських підприємств. 628 с.

Бойко Н. А. Економічна і соціальна географія. Рос. мовою. 239 с.

Болюх М. А., Горбаток М. І. Збірник задач з курсу «Економічний аналіз». 232 с.

Бондар М.І. Аудит в АПК. 188 с.

Боярська З. І. Міжнародне комерційне право. 143 с.

Брусіловський Б. Я. Інформатика інвестування. 497 с.

Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика. Ч. II. 451 с.

Валютні операції / За ред. Л. П. Петрашко. 144 с.

Васильков В.Г. Організація виробництва. 524 с.

Вітлінський В. В. Економічний ризик: ігрові моделі. 446 с.

Верба В. А., Решетняк Т. І. Організація консалтингової діяльності. 244 с.

Власова А. М., Савчук Л. М., Савінова В. Б. Організаційна поведінка. 96 с.

Войчак А. В, Павленко А. Ф. Маркетинг. 246 с.

Герольд Мус, Рольф Ханшманн. Бухгалтерський облік (*основи — завдання - розв'язання*) / Пер. з нім., рос. мовою; за ред. В. В. Сопка. 368 с.

Гончарук Я. А., Павленко А. Ф., Скибінський С. В. Маркетинг у тестах. 392 с.

Голуб Н.М., Шамхалова Н.А. Фінанси англійською мовою. 426 с.

Голуб Н. М., Шамхалова Н. А. Англійська для банківської справи. 421 с.

Гусак Т. М. Англійська граматика на практиці. 183 с.

Гусак Т. М., Мірошниченко Н. О. Посібник з аудіювання (англ. мова). Ч. І для ст дентів. 160 с. (З комплектом касет).

Гусак Т. М., Мірошниченко Н. О. Посібник з аудіювання (англ. мова). Ч. II для в кладачів. 144 с. (З комплектом касет).

Гужва В. М., Постєвой А. Г. Інформаційні системи в міжнародному бізнесі. 458 с.

Дворецька Г. В. Соціологія праці. 244 с.

Дворецька Г. В. Соціологія. 472 с.

Денісова О.О. Інформаційні системи і технології в юридичній діяльності. 316 с.

Джога Р.Т. Бухгалтерський облік у бюджетних установах. 483 с.

Дудчак В. І., Мартинюк О. В. Митна справа. 310 с.

Драб Н. Л. Техніка і мова презентації. (Нім. мова). 102 с.

Дяченко В.І. Система правоохоронних органів. 320 с.

Економіка підприємства: Структурно-логічний навч. посібник / За ред. С. Ф. Покропивного. 468 с.

Економіка підприємства. За ред. С. Ф. Покропивного. Рос. мовою. 608 с.

Економіка: Навч. посіб. для загальноосвіт. навч. закл. / За ред. С. В. Степаненка. 306 с.

Єріна А.М. Організація вибіркових обстежень. 127 с.

Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування. 170 с.

Єжова Л. Ф. Інформаційний маркетинг. 560 с.

Жлуктенко В. І. та ін. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч. 2. Математична статистика. 336 с.

Завіновська Г. О. Економіка праці. 300 с.

Кардаш В. Я. Маркетингова товарна політика. 240 с.

Кардаш В. Я. Товарна інноваційна політика. 266 с.

Керб Л.П. Основи охорони праці. 216 с.

Кіндрацька Л. М. Бухгалтерський облік у банках України. 636 с.
Ковальчук Г. О. Економіка родини. 120 с.
Ковальчук Г.О. Активізація навчання в економічній освіті. 298 с.
Козаков В. А. Психологія діяльності та навчальний менеджмент. У 2-х ч. Ч. І. Психологія суб'єкта діяльності. 243 с.
Колечко О. Д., Крилова В. Г. Французька мова. Підруч. для студентів-економістів. 334 с.
Колечко О. Д., Крилова В. Г., Машкова І. М., Яременко І. А. Збірник економічних текстів для домашнього читання (фр. мова). 364 с.
Колотило Д. М., Соколовський А. Т., Афтанділянц В. В. Міжнародні системи вимірювання в економіці. 176 с.
Колот А. М. Мотивація персоналу. 337 с.
Краснокутська Н.В. Інноваційний менеджмент. 504 с.
Крушельницька Я.В. Фізіологія і психологія праці. 368 с.
Куденко Н. В. Стратегічний маркетинг. 152 с.
Лазарєва С. Ф. Економіка та організація інформаційного бізнесу. 667 с.
Лук'яненко Д.Г. Міжнародна інвестиційна діяльність. 387 с.
Лук'янець Т.І. Рекламний менеджмент. 440 с.
Лютий О.І., Макаренко О.І. Збірник задач з вищої математики. 305 с.
Мартиненко А.О. Англійська граматика в таблицях. 168 с.
Мачуський В.В. Правові основи страхування. 304 с.
Мачуський В. В. Правове забезпечення підприємницької діяльності. Курс лекцій. 348 с.
Мец В. О. Економічний аналіз. Збірник завдань і тестів. 236 с.
Міжнародні розрахунки та валютні операції. За заг. ред. М. І. Савлука. 392 с.
Молодцова О. П. Управління якістю програмної продукції. 248 с.
Моторин Р. М., Моторина Т. М. Система національних рахунків. 336 с.
Мумінова-Савіна Г. Г. Судово-бухгалтерська експертиза. 202 с.
Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування. 362 с.
Нікітін А.В. Ситуаційне моделювання банківської діяльності. 153 с.
Новицький В. Є. Міжнародна економічна діяльність України. 948 с.
Оболенський О.Ю. Державна служба. 344 с.
Опарін В. М. Фінанси (загальна теорія). 240 с.
Опришко В. Ф., Омельченко А. В., Фастовець А. С. Право Європейського Союзу. 472 с.
Опришко В.Ф., Шульженко Ф.П. Правознавство. 767 с.
Опришко В.Ф. Міжнародне економічне право. 312 с.
Осадець С. С. Страхування. 599 с.
Пересада А.А. Інвестиційний аналіз. 485 с.
Пересада А. А., Майорова Т. В. Інвестиційне кредитування. 271 с.
Писаревська Т. А. Інформаційні системи і технології в управлінні трудовими ресурсами. 279 с.
Петрашко Л. П. Валютні операції. 204 с.
Петюх В.М., Смельяненко Л.М., Торгова Л.В. Конфліктологія. 316 с.
Подолинський С. А. Вибрані твори. 328 с.
Політична історія XX століття / За ред. В. Ф. Салабая. 376 с.
Рогач І. Ф. та ін. Інформаційні системи у фінансово-кредитних установах. 239 с.
Ромашко О. Ю. Регулювання міжнародних фондових ринків. 240 с.
Савченко А. Г. Макроекономічна політика. 166 с.
Савченко В. Я. Аудит. 322 с.
Савченко В. А. Управління розвитком персоналу. 351 с.
Саушкін О. Ф. Рівняння вищих степенів, методи розв'язання, контрольні індивідуальні завдання. 100 с.
Свірко С.В. Організація бухгалтерського обліку в бюджетних організаціях. 380 с.

