Е К О Н О М Е Т Р І Я

Частина 1

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

Е К О Н О М Е Т Р І Я
Частина 1

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2011

УДК 330.43(075)
ББК 65в6я73
Е45

Автори:
Азарова А. О., Сачанюк-Кавецька Н. В., Роїк О. М.,
Міронова Ю. В.

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 2 від 20.10.2011 р.)

Рецензенти:
І. Г. Лук'яненко, доктор економічний наук, професор
В. В. Зянько, доктор економічний наук, професор
О. О. Мороз, доктор економічний наук, професор

Е45 **Економетрія.** Частина 1 : навчальний посібник / [Азарова А. О., Сачанюк-Кавецька Н. В., Роїк О. М., Міронова Ю. В.] – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 97 с.

У посібнику розглянуто фундаментальні засади економетричного моделювання, що посідає чільне місце у системі підготовки економістів нового покоління. Запропоновані у посібнику теоретичні засади та практичні економетричні аспекти дозволять студентам моделювати різноманітні економічні ситуації на базі сучасних методів системного та економетричного аналізу і комп'ютерних технологій, які застосовують для дослідження реальних економічних об'єктів, процесів, явищ. Автори посібника намагалися показати, що економетричне моделювання суттєво розширює можливості економічного аналізу, дає змогу отримати якісно нові результати дослідження соціально-економічних систем та дозволяє прогнозувати майбутню поведінку економічних суб'єктів.

Посібник розроблено згідно з планом кафедри та навчальною програмою дисципліни "Економетрія".

УДК 330.43(075)
ББК 65в6я73

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ЕММ – економіко-математичні методи
ЕМ – економіко-математична модель
МНК – метод найменших квадратів
ВВ – випадкова величина
РВВ – розподіл випадкової величини

ВСТУП

Останнє десятиліття економетрія як навчальна дисципліна стрімко розвивається. Підтвердженням всесвітнього визнання економетрії є присудження за найбільш видатні розробки у цій галузі Нобелівських премій в економіці, авторами яких є:

– Ян Тінберген (1903-1994) – нідерландський економіст та Рангар Фріш (1885-1973) – норвезький економіст – лаурети Нобелівської премії 1969 року за створення та застосування динамічних моделей для аналізу економічних процесів.

– Пол А. Самуельсон (1915-2009) – американський економіст – лауреат Нобелівської премії 1970 року за розроблення статистичної та динамічної економічної теорії, що сприяло зростанню рівня аналізу економічної науки.

– Василь Леонтьєв (1912-1986) – американський економіст – лауреат Нобелівської премії 1973 року за розроблення балансових моделей для моделювання взаємозв'язків великою кількістю змінних (методу "витрати–випуск").

– Леонід Канторович (1912-1986) – російський економіст, Тьяллінг С. Кумпанс (1910-1985) – американський економіст – лауреати Нобелівської премії 1975 року за вклад у теорію оптимального розподілу ресурсів. Т. С. Кумпанс також зробив значний внесок у розвиток статистичних методів в економетрії та створення лінійних економетричних моделей.

– Лоуренс Р. Клейн (нар. 1920) – американський економіст – лауреат Нобелівської премії 1980 року за створення економетричних моделей та їх застосування під час аналізу економічних коливань й економічної політики.

– Трюгве Хаавельмо (1911-1999) – норвезький економіст – лауреат Нобелівської премії 1989 року за перетворення основ теорії ймовірності в межах економетрії та аналіз залежних економічних структур.

– Джеймс Дж. Хекман (нар. 1944) – американський економіст; Даніел Д. Макфадден (нар. 1944), американський економіст, – лауреати Нобелівської премії 2000 року за розроблення мікроеконометрії та методів статистичного аналізу.

– Леонід Гурвіц (1917-2008) – американський економіст, Ерік Маскін (нар. 1950) – американський економіст, Роджер Маерсон (нар. 1951) – американський економіст – лауреати Нобелівської премії 2007 року за створення основ теорії оптимальних механізмів (механізмів поділу).

Крім того, процес прийняття науково обґрунтованих рішень в економіці тісно пов'язаний з визначенням кількісних співвідношень між економічними показниками. Так, наприклад, для з'ясування доцільності інвестування придбання нового обладнання (або розроблення нової технології) потрібно знати, який додатковий дохід можна отримати на кожну одиницю капітальних вкладень у разі реалізації різних проектів інвестування.

Мова економіки все більше стає мовою математики, а саму економіку все частіше називають однією з найбільш математизованих наук. Завдяки математичній формалізації в економічній теорії здійснюється пошук змістовних економічних аналогів абстрактним математичним величинам та відношенням, які фігурують у математичних моделях. Досягнення сучасної економічної науки висувають новітні вимоги до професійної освіти економістів та менеджерів. Якщо в період планової економіки акцент робився на балансові та оптимізаційні методи дослідження, то в період пізньоіндустріальної економіки суттєво зростає роль економетричних методів. Математика настільки глибоко проникла в економіку, що інколи складно виокремити економічні знання в математичних. Тому сьогодні коректніше вести мову не про використання математики в економіці, а про взаємодію економічної та математичної наук, яка піднімає економічну теорію на якісно новий рівень.

Досить часто розглядають економетрію як науку, що встановлює та досліджує кількісні закономірності та взаємозв'язки в економічному житті за допомогою математичних і статистичних методів.

Метою економетрії є емпіричне виведення економічних законів.

Основні результати економічної теорії носять якісний характер, а економетрія вносить в них емпіричний вміст. Математична економіка зображує економічні закони у вигляді математичних співвідношень, а економетрія проводить експериментальну перевірку цих законів. Економічна статистика дає інформаційне забезпечення досліджуваного процесу у вигляді вихідних (оброблених) статистичних даних та економічних показників, а економетрія, використовуючи традиційні математико-статистичні та спеціально розроблені методи, проводить аналіз кількісних взаємозв'язків між цими показниками.

Економетрія – економіко-математична наука, яка поєднує економічну теорію, математику та статистику, забезпечує ефективний взаємозв'язок теоретичного та прикладного в економічній науці. На основі положень економічної теорії та статистичних даних про соціально-економічні системи економетрія за допомогою економіко-математичних моделей досліджує закономірності розвитку цих систем з метою прогнозування, аналізу їхнього взаємного впливу та прийняття оптимальних рішень щодо управління ними. Економетрія посідає чільне місце у системі підготовки економістів нового покоління, спільно з іншими математичними та економічними дисциплінами формує нове економічне мислення майбутніх фахівців.

Якщо студенти навчаться моделювати різноманітні економічні ситуації, вони стануть носіями нової ідеології економічного мислення, що ґрунтується на глибоких знаннях сучасних методів системного та економетричного аналізу і комп’ютерних технологій, які застосовують для дослідження реальних економічних об’єктів, процесів, явищ.

Автори посібника намагалися показати, що економетричне моделювання суттєво розширює можливості економічного аналізу, дає змогу отримати якісно нові результати дослідження соціально-економічних систем.

ТЕМА 1 ОСНОВНІ АСПЕКТИ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Вступ до економетричного моделювання

Розглянемо таку ситуацію. Припустимо, ми хочемо продати автомобіль. Перед нами постає запитання: яку суму ми можемо очікувати за наше авто? Зрозуміло, що ми будемо керуватися інформацією про ціни на подібні авто. Що означає "подібні автомобілі"? Зрозуміло, що це авто, які мають достатньо близькі до нашого автомобіля показники (марка, рік випуску, потужність двигуна, кілометраж та ін.).

Відвідавши автосалони, автомобільні ринки, переглянувши газети з оголошеннями, ми формуємо своє уявлення про можливу ціну.

На цьому елементарному прикладі можна відслідкувати основні моменти економетричного моделювання. Розглянемо наші дії більш формалізовано.

Ми ставимо задачу визначення ціни – величини, яка формується під впливом деяких факторів (марка, рік випуску, потужність двигуна, кілометраж та ін.). Такі залежні величини називають *пояснюваними, залежними (ендогенними)* змінними, а фактори, від яких вони залежать – *пояснювальними (екзогенними)*. Формуючи загальне уявлення про стан ринку, ми отримуємо *очікуване* значення залежної змінної при заданих значеннях екзогенних змінних.

На вказану конкретну ціну, *спостережуване* значення залежної змінної, впливають, також, *випадкові* явища – характер продавця, можливі терміни продажу автомобіля та ін.

Зрозуміло, що менеджер великого салону, де спеціалізуються на торгівлі автомобілями на вторинному ринку, скоріш за все, захоче мати більш точне уявлення щодо очікуваної ціни та можливої поведінки випадкової складової. Наступним кроком і буде економетричне моделювання.

Спільним моментом для довільної економетричної моделі є розбиття залежної змінної на дві частини – *пояснювальну* та *випадкову*. Очевидно, що задачею моделювання є *на основі експериментальних даних визначити пояснювану частину та, розглядаючи випадкову складову як випадкову величину, отримати оцінки параметрів її розподілу.*

Таким чином, економетрична модель цього процесу є такою:

Спостережуване значення залежної змінної	=	Пояснювана частина, яка залежить від значень екзогенних змінних	+	Випадкова складова	
Y	=	$f(X)$	+	ε	(1.1)

Припустимо, що в нашому випадку отримано такий вираз для визначення ціни:

$$y = 35000 - 1500x_1 - 0{,}3x_2\,,$$

де y – очікувана ціна автомобіля (ум. гр. од.);

x_1 – термін експлуатації автомобіля (в роках);

x_2 – пробіг (тис. км).

Яке ж практичне значення одержаного результату? Зрозуміло, що дана формула дає уявлення про формування ціни на автомобіль. З іншого боку, дана залежність дозволяє з'ясувати вплив кожної пояснюваної змінної на ціну. Зокрема, ціна нового (x_1=x_2=0) авто 35000 ум. гр. од., при цьому тільки за рахунок збільшення терміну експлуатації на один рік ціна авто зменшується в середньому на 1500 ум. гр. од. Слід відмітити, що даний результат дозволяє прогнозувати ціну на авто, якщо відомі його основні параметри. Тепер менеджер зможе визначити ціну авто, навіть якщо його рік випуску та пробіг раніше не зустрічалися в даному автосалоні.

1.2 Історія розвитку економетрії як науки

Сучасні методи математичної статистики вперше застосували в біології. Наприкінці XIX ст. англійський біолог К. Пірсон досліджував криві розподілу деяких числових показників людського організму.

Дещо пізніше він та його школа почали вивчати кореляції в біології та будувати лінійні регресії. Запропоновані біологами підходи були застосовані у економіці.

У 1897 р. вийшла у світ праця В. Парето, в якій було проведено дослідження доходів населення в різних країнах. У ній вперше була використана так звана крива Парето, параметри якої було отримано статистичними методами.

Була запропонована крива Парето:

$$y = A(x - a)^{-\alpha}\,, \qquad (1.2)$$

де y – чисельність населення, що має дохід, більший за x;

x – величина доходу;

a – мінімальний дохід;

A, α – параметри залежності, які було отримано статистичними методами.

На початку XX ст. вийшло кілька праць англійського статистика Д. Гукера, у яких за допомогою кореляційно-регресійних методів, що були започатковані школою Ф. Пірсона, вивчалися взаємозв'язки між економічними показниками, зокрема вплив банкрутств на товарній біржі на ціну зерна.

У подальшому почали з'являтися численні праці як з розвитку теорії математичної статистики та її прикладних елементів, так і з практичного застосування цих методів в економічному аналізі. Серед них були і праці Г. Мура, які вийшли друком протягом 1914-1917 рр.

Необхідно зауважити, що термін "економетрія" вперше запровадив львівський учений П. Чомпа, який опублікував у Львові в 1910 р. книгу "Нариси економетрії і природної теорії бухгалтерії, яка ґрунтується на політичній економії". Проте поняття не набуло належного визнання, оскільки на той час не було фундаментальних праць у цій галузі науки.

Як самостійна дисципліна економетрія сформувалася у 20-30 рр. XX століття завдяки працям Г. Мура і Г. Шульца. У перших працях розроблялися аналітико-статистичні моделі. Здебільшого це були рівняння лінійної регресії з параметрами, оцінюваними за методом найменших квадратів. Такі рівняння дозволяли описувати функції попиту та їх залежність від прибутків, обсягів випуску продукції, цін, податків, інших чинників, а також функції пропозиції, виробничі функції, які відображали технологічну залежність випуску продукції від витрат праці та засобів виробництва.

У 1928 р. було опубліковано дослідження американських вчених математика Ч. Кобба та економіста П. Дугласа виробничої функції, яке ввійшло до економетрії як класичний приклад і досі є важливим інструментом економетричного аналізу:

$$Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta},$$

де Q – обсяг виробництва;

A – постоянный коэффициент;

α і β – показники, що характеризують віддачу, використання кожного з двох основних видів ресурсів;

K – витрати капіталу;

L – витрати праці.

Завдяки своїй простоті та раціональності ця функція широко застосовується досі й отримала подальші узагальнення в різних напрямках.

Праці цих вчених можна вважати основою сучасної економетрії, її методів та принципів.

Економетрія як окрема галузь науки відома під такою назвою, починаючи з 1930 р. Саме тоді було засновано економетричне товариство, яке на той час визначало себе так: “Міжнародне товариство для розвитку економічної теорії і її зв’язку зі статистикою та математикою”. В 1933 році Р. Фріш проголосив синтез економічної теорії, статистики та математики. Економетристи спробували поєднати позитивні ознаки математичної школи в політичній економії та у статистичному напрямі, тобто підтримали ідею поєднання в економічному дослідженні абстрактно-теоретичного аналізу, емпіричних даних і математичних методів.

Одними із засновників економетрії вважають Р. Фріша, Е. Шумпетера, Я. Тінбергена – послідовників неокласичної економічної школи та кейнсіанства. Вони одними з перших науковців цілеспрямовано намагалися поєднати економічну теорію з математичними та статистичними методами.

Спочатку вчені обмежувалися вивченням деяких моделей попиту і пропозиції. Але після Другої світової війни вони почали вивчати комплексні економетричні моделі на макрорівні, в яких основна увага приділялася таким явищам, як попит, фінансовий стан, податки, прибуток, ціна тощо.

У процесі розвитку економетрії з’явилися ознаки її розшарування, відходу від триєдиної формули Р. Фріша. Вони розвивалися в двох напрямах:

- водночас з економіко-теоретичними дослідженнями на основі застосування математичних і статистичних методів все більшого значення набували прикладні математичні та емпірико-статистичні розробки, які не належали безпосередньо до економічної теорії;
- виокремлювалися абстрактно-теоретичні дослідження математичних моделей економіки, в яких не використовувалися емпіричні дані.

У наш час набувають впровадження у вітчизняну практику економетричні підходи з використанням програмних комплексів ПК. За сучасних умов зростає роль економіко-математичних методів як одного із засобів розвитку динамічно розвиненої та стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку за умов кризи та прогнозами на майбутнє.

Окремо слід окреслити внесок українських вчених у розвиток економіко-математичних методів. В останній третині XIX століття в України виник особливий напрям у розвитку економічної думки, відомий під назвою “київська наукова школа в політичній економії”. Одним із засновників цієї школи був професор Київського університету М. Х. Бунге (1823-1895). Його послідовником став Д. І. Піхно (1853-1909), що опублікував низку праць, перша з яких називалася “Закон попиту і пропозиції”. Платіжну здатність покупця у цій праці автор намагався подати математично. Повніше своє розуміння економічної теорії Д. І. Піхно виклав в “Основах політичної економії”. Політична економія, за визначенням вченого, ставить собі за мету вивчення закономірностей економічних явищ. При цьому використовують різні методи, зокрема й математичні. Проте Д. І. Піхно вважав, що значимість математичних методів для з’ясування законів політичної економії не варто перебільшувати.

Світоглядної позиції київської школи політичної економії дотримувався і Р. М. Орженцький (1863-1923), який у праці “Основні закони цінності та їх пряме застосування” спробував поєднати математичні методи дослідження з психологічною теорією цінності.

О. Д. Білімович (1876-1963) у монографії “До питання про розцінку господарських благ” (1914) написав: “Намагання подати свої теоретичні надбудови у формі можливих точніших схем зближує нас з економістами математичної школи”. В. Ф. Арнольд опублікував у 1904 р. в Одесі “Політично-економічні етюди”, в яких намагався використати засоби елементарної алгебри для обґрунтування теорії граничної корисності. Він писав: “Завданням нашим було … показати, що в результаті введення математичних прийомів оброблення економічних даних – хоч би ці прийоми були в найелементарнішому вигляді – багато політекономічних проблем дістають можливості строгого і точного, хоч і абстрактного розв’язання”. В. Ф. Арнольд усіляко відстоював застосування математичних методів в економічні науці, зокрема політичній економії. Він стверджував, що політична економія може мати шанси на успіх лише тоді, коли буде використовувати методи природничих наук. Спроби викласти економічні закони математичними формулами В. Ф. Арнольд вважав своїм основним завданням.

На початку ХІХ століття, коли статистика стала університетською наукою і необхідним інструментом державного управління, розпочався якісно новий етап в історії економіко-статистичної думки в Україні. Видатними вченими, які розвивали економіко-статистичну науку в цей період, були: Д. П. Журавський (1810-1856), В. М. Навроцький (1847-1882), О. О. Русов (1847-1915), В. Є. Варзар (1851-1940) та ін. Українську економіко-статистичну думку кінця ХІХ – першої половини ХХ ст. не можна належно оцінити без урахування великої наукової спадщини Ф. А. Щербини (1849-1936) та М. Б. Птухи (1884-1961), які зробили значний внесок у розвиток методики оброблення статистичних даних.

Яскравим представником українських економістів-новаторів, які торували нові шляхи у розвитку світової економічної науки, був Є. Є. Слуцький (1880-1948). Першою його працею в економічні науці стало його студентське дослідження “Теорія граничної корисност”, написане у 1910 р. В цій праці він широко використав математичний апарат, без якого, за його словами, не міг би “… показати справжню взаємодію теорії попиту і пропозиції (в її сучасній конструкції), і теорії затрат виробництва”.

У 1912 році Є. Є. Слуцький підготував і видав посібник “Теорія кореляції і елементи вчення про криві розподілу”, в якому використав найновіші здобутки математичної статистики.

Знаменитим дослідженням Є. Є. Слуцького початку ХХ ст. є праця “До теорії збалансованості бюджету споживача”, опублікована в Італії в 1915 р. Це дослідження привернуло увагу зарубіжних учених-економістів лише через двадцять років після опублікування у зв’язку з появою у світовій науці економетрії. У 1935 американський економіст Г. Шульц зазначив, що Є. Є. Слуцький значно розширив, поглибив, конкретизував теорію споживчого попиту.

Англійський економіст-математик Р. Аллен, автор відомої книги “Математична економія”, у середині 30-х років минулого століття опублікував статтю “Теорія споживчого вибору професора Слуцького”, в якій відзначив наукове новаторство українського вченого. Пізніше, у 1958 році в журналі “Econometrica” Р. Аллен знову опублікував статтю про Є. Є. Слуцького, в якій він наголосив, що роботи українського вченого мали “великий і міцний вплив” на розвиток економетрії.

Про запозичення з робіт Є. Є. Слуцького зізнався у своїй книзі “Вартість і капітал” (1939) лауреат Нобелівської премії у галузі економіки Дж. Р. Гікс. Відзначивши високу математизованість праці українського вченого, Дж. Р. Гікс визнав, що саме Є. Є. Слуцький є фундатором ефекту доходу і, відповідно, ефекту заміщення, що сприяло введенню у зарубіжні підручники з економічної теорії терміна “ефект Слуцького”. У своїй книзі англійський вчений писав, що Є. Є. Слуцький був першим економістом, який зробив значний крок уперед порівняно з класиками математичної школи (очевидно, в економетричному напрямку).

1.3 Основні математичні передумови економетричного моделювання

Нехай маємо p пояснювальних змінних та залежну змінну Y. Змінна Y є *випадковою величиною*, що має при заданих значеннях факторів деякий розподіл. Якщо випадкова величина y неперервна, то можна вважати, що її розподіл для кожного припустимого набору значень факторів (x_1, …, x_p) має умовну щільність $f_{x_1,\ldots x_p}(y)$.

Зазвичай роблять припущення щодо розподілу y (нормальний розподіл). Пояснювальні змінні X_j, $j=\overline{1,p}$ можуть вважатися як випадковими, так і детермінованими, тобто такими, що набувають певних значень.

Із попереднього прикладу про продаж авто ми можемо заздалегідь визначити для себе параметри автомобіля та шукати оголошення про продаж авто з такими параметрами, тоді випадковою величиною залишається тільки ціна; а можемо випадковим чином обирати оголошення про продаж, тоді екзогенні змінні будуть випадковими величинами.

Класична економетрична модель розглядає екзогенні змінні x_j як детерміновані. Пояснювана частина Y_e є функцією від екзогенних змінних:

$$Y_e = f(X_1, \ldots, X_p).$$

Таким чином, економетрична модель така:

$$Y = f(X_1, \ldots, X_p) + \varepsilon.$$

Найбільш природним вибором залежної частини є її середнє значення – умовне математичне сподівання $M_{x_1,\ldots x_p}(Y)$, одержане для даного набору значень екзогенних змінних (x_1, …, x_p). (У подальшому математичне сподівання будемо позначати $M_x[Y]$).

Рівняння $M_x[Y] = f(x_1,\ldots,x_p)$ називають *рівнянням регресії*. При такому виборі залежної частини економетрична модель є такою:

$$Y = M_x[Y] + \varepsilon, \tag{1.3}$$

де ε – випадкова величина, яку називають *збуренням* або *похибкою*.

Рівняння (1.3) називають *рівнянням регресійної моделі*. Однак відмітимо, що економетрична модель не обов’язково є регресійною, тобто залежна частина не завжди є умовним математичним сподіванням залежної змінної. З математичної точки зору регресійні моделі є більш простими об’єктами, ніж економетричні моделі загального типу. Відзначимо деякі властивості регресійної моделі.

