Б

924. Площина α перетинає сторони AB і BC трикутника ABC відповідно в точках A_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка A_1C_1, якщо $AC \parallel \alpha$ і:

а) $AC = 12$ м, $BA_1 : BA = 4 : 6$;

б) $AC = 21$ м, $BA_1 : A_1A = 4 : 3$.

925. Площина α перетинає середини катетів AB і AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC у точках M і N. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$ і знайдіть відношення $P_{BMNC} : P_{MAN}$, якщо $MN = 2$ см.

926. Через точку M – середину гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC – проведено площину α, паралельну катету BC, яка перетинає катет AC у точці N. Знайдіть CM, якщо $BC : AC = 6 : 8$, $S_{\triangle AMN} = 24$ см.

927. Через точку M, яка лежить на стороні AB трикутника ABC, паралельно стороні AC проведено площину, яка перетинає сторону BC у точці N. Знайдіть MN, якщо: а) $AM = 10$ см, $BM = 5$ см, $AC = 12$ см; б) $AM : BM = 2 : 3$, $AC = 10$ см; в) $AM - BM = 2$ см, $AC = 16$ см, $MN = BM$.

928. Площина, проведена паралельно основі AD трапеції $ABCD$, перетинає її бічні сторони в точках M і N ($M \in AB$). Знайдіть MN, якщо: а) $BC = 10$ см, $AD = 12$ см, $AM = MB$; б) $AD = 17$ см, $BC = 5$ см, $AM = 4$ см, $BM = 2$ см; в) $AD = 18$ см, $BC = 6$ см, $BM : AB = 2 : 3$.

929. Через дану точку проведіть пряму, паралельну даній площині.

930. Дано площину і паралельну їй пряму. Через точку, взяту на площині, проведіть у цій самій площині пряму, паралельну даній прямій.

931. Точки B і C не лежать на прямій a. Скільки існує площин, паралельних a, які проходять через B і C? Розгляньте всі випадки.

932. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$. Доведіть, що середини всіх її ланок лежать в одній площині.

933. $PABC$ – тетраедр, кожне ребро якого 6 см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через середину ребра PB паралельно ребрам PA і PC. Знайдіть площу перерізу.

934. Побудуйте переріз тетраедра $PABC$ площиною, паралельною ребру AB, яка проходить через вершину P і середину ребра BC. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = BC = CA = a$, $PA = PB = PC = b$.

935. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, AD і паралельна прямій CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = l$.

Вправи для повторення

936. Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 12 см. Знайдіть периметр і площу ромба.

937. Точка M не лежить у площині трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків MB і MC, паралельна середній лінії трапеції.

938. Основи трапеції пропорційні числам 1 і 2. Побудуйте зображення цієї трапеції, її середньої лінії та висот.

§ 26. Паралельність площин

Дві площини називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо площини α і β паралельні, пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 8 (ознака паралельності площин). ***Якщо дві прямі, які перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.***

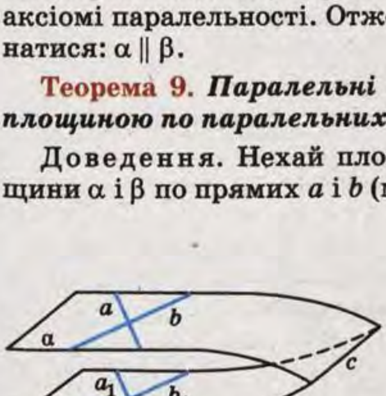
Доведення. Нехай прямі a і b, що перетинаються, лежать у площині α, а паралельні їм прямі a_1 і b_1 – у площині β (мал. 168). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.

Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по якійсь прямій c. Оскільки прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1 площини β, то $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$.