Современные тренинговые технологии обучения ведению бизнеса. Книга 1. Технология подготовки и проведения тренингов. Под общ. рук. А. Ф. Павленко. Рос. і укр. мовами. 121 с.
Современные тренинговые технологии обучения ведению бизнеса. Книга 2. Методическое руководство для преподавателей-тренеров. Под общ. рук. А. Ф. Павленко. Рос. і укр. мовами. 296 с.
Современные тренинговые технологии обучения ведению бизнеса. Книга 3. Технология создания и организации деятельности фирмы. Под общ. рук. А. Ф. Павленко. Рос. і укр. мовами. 330 с.
Ситник В. Ф. та ін. Основи інформаційних систем. 420 с.
Соболь С. М. та ін. Бізнес-план: технологія розробки та обґрунтування. 379 с.
Сопко В. В. Бухгалтерський облік. 580 с.
Столяров Г. С., Ємшанов Д. Г., Ковтун Н. В. АРМ статистика. 268 с.
Столяров Г.С. Статистика охорони здоров'я. 230 с.
Стратегія економічного розвитку України: Наук. зб. Вип. 6 — 8.
Твердохліб М.Г. Інформаційне забезпечення менеджменту. 224 с.
Терещенко Л.О., Матієнко-Зубенко І.І. Інформаційні системи і технології в обліку. 187 с.
Терещенко О. О. Фінансова діяльність суб'єктів господарювання. 554 с.
Тесленко Г. С. Інформаційні системи в аграрному менеджменті. 232 с.
Удотова Л.Ф. Соціальна статистика. 376 с.
Ушакова В.Т., Сініцина Н.М. Ділова англійська мова для економістів. Ч.3. 307 с.
Федонін О.С. Потенціал підприємства: формування та оцінка. 316 с.
Хорунжий М. Й. Організація агропромислового комплексу. 382 с.
Циганкова Т. М., Гордєєва Т. Ф. Міжнародні організації. 240 с.
Циганкова Т. М. та ін. Міжнародна торгівля. 488 с.
Чекотовський Е. В. Основи статистики сільського господарства. 432 с.
Чекотовський Е. В. Графіки статистичних рядів та їх побудова на ПЕОМ з використанням пакета EXCEL 5.0. 380 с.
Чумаченко М. Г. Економічний аналіз. 556 с.
Шамова І. В. Грошово-кредитні системи зарубіжних країн. 195 с.
Шарапов О. Д. та ін. Інформатика та комп'ютерна техніка. 534 с.
Шульженко Ф.П., Невмержицький Є.В. Юридична відповідальність за правопорушення у сфері економіки. 171 с.
Щедріна О. І. Алгоритмізація та програмування процедур обробки інформації. 240 с.
Януш Я. В. Українська література XIX століття. 134 с.

Запрошуємо до співробітництва на умовах, прийнятних для Вас!

***Наша адреса**: 03680, м. Київ, просп. Перемоги, 54/1, р/р Київського національного економічного університету № 25301700012135 у Київській міській філії АКБ УСБ; МФО 322012. Код 02070884.*
***Тел./факс**: (044) 456-64-58; 458-00-66; тел. 456-20-91*
E-mail: publish@kneu.kiev.ua

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С. І. Наконечний
Т. О. Терещенко
Т. П. Романюк

Економетрія

Підручник

Видання третє, доповнене та перероблене

Затверджено
Міністерством освіти і науки України

1906 КНЕУ
КИЇВ 2004

Економетрія

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{a} = (X^T S^{-1} X)^{-1} X^T S^{-1} Y$$

Економетрія

С. І. Наконечний
Т. О. Терещенко
Т. П. Романюк

С. І. Наконечний
Т. О. Терещенко
Т. П. Романюк

Економетрія

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{a} = (X^T S^{-1} X)^{-1} X^T S^{-1} Y$$

1906–2006 До 100-річчя Київського національного економічного університету