Розглянемо рівність (1.3) та обчислимо від обох частин математичне сподівання при заданому наборі значень екзогенних змінних X. У цьому випадку $M_x[Y]$ є числовою величиною, що дорівнює своєму математичному сподіванню, і можна отримати рівність

$$M_x[\varepsilon] = 0, \tag{1.4}$$

тобто, в регресійній моделі очікуване значення випадкової похибки дорівнює нулю. Звідси випливає некорельованість випадкових помилок та екзогенних змінних X.

1.4 Економетрична модель та експериментальні дані

Щоб одержати достатньо достовірні та інформативні дані щодо розподілу деякої випадкової величини, необхідно мати вибірку її спостережень достатньо великого об'єму. Вибірка спостережень залежної змінної та екзогенних змінних X_j, $j=\overline{1,p}$, є відправною точкою будь-якого економетричного дослідження.

Такі вибірки є наборами значень X_j, Y_i, $j=\overline{1,p}$, $i=\overline{1,n}$; n – число спостережень, p – кількість екзогенних змінних. Як правило, число спостережень достатньо велике (десятки, сотні) та значно перевищує кількість екзогенних змінних. Однак проблема в тому, що випадкові величини Y_i, що їх одержують при різних наборах значень X_j, строго кажучи, мають різні розподіли. А це означає, що для кожної випадкової величини Y_i ми маємо лише одне спостереження.

У класичному курсі економетрії розглядають два типи вибіркових даних:

1. *Просторові дані (cross-sectional data)*. В економіці під просторовою вибіркою розуміють набір економічних змінних, одержаний на даний момент часу. Однак таке означення не дуже зручне для економетриста через неоднозначність поняття "момент часу". Зрозуміло, що говорити про просторові вибірки є сенс у випадку одержання всіх спостережень за незмінних умов (набір спостережень є набором незалежних вибіркових даних з деякої генеральної сукупності).

Таким чином, ми будемо називати *просторовою вибіркою* серію n незалежних спостережень (p+1)-вимірної випадкової величини (X_{i1}, X_{i2}, …, X_{ip}; Y_i).

Як визначити, чи є вибірка серією незалежних спостережень? На це запитання немає однозначної відповіді. Зазвичай за незалежні приймають величини, не пов'язані причинно. Однак на практиці далеко не завжди питання незалежності розв'язується просто.

Повернемося до прикладу про продаж автомобілів.

Нехай Y – ціна автомобіля, X – рук випуску, а $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ – серія даних, одержаних з газети "20 хвилин". Чи можна вважати ці спостереження незалежними?

Різні продавці не знайомі між собою, вони дають свої оголошення незалежно один від одного, тому пропозиція щодо незалежності спостережень виглядає досить розумною. З іншого боку, людина, яка призначає ціну на свій автомобіль, керуються цінами попередніх оголошень, тому і заперечення незалежності спостережень також має право на існування.

Із цього можна зробити висновок, що рішення щодо просторового характеру вибірки певною мірою є суб’єктивним. Таким чином, модель, побудована на основі просторової вибірки експериментальних даних (x_i, y_i), є такою:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}, \qquad (1.5)$$

де похибки регресії мають задовольняти умови:

$$M(\varepsilon_i) = 0, \qquad (1.6)$$

$$r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \qquad (1.7)$$

$$D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2, \qquad (1.8)$$

де $D(\varepsilon_i)$ – умовна дисперсія випадкової величини ε_i.

Що стосується умови (1.8), то тут можливі два випадки:

а) $\sigma_i^2 = \sigma_j^2$ при всіх i та j. Властивість сталості дисперсій похибок регресії називається *гомоскедастичністю*. У цьому випадку розподіли випадкових величин Y_i відрізняються лише значенням математичного сподівання (пояснюваної частини);

б) $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$. У цьому випадку має місце *гетероскедастичність* моделі. Гетероскедастичність потрібно усунути.

Перевірку моделі на гомоскедастичність можна проілюструвати на такому прикладі. Наприклад, ціна автомобіля, якому 15 років, навряд чи може піднятися вище 2000 ум. гр. од., тому стандартна похибка ціни в цьому випадку не перевищить 300-400 ум. гр. од. Разом із тим, автомобіль якому два роки, може коштувати і 7000, і 17000 ум. гр. од., тобто стандартна похибка не менше 1500-2000 ум. гр. од.

Однак у багатьох випадках гетероскедастичність моделі не є очевидною, і потрібно застосовувати методи математичної статистики для прийняття рішення про те, який тип моделі буде розглядатися. Це питання буде більш ретельно розглянуто у розділі 5;

2. *Часовий (динамічний) ряд (time-series data).* Часовим (динамічним) рядом називають вибірку спостережень, в якій важливі не лише самі спостережувані значення випадкових величин, а й порядок їхнього слідування. Частіше за все впорядкованість зумовлена тим, що експериментальні дані є серією спостережень однієї і тієї ж випадкової величини в послідовні моменти часу. У цьому випадку динамічний ряд називають *часовим рядом*.

1.5 Поняття економіко-математичної моделі. Класифікація економіко-математичних моделей

Вплив математичного моделювання на економічну теорію є різнобічним. Виклад багатьох економічних проблем формалізованою мовою дає можливість запобігти двозначності міркувань, значною мірою прояснює суть проблеми, яскраво інтерпретує теоретичні положення. Окрім того, застосування мови математики сприяє уточненню багатьох економічних категорій, кращій систематизації теоретичних знань, збагаченню понятійного апарату економічної науки.

Економіко-математичною моделлю називають сукупність пов'язаних між собою математичними залежностями величин-факторів, всі чи частина яких мають економічний характер. ***Моделювання*** є процесом побудови, реалізації та дослідження моделі, який здатний замінити реальну систему та дати інформацію про неї. Моделювання є важливим інструментом наукової абстракції, що допомагає виділити, уособити та проаналізувати суттєві для даного об'єкта характеристики (властивості, взаємозв'язки, структурні та функціональні параметри).

Дослідження з моделюванням економічних систем поділяються на три основні групи:

- теоретичні дослідження – розроблення проблем економічної теорії та теоретико-методологічних проблем управління економікою з використанням математичного моделювання;

- прикладні дослідження – розв'язання практичних завдань управління економічними системами;

- інструментальні дослідження – створення інструментальних засобів для проведення економічних досліджень.

Економіко-математична модель має пізнавальну і практичну цінність, якщо вона ***відповідає*** певним ***вимогам***:

- спирається на основні положення економічної теорії;
- адекватно відображає реальну економічну дійсність;
- враховує найбільш важливі фактори, які визначають рівень досліджуваних показників;
- відповідає встановленим критеріям;
- дозволяє отримати такі знання, які до її реалізації були невідомими;
- може бути достатньо абстрактною, щоб припустити варіювання великим числом змінних, але не настільки, щоб виникли сумніви в її надійності і практичній корисності отриманих результатів;
- задовольняти умови, які обмежують час розв'язування задачі;
- дозволяє реалізувати її існуючими засобами.

Однією з найбільш важливих ознак економіко-математичних моделей є зв'язок із фактором часу. Моделі, в яких вхідні фактори та результат прямо залежать від часу, називають ***динамічними***. Моделі, в яких залежність від часу або зовсім є відсутньою або виявляє себе дуже слабко, називаються ***статичними***.

Економіко-математичні моделі дозволяють виявити особливості функціонування економічних об'єктів або явищ і на базі цього передбачити майбутню поведінку об'єкта при зміні будь-яких параметрів.

У моделях всі зв'язки між змінними можуть бути описані кількісно, що дозволяє отримати більш якісний та надійний прогноз. Можливості прогнозування полягають в тому, що можна отримати набагато кращі результати та позбутися зайвих витрат. Неповнота економічних моделей випливає з їх абстрактності.

Звичайна економіко-математична модель складається з цільової функції:

$$f\,(x_1, \ldots, x_n) \to extreme \tag{1.9}$$

від шуканих величин $x_1, \ldots, x_n$ та обмежень на область використання цих величин:

$$g_k\,(x_1, \ldots, x_n) < b_k\ (k = 1,..,m). \tag{1.10}$$

Цільова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ виражає значення критерію оптимальності, який зумовлений значеннями шуканих величин $x_1, \ldots, x_n$, а $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ – техніко-економічні умови досліджуваного процесу.

Наприклад, $f\,(x_1,\ldots,x_n)$ – прибуток підприємства в залежності від обсягу виробленої продукції: першого виду – x_1, другого виду – $x_2, \ldots$, n-го виду – x_n. Тоді обмеженнями на таку функцію будуть $g_k\,(x_1, \ldots, x_n)$ – обсяги споживаних ресурсів k-го виду, а b_k – обсяги виділених ресурсів k-го виду ($k = 1,\ldots,m$).

Оскільки підприємству необхідно розробити план виробництва продукції, який забезпечує *максимізацію прибутку* при використанні лише виділених ресурсів b_k, то економіко-математична модель такої задачі полягає у пошуку таких $x_1,\ldots, x_n > 0$, за яких: $f\,(x_1, \ldots, x_n) \to max$.

Якщо в задачі про пошук оптимального плану виробництва продукції підприємство використовує критерій оптимальності мінімуму витрат за умов виконання плану, то цільова функція $f\,(x_1,\ldots,x_n)$ буде виражати витрати, а обмеження $g_i(x_1, \ldots, x_n) \geq b_i$ – умови виконання плану виробництва продукції за видами ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Тоді математична модель набуде вигляду:

$$f\,(x_1,\ldots, x_n) \to min,\ g_i\,(x_1, \ldots, x_n) \geq b_i\ (i = \overline{1, n}). \tag{1.11}$$

Економіко-математичні моделі поділяють на класи за рядом ознак. *Залежно від об'єкта моделювання* та *математичного апарату* виділяють такі моделі: макро- та мікроекономічні, теоретичні та прикладні, статичні та динамічні, детерміновані та стохастичні, оптимізаційні та моделі рівноваги тощо.

Макроекономічні моделі описують економіку загалом, пов'язуючи між собою узагальнені показники матеріального та фінансового плану: ВВП, споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість грошей тощо.

Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки або поведінку окремої складової, зокрема фірми, підприємства, банку і т.п. у ринковому середовищі.

Статичні моделі описують стан економічного об'єкта в певний момент чи період часу, а ***динамічні моделі*** вивчають взаємозв'язки економічних змінних у часі. Ті змінні, що вивчаються в динаміці, у статичних моделях мають фіксоване значення. Однак динамічна модель не зводиться до простої суми статичних моделей, а описує взаємодію сил, що рухають економіку.

У ***детермінованих моделях*** передбачаються жорсткі функціональні зв'язки між змінними, а ***стохастичні*** припускають наявність випадкових впливів на досліджувані змінні.

Моделі рівноваги описують такий стан економіки, коли всі сили, що намагаються вивести її з рівноваги, мають нульову сумарну дію.

Оптимізаційні моделі застосовують для пошуку найкращих управлінських рішень за певним критерієм оптимізації при дотриманні низки обмежень. Серед основних критеріїв можна зазначити: максимізацію прибутку, мінімізацію грошових або часових витрат та ін.

Необхідно зауважити, що предметом економетричного дослідження є прикладні стохастичні економічні моделі, тобто загальні економічні моделі, у яких модельні коефіцієнти набувають конкретних числових значень залежно від використаної статистичної інформації, що була попередньо підготовлена.

Також економіко-математичні моделі можна класифікувати за такими ознаками: *призначенням, ступенем ймовірності, способом врахування змінювання процесу у часі, точністю математичного відображення досліджуваних процесів та явищ*.

За призначенням моделі поділяються на чотири класи: імітаційні, балансові, оптимізаційні, сітьові.

За ступенем імовірності моделі поділяють на два класи: ймовірнісні (стохастичні), параметри та зовнішні зміни яких носять випадковий характер; детерміновані, в яких випадковий характер зміни параметрів не береться до уваги.

Серед економіко-математичних моделей виділяють такі типи:

1) ймовірнісно-статистичні моделі. Моделі вартості та розширеного відтворення є ймовірнісно-статистичними, тому дослідження їх здійснюється за допомогою методів економічної та математичної статистики з використанням апарату теорії ймовірностей. Насамперед тут використовується вибірковий (репрезентативний метод), який дозволяє за обмеженими статистичними даними визначити окремі економічні показники, а також оцінити ступінь точності отриманих результатів. Найбільш важливими в економетричній статистиці є методи *кореляційно-регресійного аналізу*.

Одним із напрямків кореляційно-регресійного аналізу в економічних дослідженнях є моделювання залежності між обсягом виробленої продукції, собівартістю одиниці продукції, капітальними витратами, продуктивністю праці та використанням основних виробничих фондів. Ці ж методи використовують при дослідженні залежності попиту від ціни, пропозиції від ціни та майбутніх впливів пропозиції на ціну, тобто аналізується завершений цикл послідовних впливів одного чинника на інший.

Методами математичної статистики досліджується кореляція між окремими елементами в суспільному виробництві.

Окремим підприємствам побудовані математичні криві слугують не лише для вивчення товарного ринку. Їх використовують для встановлення та аналізу функціональної залежності між величиною випуску продукції та витратами виробництва у формі так званих виробничих функцій, параметри яких отримують також в результаті оброблення емпіричних даних методами кореляційного аналізу.

Статистичне моделювання (метод Монте-Карло) використовується в тих випадках, коли за умов складних взаємозв'язків факторів аналітичні методи є безсилими. Застосування методу статистичних випробувань безпосередньо пов'язано з ПК. Сутність статистичного моделювання полягає у чисельному відтворенні (імітації) випадкових процесів за заздалегідь відомими параметрами, а також у визначенні невідомих параметрів моделі.

Цей метод успішно використовується для розв'язання питань підвищення ефективності використання обладнання та полегшення пошуку раціональної організації, складних виробничих та технологічних процесів. Універсальність моделей, простота алгоритмів, які їх реалізують, а також наявність персонального комп'ютера роблять статистичне моделювання незамінним апаратом в економічних дослідженнях;

2) матричні моделі. У цьому класі моделей одержує строгий математичний опис один із важливих методів планування – *балансовий метод*. Ці моделі призначені для аналізу та планування виробництва і

розподілу продукції на різних рівнях ієрархії (від окремого підприємства до цілого народного господарства). Назву *матричні* ці моделі одержали завдяки тому, що для їх реалізації використовується математичний апарат матричної алгебри. До простіших матричних моделей належать моделі, що описують поведінку економічної системи у вигляді *однопродуктових* схем виробництва продукції та її розподілу. В цих моделях використовують деякий однорідний продукт як предмет праці і предмет споживання.

Загальність матричних моделей різних рівнів ієрархії полягає у тому, що їх можна розглядати за змістом і структурою на прикладі однієї з них.

У залежності від того, чи береться до уваги при складанні моделей фактор часу, вони можуть бути, відповідно, *статичними* чи *динамічними*.

Матричні статичні моделі розробляються для окремо взятих періодів. Зв'язок між попередніми або наступними періодами в рамках цих моделей не досліджується.

Динамічні матричні моделі відображають не стан, а процес розвитку економіки, встановлюють безпосередній зв'язок між минулими і майбутніми періодами розвитку.

Важливість матричних моделей в тому, що вони дозволяють формалізувати розрахунки та реалізувати ці моделі на ПК, а також забезпечують організацію інформації в найбільш економній формі;

3) моделі оптимального планування. Вони відрізняються тим, що, на відміну від балансових методів, враховують кілька способів виробництва (споживання). Крім того, змінні (вхідні та вихідні) задаються не ззовні моделі, а визначаються за умов оптимальності цільової функції. При цьому моделі оптимального планування дозволяють розв'язувати задачі не лише міжгалузевих балансів, але й також розміщення виробничих сил, спеціалізації та кооперування підприємств.

До *моделей оптимального планування* належать:

- планування на підприємствах та будівництві;
- планування постачання та перевезення;
- управління запасами;
- сумішно-розкрійні задачі.

Планування на підприємствах та будівництві. До цих моделей належать задачі оптимізації виробничої програми підприємства та її розподілу за календарними періодами, оптимальне завантаження виробничих агрегатів і машин, розрахунок виробничих потужностей підприємства, складання оптимальних графіків запуску виробництва, випуску виробів й ін.

Планування постачання та перевезення. Основна мета цього напрямку – мінімізація транспортних витрат при перевезенні різних вантажів від постачальників до споживачів. При цьому можуть використовуватися різні обмеження: пропускна здатність окремих ланцюгів транспортної мережі, взаємозамінність деяких видів вантажу, першочерговість перевезення найбільш важливих вантажів і т.п. Сюди ж відносять і задачу комівояжера та перевезення дрібних партій вантажу.

Управління запасами. Методи оптимального планування застосовують при розв'язанні різних проблем постачання та збуту, раціонального розміщення оптових і роздрібних баз, а також планування роботи товарної мережі, оптимального керування запасами.

Сумішно-розкрійні задачі. До цієї категорії належать задачі оптимального складу сумішей та сполук. Ці задачі зустрічаються на підприємствах, де продукцію одержують в результаті змішування, сплавлювання або сполучення деяких видів компонентів сировини чи матеріалів. Методи оптимального планування дозволяють знайти набір компонентів суміші, при якому продукція даного складу та якості буде отримана за мінімальних витрат. У задачі щодо оптимального розкрою матеріалів критерієм оптимальності є мінімальні сумарні витрати (відходи) матеріалів після розрізання їх на заготівки необхідної величини та форми.

Усі перелічені моделі досліджуються засобами *лінійного програмування*.

Типовими прикладами економічних задач управління запасами є задачі виробництва та збереження продукції, розподілу капіталовкладень, календарного виробничого планування, складання графіків запуску деталей у виробництво, визначення найкоротшої відстані між пунктами на транспортній мережі. Розв'язання таких задач досягається засобами *динамічного програмування*.

1.6 Етапи економіко-математичного моделювання

Можна виділити шість основних етапів економіко-математичного моделювання: постановочний, апріорний, етап параметризації, інформаційний етап, етапи ідентифікації та верифікації моделі.

1-ий етап (постановочний). Формується мета дослідження, набір економічних змінних, що будуть брати участь у побудові моделі.

Як мету зазвичай розглядають аналіз досліджуваного економічного процесу, прогноз його економічних показників, імітацію розвитку об’єкта при різних значеннях екзогенних змінних, розроблення управлінських рішень.

При виборі економічних змінних необхідне теоретичне обґрунтування кожної змінної. Для вибору змінних можуть бути використані різні методи, а для оцінювання впливу якісних ознак використовують навіть фіктивні змінні.

2-ий етап (апріорний). Проводиться аналіз сутності об'єкта, що вивчається, формування та формалізація апріорної інформації (відомої до початку моделювання).

Однією з основних проблем використання математичного моделювання в економічних дослідженнях є наявність якісної інформації. Точність і повнота первинної інформації, реальні можливості її одержання та оброблення визначають вибір типу математичної моделі і можливості її використання.

Якість інформації можна визначити як сукупність властивостей, що зумовлюють можливість її використання для задоволення певних потреб, залежно від її призначення. Виділимо суттєві показники якості інформації:

- *репрезентативність* – правильність відбору та формування інформації з метою адекватного відображення необхідних властивостей економічних систем;
- *змістовність* – відношення кількості семантичної інформації до обсягу даних;
- *повнота* – інформація містить мінімальний, але достатній для прийняття необхідного рішення набір економічних показників;
- *доступність* – інформація повинна бути зрозумілою та зручною у використанні;
- *актуальність* – ступінь збереження цінності інформації у момент її використання, який залежить від динаміки зміни параметрів економічних систем;
- *стійкість* – властивість інформації реагувати на зміни вхідних даних, зберігаючи при цьому необхідну точність;
- *точність* – ступінь близькості статистичного значення показника до його істинного значення. Для кількісних економічних показників використовують чотири класифікаційні поняття точності: формальна точність (вимірюється значенням наймолодшого розряду числа, яким поданий показник); реальна точність (розраховується значенням останнього розряду числа); досяжна точність (максимальна точність, яку можна одержати за даних конкретних умов функціонування економічної системи); необхідна точність (визначається функціональним призначенням економічного показника);
- *достовірність* – властивість інформації відображати реальні значення параметрів економічної системи з необхідною точністю;
- *цінність* – міра інформації на прагматичному рівні.

Відповідність інформації об'єкту дослідження – *адекватність* – виражають у трьох формах: синтаксичній, семантичній, прагматичній. Відповідно до цих форм адекватності здійснюють і вимірювання інформації.

Синтаксичною мірою інформації є ентропія системи, яку визначають за формулою Шеннона:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \, log_a \, p_i \, ,$$

де H – ентропія (невизначеність стану) системи;

p_i, $i = \overline{1,n}$ – імовірність того, що система перебуває в i-му стані;

n – кількість станів системи.

Щоб виміряти кількість інформації на семантичному рівні, тобто змістовний вміст інформації, найчастіше використовують тезаурусну міру інформації (тезаурус – сукупність знань, які має користувач). Кількість семантичної інформації – це її корисність, цінність для користувача. Ця міра інформації є відносною величиною, зумовленою особливостями використання інформації. Наприклад, якщо інформацію використовують для моделювання управління економічною системою, то цінність інформації доцільно вимірювати в тих самих одиницях, у яких вимірюють цільову функцію управління системою.

Прагматичною мірою інформації в системах управління економічними об'єктами буде економічна ефективність функціонування системи управління.

3-ій етап (параметризація). Здійснюється безпосереднє моделювання, тобто вибір загального вигляду моделі.

Основна задача, яка розв'язується на цьому етапі, – вибір вигляду функції $f(X)$ в економетричній моделі (1.1). Дуже серйозною проблемою на даному етапі є проблема специфікації моделі, зокрема запис у математичній формі виявлених зв'язків та взаємовідношень.