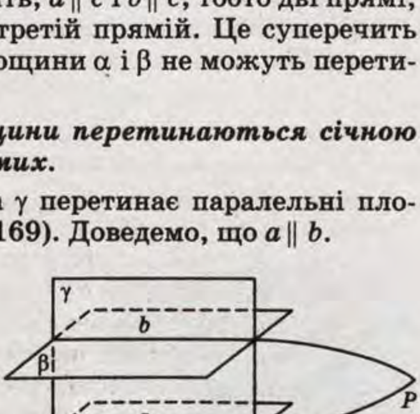
Прямі a і b не перетинають пряму c, оскільки c лежить у площині β, з якою a і b не мають спільних точок. Лежать усі ці прямі в одній площині α. Виходить, $a \parallel c$ і $b \parallel c$, тобто дві прямі, які перетинаються, паралельні третій прямій. Це суперечить аксіомі паралельності. Отже, площини α і β не можуть перетинатися: $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 9. ***Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.***

Доведення. Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b (мал. 169). Доведемо, що $a \parallel b$.



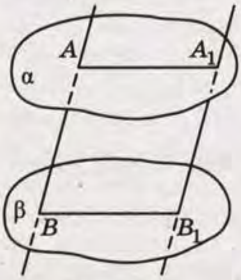
Мал. 168



Мал. 169

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді вони перетинаються в деякій точці P, оскільки лежать в одній площині γ. Точка P належить прямим a і b, отже, і площинам α і β, в яких лежать ці прямі. Прийшли до суперечності: паралельні площини α і β мають спільну точку P. Отже, прямі a і b не можуть перетинатися. А лежать вони в одній площині γ. Тому $a \parallel b$.

Теорема 10. ***Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.***



Мал. 170

Доведення. Нехай паралельні площини α і β відтинають від паралельних прямих AB і A_1B_1 відрізки AB і A_1B_1 (мал. 170). Площина, яка проходить через дані паралельні прямі, перетинає площини α і β по паралельних прямих AA_1 і BB_1. Тому чотирикутник AA_1B_1B – паралелограм, його протилежні сторони рівні: $AB = A_1B_1$. Що й треба було довести.

Моделі паралельних площин: підлога і стеля кімнати, підлога і поверхня стола, шибки подвійних вікон. Паралельні шари фанери, протилежні грані цеглини, швелера та двотаврової балки (мал. 171), пилки пилорами (мал. 172) та ін.

Відношення паралельності площин має такі самі властивості, як і відношення паралельності прямих.

Кожна площина паралельна сама собі (рефлексивність).

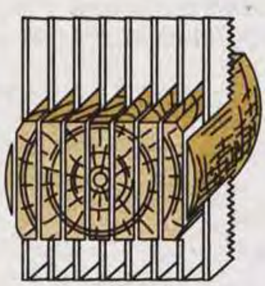
Якщо $\alpha \parallel \beta$, то $\beta \parallel \alpha$ (симетричність).

Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \gamma$ (транзитивність).

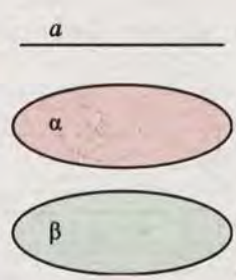
Спробуйте обґрунтувати таке твердження.

Якщо пряма a і площини α, β такі, що $a \parallel \alpha$ і $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel \beta$ (мал. 173).

Мал. 171



Мал. 172



Мал. 173

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які площини називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин паралельних площин січною площиною.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин двох паралельних площин паралельними прямими.

Виконаємо разом

1. Як через точку A поза даною площиною α провести площину, паралельну площині α?

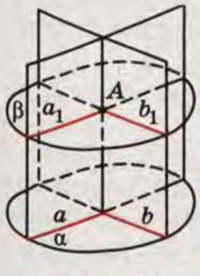
• Розв'язання. У даній площині α проведемо прямі a і b, які перетинаються (мал. 174). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1. Прямі a_1 і b_1 перетинаються, тому через них можна провести площину β. За ознакою паралельності площин $\beta \parallel \alpha$.

2. Доведіть, що через дві будь-які мимобіжні прямі можна провести пару паралельних площин.