4-ий етап (інформаційний). В економетричному дослідженні важливе значення має інформація, на підставі якої будують модель. Тому на даному етапі збирають необхідну статистичну інформацію. Тут можуть розглядатися дані, одержані як за участі дослідника, так і без неї (за умов пасивного чи активного експерименту). Статистичну інформацію можна поділити на два види:

- апріорна інформація, яка має якісний характер; джерелом апріорної інформації є економічна теорія;
- апостеріорна інформація – має кількісний характер; джерелом цієї інформації є спостереження, досліди (статистичні дані).

5-ий етап (ідентифікація моделі). Здійснюється математико-статистичний аналіз моделі та оцінювання її параметрів.

6-ий етап (верифікація моделі) Здійснюється перевірка істинності, адекватності моделі. З'ясовують, наскільки вдало розв'язано проблеми специфікації, ідентифікації, точності розрахунків за даною моделлю.

Для верифікації економіко-математичних моделей їх часто порівнюють з іншими моделями, які вже знайшли своє практичне застосування і довели свою ефективність, а також застосовують теоретичні методи перевірки адекватності моделей.

До причин порушення адекватності слід віднести: відсутність суттєвих зв'язків, хибну структуру досліджуваного об'єкта, неточну оцінку змінних, спрощення функціональних залежностей, використання нераціональних методів оцінювання параметрів.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке економетрія?
2. Які основні етапи розвитку економіко-математичних досліджень?
3. Які вчені входили до математичної школи політичної економії?
4. Яка офіційна дата народження економетрії як науки?
5. Які вчені сформували теоретичні та практичні основи економетрії?
6. Хто і коли вперше використав термін "економетрія"?
7. Що таке модель?
8. Охарактеризуйте основні етапи моделювання.
9. Як класифікують моделі?
10. Що таке економіко-математична модель?
11. Як класифікують економіко-математичні моделі?
12. Які є показники якості інформації?
13. Які існують форми вираження адекватності інформації?
14. Які наукові теорії пропагували представники київської наукової школи в політичній економії?
15. Які вчені розбудовували київську наукову школу політичної економії?
16. Які вчені розвивали українську економіко-статистичну науку?
17. Визначте внесок Є. Є. Слуцького у розвиток економічної теорії.
18. Хто з економетристів є лауреатом Нобелівської премії в галузі економіки?
19. Що є метою економетрії?
20. Знання з яких наук поєднує в собі економетрія?
21. Які величини називають пояснюваними, а які – пояснювальними?
22. Що є задачею економетричного моделювання?
23. Охарактеризуйте криву В. Парето.
24. Охарактеризуйте основні математичні передумови економіко-математичного моделювання.
25. Які типи вибіркових даних розглядають в економетрії?
26. Що називають гомоскедастичністю, а що – гетероскедастичністю?

27. Що називають часовим рядом?
28. На які групи поділяють економетричні дослідження з моделюванням економічних систем?
29. Яким вимогам повинна відповідати економіко-математична модель?
30. Охарактеризуйте структуру економіко-математичної моделі.
31. Охарактеризуйте макро- та мікроекономічні моделі. Які моделі називають статичними?
32. Охарактеризуйте імовірнісно-статистичні та матричні моделі.
33. В яких випадках використовують статистичне моделювання?
34. Охарактеризуйте моделі оптимального планування.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розгадайте кросворд, зображений на рис.1.1.

По горизонталі:

2. Набір економічних змінних, одержаний на даний момент часу, називають вибіркою ... .
3. Моделі, призначені для аналізу та планування виробництва й розподілу продукції на різних рівнях ієрархії.
5. Властивість інформації відображати реальні значення параметрів економічної системи з необхідною точністю.
6. Процес побудови, реалізації та дослідження моделі, який здатний замінити реальну систему та дати інформацію про неї.
7. Львівський вчений, що вперше запровадив термін “економетрія”.
8. Один із розробників теорії оптимального розподілу ресурсів, лауреат Нобелівської премії 1975 року.
10. Розробник кривої з дослідження доходів населення в різних країнах.
12. Наука, що встановлює та досліджує кількісні закономірності та взаємозв’язки в економічному житті за допомогою математичних і статистичних методів.
13. Норвезький економіст, що застосував основи теорії ймовірностей в межах економетрії та проаналізував залежні економічні структури.
14. Показник, що вимірює відношення кількості семантичної інформації до обсягу даних.
17. Функція, що виражає значення критерію оптимальності, який зумовлений значеннями шуканих величин.
20. Синтаксична міра інформації.
21. Ступінь близькості статистичного значення показника до його точного значення.

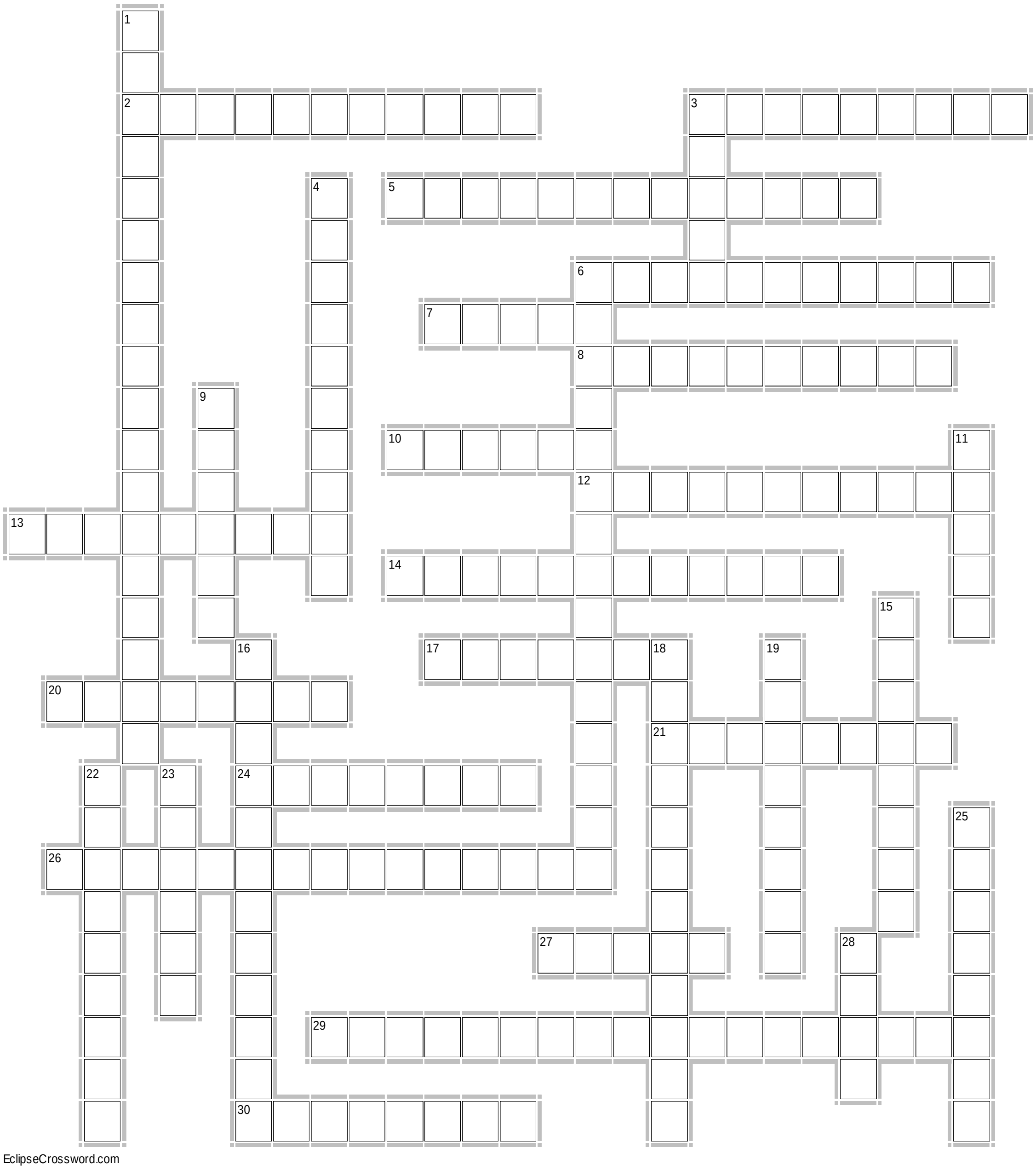


Рисунок 1.1 – Кросворд до розділу 1

24. Автор праці “До теорії збалансованості бюджету споживача”.
26. Моделі, що описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки або поведінку окремої складової в ринковому середовищі.
27. Автор праці “Закон попиту і пропозиції”.
29. Властивість сталості дисперсій похибок регресії.
30. Якісна інформація, яку почерпнуто з економічної теорії.

По вертикалі

1. Показник якості інформації, що характеризує правильність відбору та формування інформації.
3. Один із засновників київської наукової школи політичної економіки.
4. Лауреат Нобелівської премії за розроблення статистичної та динамічної економічної теорії.
6. Моделі, які описують економіку загалом, пов’язуючи між собою узагальнені показники матеріального та фінансового плану.
9. Один із авторів класичної виробничої функції.
11. Вибірку спостережень, в якій важливі не лише спостережувані значення випадкових величин, а й порядок їх слідування, називають часовим ...
15. Моделі, які описують стан економічного об’єкта в певний момент чи період часу.
16. Кількісна інформація, яку одержано зі спостережень.
18. Ступінь збереження цінності інформації у момент її використання, який залежить від динаміки зміни параметрів економічних систем.
19. Міра інформації на прагматичному рівні.
22. Властивість інформації реагувати на зміни вхідних даних, зберігаючи при цьому необхідну точність.
23. Один із авторів теорії оптимальних механізмів, лауреат Нобелівської премії 2007 року.
25. Автор балансових моделей для моделювання взаємозв’язків великою кількістю змінних.
28. Один із творців економетрії, норвезький економіст, лауреат Нобелівської премії 1969 року.

ТЕМА 2 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

2.1 Випадкові величини та їх числові характеристики

Випадковою величиною називається змінна, що в результаті проведення випробування в залежності від випадку набуває одного з можливих значень.

Прикладами випадкових величин є:
1) число новонароджених протягом доби у м. Вінниці;
2) кількість бракованих виробів в партії;
3) витрати електроенергії на підприємстві за місяць.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина її можливих значень є зчисленною (скінченною чи нескінченною).

Під *неперервною* випадковою величиною розуміють величину, множина можливих значень якої є деяким проміжком числової осі.

У прикладах 1 і 2 наявні дискретні випадкові величини, а у 3-му прикладі – неперервна випадкова величина.

Випадкові величини будемо позначати великими літерами латинської абетки $X, Y, Z, \ldots$, а їх можливі значення – відповідними маленькими літерами $x, y, z, \ldots$.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке співвідношення, що встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

Розглянемо дискретну випадкову величину X з можливими значеннями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Події $X = x_1$, $X = x_2$, … , $X = x_n$ (в результаті випробування випадкова величина набула значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно) є несумісними та єдино можливими, тобто утворюють повну групу. Позначивши ймовірності цих подій буквами p з відповідними індексами: $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$, … , $P(X = x_n) = p_n$, одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{2.1}$$

Найпростішою формою подання закону розподілу дискретної випадкової величини є таблиця, в якій перераховані в порядку зростання усі можливі значення випадкової величини та відповідні їм ймовірності, тобто

X:

x_1	x_2	…	x_{i}	…	x_n
p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Така таблиця називається *рядом розподілу* дискретної випадкової величини.

Ряд розподілу можна подати графічно, якщо вздовж осі абсцис відкладати значення випадкової величини, а вздовж осі ординат – відповідні ймовірності. З'єднавши отримані дискретні точки прямолінійними відрізками, одержуємо ламану, яка називається *багатокутником* або *полігоном розподілу ймовірностей* (рис. 2.1).

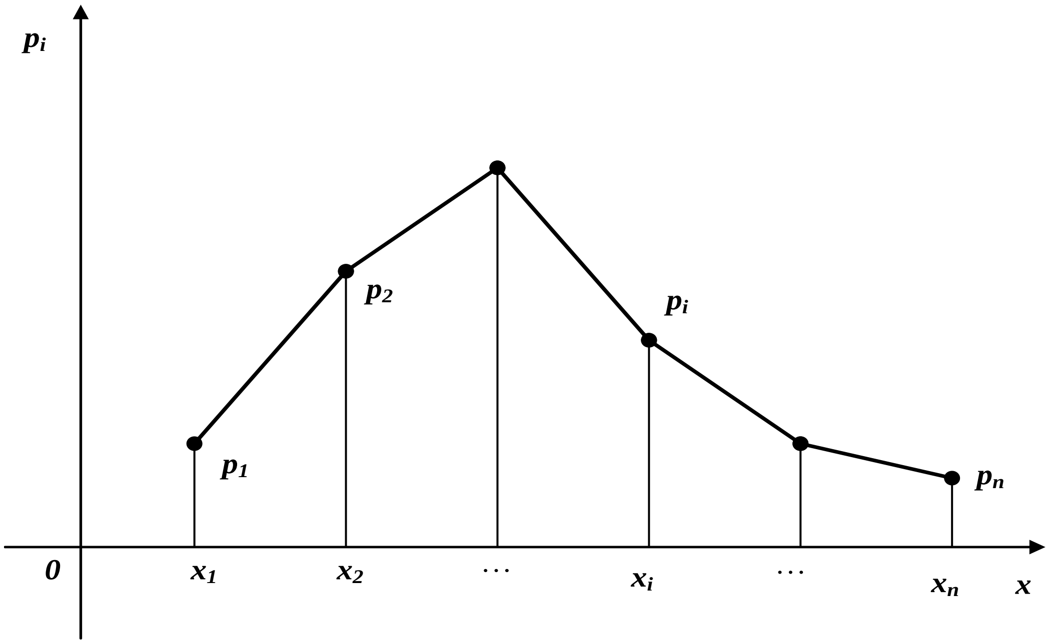


Рисунок 2.1 – Полігон розподілу ймовірностей

Приклад 2.1. Ймовірності того, що студент складе семестровий іспит з "Економічного аналізу" та "Фінансів" під час сессії, дорівнюють відповідно 0,9 та 0,7. Скласти закон розподілу кількості семестрових іспитів, які складе студент, та побудувати полігон цього розподілу.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини X – кількості складених іспитів – 0, 1, 2.

Нехай A_i = "Студент складе i-ий іспит" i = 1, 2. Тоді ймовірності того, що студент складе в сесію 0, 1, 2 іспити, відповідно дорівнюють:

$$P(X=0)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=(1-0{,}9)(1-0{,}7)=0{,}1\cdot 0{,}3=0{,}03;$$
$$P(X=1)=P(A_1\cdot\overline{A_2}+A_2\cdot\overline{A_1})=P(A_1\cdot\overline{A_2})+P(A_2\cdot\overline{A_1})=0{,}9\cdot 0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}1=0{,}34;$$
$$P(X=2)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}9\cdot 0{,}7=0{,}63.$$

Таким чином, ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

На рисунку 2.2 одержаний ряд розподілу подано графічно у вигляді полігону розподілу ймовірностей.

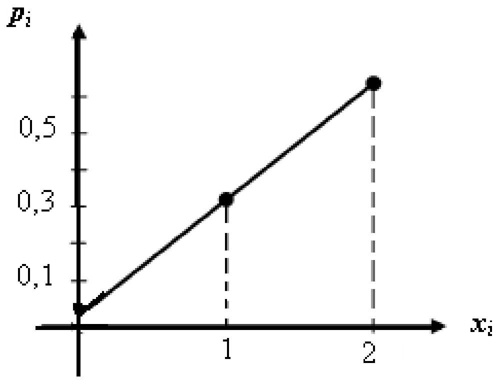


Рисунок 2.2 – Полігон розподілу ймовірностей для прикладу 2.1

Розглянемо найбільш уживані операції над випадковими величинами.

Нехай дано дві дискретні випадкові величини:

X:

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

та

Y:

y_1	y_2	…	y_m
p_1	p_2	…	p_m

Добутком kX випадкової величини X на сталу величину k називається випадкова величина, яка набуває значення kx_i з тими ж ймовірностями p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

m*-им степенем* випадкової величини X, тобто X^m, називається випадкова величина, яка набуває значення x_i^m з тими ж ймовірностями p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Сумою (різницею чи *добутком)* випадкових величин X та Y називається випадкова величина, яка набуває усіх можливих значень виду $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$ чи $x_i \cdot y_j$), $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ із ймовірностями p_{ij} того, що випадкова величина X набуде значення x_i, а Y – y_j:

$$p_{ij} = P[(X = x_i)(Y = y_j)].$$

Якщо випадкові величини X та Y незалежні (закон розподілу однієї величини не залежить від того, які можливі значення набула інша величина), то за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій маємо:

$$p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot p_j \,. \qquad (2.2)$$

Приклад 2.2. Дано закони розподілу двох незалежних випадкових величин:
X:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

та Y :

y_j	-2	0	2
p_j	0,1	0,6	0,3

Знайти закон розподілу випадкової величини *Z* = *X* – *Y*.

Розв'язання. Для зручності пошуку всіх значень різниці *Z* та їх ймовірностей складемо допоміжну таблицю, в кожній клітинці якої розмістимо в лівому кутку значення різниці $Z = X - Y$, а в правому кутку – ймовірності цих значень, одержані в результаті множення ймовірностей відповідних значень випадкових величин X та Y.

x_i \ y_j	p_i \ p_j	-2	0	2
		0,1	0,6	0,3
0	0,5	2 / 0,05	0 / 0,3	-2 / 0,15
2	0,2	4 / 0,02	2 / 0,12	0 / 0,06
4	0,3	6 / 0,03	4 / 0,18	2 / 0,09

Наприклад, якщо *X* = 2 (передостанній рядок таблиці), а *Y* = 0 (четвертий стовпець таблиці), то випадкова величина *Z* = *X* – *Y* набуває значення Z = 2 – 0 = 2 з ймовірністю *P*(*Z*=2)=*P*(*X*=2)·*P*(*Y*=0)=0,2·0,6=0,12.

Оскільки серед дев'яти значень випадкової величини Z є ті, що повторюються, то їх відповідні ймовірності додаємо за теоремою додавання ймовірностей. Наприклад, значення $Z = 2$ може бути одержане, коли $X = 2$, $Y = 0$ (з ймовірністю 0,12); $X = 0$, $Y = -2$ (з ймовірністю 0,05); $X = 4$, $Y = 2$ (з ймовірністю 0,09), тому

$$P(Z = 2) = 0{,}12 + 0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}26 \text{ і т.п.}$$

Таким чином отримаємо розподіл:

Z:

z_i	-2	0	2	4	6
p_i	0,15	0,36	0,26	0,20	0,03

Розглянемо таку задачу. Відомі закони розподілу випадкових величин X та Y – кількість очок, що набрав 1-ий та 2-ий стрілець відповідно.

X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,1	0,1	0,04	0,05	0,12	0,2

Y:

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,1	0,1	0,04	0,02

Потрібно з'ясувати, який з двох стрільців стріляє краще. Розглянувши ряди розподілу випадкових величин X та Y, важко відповісти на це запитання через велику кількість значень. Зрозуміло, що з двох стрільців краще стріляє той, хто в *середньому* набирає більшу кількість очок. Таким середнім значенням випадкової величини є її математичне сподівання.

Математичним сподіванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X називають суму добутків усіх її значень та відповідних їм ймовірностей:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{2.3}$$

Приклад 2.3. Обчислити $M(X)$ та $M(Y)$ у задачі про стрільців.

Розв'язання. За формулою (2.3) маємо:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}04 + 3 \cdot 0{,}05 + 4 \cdot 0{,}04 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}04 +$$
$$+ 8 \cdot 0{,}05 + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}2 = 5{,}36\,;$$

$$M(Y)=0\cdot 0{,}01+1\cdot 0{,}03+2\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}09+4\cdot 0{,}11+5\cdot 0{,}24+6\cdot 0{,}21+7\cdot 0{,}1+$$
$$+8\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}04+10\cdot 0{,}02=5{,}36.$$

Розглянемо основні ***властивості*** математичного сподівання.

1. Математичне сподівання сталої величини є величина стала:

$$M(C) = C, \text{ де } C = const. \qquad (2.4)$$

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто:

$$M(kX) = kM(X), \text{ де } k = const. \qquad (2.5)$$

3. Математичне сподівання алгебраїчної суми скінченної кількості випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань, тобто:

$$M(X \pm Y)=M(X)\pm M(Y). \qquad (2.6)$$

4. Математичне сподівання добутку скінченного числа випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XY)=M(X)M(Y). \qquad (2.7)$$

5. Якщо всі значення випадкової величини збільшити (зменшити) на сталу C, то на цю ж сталу збільшиться (зменшиться) математичне сподівання цієї випадкової величини:

$$M(X \pm C)=M(X)\pm C. \qquad (2.8)$$

6. Математичне сподівання відхилення випадкової величини від її математичного сподівання дорівнює нулю:

$$M\left[X - M(X)\right]=0. \qquad (2.9)$$

Приклад 2.4. Знайти математичне сподівання випадкової величини $Z=8X-5Y+6$, якщо відомо, що $M(X)=3$, $M(Y)=4$.

Розв'язання. Використовуючи властивості (1), (2), (3) математичного сподівання знаходимо:

$$M(Z)=8M(X)-5M(Y)+6=8\cdot 3-5\cdot 4+6=10.$$

Тільки математичне сподівання не може в достатній мірі охарактеризувати випадкову величину. В задачі про стрільців ми переконалися, що $M(X)=M(Y)=5{,}36$, тобто середня кількість очок у обох стрільців однакова. Зрозуміло, що краще стріляє той стрілець, в якого менше відхилення кількості очок від середнього значення.