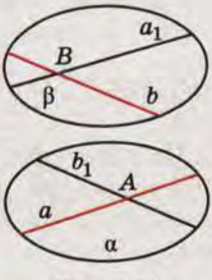
• Розв'язання. Нехай дано мимобіжні прямі a і b (мал. 175). Через довільну точку A прямої a проведемо пряму b_1, паралельну b, а через пересічні прямі a і b_1 – площину α. Так само через довільну точку B прямої b проведемо пряму a_1, паралельну a, а через прямі b і a_1 – площину β. За ознакою паралельності площини α і β паралельні.

3. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через сторону нижньої основи і точку перетину діагоналей верхньої основи.

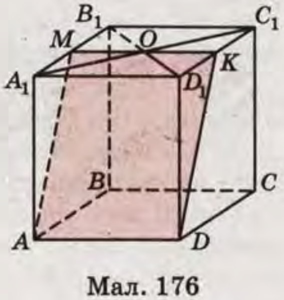
• Розв'язання. Нехай переріз проходить через ребро AD та точку O перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1. Оскільки основи паралельні, то січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Тому через O проведемо відрізок MK такий, що $MK \parallel AD$, $M \in A_1B_1$, $K \in C_1D_1$. Сполучимо точки A, M, K і D. Тоді $AMKD$ – шуканий переріз (мал. 176).



Мал. 174



Мал. 175



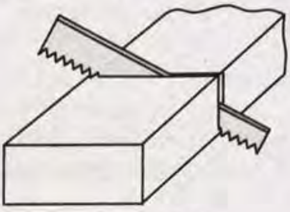
Мал. 176

Виконайте усно

939. Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі площин: а) паралельні; б) не паралельні.

940. Кожна діагональ ромба $ABCD$ паралельна площині α. Як розташовані площини α і (ABC)?

941. Чи буде площина трапеції паралельна площині α, якщо цій площині паралельні: а) основи трапеції; б) бічні сторони трапеції?



Мал. 177

942. Кожна грань дошки – прямокутник (мал. 177). Доведіть, що в якому напрямі не розпилювали б дошку, перетинаючи всі її поздовжні ребра, у перерізі завжди буде паралелограм.

943. Чи рівні відрізки відтинають дві паралельні площини від трьох паралельних прямих? Чому?

944. Чи можуть дві непаралельні площини відтинати рівні відрізки від трьох паралельних прямих?

945. Чи можуть дві паралельні площини відтинати рівні відрізки від трьох непаралельних прямих?

946. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

947. Чи можуть перетинатися площини α і β, якщо кожна з них паралельна площині γ?

А

948. Дві прямі площини α паралельні двом прямим площини β. Чи випливає з цього, що $\alpha \parallel \beta$?

949. Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

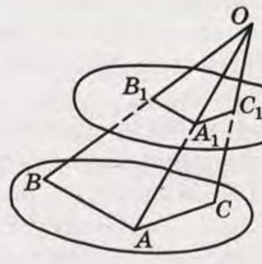
950. Відрізки OA, OB, OC не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка проходить через їх середини, паралельна площині (ABC) (мал. 178).

951. Точка O – спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, що не лежать в одній площині. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.

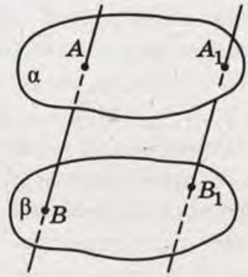
952. Пряма a паралельна площині α. Як через пряму a провести площину, паралельну α?

953. Доведіть, що коли пряма або площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу площину.

954. З вершин трикутника ABC в один бік від його площини проведено рівні і паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.



Мал. 178



Мал. 179

955. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, K, P, T – середини ребер, що виходять з вершини B. Доведіть, що площини (KPT) і (AB_1C) паралельні.

956. K, P, T – середини трьох попарно паралельних ребер куба. Доведіть, що площина (KPT) ділить навпіл і четверте ребро куба.

957. Чи паралельні прямі AB і A_1B_1, якщо паралельні площини α і β перетинають їх у точках A, B, A_1, B_1, як показано на малюнку 179?

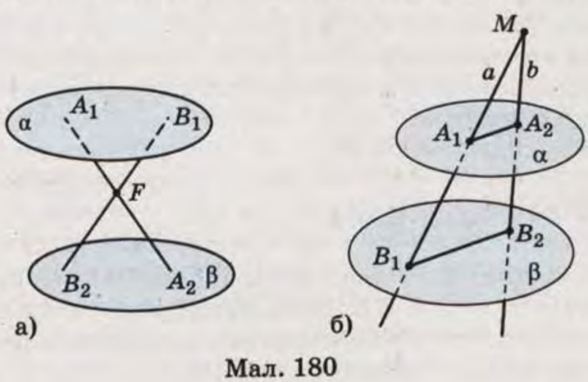
Б

958. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина простору перетинає хоча б одну з цих площин.

959. Доведіть, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.

960. Чи може перерізом куба бути правильний п'ятикутник?

961. Точка F лежить між паралельними площинами α і β (мал. 180, *а*). Прямі a і b, що проходять через точку F, перетинають площину α в точках A_1 і B_1, а площину β відповідно в точках A_2 і B_2. Знайдіть FB_1, якщо $A_1F : A_1A_2 = 1 : 3$, $B_1B_2 = 30$ дм.



Мал. 180

962. Через точку M проведено дві прямі a і b, що перетинають дві паралельні площини α і β (див. мал. 180, *б*). Першу в точках A_1 і A_2, другу в точках B_1 і B_2. Обчисліть MA_1 і MB_2, якщо $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 4$, $A_1B_1 = 3{,}5$ м, $MA_2 = 1{,}2$ м.

963. Через точку C, яка лежить поза паралельними площинами α і β, проведено прямі a і b, що перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β в точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:

а) $AC = 2$ см, $AB = 6$ см, $BB_1 = 10$ см;
б) $AC : BC = 1 : 3$, $BB_1 = 9$ см;
в) $A_1C : A_1B_1 = 2 : 3$, $BB_1 = 10$ см;
г) $AC = 2$ м, $BB_1 = 8$ м, $CB = AA_1$.

964. Точка C лежить між паралельними площинами α і β. Через точку C проведено прямі a і b, що перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β в точках B і B_1. Знайдіть AA_1, якщо:

а) $AC = 2$ см, $BC = 5$ см, $B_1B = 15$ см;
б) $AC : BC = 2 : 3$, $BB_1 = 9$ см;
в) $AC = 1$ см, $B_1B = 6$ см, $AA_1 = AB$;
г) $AC = 3$ см, $B_1B = 12$ см, $AA_1 = CB$.

965. Точка X ділить ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні $AX : XB = 2 : 3$. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка паралельна площині (AA_1C_1) і проходить через точку X. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

966. Дано три паралельні площини α, α_1, α_2, прямі a і b перетинають їх відповідно в точках A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2. Доведіть, що $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$.

967. Точка A_1 ділить ребро PA правильного тетраедра $PABC$ у відношенні $PA_1 : A_1A = 2 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка паралельна площині (ABC) і проходить через A_1. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 20$ см.

968*. $ABCDEFA$ – неплоска замкнена ламана із шести ланок. Доведіть, що коли $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ і $CD \parallel FA$, то $AB = DE$, $BC = EF$ і $CD = FA$.

969. Практичне завдання. Зробіть з картону або цупкого паперу модель до теореми про перетин двох паралельних площин третьою площиною.

Вправи для повторення

970. На площині α по різні боки від прямої MN позначено точки A і B так, що $MA = MB$ і $NA = NB$. Доведіть, що $AB \perp MN$.

971. На зображенні рівностороннього трикутника побудуйте зображення центра описаного кола.

972. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що пряма AC паралельна площині, яка проходить через середини відрізків AB, BC, BD.

Самостійна робота № 6

Варіант 1

1. Прямокутники $ABCD$ і $ABKP$ лежать у різних площинах. Доведіть, що точки C, K, P, D – вершини паралелограма і що пряма AB паралельна площині цього паралелограма.

2. Побудуйте пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Доведіть, що прямі AA_1 і BC – мимобіжні.

3. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки B_1, M, N, де M і N – середини ребер AA_1 і CC_1. Знайдіть периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

Варіант 2

1. Ромби $ABCD$ і $ABKP$ лежать у різних площинах. Доведіть, що точки P, K, C, D – вершини паралелограма. Чи перетинає площину цього паралелограма пряма AB? Чому?

2. Побудуйте правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Доведіть, що прямі SA і BD – мимобіжні.

3. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки D, M, N, де M і N – середини ребер B_1C_1 і C_1D_1. Знайдіть периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює l.

Головне в розділі 3

Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними. Дві прямі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині. Якщо одна з двох прямих, що не перетинаються, лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину, то такі прямі мимобіжні (ознака мимобіжності прямих).

Дві прямі простору, які лежать в одній площині і не перетинаються, називають *паралельними прямими*. Два промені або відрізки, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називають паралельними.

Три або більше попарно паралельних прямих простору можуть не лежати в одній площині.

Через будь-яку точку простору можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій.

Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

Нехай через кожну точку фігури K проведено пряму, паралельну деякій прямій l. Якщо всі ці промені перетинають площину α в точках, які утворюють фігуру K_1, то K_1 – паралельна проекція фігури K на площину α. Тут α – площина проекцій, а прямі, паралельні l, – проектуючі прямі.

При паралельному проектуванні відрізки, не паралельні проектуючій прямій, зображаються відрізками, паралельні відрізки – паралельними відрізками, при цьому відношення їхніх довжин зберігається.

Зображенням фігури називають фігуру, подібну проекції даної фігури на деяку площину.

Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок. Якщо пряма a паралельна якій-небудь прямій площини α, то $a \parallel \alpha$ (ознака паралельності прямої і площини).

Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо дві прямі однієї площини, які перетинаються, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні (ознака паралельності площин).

Якщо одну з паралельних площин перетинає яка-небудь пряма або площина, то вона перетинає й другу площину. Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих. Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.

Головне значення перпендикуляра – це його роль у техніці і в усьому нашому вжитку.

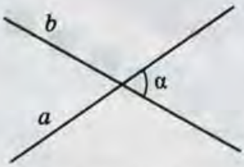
О.Д. Александров

4 Перпендикулярність прямих і площин у просторі

ТЕМИ РОЗДІЛУ:

- кут між прямими;
- перпендикулярність прямих;
- перпендикулярність прямої і площини;
- перпендикуляр і похила до площини;
- перпендикулярні площини;
- ортогональне проектування;
- відстані в просторі;
- вимірювання кутів у просторі;
- двогранний кут

§ 27. Кут між прямими. Перпендикулярність прямих



Мал. 181

Щоб увести поняття *кута між прямими* в просторі, слід розглянути три випадки: прямі перетинаються; прямі паралельні; прямі мимобіжні.

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (мал. 181). Кутова міра не найбільшого з них називається *кутом між даними прямими, що перетинаються.* Кут між прямими, що перетинаються, не перевищує 90°.

Позначають кут між прямими a і b символом $\angle(ab)$.

Зауваження. Кут між прямими – не фігура, а кутова міра, величина.

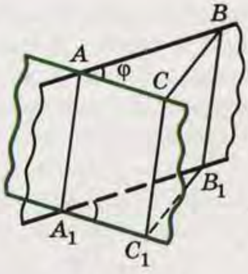
Теорема 11. ***Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.***

Доведення. Нехай прямі AB і AC, що перетинаються, паралельні відповідно прямим A_1B_1 і A_1C_1. Доведемо, що кут між прямими AB і AC дорівнює куту між прямими A_1B_1 і A_1C_1 (мал. 182).