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2. \tag{2.10}$$

Якщо випадкова величина X – дискретна зі скінченною кількістю значень, то

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i\,. \tag{2.11}$$

Із формули (2.11) випливає, що дисперсія має розмірність квадрата, що не завжди зручно. Тому як показник ступеня розсіювання використовують також величину $\sqrt{D(X)}$.

Середнім квадратичним відхиленням σ_x випадкової величини X називається арифметичне значення кореня квадратного з її дисперсії:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \tag{2.12}$$

Відмітимо основні ***властивості*** дисперсії випадкової величини.

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(C) = 0, \text{ де } C = const. \tag{2.13}$$

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його при цьому до квадрата:

$$D(kX) = k^2 D(X). \tag{2.14}$$

3. Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини та квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \tag{2.15}$$

Зауваження. Цю властивість досить часто використовують для обчислення дисперсії, оскільки вона дає спрощення розрахунків в порівнянні з основною формулою (2.10), якщо значення випадкової величини – ціле число, а математичне сподівання – неціле число.

4. Дисперсія алгебраїчної суми скінченного числа незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y). \qquad (2.16)$$

Приклад 2.5. Знайти дисперсію випадкової величини $Z = 8X - 5Y + 7$, якщо відомо, що випадкові величини X та Y незалежні і $D(X)=1,5$; $D(Y)=1$.

Розв'язання. Використовуючи властивості (1), (2), (4), знайдемо

$$D(Z)=8^2\cdot D(X)+5^2\cdot D(Y)+0=64\cdot 1,5+25\cdot 1=121.$$

Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та інші числа, що в стислій формі описують найбільш істотні риси розподілу, називають *числовими характеристиками* випадкової величини.

Досить часто в практичних розрахунках використовують коефіцієнт варіації CV для обчислення величини ризику:

$$CV=\frac{\sigma_x}{M(X)}.$$

Приклад 2.6. На фінансовому ринку присутні акції трьох видів (*A, B, C*). Норма прибутку акцій залежить від ринкової кон'юнктури (%). Проаналізувати ситуацію і обрати тип акції, що найбільш приваблива для інвестора за критерієм мінімізації ризику.

Види проектів	Оцінка можливого результату					
	Песимістична		Стримана		Оптимістична	
	Прибуток X_{1i}	Ймовірність p_{1i}	Прибуток X_{2i}	Ймовірність p_{2i}	Прибуток X_{3i}	Ймовірність p_{3i}
A	59	0,25	29	0,53	19	0,22
B	49	0,3	39	0,45	29	0,25
C	39	0,27	29	0,5	19	0,23

Розв'язання. Визначимо сподівану норму прибутку для кожного виду акцій:

$$M(A)=59\cdot 0,25+29\cdot 0,53+19\cdot 0,22=34,3\ (\%);$$

$$M(B)=49\cdot 0,3+39\cdot 0,45+29\cdot 0,25=39,5\ (\%);$$

$$M(C)=39\cdot 0,27+29\cdot 0,5+19\cdot 0,23=29,4\ (\%).$$

Визначимо дисперсію норм прибутку кожного виду акцій за формулою (2.15):

$$D(A) = 59^2 \cdot 0{,}25 + 29^2 \cdot 0{,}53 + 19^2 \cdot 0{,}22 - (34{,}3)^2 = 218{,}91 \quad (\%)^2;$$

$$D(B) = 49^2 \cdot 0{,}3 + 39^2 \cdot 0{,}45 + 29^2 \cdot 0{,}25 - (39{,}5)^2 = 54{,}75 \ (\%)^2;$$

$$D(C) = 39^2 \cdot 0{,}27 + 29^2 \cdot 0{,}5 + 19^2 \cdot 0{,}23 - (29{,}4)^2 = 49{,}84 \ (\%)^2.$$

Обчислимо середні квадратичні відхилення від сподіваних норм прибутків кожної акції:

$$\sigma_A = \sqrt{D(A)} = \sqrt{218{,}91} = 14{,}8 \quad (\%);$$

$$\sigma_B = \sqrt{D(B)} = \sqrt{54{,}75} = 7{,}4 \quad (\%);$$

$$\sigma_C = \sqrt{D(C)} = \sqrt{49{,}84} = 7{,}06 \quad (\%).$$

Обчислимо величину ризику для кожного виду акцій:

$$CV_A = \frac{14{,}8}{34{,}3} = 0{,}432; \qquad CV_B = \frac{7{,}4}{39{,}5} = 0{,}187; \qquad CV_C = \frac{7{,}06}{29{,}4} = 0{,}24.$$

Із одержаних результатів зрозуміло, що потрібно вибрати акцію виду B, оскільки в неї ризик є найменшим.

2.2 Функція розподілу та щільність випадкової величини. Неперервні випадкові величини

До цих пір ми розглядали закон розподілу випадкової величини як ряд розподілу або формулу, що дозволяє знаходити ймовірності довільних значень випадкової величини X. Однак такий опис не є універсальним, оскільки його неможливо застосувати до неперервної випадкової величини, яка має нескінченну незчисленну множину можливих значень.

Для опису закону розподілу випадкової величини можна розглядати не ймовірності подій $X = x$ для різних x, а ймовірності події $X < x$, де x – поточна змінна. Зрозуміло, що ймовірність $P(X < x)$ буде деякою функцією від змінної x.

Функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення меншого за x. Позначають функцію розподілу $F(x)$, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (2.17)$$

Функцію $F(x)$ іноді називають *інтегральною функцією розподілу* або *інтегральним законом* розподілу.

Приклад 2.7. Дано ряд розподілу випадкової величини

X:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Знайти та графічно зобразити її функцію розподілу.

Розв'язання. Будемо задавати різні значення x та знаходити для них $F(x) = P(X < x)$.

1. Якщо $x \le 1$, то зрозуміло, що $F(x) = P(X < x) = 0$.
2. Якщо $1 < x \le 4$, то $F(x) = P(X = 1) = 0{,}4$. Зрозуміло, що і $F(4) = P(X < 4) = 0{,}4$.
3. Якщо $4 < x \le 5$, то $F(x) = P(X = 1) + P(X = 4) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$.
4. Якщо $5 < x \le 7$, то $F(x) = [P(X = 1) + P(X = 4)] + P(X = 5) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$.
5. Якщо $x > 7$, то $F(x) = [P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 5)] + P(X = 7) =$

   $= 0{,}8 + 0{,}2 = 1$.

Маємо:
$$F(x) = \begin{cases} 0; & \textit{якщо} \quad x \le 1; \\ 0{,}4; & \textit{якщо} \quad 1 < x \le 4; \\ 0{,}5; & \textit{якщо} \quad 4 < x \le 5; \\ 0{,}8; & \textit{якщо} \quad 5 < x \le 7; \\ 1; & \textit{якщо} \quad x > 7. \end{cases}$$

Графічно зобразимо функцію $F(x)$ (рис. 2.3).

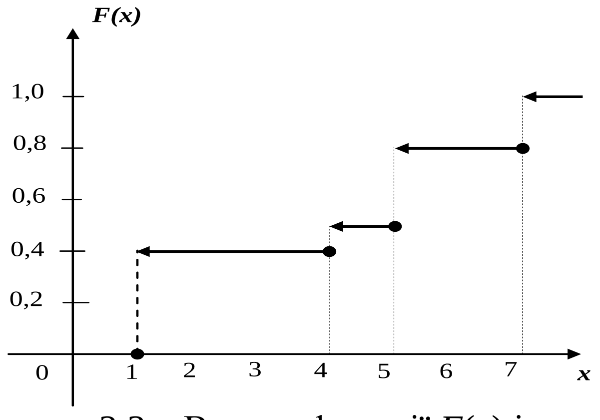


Рисунок 2.3 – Вигляд функції *F*(*x*) із прикладу 2.7

Зауваження. З попереднього прикладу зрозуміло, що функція розподілу *довільної дискретної випадкової величини* є східчастою функцією, стрибки якої відбуваються в точках, що відповідають можливим значенням випадкової величини і дорівнюють ймовірностям цих значень. Сума усіх стрибків функції розподілу дискретної випадкової величини дорівнює 1.

Розглянемо загальні ***властивості*** функції розподілу.

1. Значення функції розподілу належать відрізку [0, 1]. Дане твердження випливає з того, що функція розподілу – це ймовірність.
2. Функція розподілу є неспадною на всій числовій осі.
3. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, на плюс нескінченності дорівнює одиниці, тобто

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

4. Ймовірність потрапляння випадкової величини на проміжок $[x_1, x_2)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому інтервалі, тобто

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (2.18)$$

Враховуючи розглянуте поняття функції розподілу, *неперервною випадковою величиною* називають випадкову величину, функція розподілу якої неперервна та диференційовна в усіх точках. Можна довести, що ймовірність будь-якого окремо взятого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю. Такий результат означає, що нульову ймовірність можуть мати і можливі події.

Наслідок. Якщо X – неперервна випадкова величина, то ймовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (x_1, x_2) не залежить від того, є цей проміжок відкритим чи закритим, тобто

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2).$$

Подання неперервної випадкової величини за допомогою функції розподілу не є єдиним. Введемо поняття *щільності ймовірності* неперервної випадкової величини.

Щільністю ймовірності (або просто *щільністю*) $f(x)$ неперервної випадкової величини X називається похідна її функції розподілу

$$F'(x) = f(x). \qquad (2.19)$$

Про випадкову величину кажуть, що вона розподілена зі щільністю $f(x)$ на певному проміжку осі абсцис. Функція $f(x)$ є однією з форм закону розподілу, але існує вона лише для ***неперервних*** випадкових величин. Щільність ймовірності іноді називають *диференціальним* *законом розподілу.* Графік щільності ймовірності $f(x)$ називають *кривою розподілу.*

Приклад 2.8. Знайти щільність розподілу ймовірності випадкової величини X заданої функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 2\sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{6} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6} \end{cases}.$$

Розв'язання. За формулою (2.19) маємо

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \;\; i \;\; x>\dfrac{\pi}{6}, \\ 2\cos x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Розглянемо загальні ***властивості*** щільності ймовірності неперервної випадкової величини.

1. Щільність ймовірності – невід'ємна функція, тобто $f(x)\ge 0$.

2. Ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини у проміжок $[a,b]$ дорівнює визначеному інтегралу від її щільності ймовірності в межах від a до b, тобто

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.20)$$

З геометричної точки зору одержана ймовірність дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою розподілу, віссю *Ox* та прямими $x=a$ та $x=b$.

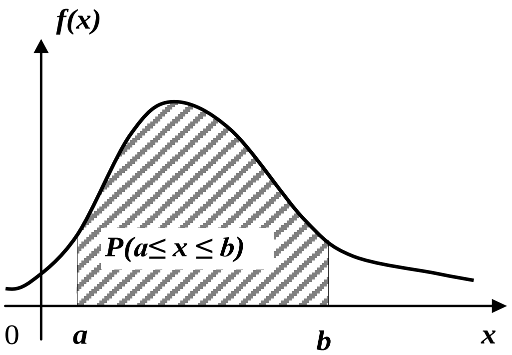


Рисунок 2.4 – Графічна інтерпретація ймовірності потрапляння неперервної випадкової величини на проміжок $[a,b]$

3. Функція розподілу неперервної випадкової величини знаходиться через щільність ймовірності за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (2.21)$$

З геометричної точки зору функція розподілу дорівнює площі фігури, обмеженої зверху кривою розподілу та розташованої лівіше точки x (рис. 2.5).

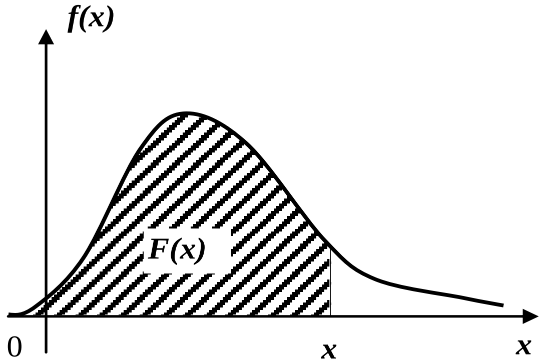


Рисунок 2.5 – Геометрична інтерпретація функції розподілу

4. Невласний інтеграл у нескінченних межах від щільності ймовірності неперервної випадкової величини дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (2.22)$$

Поняття математичного сподівання та дисперсії, розглянуті для дискретної випадкової величини, можна поширити на неперервні випадкові величини. Для одержання відповідних формул достатньо у формулах (2.3) та (2.11) для дискретної випадкової величини замінити знак підсумовування $\sum_{i=1}^{n}$ знаком інтеграла з нескінченними межами $\int_{-\infty}^{+\infty}$, можливі значення x_i – неперервною змінною x, а ймовірність p_i – елементом ймовірності $f(x)dx$.

Зауваження. Під *елементом ймовірності* розуміють ймовірність потрапляння випадкової величини X у проміжок $[x, \quad x + dx]$.

У результаті отримаємо такі формули для математичного сподівання та дисперсії неперервної випадкової величини X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad (2.23)$$

(якщо інтеграл абсолютно збіжний) та

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx, \qquad (2.24)$$

(якщо інтеграл збіжний).

Усі властивості математичного сподівання та дисперсії, розглянуті для дискретних величин, справедливі і для неперервних. Зокрема, на практиці при обчисленні дисперсії використовують формулу:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2. \qquad (2.25)$$

Приклад 2.9. Дано функцію:

$$f(x)=\begin{cases}0, & якщо\ x\le 1\\ \dfrac{a}{x^4}, & якщо\ x>1\end{cases}.$$

Знайти: а) значення сталої a, при якому дана функція буде щільністю ймовірності деякої випадкової величини X; б) вираз для функції розподілу $F(x)$; в) обчислити ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з відрізку $[5, 6]$; г) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини *X*.

Розв'язання.

а) Для того, щоб дана функція була щільністю ймовірності неперервної випадкової величини, вона повинна бути невід'ємною, тобто $\dfrac{a}{x^3}\ge 0$ $(a\ge 0)$, і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$. Таким чином,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{1}0\cdot dx+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{a}{x^4}dx=\lim_{B\to+\infty}\int\limits_{1}^{B}\frac{a}{x^4}dx=\frac{a}{3}\lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\right)\Bigg|_1^B=$$

$$=\frac{a}{3}\lim_{B\to+\infty}\left(1-\frac{1}{B^3}\right)=\frac{a}{3}=1, \text{ звідки } a=3;$$

б) за формулою (2.21) знайдемо $F(x)$.

Якщо $x \le 1$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$.

Якщо $x > 1$, то $F(x) = 0 + \int\limits_{1}^{x} f(x)dx = \int\limits_{1}^{x} \frac{3}{x^4} \cdot dx = -\left.\frac{1}{x^3}\right|_1^x = 1 - \frac{1}{x^3}$.

Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & якщо \ \ x \le 1; \\ 1 - \frac{1}{x^3}, & якщо \ \ x > 1; \end{cases}$$

в) за формулою (2.20) маємо

$$P(5 \le X \le 6) = \int\limits_{5}^{6} \frac{3}{x^4} dx = -\left.\frac{1}{x^3}\right|_5^6 = \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} = \frac{91}{27000} \approx 0{,}0034.$$

Ймовірність $P(5 \le X \le 6)$ можна знайти за формулою (2.18):

$$P(5 \le X \le 6) = F(6) - F(5) = \left(1 - \frac{1}{6^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{5^3}\right) = \frac{91}{27000} \approx 0{,}0034;$$

г) за формулою (2.23) маємо

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} x \cdot \frac{3}{x^4} dx = 3 \lim_{B \to +\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2} \lim_{B \to +\infty} -\left.\frac{1}{x^2}\right|_1^B =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{B \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{B^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Дисперсію $D(x)$ обчислимо за формулою (2.25). Для цього спочатку знайдемо

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4} dx = 3 \lim_{B \to +\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{1}{x^2} dx = 3 \lim_{B \to +\infty} \left.\left(-\frac{1}{x}\right)\right|_1^B = 3$$

Тоді $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$

2.3 Деякі розподіли випадкових величин

Закон розподілу Пуассона. Дискретна випадкова величина X має закон розподілу Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо вона набуває значень 0, 1, 2, … , m, … (нескінченна, але зчисленна множина) з ймовірностями

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda). \tag{2.26}$$

Ряд розподілу закону Пуассона такий:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	…

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона збігаються і дорівнюють параметру його закону, тобто

$$M(X) = D(X) = \lambda. \tag{2.27}$$

Оскільки ймовірність події A в кожному випробуванні мала, то закон розподілу Пуассона часто називають *законом рідкісних явищ.*

Рівномірний закон розподілу. Неперервна випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на відрізку $[a, b]$, якщо щільність її ймовірності така:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } a \le x \le b, \\ 0, & \text{якщо } x < a, \quad x > b, \end{cases} \tag{2.28}$$

а функція розподілу визначається за формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le a, \\ {(x-a)}\big/{(b-a)}, & \text{якщо } a < x \le b, \\ 1, & \text{якщо } x > b. \end{cases} \tag{2.29}$$

Крива розподілу та графік функції розподілу випадкової величини X наведено на рис. 2.6 а, б.

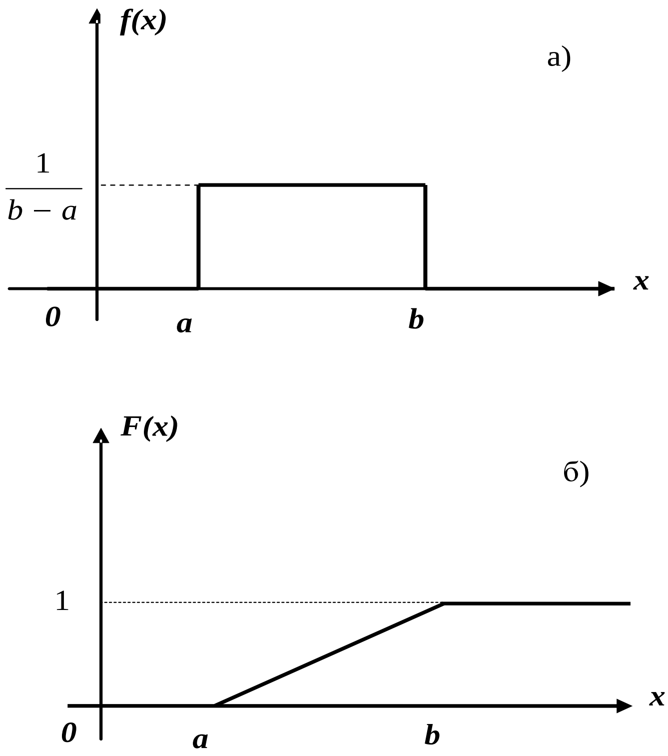


Рисунок 2.6 – Графік функції рівномірного розподілу

Якщо випадкова величина розподілена за рівномірним законом, то її математичне сподівання

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \tag{2.30}$$

а дисперсія

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{2.31}$$

Рівномірний закон розподілу використовують при аналізі помилок заокруглення при проведенні числових обрахунків, в задачах масового обслуговування, при статистичному моделюванні спостережень.

Показниковий закон розподілу. Неперервна випадкова величина X має показниковий закон розподілу з параметром λ, якщо її щільність ймовірності така:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \tag{2. 32}$$

а функція розподілу визначається за формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{якщо} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{2. 33}$$

Криву розподілу та графік функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за показниковим законом, наведено на рис. 2.7 а, б.

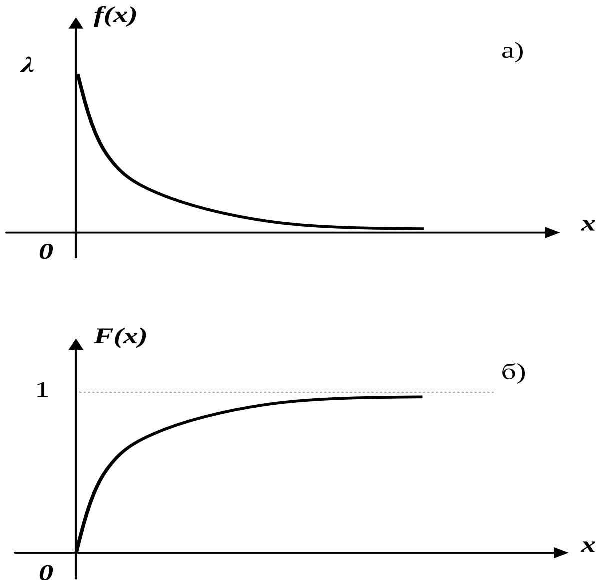


Рисунок 2.7 – Крива розподілу а) та графік функції розподілу б) випадкової величини *X*

Якщо випадкова величина розподілена за показниковим законом, то її математичне сподівання

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \tag{2.34}$$

а дисперсія

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{2.35}$$

Показниковий закон відіграє важливу роль в теорії масового обслуговування та теорії надійності. Зокрема, інтервал часу T між двома сусідніми подіями в елементарному потоці має показниковий розподіл з параметром λ – інтенсивністю потоку.

Приклад 2.10. Довести, що якщо проміжок часу T, розподілений за показниковим законом, вже тривав деякий час τ, то це ніяк не впливає на закон розподілу проміжку $T_1 = T - \tau$.

Розв'язання. Нехай функція розподілу проміжку часу T визначається за формулою (2.21), тобто $F(t)=1-e^{-\lambda t}$. Функція розподілу частини, що залишилася ($T_1=T-\tau$) за умови, що подія $T>\tau$ відбулась, є умовна ймовірність події $T_1<t$ відносно події $T>\tau$, тобто $F_1(t)=P_{T>\tau}(T_1>t)$. Оскільки умовна ймовірність довільної події B відносно події A визначається за формулою $P_A(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$, то, приймаючи $A=(T>\tau)$, $B=(T_1<t)$, отримаємо

$$F_1(t)=P_{T>\tau}(T_1>t)=\frac{P\left[(T>\tau)(T_1<t)\right]}{P(T>\tau)}.$$

Добуток подій $T>\tau$ та $T_1=(T-\tau)<t$ рівносильний події $\tau<T<t+\tau$, ймовірність якої

$$P(\tau<T<t+\tau)=F(t+\tau)-F(\tau).$$

Оскільки $P(T>\tau)=1-P(T\le\tau)=1-F(\tau)$, то $F_1(t)=P_{T>\tau}(T_1>t)$ можна подати у вигляді:

$$F_1(t)=\frac{F(t+\tau)-F(\tau)}{1-F(\tau)}.$$

Враховуючи рівність (2.21), отримуємо

$$F_1(t)=\frac{e^{-\lambda\tau}-e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}}=1-e^{-\lambda t}=F(t).$$

Зауваження. Доведена властивість широко використовується у марковських випадкових процесах.

Нормальний закон розподілу. Даний закон найчастіше застосовується на практиці, оскільки він є граничним законом, до якого наближаються інші закони.

Неперервна випадкова величина X має *нормальний закон розподілу* (*normal law of distribution*) (закон Гаусса) з параметрами a та σ^2, якщо її щільність ймовірності така:

$$f_N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.36)$$

Криву нормального закону розподілу називають *нормальною* або *гауссовою* кривою. На рис. 2.8 наведено нормальну криву $f_N(x)$ з параметрами a та σ^2, тобто $N(a,\sigma^2)$, та графік функції розподілу випадкової величини *X*, що має нормальний закон.

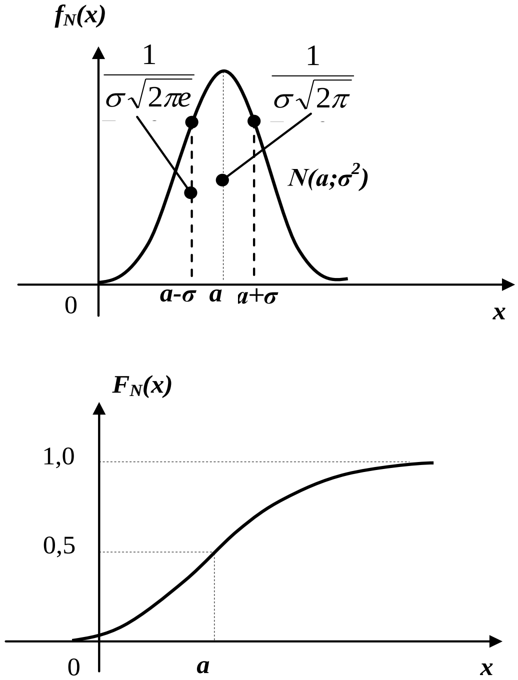


Рисунок 2.8 – Нормальна крива та графік функції розподілу випадкової величини *X*

Нормальна крива симетрична відносно прямої $x = a$. Значення $x = a$ є точкою максимуму, причому $f_{\max} = f(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Існують дві точки перегину $x = a \pm \sigma$ з ординатою $f_{\text{пер}}(a \pm \sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx \dfrac{0{,}242}{\sigma}$.

Математичне сподівання випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, дорівнює параметру a цього закону, тобто

$$M(X) = a, \tag{2.37}$$

а її дисперсія – параметру σ^2, тобто

$$D(X) = \sigma^2. \tag{2.38}$$

З’ясуємо, як буде змінюватися нормальна крива при зміні параметрів a та σ^2 (або σ). Якщо $\sigma = const$, а змінюється параметр, тобто центр симетрії, то нормальна крива буде зміщуватися вздовж осі абсцис, не змінюючи форми (рис. 2.9).

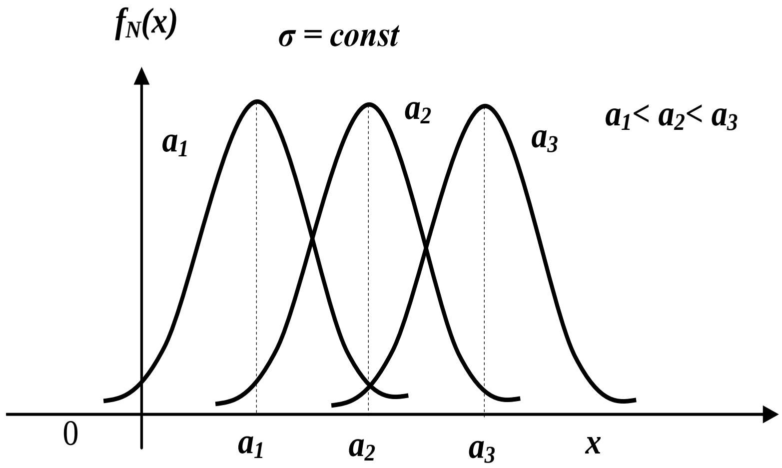


Рисунок 2.9 – Зсув нормальної кривої

Якщо $a = const$ а змінюється параметр σ^2, то змінюється ордината максимуму кривої $f_{\max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. При збільшенні σ ордината максимуму кривої зменшується, але оскільки площа під довільною кривою розподілу повинна залишатися рівною одиниці, то крива стає більш пласкою, розтягуючись вздовж осі абсцис; при зменшенні σ нормальна крива витягається вверх, одночасно стискуючись з боків. На рис. 2.10 зображено нормальні криві з параметрами $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

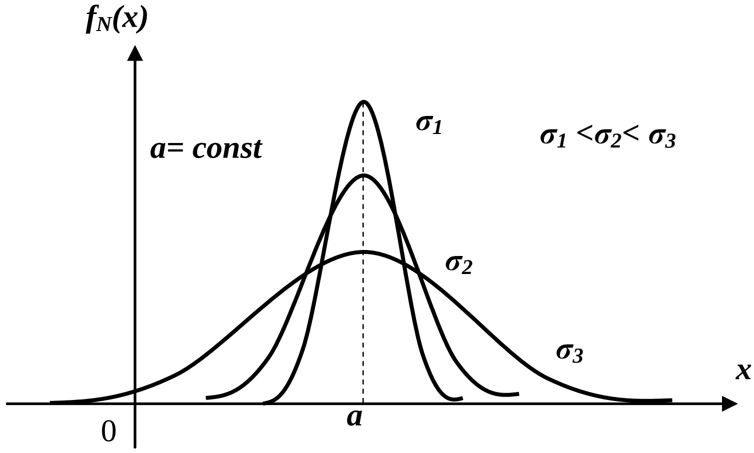


Рисунок 2.10 – Нормальні криві з параметрами $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

Таким чином, параметр a характеризує положення центра, а параметр σ^2 – форму нормальної кривої.

Нормальний закон з параметрами $a = 0$ та $\sigma^2 = 1$, тобто $N(0,1)$, називають стандартним або нормованим, а відповідну нормальну криву – стандартною або нормованою.

Функцію розподілу випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, можна виразити за допомогою функції Лапласа $\Phi(x)$ так:

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (2.39)$$

Розглянемо основні ***властивості*** нормально розподіленої випадкової величини.

1. Ймовірність потрапляння випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, в інтервал $[x_1, x_2]$ дорівнює

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{2}[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)], \qquad (2.40)$$

де

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}, \qquad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

2. Ймовірність того, що відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, від математичного сподівання не перевищить величину $\Delta > 0$ (за абсолютною величиною) дорівнює

$$P(|X - a| \le \Delta) = \Phi(t), \qquad (2.41)$$

де

$$t = \frac{\Delta}{\sigma}. \qquad (2.42)$$

На рис. 2.11 а) та 2.11 б) наведено геометричну інтерпретацію властивостей нормального закону.

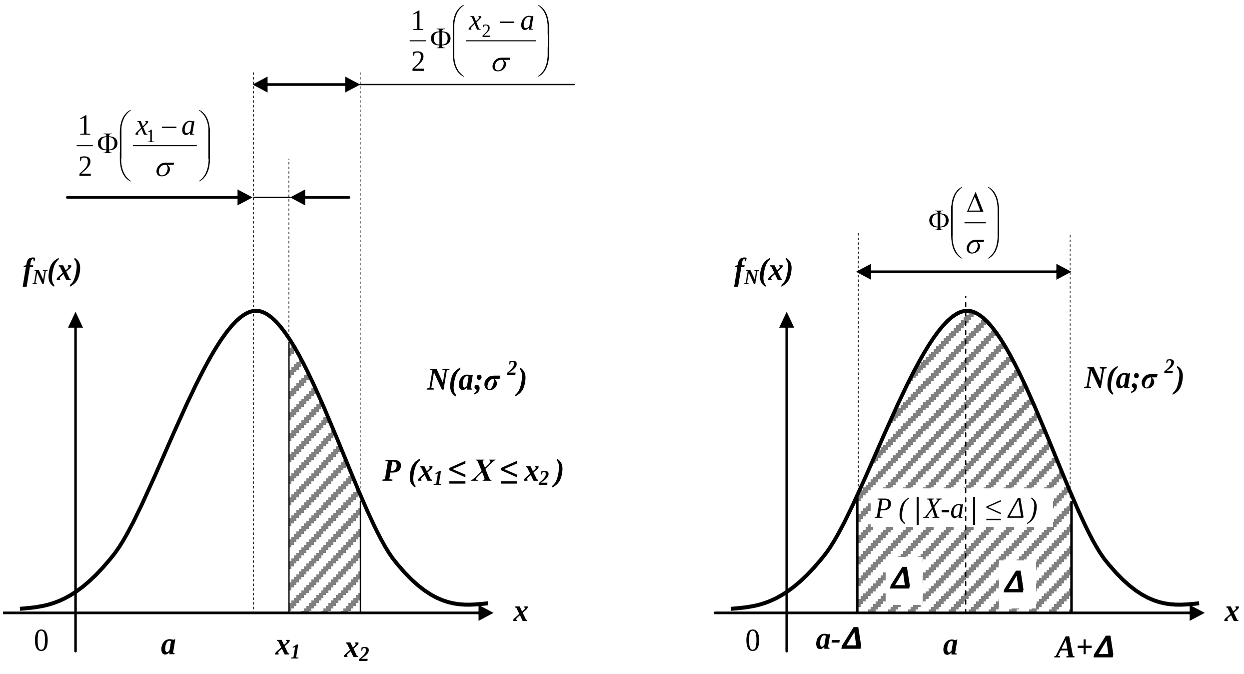
Обчислимо за формулою (2.41) ймовірності $P(|X - a| \le \Delta)$ при різних значеннях Δ. Маємо при

$\Delta = \sigma$ $P(|X - a| \le \sigma) = \Phi(1) = 0{,}6827$; (додаток Ж)

$\Delta = 2\sigma$ $P(|X - a| \le 2\sigma) = \Phi(2) = 0{,}9545$;

$\Delta = 3\sigma$ $P(|X - a| \le 3\sigma) = \Phi(3) = 0{,}9973$

(рис. 2.12).



а) б)

Рисунок 2.11– Геометрична інтерпретація властивостей нормального закону

Обчислимо за формулою (2.41) ймовірності $P(|X-a|\le\Delta)$ при різних значеннях Δ. Маємо при

$$\Delta=\sigma\ P(|X-a|\le\sigma)=\Phi(1)=0{,}6827;\text{ (див. табл. G додатків)}$$

$$\Delta=2\sigma \qquad P(|X-a|\le 2\sigma)=\Phi(2)=0{,}9545;$$

$$\Delta=3\sigma \qquad P(|X-a|\le 3\sigma)=\Phi(3)=0{,}9973$$

(рис. 2.12).

Звідси випливає ***“правило трьох сигм”***: *якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу* з *параметрами a та σ^2, то практично достовірно, що її значення належать інтервалу* $(a-3\sigma,\ \ a+3\sigma)$. Порушення "правила трьох сигм", тобто відхилення випадкової величини більше ніж на 3σ є подією практично неможливою, оскільки її ймовірність досить мала:

$$P(|X-a|>3\sigma)=1-P(|X-a|\le 3\sigma)=1-0{,}9973=0{,}0027.$$

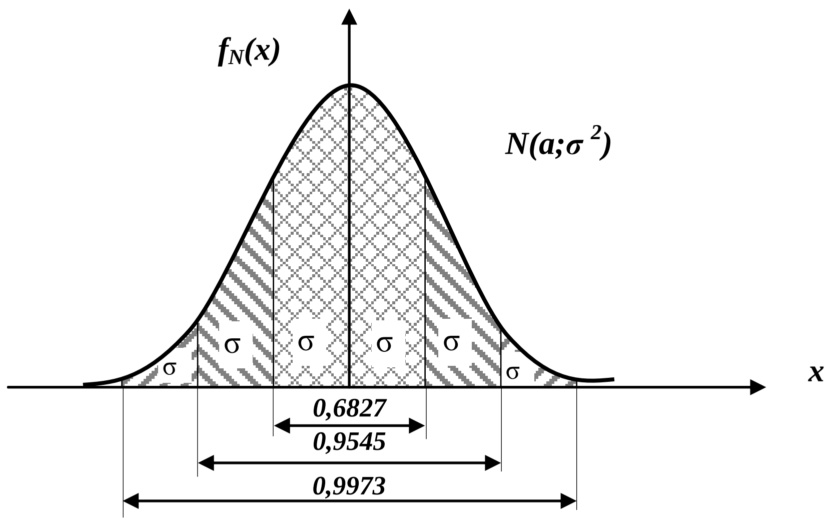


Рисунок 2.12 – Ймовірності при різних значеннях Δ

Приклад 2.11. Припускаючи, що зріст чоловіків певної вікової групи є нормально розподілена випадкова величина з параметрами $a = 173$ та $\sigma^2 = 36$, потрібно:

1) визначити щільність ймовірності та функцію розподілу;

2) знайти частки костюмів 4-го зросту (176-182 см) та 3-го зросту (170-176 см), котрі потрібно передбачити в загальному обсязі виробництва для даної вікової групи;

3) сформулювати "правило трьох сигм" для випадкової величини *X*.

Розв'язання.

1) за формулами (2.36) та (2.39) запишемо:

$$f_N(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}};$$

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-173}{6}\right).$$

2) частку костюмів 4-го зросту в загальному обсязі виробництва обчислимо за формулою (2.40) так:

$$P(176 \le X \le 182) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{182-173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{176-173}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5)] =$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}8664 - 0{,}3829) = 0{,}2418;$$

аналогічно обчислюємо частку костюмів 3-го зросту:

$$P(170 \le X \le 176) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{176-173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-173}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(0{,}5) + \Phi(0{,}5)] = \Phi(0{,}5) = 0{,}3829;$$

3) практично достовірно, що зріст чоловіків даної вікової групи знаходиться в межах від $a - 3\sigma = 173 - 18 = 155$ до $a + 3\sigma = 173 + 18 = 191$ (см), тобто $155 \le X \le 191$ (см).

Розподіл χ^2. Розподілом χ^2 (*хі-квадрат*) з k *ступенями вільності* (додаток К) називають розподіл суми квадратів k незалежних випадкових величин, розподілених за стандартним нормальним законом, тобто

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2, \qquad (2.43)$$

де Z_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ має нормальний розподіл $N(0,1)$.

Щільність ймовірності χ^2-розподілу така:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{якщо} \quad x \ge 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt$ – гамма-функція Ейлера (для цілих додатних значень $\Gamma(y) = (y-1)!$).

Криві χ^2-розподілу для різних значень ступенів вільності наведено на рис. 2.13.

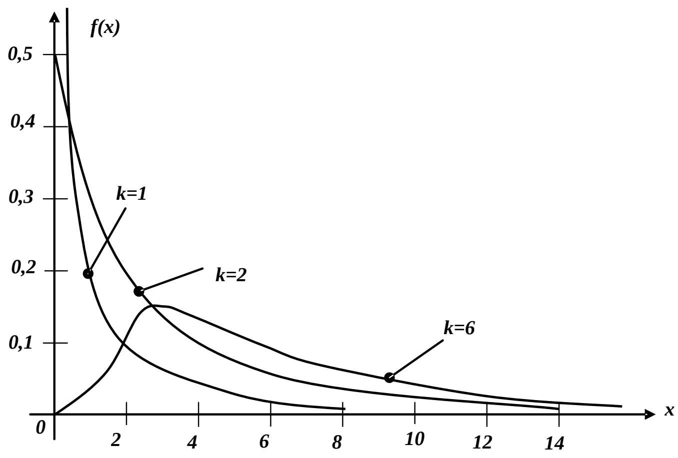


Рисунок 2.13 – Криві χ^2-розподілу

Очевидно, що χ^2-розподіл асиметричний з правосторонньою (додатною) асиметрією. При $k > 30$ розподіл випадкової величини $Z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2k-1}$ близький до стандартного нормального закону $N(0,1)$.

Розподіл Стьюдента. *Розподілом Стьюдента (distribution of Students),* або t*-розподілом,* (додаток Д) називають розподіл випадкової величини

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2}}, \qquad (2.44)$$

де Z має нормальний розподіл $N(0,1)$,

χ^2 – незалежна від Z випадкова величина, що має χ^2-розподіл з k ступенями вільності.

Щільність ймовірності Стьюдента така:

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

де $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1}$ – гамма-функція Ейлера.

На рис. 2.14 наведено криву розподілу Стьюдента. Як і стандартна нормальна крива, крива t-розподілу симетрична відносно осі ординат, але у порівнянні з нормальною більш пласка.

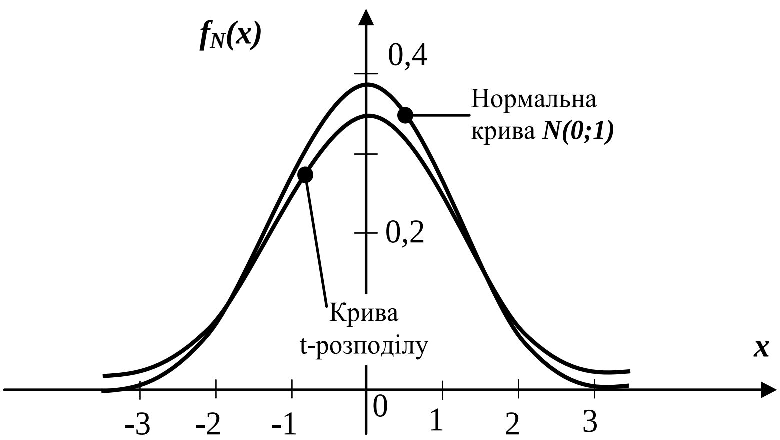


Рисунок 2.14 – Крива розподілу Стьюдента

Практично при $k > 30$ розподіл випадкової величини близький до стандартного нормального закону $N(0,1)$.

Математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл Стьюдента, дорівнює нулю (оскільки крива розподілу симетрична), а дисперсія – $D(t) = \dfrac{k}{k-2}$.

Зауваження! Значення функції Стьюдента є табульованими $t_p = t_{\alpha,\nu}$ (додаток Е), причому $\alpha = 1 - p$, ймовірність p задається в залежності від задачі, $\nu = n - 2$, де n – число дослідів.

Розподіл Фішера-Снедекора. *Розподілом Фішера-Снедекора, або* F *-розподілом* (додаток Г) називають розподіл випадкової величини

$$F = \frac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)}, \tag{2.45}$$

де $\chi^2(k_1)$ та $\chi^2(k_2)$ – випадкові величини, що мають χ^2-розподіл відповідно з k_1 та k_2 ступенями вільності.

На рис. 2.15 зображено криві F-розподілу при деяких значеннях числа ступенів вільності k_1 та k_2.

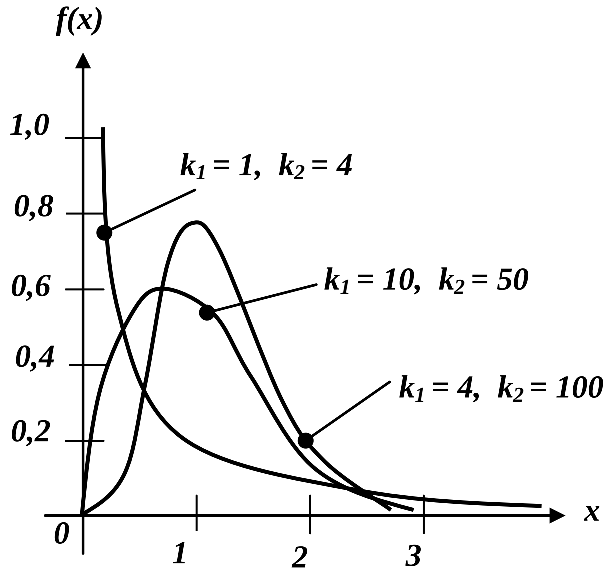


Рисунок 2.15 – Криві F-розподілу

Щільність ймовірності F-розподілу є такою:

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}x^{\frac{k_1}{2}-1}\left(k_1x+k_2\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}.$$

При $n\to\infty$ F-розподіл наближається до нормального закону.

2.4 Статистична гіпотеза та загальна схема її перевірки

Із теорією статистичного оцінювання параметрів тісно пов'язана перевірка статистичних гіпотез. Вона використовується щоразу, коли потрібно обґрунтувати висновок про переваги того чи іншого способу інвестування, вимірювання, стрільби, технологічного процесу, стосовно ефективності нового навчального методу, управління; довести значимість математичної моделі тощо.

Статистичною гіпотезою називають довільне припущення про вигляд чи параметри закону розподілу. Розрізняють *просту* та *складену* статистичні гіпотези. Проста гіпотеза повністю визначає теоретичну функцію розподілу випадкової величини. Ту гіпотезу, яку перевіряють, називають *нуль-гіпотезою* (або *основною гіпотезою*) та позначають H_0. Одночасно з нуль-гіпотезою розглядають *альтернативну*, або *конкуруючу*, гіпотезу H_1, яка є логічним запереченням гіпотези H_0.

Суть перевірки статистичної гіпотези полягає в тому, що використовується спеціально складена вибіркова характеристика (статистика) $\tilde{\theta}_n(x_1,....,x_n)$, отримана за вибіркою $X_1,...,X_n$, точний чи наближений розподіл якої відомий. Потім за цим вибірковим розподілом визначають критичне значення $\theta_{кр}$. Якщо ймовірність $P\left(\tilde{\theta}_n>\theta_{кр}\right)=\alpha$ мала, то гіпотеза H_0 є правильною. Правило, за яким гіпотеза H_0 приймається чи відкидається, називається статистичним критерієм чи статистичним тестом.

Таким чином, множину можливих значень статистики критерію $\tilde{\theta}_n$ розбивають на дві підмножини, які не перетинаються: критичну область (область відхилення гіпотези) W та область допустимих значень (область прийняття гіпотези) $\overline{W}$. Якщо спостережуване значення статистики $\tilde{\theta}_n$ потрапляє в критичну область W, то гіпотезу H_0 відкидають. При цьому можливі чотири випадки (табл. 2.1).

Ймовірність α допустити помилку 1-го роду, тобто відкинути гіпотезу H_0, коли вона правильна, називається *рівнем значимості* чи *розміром критерію*.

Таблиця 2.1 – Прийняття рішення за різних рішень щодо гіпотези H_0

Гіпотеза H_0	*Приймається*	*Відкидається*
Правильна	Правильне рішення	Помилка 1-го роду
Неправильна	Помилка 2-го роду	Правильне рішення

Ймовірність допустити помилку 2-го роду, тобто прийняти хибну гіпотезу, зазвичай позначають β.

Ймовірність (1 - β) не допустити помилку 2-го роду, тобто відхилити гіпотезу H_0, коли вона хибна, називають *потужністю критерію*.

Користуючись термінологією статистичного контролю якості продукції можна сказати, що ймовірність α – "ризик постачальника", пов'язаний із забракуванням усієї партії за результатами вибіркового контролю, а ймовірність β – "ризик споживача", пов'язаний з прийняттям за аналізом партії, що не задовольняє стандарт.

Застосовуючи юридичну термінологію, α – ймовірність винесення судом обвинувального вироку, коли насправді підсудний є невинним, β – ймовірність винесення судом виправдувального вироку у випадку реального скоєння злочину підсудним. У прикладних дослідженнях помилка 1-го роду означає ймовірність того, що сигнал не буде прийнято спостерігачем, а помилка 2-го роду – ймовірність того, що спостерігач прийме хибний сигнал.

Слід відмітити, що при практичних обрахунках зазвичай обирають таку критичну область, при якій потужність критерію є максимальною, а ймовірність потрапляння в неї статистики критерію $\tilde{\theta}_n$ буде мінімальною та рівною α, у випадку справедливості нуль-гіпотези, та максимальною в іншому випадку.

Іншими словами, критична область повинна бути такою, щоб при заданому рівні значимості α потужність критерію (1 - β) була максимальною.

Серед усіх критеріїв заданого рівня значимості α, що перевіряють гіпотезу H_0, критерій відношення правдоподібності є найбільш потужним (за Нейманом-Пірсоном). Основу методу максимальної правдоподібності складає функція правдоподібності, яка є щільністю ймовірності одночасної появи результатів вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \varphi(x_1, \theta) \cdot \varphi(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_i, \theta) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n, \theta),$$

або

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i, \theta). \tag{2.46}$$

Згідно з цим методом за оцінку параметра θ приймається таке значення $\tilde{\theta}_n$, яке максимізує функцію L.

Приклад 2.12. Випадкова величина має нормальний закон розподілу $N(a;\sigma^2)$, де $a = M(X)$ невідоме, а дисперсія – відома. Побудувати найбільш потужний критерій перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ на противагу альтернативній гіпотезі H_1: $a = a_1 > a_0$. Знайти: а) потужність критерію; б) мінімальний обсяг вибірки, що забезпечить задані рівень значимості α та потужність критерію (1 - β).

Розв'язання. Якщо правильною є гіпотеза H_0, тобто $X \approx N(a_0;\sigma^2)$, то функція правдоподібності, згідно з формулою (2.46), така:

$$L_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Аналогічно, якщо правильною є гіпотеза H_1, тобто $X \approx N(a_1;\sigma^2)$, то

$$L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найбільш потужний критерій базується на відношенні правдоподібності $\frac{L_1}{L_0}$. Знайдемо його натуральний логарифм:

$$\ln\frac{L_1}{L_0} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[2x_i(a_1 - a_0) - \left(a_1^2 - a_0^2\right)\right] = \frac{1}{2\sigma^2}(a_1 - a_0)\sum_{i=1}^{n}(2x_i - a_1 - a_0) =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}(a_1 - a_0)\left(2\bar{x} - a_1 - a_0\right)n.$$

Для побудови критерію знайдемо таку сталу C (або $\ln C = c$), що

$$P\left(\frac{L_1}{L_0} > C\right) = P\left(\ln\frac{L_1}{L_0} > c\right) = \alpha .$$

Одержаний вираз для рівня значимості α можна замінити рівносильним (враховуючи монотонність функції $\ln\frac{L_1}{L_0}$ відносно $\overline{x}$):

$$P(\overline{x} > c') = \alpha .$$

Для визначення c' потрібно врахувати, що якщо випадкова величина розподілена нормально, тобто $X \approx N(a_0;\sigma^2)$, то її середня $\overline{x}$ також розподілена нормально з параметрами a_0 та $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$, тобто $\overline{x} \approx N\left(a_0;\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$.

Отримуємо:

$$P(\overline{x} > c') = 1 - P(\overline{x} \le c') = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{c'-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{c'-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \alpha ,$$

звідки $\Phi\left(\frac{c'-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1-2\alpha$, або за таблицями $\frac{c'-a_0}{\sigma}\sqrt{n} = t_{1-2\alpha}$. Таким чином, межа критичної області W визначається значенням $c' = \frac{\sigma \cdot t_{1-2\alpha}}{\sqrt{n}} + a_0$.

Отже, найбільш потужним критерієм перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ на противагу альтернативній гіпотезі H_1: $a = a_1 > a_0$ є такий*: гіпотеза* H_0 *відхиляється, якщо* $\overline{x} > \frac{\sigma \cdot t_{1-2\alpha}}{\sqrt{n}} + a_0$; H_0 *приймається, якщо* $\overline{x} \le \frac{\sigma \cdot t_{1-2\alpha}}{\sqrt{n}} + a_0$.

1. Для пошуку потужності критерію визначимо спочатку ймовірність β допустити помилку 2-го роду – прийняти гіпотезу, коли вона хибна, тобто має місце альтернативна гіпотеза $X \approx N(a_1;\sigma^2)$ або $\overline{x} \approx N\left(a_1;\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$:

$$\beta = P\left(\overline{x} \le \frac{\sigma \cdot t_{1-2\alpha}}{\sqrt{n}} + a_0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{a_0 + {t_{1-2\alpha}\sigma}/{\sqrt{n}} - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\left(a_1-a_0\sqrt{n}\right)}{\sigma}-t_{1-2\alpha}\right).$$

Таким чином, потужність критерію така:

$$1-\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\left(a_1-a_0\sqrt{n}\right)}{\sigma}-t_{1-2\alpha}\right).$$

Проаналізувавши одержане значення переконуємось, що зменшення рівня значимості α при сталому обсязі вибірки призводить до збільшення ймовірності β та, відповідно, до зменшення потужності критерію $(1-\beta)$. І тільки при збільшенні обсягу вибірки можна, зменшуючи ймовірність α, одночасно зменшити ймовірність β (збільшувати потужність критерію $(1-\beta)$).

2. При заданих ймовірностях помилок 1-го та 2-го роду α та β з виразу для β не складно знайти відповідний обсяг вибірки за формулою:

$$n=\frac{\left(t_{1-2\alpha}+t_{1-2\beta}\right)^2\sigma^2}{\left(a_1-a_0\right)^2}.$$

Принцип тестування статистичної гіпотези не дає логічного доведення її істинності чи хибності. Більш того, прийняття гіпотези H_0 не потрібно розглядати як назавжди встановлений, абсолютно достовірний факт.

Розглянемо деякі методи тестування статистичних гіпотез, зауваживши попередньо, що в статистиці прийнято середнє квадратичне відхилення позначати s_x, s_y і т.п., а дисперсію – s_x^2, s_y^2 і т.п.

1. Перевірка гіпотез про рівність середніх. У промисловості задача порівняння середніх часто виникає при вибірковому контролі якості продукції, виготовленої на різних установках чи при різних технологічних режимах, у фінансовому аналізі – при порівнянні рівня дохідності різних активів і т.п.

Сформулюємо задачу. Нехай є дві сукупності, які характеризуються генеральними середніми $\overline{x_0}$ та $\overline{y_0}$ та відомими дисперсіями s_x^2 та s_y^2. Необхідно перевірити гіпотезу H_0 про рівність генеральних середніх. Для перевірки цієї гіпотези із сукупностей взято дві незалежні вибірки обсягів n_1 та n_2, за якими знайдені середні арифметичні $\overline{x}$ та $\overline{y}$ і вибіркові дисперсії D'_x та D'_y.

Якщо H_0 справедлива, то різниця $\overline{x}-\overline{y}$ має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $M(\overline{x}-\overline{y})=\overline{x_0}-\overline{y_0}=0$ та дисперсією $s_{\overline{x}-\overline{y}}^2=s_{\overline{x}}^2+s_{\overline{y}}^2=\dfrac{s_x^2}{n_1}+\dfrac{s_y^2}{n_2}$. Тому при виконанні гіпотези H_0 статистика

$$t=\frac{\left(\overline{x}-\overline{y}\right)-M\left(\overline{x}-\overline{y}\right)}{s_{\overline{x}-\overline{y}}}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n_1}+\dfrac{s_y^2}{n_2}}} \tag{2.47}$$

має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$.

У випадку конкуруючої гіпотези H_1: $\overline{x_0}>\overline{y_0}$ (чи H_1: $\overline{x_0}<\overline{y_0}$) критичне значення статистики знаходять з умови

$$\Phi(t_{кр})=\Phi(t_{1-2\alpha})=1-2\alpha, \tag{2.48}$$

а при конкуруючій гіпотезі H_1: $\overline{x_0}\neq\overline{y_0}$ критичне значення статистики знаходять з умови

$$\Phi(t_{кр})=\Phi(t_{1-\alpha})=1-\alpha. \tag{2.49}$$

Якщо спостережуване значення статистики t більше за критичне $t_{кр}$, визначене на рівні значимості α (за абсолютною величиною), то гіпотеза H_0 не приймається. У протилежному випадку роблять висновок, що дана гіпотеза не суперечить результатам спостережень.

Приклад 2.13. Для перевірки ефективності нової технології відібрано дві групи робітників: в першій групі чисельністю n_1=50 чол., де застосовувалась нова технологія, вибірковий середній виробіток склав $\overline{x}=85$ (виробів); в другій групі чисельністю n_2=70 чол. вибірковий середній виробіток склав $\overline{x}=78$ (виробів). Попередньо встановлено, що дисперсії виробітку в обох групах відповідно $s_x^2=100$ та $s_y^2=74$. На рівні значимості $\alpha=0{,}05$ з'ясувати вплив нової технології на середню продуктивність.

Розв'язання. У нашому випадку тестуємо гіпотезу H_0: $\overline{x_0}=\overline{y_0}$, тобто середня продуктивність однакова за новою та старою технологіями. Як конкуруючу гіпотезу розглянемо гіпотезу H_1: $\overline{x_0}>\overline{y_0}$, оскільки справедливість цієї гіпотези означає ефективність застосування нової технології. За формулою (2.47) фактичне значення статистики критерію

$$t = \frac{85-78}{\sqrt{\frac{100}{50}+\frac{74}{70}}} = 4.$$

За формулою (2.49) знайдемо критичне значення статистики $\Phi(t_{кр}) = 1-2\alpha = 1-2\cdot 0{,}05 = 0{,}9$; звідки за таблицею додатка Д $t_{кр} = 1{,}64$. Оскільки фактичне значення статистики більше за критичне, то гіпотеза H_0 не приймається, тобто на п'ятивідсотковому рівні значимості можна стверджувати, що нова технологія дозволяє підвищити середню продуктивність робітників.

2. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох сукупностей. Гіпотези про дисперсії виникають доволі часто, оскільки дисперсія характеризує такі важливі показники, як точність машин, приладів, технологічних процесів, ризик, пов'язаний з відхиленням дохідності активів та очікуваного рівня і т.д.

Сформулюємо задачу. Нехай є дві нормально розподілені сукупності, дисперсії яких дорівнюють s_1^2 та s_2^2. Необхідно перевірити нуль-гіпотезу про рівність дисперсій, тобто H_0: $s_1^2 = s_2^2 = s^2$ відносно конкуруючої гіпотези H_1: $s_1^2 > s_2^2$ чи H_1: $s_1^2 \neq s_2^2$.

Для перевірки гіпотези H_0 із цих сукупностей взято дві незалежні вибірки обсягом n_1 та n_2. Для оцінювання дисперсій використовуються "виправлені" вибіркові дисперсії $\hat{D}_1'$ та $\hat{D}_2'$. Тобто, задача перевірки гіпотези зводиться до порівняння цих дисперсій.

Вибіркові статистики $\frac{(n_1-1)\hat{D}_1'}{\sigma^2}$ та $\frac{(n_2-1)\hat{D}_2'}{\sigma^2}$ мають розподіл χ^2 відповідно з $k_1 = n_1 - 1$ та $k_2 = n_2 - 1$ ступенями вільності, а їх відношення $\frac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)}$ має розподіл Фішера-Снедекора з k_1 та k_2 ступенями вільності.

Отже, випадкова величина F визначається відношенням:

$$F = \frac{\frac{1}{n_1-1}\left[\frac{(n_1-1)\hat{D}_1'}{\sigma^2}\right]}{\frac{1}{n_2-1}\left[\frac{(n_2-1)\hat{D}_2'}{\sigma^2}\right]} = \frac{\hat{D}_1'}{\hat{D}_2'}. \tag{2.50}$$

Гіпотеза H_0 відкидається, якщо розрахована F-статистика більша табличного значення $F_{\alpha;k_1;k_2}$ (додаток Г).

3. Побудова теоретичного закону розподілу за експериментальними даними. Перевірка гіпотез про закон розподілу. Однією з найважливіших задач математичної статистики є встановлення теоретичного закону розподілу випадкової величини, яка характеризує досліджувану ознаку за емпіричним розподілом, що подається варіаційним рядом.

Припущення щодо вигляду закону розподілу може бути висунуте, виходячи з теоретичних передумов, досвіду аналогічних попередніх досліджень та на основі графічного зображення емпіричного розподілу.

На практиці найчастіше застосовують χ^2-*критерій Пірсона* для встановлення розбіжності між теоретичним та емпіричним законами розподілу. За міру розбіжності U обирають величину χ^2, рівну сумі квадратів відхилень статистичних ймовірностей ω_i від гіпотетичних ймовірностей p_i, розрахованих за припущеним розподілом і взятих з деякими вагами c_i:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i (\omega_i - p_i)^2 . \qquad (2.51)$$

Ваги c_i вводять таким чином, щоб за одних і тих самих відхилень $(\omega_i - p_i)^2$ більшу вагу мали ті відхилення, при яких ймовірність p_i мала, та меншу вагу – при яких p_i велика. Обравши $c_i = \frac{n}{p_i}$ можна показати, що при $n \to \infty$ статистика

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} (\omega_i - p_i)^2 ,$$

чи

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (2.52)$$

має розподіл χ^2 із $k = m - r - 1$ ступенями вільності,
де m – число інтервалів емпіричного розподілу (варіаційного ряду);
r – число параметрів теоретичного розподілу, обчислених за експериментальними даними.

Числа $n_i = n\omega_i$ та np_i називають відповідно *емпіричними* та *теоретичними частотами*.

Схема застосування критерію χ^2 для перевірки нуль-гіпотези така:

1. Визначають міру розбіжності емпіричних та теоретичних частот χ^2 за (2.52).

2. Для обраного рівня значимості α за таблицею χ^2-розподілу знаходять критичне значення $\chi^2_{\alpha;k}$ при числі ступенів вільності $k = m - r - 1$ (додаток К).

3. Якщо розраховане значення більше за критичне, тобто $\chi^2 > \chi^2_{\alpha;k}$, то гіпотеза H_0 не суперечить практичних даним.

Зауваження. При застосуванні критерію Пірсона необхідно, щоб в кожному інтервалі було не менше 5 спостережень.

Приклад 2.14. Для емпіричного розподілу кравчинь швейного цеху за виробітком

Виробіток у звітному році у відсотках до попереднього, x	Частота (кількість кравчинь), n_i
94,0-100,0	3
100,0-106,0	7
106,0-112,0	11
112,0-118,0	20
118,0-124,0	28
124,0-130,0	19
130,0-136,0	10
136,0-142,0	2
$\sum$	100

добрати відповідний теоретичний розподіл та на рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про згоду двох розподілів за допомогою критерію χ^2.

Розв'язання. За виглядом гістограми розподілу кравчинь за виробітком (рис. 2.16) можна припустити нормальний закон розподілу ознаки.

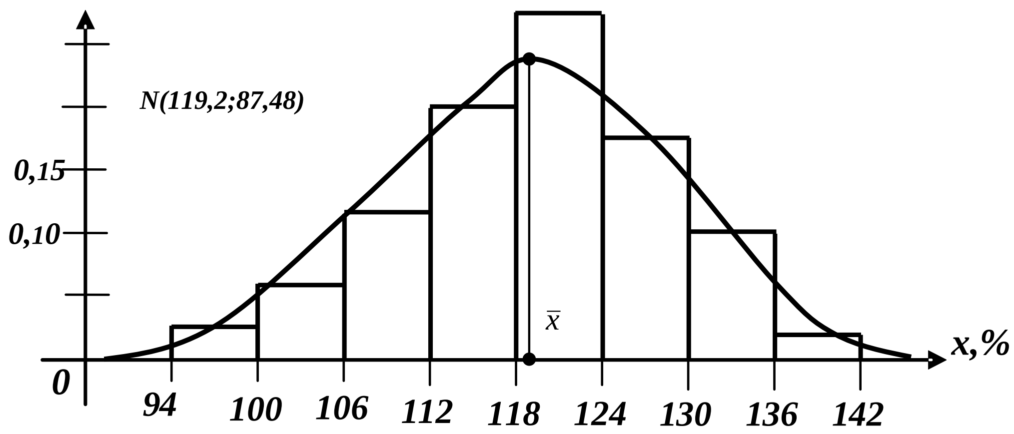


Рисунок 2.16 – Гістограма розподілу кравчинь за виробітком

Параметри нормального закону невідомі, тому замінюємо їх "найкращими" оцінками за вибіркою – вибірковою середньою $\overline{x}$ та "виправленою" вибірковою дисперсією $\hat{D}'$. Оскільки число спостережень $n = 100$ досить велике, то замість "виправленої" дисперсії $\hat{D}'$ можна взяти "звичайну" вибіркову дисперсію D.

Таким чином висуваємо гіпотезу H_0: випадкова величина X – виробіток кравчинь цеху – розподілена нормально з параметрами $a = 119{,}2$; $\sigma^2 = 87{,}48$, тобто $X \cong N(119{,}2;\quad 87{,}48)$.

Для розрахунку ймовірностей p_i потрапляння випадкової величини X в інтервал $[x_i, x_{i+1}]$ використовуємо функцію Лапласа у відповідності з властивістю нормального розподілу:

$$p_i(x_i \le X \le x_{i+1}) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_{i+1} - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right)\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_{i+1} - 119{,}2}{9{,}35}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - 119{,}2}{9{,}35}\right)\right].$$

Наприклад, $p_1(94 \le X \le 100) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{100 - 119{,}2}{9{,}35}\right) - \Phi\left(\frac{94 - 119{,}2}{9{,}35}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}[\Phi(-2{,}05) - \Phi(-2{,}69)] = \frac{1}{2}(-0{,}9596 + 0{,}9928) = 0{,}0166$ та теоретична частота, що відповідає першому інтервалу $np_1 = 100 \cdot 0{,}0166 \approx 1{,}7$ і т.п.

Для визначення статистики χ^2 зручно скласти таблицю 2.2.

Таблиця 2.2 – Проміжні розрахунки для визначення статистики χ^2

i	*Інтервал* $[x_i, x_{i+1}]$	*Емпіричні частоти* n_i	*Ймовірності* p_i	*Теоретичні частоти* np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	94-100	3 } 10	0,017	1,7 } 7,6	5,76	0,758
2	100-106	7	0,059	5,9		
3	106-112	11	0,141	14,1	9,61	0,682
4	112-118	20	0,228	22,8	7,84	0,344
5	118-124	28	0,247	24,7	10,89	0,441
6	124-130	19	0,182	18,2	0,64	0,035
7	130-136	10 } 12	0,087	8,7 } 11,6	0,16	0,014
8	136-142	2	0,029	2,9		
	$\sum$	100	0,990	99,0	–	χ^2 =2,27

Враховуючи, що в даному емпіричному розподілі частоти першого та останнього інтервалів менші 5, при використанні критерію χ^2-Пірсона доцільно об'єднати вказані інтервали із сусідніми (див. табл. 2.2).

Таким чином, спостережуване значення статистики χ^2=2,27. Оскільки нова кількість інтервалів $m = 6$, а нормальний закон розподілу визначається $r = 2$ параметрами, то число ступенів вільності $k = m - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$. Відповідне критичне значення статистики за таблицею додатка К $\chi^2_{0,05;3} = 7,82$. Оскільки $\chi^2 < \chi^2_{0,05;3}$, то гіпотеза про обраний теоретичний нормальний закон $N(119,2;\ \ 87,48)$ узгоджується з практичними даними.

Зауваження. Для графічного зображення емпіричного закону та вирівнювального теоретичного нормального розподілу необхідно використовувати однаковий для двох розподілів масштаб.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яку величину називають випадковою?
2. Яку випадкову величину називають дискретною, а яку – неперервною?
3. Що називають законом розподілу випадкової величини?
4. Дайте означення ряду розподілу. Охарактеризуйте полігон розподілу.
5. Вкажіть найбільш уживані операції над випадковими величинами.
6. Що називають математичним сподіванням дискретної випадкової величини? Сформулюйте властивості математичного сподівання, будь-які дві доведіть. Вкажіть математичний зміст математичного сподівання.
7. Що називають дисперсією та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини? Сформулюйте основні властивості дисперсії, будь-які дві доведіть. Вкажіть механічний зміст дисперсії.
8. Дайте означення функції розподілу. Вкажіть загальний вид цієї функції для дискретної випадкової величини. Сформулюйте властивості функції розподілу.
9. Доведіть, що ймовірність будь-якого окремо взятого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю.
10. Дайте означення щільності ймовірності. Що називають кривою розподілу випадкової величини? Чи існує щільність ймовірностей для дискретної випадкової величини?
11. Запишіть формули для обчислення математичного сподівання та дисперсії неперервної випадкової величини.

12. Доведіть коректність означення закону Пуассона. Чому дорівнюють математичне сподівання та дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.
13. Доведіть, що сума двох незалежних випадкових величин, розподілених за законом Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2, також розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.
14. Охарактеризуйте рівномірний закон розподілу.
15. Охарактеризуйте показниковий закон та вкажіть область його застосування.
16. Довести, що якщо проміжок часу T, розподілений за показниковим законом, вже тривав деякий час τ, то це ніяк не впливає на закон розподілу проміжку $T_1 = T - \tau$.
17. Запишіть функцію щільності ймовірності нормального закону.
18. Як буде змінюватись нормальна крива при зміні параметрів a та σ^2?
19. Охарактеризуйте властивості нормально розподіленої випадкової величини.
20. Сформулюйте правило “трьох сигм”.
21. Охарактеризуйте розподіли χ^2, Стьюдента та Фішера-Снедекора.
22. Що таке статистична гіпотеза? Яку гіпотезу називають нуль-гіпотезою, а яку – альтернативною?
23. Охарактеризуйте суть перевірки статистичної гіпотези.
24. В чому суть помилок 1-го та 2-го роду? Дайте означення рівня значимості та потужності критерію.
25. Сформулюйте критерій Неймана-Пірсона.
26. Охарактеризуйте перевірку гіпотез про рівність середніх.
27. Охарактеризуйте перевірку гіпотез про рівність дисперсій двох сукупностей.
28. Охарактеризуйте перевірку гіпотез про побудову теоретичного закону розподілу за експериментальними даними. Перевірка гіпотез про закони розподілу.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Клієнти банку, не пов’язані між собою, не повертають кредити у вказаний термін з ймовірністю 0,4. Скласти закон розподілу числа повернених кредитів із 7 виданих. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

2. Знайти закон розподілу трьох пакетів акцій, якщо ймовірність отримання прибутку для кожного з них дорівнює відповідно 0,2; 0,4; 0,7. Знайти математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини, побудувати її функцію розподілу.
3. Торговий агент має 7 телефонних номерів потенційних клієнтів та дзвонить їм до тих пір, доки не отримає замовлення. Ймовірність того, що потенційний покупець зробить замовлення, дорівнює 0,2. Скласти закон розподілу числа телефонних розмов, які здійснить агент. Знайти математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини.
4. В рекламних цілях торгова фірма вкладає в кожну двадцяту одиницю товару грошовий приз розміром 700 грн. Скласти закон розподілу випадкової величини – розміру виграшу при чотирьох зроблених покупках. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.
5. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу:

$x=x_i$	0	2	3	6	7
p_i	0,1	0,	0,	0,	0,

Знайти:

а) функцію розподілу F(x) і побудувати її графік;

б) числові характеристики випадкової величини X.

6. Дискретна випадкова величина X може приймати тільки два значення: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1, дорівнює 0,4. Знайти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)$=0,2 і дисперсія $D(X)$=0,96.
7. Щільність розподілу випадкової величини X задана виразом: f(x)=$\begin{cases} 0, & x<0 \\ Ax^3, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$. Знайти: коефіцієнт a, F(x), математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, P($\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$). Побудувати графіки f($x$) і F($x$).
8. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M(X)=3$ і дисперсією $D(X)=\frac{4}{3}$. Знайти щільність імовірності випадкової величини X, інтегральну функцію F(x) і P(2<x<3). Побудувати графіки f(x) і F(x).
9. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті

випробування випадкова величина X прийме значення, що належить інтервалу (12;14).

10. Хвилинна стрілка електричного годинника рухається стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від справжнього не більше, ніж на 8 с.

11. Є такі статистичні дані про число викликів спеціалізованих бригад швидкої допомоги в м. Вінниці протягом 300 год.:

Число викликів за годину, x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Частота n_i	1	7	7	6	3	1	1	4	1	30

Припускаючи, що число викликів швидкої розподілене за законом Пуассона при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про узгодження двох розподілів за допомогою критерію χ^2.

12. Витрати сировини на одиницю продукції склали:

За старою технологією					За новою технологією					
x_i	30	30	30	Разом	y_j	30	30	30	30	Разом
n_i	1	4	4	9	n_j	2	6	4	1	13

Припускаючи, що витрати сировини за кожною технологією мають нормальний розподіл з однаковими дисперсіями, на рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ з'ясувати, чи дає нова технологія економію в середніх витратах сировини.

13. Вступний іспит проводили на двох факультетах інституту. На першому факультеті серед $n_1 = 900$ абітурієнтів витримали іспит $m_1 = 500$; а на іншому факультеті серед $n_2 = 800$ абітурієнтів – $m_2 = 408$. На рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про відсутність суттєвих відмінностей в рівні підготовки абітурієнтів двох факультетів. Розглянути випадок при якому конкуруючою гіпотезою є $H_1: \quad p_1 > p_2$.

14. Встановлено, що середня вага пігулки ліків сильної дії (номінал) повинна дорівнювати 0,5 мг. Вибіркова перевірка $n = 100$ пігулок показала, що середня вага пігулки $\overline{x} = 0{,}53$ мг. На базі проведених досліджень можна вважати, що вага пігулки є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням
$\sigma = 0{,}11$ мг. На рівні значимості $\alpha = 0{,}05$: а) з'ясувати, чи можна

вважати одержане у вибірці відхилення від номіналу випадковим; б) знайти потужність критеріїв, використаних в а).

15. Є такі дані про число складених іспитів в сесію студентами-заочниками:

Число складених іспитів x_i	0	1	2	3	4	$\sum$
Число студентів n_i	1	1	1	3	3	41

16. На рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про те, що випадкова величина X – число складених студентами іспитів – розподілена за біноміальним законом, використовуючи критерій χ^2-Пірсона.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики. Том 2 / Айвазян С. А. – М. : Юнити-Дана, 2001. – 432 с.
2. Бабешко Л. О. Основы эконометрического моделирования : учеб. пособие / Бабешко Л. О. [2-е изд., исправленное]. − М. : КомКнига, 2006. – 432 с.
3. Берндт Э. Практика эконометрики : классика и современность / Берндт Э. – М. : Юнити-Дана, 2005. – 848 с.
4. Берндт Э. Р. Практика эконометрики: классика и современность: учебник для студентов вузов. / Берндт Э. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 863 с.
5. Валландер С. С. Заметки по эконометрике : учебное пособие. Часть 1. / Валландер С. С. − СПб : Изд. Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2002. − 46 с.
6. Яновский Л. П. Введение в эконометрику : учебное пособие / Л. П. Яновский, А. Г. Буховец. – М. : КНОРУС, 2009. – 256 с.
7. Грубер И. Эконометрия : учебное пособие для студентов економичес-ких специальностей : [в 2-ох т.]. / Грубер И. − К., 1996. − Т. 1 Введение в эконометрию. − 397 с.
8. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. / П. Е. Данко, А. Г. Попов − М. : Высшая школа, 1974. – 280 с.
9. Доугерти К. Введение в эконометрику : [пер. с англ.]. / Доугерти К. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 402 с.
10. Замков О. О. Математические методы в экономике / Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. − М. : ДИС, 1998. – 385 с.
11. Здрок В. В. Економетрія : підручник. / Здрок В. В., Лагоцький Т. Я. – К. : Знання, 2010 – 541 с.
12. Катышев П. К. Сборник задач к начальному курсу эконометрики. / Катышев П. К., Магнус Я. Р., Пересецкий А. А. – М. : Дело, 2002. – 208 с.
13. Кремер Н. Ш. Эконометрика / Кремер Н. Ш., Путко Б. А. – М. : Юнити-Дана, 2003-2004. – 311 с.
14. Кремер Н. Ш. Эконометрика / Кремер Н. Ш., Путко Б. А. – М. : Юнити, 2004. – 311 с.
15. Кремер Н. Ш. Эконометрика: учебник для вузов / Кремер Н. Ш., Путко Б. А. ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 311 с.
16. Кулинич Е. И. Эконометрия / Кулинич Е. И. – М. : Финансы и статистика, 2001.– 304 с.

17. Леонтьев В. В. Экономические эссе. Теория, исследования, факты и политика / Леонтьев В. В. ; пер. с англ. – М. : Политиздат, 2008. – 324 с.
18. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование / Лотов А. В. − М. : Наука, 1984. − 392 с.
19. Луговская Л. В. Эконометрика в вопросах и ответах : учебное пособие / Луговская Л. В. – М. : ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. – 208 с.
20. Лук'яненко І. Економетрика : підручник / Лук'яненко І., Краснікова Л. – К. : Товариство "Знання", КОО, 1998. – 494 с.
21. Магнус Я. Р. Эконометрика. Начальный курс / Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. – М. : Дело, 2007. – 504 с.
22. Магнус Я. Р. Эконометрика. Начальный курс: учебник. / Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. – М. : Дело, 2007. – 400 с.
23. Магнус Я.Р. Эконометрика. Начальный курс. / Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. [5-е изд., исправленное]. – М. : Дело, 2006. – 400 с.
24. Мардас А. Н. Эконометрика / Мардас А. Н. – СПб. : Питер, 2005. – 144 с.
25. Наконечний С. І. Економетрія / Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П. – К. : КНЕУ, 2006. – 528 с.
26. Шалабанов А. К. Практикум по эконометрике с применение MS Excel / Шалабанов А. К., Роганов Д. А. – Казань : Издательский центр Академии управления "ТИСБИ", 2008 – 53 с.
27. Приходько А. И. Практикум по эконометрике : регрессионный анализ средствами Excel / Приходько А. И. – Ростов н/Д. : Феникс, 2007. – 256 с.
28. Елисеева И. И. Практикум по эконометрике: учеб. пособие / под ред. И. И. Елисеевой – М. : Финансы и статистика, 2009. – 344 с.
29. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики : учебник для вузов : [в 2-ох т.]. – Т. 1. Теория вероятностей и прикладная статистика / Айвазян С. А., Мхитарян В. С. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с.
30. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики : учебник для вузов : [в 2-ох т.]. – Т. 2. Основы эконометрики / Айвазян С. А. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 432 с.
31. Дорохина Е. Ю. Сборник задач по эконометрике : Учебное пособие для студентов экономических вузов / Е. Ю. Дорохина, Л. Ф. Преснякова, Н. П. Тихомиров − М. : Издательство "Экзамен", 2003. − 224 с.
32. Суслов В. И. Эконометрия / Суслов В. И., Ибрагимов Н. М., Талышева Л. П., Цыплаков А. А. – Новосибирск : СО РАН, 2005. – 744 с.

33. Сытник В. Ф. Математические модели в планировании и управлении предприятиями / Сытник В. Ф., Карагодова Е. А. − Киев : Выща школа, 1985. − 214 с.
34. Терехов Л. Л. Экономико-математические методы / Терехов Л. Л. − М. : Статистика, 1972. – 250 с.
35. Толбатов Ю. А. Економетрика : підручник / Толбатов Ю. А. – Л. : Четверта хвиля, 1997. − 362 с.
36. Тутубалин В. Н. Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности) / Тутубалин В. Н.– М. : Знание, 2002. – 64 с.
37. Елисеева И. И. Эконометрика : учебник / под ред. И. И. Елисеевой – [2-е изд.]. – М. : Финансы и статистика, 2006. − 576 с.
38. Орлов А. И. Эконометрика : учеб. пособие для вузов / А. И. Орлов – М. : Издательство “Экзамен”, 2002. – 576 с.
39. Елисеева И. И. Эконометрика : учебник / под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Финансы и статистика, 2009. – 576 с.
40. Тихомиров Н. П. Эконометрика : учебник / Тихомиров Н. П., Дорохина Е. Ю. – М. : Издательство “Экзамен”, 2005. – 512 с.
41. Гладилин А. В. Эконометрика : учебное пособие / А. В. Гладилин, А. Н. Герасимов, Е. И. Громов. – М. : КНОРУС, 2008. – 232 с.
42. Шалабанов А. К. Эконометрика : учебно-методическое пособие / Шалабанов А. К., Роганов Д. А. – Казань : Издательский центр Академии управления “ТИСБИ”, 2008. – 198 с.

Д О Д А Т К И

ДОДАТОК А
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ

Матриця – це упорядкований масив елементів, який позначається:

$$\boldsymbol{A=(a_{ij})}, \text{ де } i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Перший індекс елемента (i) вказує номер рядка, в якому він розташований, а другий індекс (j) – номер стовпця. Розмірністю або порядком матриці є кількість рядків та стовпців, що її складають. У нашому випадку матриця А є матрицею розмірності ($m\times n$), тобто А містить m рядків та n стовпців.

Особливі види матриць

1. Прямокутна матриця A – матриця розмірності ($m\times n$).
2. Квадратна матриця A – матриця розмірності ($n\times n$).
3. Діагональна матриця – квадратна матриця, у якої всі її ненульові елементи містяться на головній діагоналі, що проходить з лівого верхнього кута у правий нижній.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Одинична матриця – діагональна матриця, у якої всі елементи дорівнюють одиниці. Одинична матриця позначається ***E***.
5. Нульова матриця – матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю. Нульова матриця позначається ***O***.
6. Трикутна матриця – така квадратна матриця, у якої елементи, розташовані вище або нижче головної діагоналі дорівнюють нулю.

Алгебраїчні дії над матрицями

1. *Рівність матриць*

Матриці A та B називають рівними, якщо вони мають однакову розмірність і кожний елемент матриці A дорівнює відповідному елементу матриці B.

2. *Транспонування матриць*

Транспонованою матрицею щодо матриці A називається матриця A^T, яку можна отримати, замінивши в матриці A рядки стовпцями і навпаки. Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

3. *Множення матриці на число*

Добутком матриці A на число $\lambda \neq 0$ називається матриця B, утворена з матриці A шляхом множення всіх її елементів на λ, тобто $B=(\lambda a_{ij})$.

4. *Додавання матриць*

Сумою двох матриць однакової розмірності називається матриця C такої ж розмірності, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B, тобто $C=A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

5. Віднімання матриць

Зауваження. Операцію віднімання матриць можна ввести на основі операцій 3 та 4, тобто $A+(-1)B=(a_{ij}+(-1)b_{ij}) =(a_{ij}-b_{ij})$.

Основні властивості операції додавання матриць

- $A+B=B+A$ (комутативність)
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ (асоціативність)
- $(A+B)^T=A^T+B^T$ (транспонування)
- $A+(-A)=0$ (додавання протилежної матриці)
- $A+0=A$ (додавання нульової матриці)

Приклад. Обчислити $2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}6 & 7 & 11\\ 3 & 8 & 12\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Розв'язання

$$2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}6 & 7 & 11\\ 3 & 8 & 12\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -2 & 4\\ 2 & 4 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-18 & -21 & -33\\ -9 & -24 & -36\\ -3 & -3 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-18+1 & 4-21+0 & 6-33+0 \\ 0-9+0 & -2-24+1 & 4-36+0 \\ 2-3+0 & 4-3+0 & 10-3+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & -17 & -27 \\ -9 & -25 & -32 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 15 & 17 & 27 \\ 9 & 25 & 32 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

7. Множення матриць

Множення матриць проводиться за правилом “рядок на стовпець”. Для того, щоб отримати елемент добутку матриць A та B (матриця C), розташований в i-му рядку та j-му стовпці, необхідно додати добутки відповідних елементів i-го рядка матриці А та відповідних елементів j-го стовпця матриці B:

$$(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ldots\ \ a_{in})\cdot\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

Якщо добуток матриць позначити $C=AB,$ то $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$.

N.B. Добуток двох матриць існує *тільки для випадку*, коли *кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці*. Це означає, що множення двох матриць, узагалі, не є комутативною операцією $AB\neq BA$.

Основні властивості операції множення матриць

- $(AB)C=A(BC)$ (асоціативність)
- $A(B+C)=AB+AC$ (дистрибутивність множення відносно додавання)
- $(AB)^T=B^TA^T$ (транспонування добутку)
- $AE=A$ (множення матриці на одиничну матрицю)
- $AO=O$ (множення матриці на нульову матрицю)

Приклад. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислити добутки AB та BA.

Розв’язання

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot4+(-1)\cdot1 & 1\cdot(-1)+1\cdot3+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot3+1\cdot2+(-1)\cdot5 \\ 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot1 & 2\cdot(-1)+1\cdot3+0\cdot(-2) & 2\cdot3+1\cdot2+0\cdot5 \\ 1\cdot1+(-1)\cdot4+1\cdot1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot3+1\cdot(-2) & 1\cdot3+(-1)\cdot2+1\cdot5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \\ -2 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+(-1)\cdot1+3\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot0+3\cdot1 \\ 4\cdot1+3\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot1+3\cdot1+2\cdot(-1) & 4\cdot(-1)+3\cdot0+2\cdot1 \\ 1\cdot1+(-2)\cdot2+5\cdot1 & 1\cdot1+(-2)\cdot1+5\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot0+5\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 12 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

ДОДАТОК Б
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИЗНАЧНИКІВ

Визначником матриці ***n-го порядку (n ≥ 2) (детермінантом)*** називається алгебраїчна сума $n!$ членів, кожен з яких є добутком n елементів даної матриці, взятих по одному з кожного рядка і стовпця зі знаком $(-1)^t$, де t - число інверсій в перестановці других індексів, якщо перші записані в порядку зростання. Позначається визначник матриці A: $|A|$ або $\det A$.

Зауваження. Ситуація в перестановці чисел, коли більше число стоїть перед меншим, називається *інверсією.*

Як окремий випадок розглянемо обчислення визначників другого та третього порядку. Визначник другого порядку обчислюється як різниця добутків елементів, що стоять на головній та сторонній діагоналях:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначник матриці 3-го порядку шукають за методом трикутника:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\boldsymbol{a}^{+} \qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{a}^{-}$$

$$|A|_{3\times3} = a^{+} - a^{-} = \left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}\right) -$$
$$= \left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\right).$$

Визначники третього та вищих порядків можна обчислювати шляхом розвинення за елементами ***будь-якого*** рядка або стовпця:

$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ (формула розвинення визначника за елементами j-го стовпця);

$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ (формула розвинення визначника за елементами i-го рядка),

де A_{ij} – *алгебраїчне доповнення* елемента a_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

M_{ij} – мінор елемента a_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A n-го порядку є визначник матриці *(n-1)*-го порядку, яка отримується шляхом вилучення з $|A|$ i-го рядка та j-го стовпця.

Властивості визначника n-го порядку (n ≥ 2)

1. Якщо змінити місцями два рядки (два стовпці) визначника, то визначник змінить свій знак на протилежний. Наприклад,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$
2. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють 0, то визначник дорівнює **0**.
3. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють відповідно елементам іншого рядка (стовпця) визначника, то такий визначник дорівнює **0**.
4. Загальний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника:
$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$
5. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника пропорційні елементам іншого рядка (стовпця), то визначник дорівнює **0**:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} \xrightarrow{(4)} k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} \xrightarrow{(3)} 0.$$

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число *k*.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Обчислимо даний визначник шляхом розвинення його за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= a\,(2\cdot4\cdot1+3\cdot0\cdot1+(-1)\cdot3\cdot1-1\cdot4\cdot1-3\cdot0\cdot2-(-1)\cdot3\cdot1) - b\,(1\cdot4\cdot1+3\cdot0\cdot0+2\cdot3\cdot1-0\cdot4\cdot1-3\cdot0\cdot1-2\cdot3\cdot1) + c\,(1\cdot(-1)\cdot1+2\cdot0\cdot0+2\cdot1\cdot1-0\cdot(-1)\cdot1-1\cdot0\cdot1-2\cdot2\cdot1) -$
$- d\,(1\cdot(-1)\cdot3+2\cdot4\cdot0+2\cdot1\cdot3-0\cdot(-1)\cdot3-1\cdot4\cdot1-2\cdot2\cdot3) = 4a - 4b - 3c + 13d$.

Зауваження: детермінанти третього порядку обчислені за методом трикутника.

Слідом квадратної матриці A n-го порядку (позначення $tr(A)$ від англійського слова "trace") називають суму її діагональних елементів:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Властивості сліду матриць:

1. $tr(E_n) = n$.
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.
3. $tr(A^T) = tr(A)$.
4. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

5. $tr(AB)=tr(BA)$.

Зокрема, якщо A – $(n\times 1)$ вектор-стовпець, $B=A^T$, то

$$tr\left(AA^T\right)=tr\left(A^T A\right),$$

де AA^T, $A^T A$ – квадратні матриці n-го та першого порядків.

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до матриці ***A***, якщо $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

N.B. *Обернену матрицю шукають лише для квадратної матриці!*

Теорема про існування та обчислення оберненої матриці. Якщо визначник квадратної матриці A не дорівнює 0, тобто $|\mathbf{A}|\neq 0$, то існує обернена до неї матриця A^{-1}, яка обчислюється за формулою:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & & \dots & \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Приклад. Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-6)-3(3-8)+9-8=8,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4, \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5, \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1}A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8+16 & -12+12 & -4+4 \\ 10-6-4 & 15-4-3 & 5-4-1 \\ 2+18-20 & 3+12-15 & 1+12-5 \end{pmatrix} = \text{E}.$$

ДОДАТОК В

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розглянемо систему n рівнянь з n невідомими виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

де a_{ij} − це коефіцієнти при невідомих $x_1,\ldots,x_n$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$;

$b_1,\ldots,b_n$ − вільні члени.

Виникає декілька запитань:

- чи існують розв'язки системи (1);
- як знайти розв'язки системи (1);
- чи є розв'язок даної системи єдиним?

Зважаючи на перераховані запитання відмітимо, що система лінійних рівнянь (1) називається *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок, і *несумісною* у іншому випадку.

Складемо матрицю $\boldsymbol{A}$ з коефіцієнтів при невідомих, матрицю-стовпець $\boldsymbol{B}$ (стовпець вільних членів) і матрицю-стовпець $\boldsymbol{X}$ невідомих таким чином:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Якщо система має визначник, який не є **0**, тобто $|\mathbf{A}| \neq 0$, то вона є *невиродженою* і завжди має *єдиний розв'язок*.

Розглянемо найбільш уживані методи розв'язування систем лінійних рівнянь: метод Крамера, метод Гаусса та метод звичайних жорданівських виключень.

МЕТОД КРАМЕРА

Теорема Крамера. Нехай Δ – визначник матриці $\boldsymbol{A}$ ($\Delta \neq 0$), а Δ_j − визначник матриці, яка отримується з матриці $\boldsymbol{A}$ шляхом заміни j-го стовпця стовпцем вільних членів **B**. Тоді система (1) має єдиний розв'язок

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати методом Крамера систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}.$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-6) - 3(3-8) + 9 - 8 = 8.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-6) - 3(2+4) + 6 + 4 = -16.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(2+4) - 2(3-8) - 6 - 8 = 8.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-4-6) - 3(-6-8) + 2(9-8) = 24 \cdot$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16}{8} = -2;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{8} = 3.$$

МЕТОД ГАУССА ТА ЖОРДАНА-ГАУССА

Метод Гаусса базується на використанні елементарних перетворень системи (1), до яких належать такі перетворення:

- будь-які з рівнянь можна міняти місцями;
- множення довільного рівняння на будь-яке число відмінне від нуля;
- додавання до будь-якого з рівнянь іншого, помноженого на деяке число (результат додавання записується на місці початкового рівняння).

Виконуючи такі перетворення, отримаємо нову систему, що еквівалентна початковій системі. Замість того, щоб здійснювати елементарні перетворення над системою (1), їх здійснюють над розширеною матрицею цієї системи:

$$\mathbf{(A, B)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \mathrm{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & \mathrm{b}_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Елементарні перетворення над системою (1) будуть, відповідно, перетвореннями над рядками (стовпцями) розширеної матриці цієї системи. Нехай $a_{11} \neq 0$ (цього завжди можна досягти, переставивши місцями довільні стовпці), тоді перший рядок розширеної матриці ділимо на a_{11}. На наступному етапі вилучаємо невідоме x_1 з інших $(n$-$1)$ рядків:

$$\mathbf{(A, B)^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & a^{(1)}{}_{12} & a^{(1)}{}_{13} & \cdots & \mathrm{a}^{(1)}{}_{1n} & \mathrm{b}^{(1)}{}_{1} \\ 0 & a^{(1)}{}_{22} & a^{(1)}{}_{23} & \cdots & \mathrm{a}^{(1)}{}_{2n} & \mathrm{b}^{(1)}{}_{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^{(1)}{}_{n2} & a^{(1)}{}_{n3} & \vdots & a^{(1)}{}_{nn} & \mathrm{b}^{(1)}{}_{n} \end{pmatrix}.$$

Оскільки при елементарних перетвореннях системи визначник розширеної матриці може змінити знак (при зміні місцями рядків чи стовпців матриці) або збільшитися в одне й те ж саме число разів, то визначник новоутвореної матриці не є нулем.

Якщо в результаті перетворень деякі рядки матриці будуть однаковими, то система є *виродженою*. Якщо однаковими є лише коефіцієнти при невідомих, а вільні члени – різними, то система не має розв’язків взагалі, тобто є *несумісною*.

У результаті n кроків необхідно отримати трикутну матрицю виду:

$$\mathbf{(A,B)}^{(\mathrm{n})}=\begin{pmatrix} 1 & a^{(n)}{}_{12} & a^{(n)}{}_{13} & \cdots & \mathrm{a}^{(n)}{}_{1n} & \mathrm{b}^{(n)}{}_{1} \\ 0 & 1 & a^{(n)}{}_{23} & \cdots & \mathrm{a}^{(n)}{}_{2n} & \mathrm{b}^{(n)}{}_{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \mathrm{b}^{(n)}{}_{n} \end{pmatrix}.$$

Далі знову повертаємось до системи лінійних рівнянь. Знайдемо спочатку x_n із співвідношення $x_n = b^{(n)}{}_n$. Підставляючи x_n у попереднє рівняння знайдемо x_{n-1}. Отримані значення знайдених невідомих підставляємо у попереднє рівняння і т.д. В результаті виконання послідовності вказаних операцій ми отримаємо матрицю $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, яка і є розв’язком системи (1).

Метод Жордана-Гаусса базується на методі Гаусса, але в результаті m кроків необхідно отримати діагональну матрицю:

$$\boldsymbol{(A, B)^{(n)}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b^{(m)}{}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b^{(m)}{}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b^{(m)}{}_n \end{pmatrix}.$$

Звідси, $x_n=b^{(m)}{}_n, \dots, x_1=b^{(m)}{}_1$.

Зауваження. У випадку, коли $a_{11}=0$, існує два варіанти розв’язування системи (1):

- якщо довільний елемент $a_{i1} \neq 0$, то в зведеній матриці (2) можна поміняти місцями перший та i-ий рядки і далі виконувати всі необхідні перетворення;

- якщо довільний елемент $a_{1j} \neq 0$, то в зведеній матриці (2) можна поміняти місцями перший та j-ий стовпці і далі знову виконувати всі необхідні перетворення. При цьому слід пам’ятати, що, *переставивши стовпці, ми змінили місце відповідних невідомих в системі лінійних рівнянь*.

Приклад. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса та Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}.$$

Розв’язання

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right)^{\bullet(-2)} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Зауваження:

1. Поміняємо місцями перший та третій стовпці зведеної матриці (при цьому змінюється порядок змінних);
2. Перший рядок переписуємо без змін;
3. Перший рядок домножимо на (-2) і додамо до другого рядка (результат запишемо у другий рядок нової зведеної матриці);
4. Від першого рядка віднімемо третій і результат запишемо у третій рядок нової зведеної матриці.

Тоді маємо:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_3 + 3x_2 + 2x_1 = 2 \Rightarrow x_3 = 3 \\ 4x_2 + x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 \\ -2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -2. \end{array}$$

Приклад розв’язування системи методом Жордана-Гаусса.

Скористаємося кінцевим результатом методу Гаусса:

$$+\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim_{:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \cdot 3 \sim^{-}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Зауваження:

1. Третій рядок переписуємо без змін;

2. Додамо до другого рядка третій, поділений на 2 (результат запишемо у другий рядок новоутвореної матриці);
3. До першого рядка додамо третій рядок (результат запишемо у перший рядок новоутвореної матриці);
4. Поділимо третій рядок на 2, а другий на 4;
5. Від першого рядка віднімемо другий, помножений на 3.

Звідси, $x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 3$.

МЕТОД ЗВИЧАЙНИХ ЖОРДАНІВСЬКИХ ВИКЛЮЧЕНЬ (ЗЖВ)

Перепишемо систему лінійних рівнянь (1) у вигляді:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0; \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0; \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n - b_n = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Перетворимо систему (3) на так звану жорданівську таблицю таким чином:

	x_1	x_2	…	x_s	…	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	$-b_1$
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2s}	…	a_{2n}	$-b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
y_k	a_{k1}	a_{k2}	…	a_{ks}	…	a_{kn}	$-b_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{ns}	…	a_{nn}	$-b_n$

(4)

Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь за методом ЗЖВ

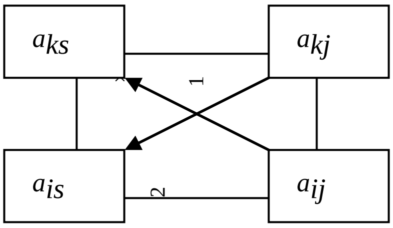
Крок 1. Переписати систему лінійних рівнянь (1) у вигляді (3) та перетворити її на жорданівську таблицю виду (4).

Крок 2. Обрати розв'язувальний елемент a_{ks} (причому k=s) та переписати його в нову жорданівську таблицю одиницею. Вибір розв'язувальних елементів a_{ks} здійснюється послідовно за головною діагоналлю ($k=\overline{1,n}$, s = $\overline{1,\ n}$).

Крок 3. В жорданівську таблицю переписати елементи s-го розв'язувального стовпця.

Крок 4. В жорданівську таблицю переписати елементи k-го розв'язувального рядка з протилежними знаками.

Крок 5. Решта елементів визначається за правилом прямокутника так:



$b_{ij} = a_{ij}\,a_{ks} - a_{kj}\,a_{is}$

Крок 6. Всі елементи новоутвореної таблиці поділити на розв'язувальний елемент a_{ks}.

Крок жорданівського виключення з розв'язувальним елементом a_{ks} є одиничною процедурою виконання всіх кроків вищевикладеного алгоритму. Кількість кроків жорданівського перетворення визначається кількістю невідомих. В результаті отримуємо таку жорданівську таблицю:

	y_1	y_2	…	y_n	1
x_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	d_1
x_2	c_{21}	c_{22}	…	C_{2n}	d_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
x_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}	d_n

Оскільки $y_i = 0, \quad i = \overline{1,n}$, **маємо** $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \ldots, x_n = d_n$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом звичайних жорданівських виключень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв’язання

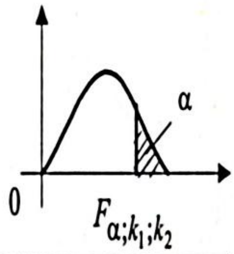
$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline y_1 & [2] & 3 & 1 & -2 \\ y_2 & 3 & 2 & 2 & -2 \\ y_3 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{array};
\qquad
\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline x_1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ y_2 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ y_3 & 4 & -6 & -2 & 12 \end{array} : 2\,;
\qquad
\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline x_1 & 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 \\ y_2 & 3/2 & [-5/2] & 1/2 & 1 \\ y_3 & 2 & -3 & -2 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & y_2 & x_3 & 1 \\ \hline x_1 & 1 & -3/2 & 2 & -1 \\ x_2 & -3/2 & 1 & -1/2 & -1 \\ y_3 & -1/2 & -3 & 4 & -12 \end{array} : \left(-\frac{5}{2}\right);
\qquad
\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & y_2 & x_3 & 1 \\ \hline x_1 & -2/5 & 3/5 & -4/5 & 2/5 \\ x_2 & 3/5 & -2/5 & 1/5 & 2/5 \\ y_3 & 1/5 & 6/5 & [-8/5] & 24/5 \end{array};$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ \hline x_1 & & & -4/5 & 80/25 \\ x_2 & & & 1/5 & -40/25 \\ x_3 & -1/5 & -6/5 & 1 & -24/5 \end{array} : \left(\frac{-8}{5}\right)
\qquad \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = 3. \end{array}$$

ДОДАТОК Г

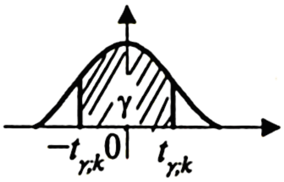
Значення $F_{\alpha,\,k_1,\,k_2}$ ***– критерію Фішера–Снедекора***



α=0,05																			
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	240	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6.59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84

ДОДАТОК Д

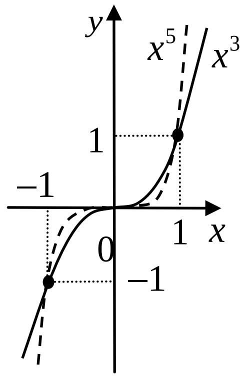
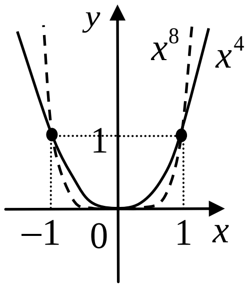
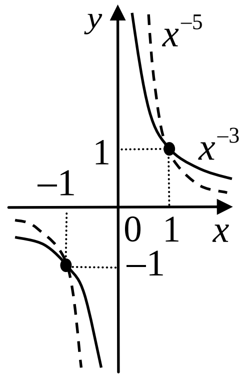
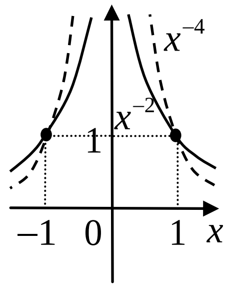
Значення t *- критерія Стьюдента*

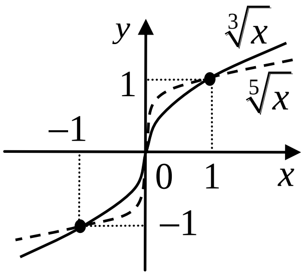
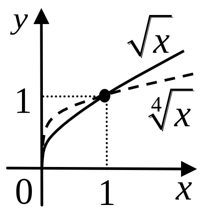
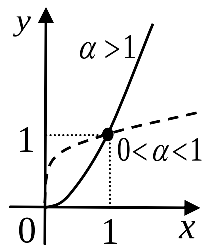
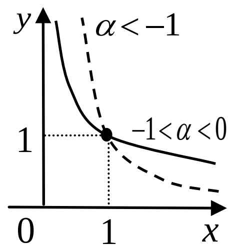


Число ступенів вільності, k	Ймовірність, γ											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,16	0,32	0,51	0,73	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	14	29	44	62	0,82	06	34	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	14	28	42	58	76	0,98	25	64	35	3,18	4,54	5,84
4	13	27	41	57	74	94	19	53	13	2,78	3,75	4,60
5	13	27	41	56	73	92	16	48	01	57	36	03
6	0,13	0,26	0,40	0,55	1,72	1,91	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	13	26	40	55	71	90	12	41	89	36	00	50
8	13	26	40	55	70	89	11	40	86	31	2,90	35
9	13	26	40	54	70	88	10	38	83	26	82	25
10	13	26	40	54	70	88	09	37	81	23	76	17
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,09	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	13	26	39	54	69	87	08	36	78	18	68	05
13	13	26	39	54	69	87	08	35	77	16	65	01
14	13	26	39	54	69	87	08	34	76	14	62	2,98
15	13	26	39	54	69	87	07	34	75	13	60	95
16	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,07	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	13	26	39	53	69	86	07	33	74	11	57	90
18	13	26	39	53	69	86	07	33	73	10	55	88
19	13	26	39	53	69	86	07	33	73	09	54	86
20	13	26	39	53	69	86	06	32	72	09	53	84
21	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,06	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	13	26	39	53	69	86	06	32	72	07	51	82
23	13	26	39	53	68	86	06	32	71	07	50	81
24	13	26	39	53	68	86	06	32	71	06	49	80
25	13	26	39	53	68	86	06	32	71	06	48	79
26	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,06	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	13	26	39	53	68	85	06	31	70	05	47	77
28	13	26	39	53	68	85	06	31	70	05	47	76
29	13	26	39	53	68	85	05	31	70	04	46	76
30	13	26	39	53	68	85	05	31	70	04	46	75
40	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,05	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
60	13	25	39	53	68	85	05	30	67	00	39	66
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,84	1,04	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	13	25	38	52	67	84	04	28	64	96	33	58

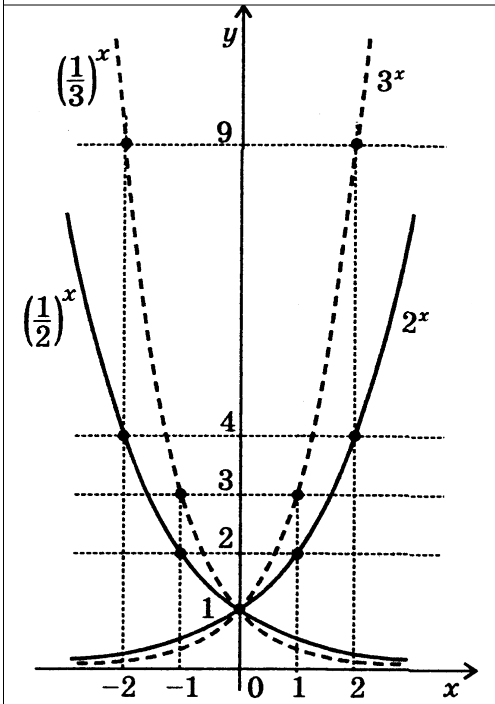
ДОДАТОК Е
ЕЛЕМЕНТАРНІ БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ

1) Степенева функція

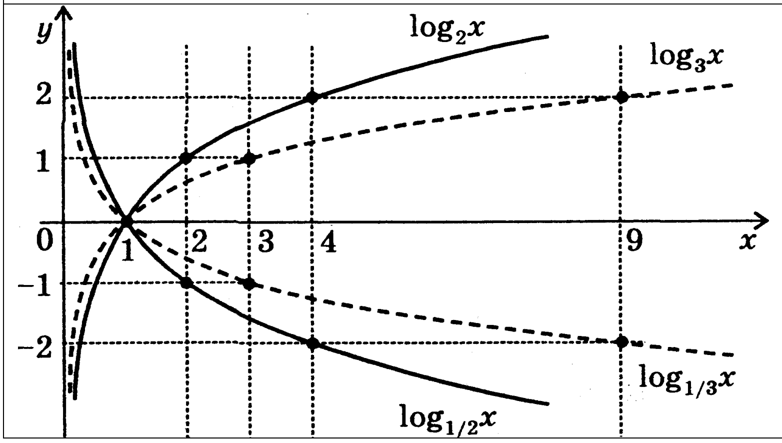
<table>
<tr><td colspan="2">$y = x^n, \quad n \in N$</td><td colspan="2">$y = x^{-n}, \quad n \in N$</td></tr>
<tr><td>n непарне</td><td>n парне</td><td>n непарне</td><td>n парне</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>$x \in R,\ y \in R.$</td><td>$x \in R,\ y \geq 0.$</td><td>$x \neq 0,\ y \neq 0.$</td><td>$x \neq 0,\ y > 0.$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N$</td><td colspan="2">$y = x^{\alpha}, \quad \alpha \in R$</td></tr>
<tr><td>n непарне</td><td>n парне</td><td>$\alpha > 0$</td><td>$\alpha < 0$</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>$x \in R,\ y \in R.$</td><td>$x \in R,\ y \geq 0.$</td><td>$x \geq 0,\ y \geq 0.$</td><td>$x > 0,\ y > 0.$</td></tr>
</table>

2) Показникова функція

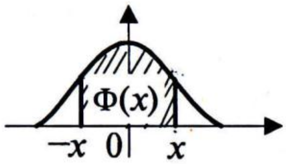
<table>
<tr><td colspan="2">$y = a^x, \quad a > 0$
(при $a = 1$ вироджується в $y = 1$).</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1. Область визначення $x \in R$;
2. Область значень $y > 0$;
3. Зростає при $a > 1$;
4. Спадає при $0 < a < 1$.</td></tr>
</table>

3) Логарифмічна функція

<table>
<tr><td colspan="2">$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1. Обл. визначення $x > 0$;
2. Обл. значень $y \in R$;
3. Зростає при $a > 1$;
4. Спадає при $0 < a < 1$.</td></tr>
</table>

ДОДАТОК Ж

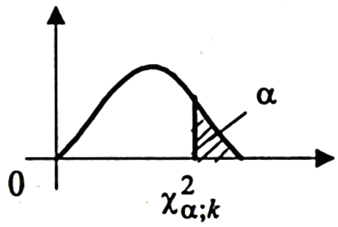
Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$



Цілі та десяткові частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7984	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9392	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9841	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9331	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9951	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,4	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,5	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,6	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

ДОДАТОК К

Значення χ^2 критерію Пірсона



Число ступенів вільно-сті, k	Ймовірність, α												
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0,15	0,45	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64
2	0,02	0,04	0,10	0,21	0,45	0,71	1,39	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21
3	0,11	0,18	0,35	0,58	1,00	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,7	13,3
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	13,4	15,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	15,0	16,8
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,6	18,5
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,1	21,1	23,7	26,9	29,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,1	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0
17	6,41	7,26	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4
18	7,02	7,91	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8
19	7,63	8,57	10,1	11,6	13,7	15,3	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2
20	8,26	9,24	10,8	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6
21	8,90	9,92	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9
22	9,54	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6
27	12,9	14,1	16,1	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6
30	14,9	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9

Навчальне видання

Азарова Анжеліка Олексіївна
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна
Роїк Олександр Митрофанович
Міронова Юлія Володимирівна

ЕКОНОМЕТРІЯ
(Частина I)

Навчальний посібник

Редактор В. О. Дружиніна
Оригінал-макет підготовлено Н. Сачанюк-Кавецькою

Підписано до друку ……. р
Формат 29.7 × $42^1/_4$. Папір офісний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. …
Наклад … прим. Зам. №

Вінницький національний технічний університет
навчально-методичний відділ ВНТУ
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, к. 2201
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
Серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.