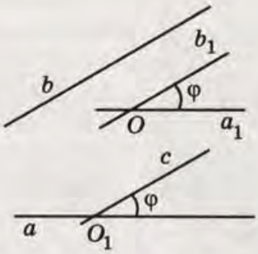
Розглянемо спочатку випадок, коли дані прямі лежать у різних площинах. Якщо $\angle BAC = \varphi$ – кут між прямими AB і AC ($\varphi \leqslant 90°$), то через довільні точки B і C його сторін проведемо прямі BB_1 і CC_1, паралельні AA_1. Нехай прямі BB_1 і A_1B_1 перетинаються в точці B_1, а прямі CC_1 і A_1C_1 – у точці C_1. Чотирикутники AA_1B_1B і AA_1C_1C – паралелограми, оскільки їх протилежні сторони попарно паралельні. Відрізки BB_1 і CC_1 паралельні та рівні, оскільки кожний з них паралельний відрізку AA_1 і дорівнює йому. Отже, чотирикутник BB_1C_1C теж паралелограм, $CB = C_1B_1$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, тому $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = \varphi$. Отже, кут між прямими A_1B_1 і A_1C_1 дорівнює куту між прямими AB і AC.

У випадку, коли прямі AB, AC, A_1B_1 і A_1C_1 лежать в одній площині, можна дослівно повторити наведені міркування. Тільки точку C треба брати поза прямою BB_1, щоб паралелограм BB_1C_1C не виродився у відрізок.

Тепер введемо поняття *кута між мимобіжними прямими.* Нехай a і b – довільні мимобіжні прямі. Через будь-яку точку O простору проведемо прямі a_1 і b_1, паралельні a і b (мал. 183). Кут φ між побудованими так прямими a_1 і b_1, які



Мал. 182



Мал. 183

перетинаються, називають кутом між даними мимобіжними прямими $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$. Цей кут не залежить від вибору точки O. Адже, якщо через яку-небудь іншу точку простору провести прямі, паралельні прямим a і b, кут між ними теж дорівнює φ (теорема 11). Точку O можна брати і на будь-якій з даних прямих. Якщо $b \parallel c$, то завжди $\angle(ab) = \angle(ac)$.

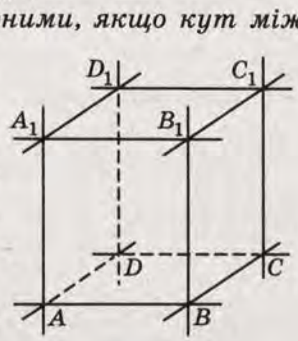
Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні відповідно даним мимобіжним прямим.

Кут між мимобіжними прямими, як і між прямими однієї площини, не може мати більше від $90°$. Кут між паралельними прямими вважають таким, що дорівнює $0°$.

Дві прямі називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює $90°$.

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, то кожна з прямих AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 перпендикулярна до прямої AA_1 (мал. 184).

Відрізки (промені) називають *перпендикулярними*, якщо вони належать перпендикулярним прямим.

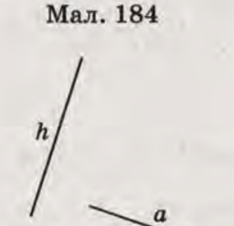


Мал. 184

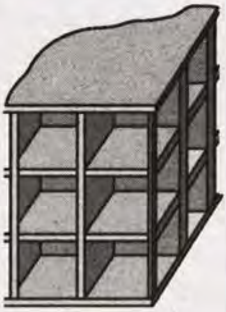
Теорема 12. ***Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.***

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні і $h \perp a$. Доведемо, що $h \perp b$ (мал. 185).

Якщо $b \parallel a$, то завжди $\angle(hb) = \angle(ha)$. У даному випадку $\angle(ha) = 90°$, тому і $\angle(hb) = 90°$, тобто $h \perp b$. Що й треба було довести.



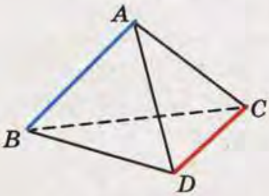
Мал. 185



Мал. 186

Коли зводять багатоповерховий будинок, то спочатку будують каркас, в якому кожна горизонтальна балка перпендикулярна до вертикальної колони (мал. 186). Під прямими кутами зварюють стальні прути в арматурі залізобетонних конструкцій, скріплюють суміжні деталі віконної рами тощо.

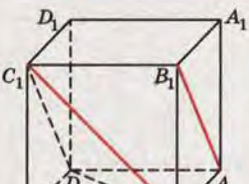
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ



Мал. 187

1. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
2. Що називають кутом між двома мимобіжними прямими?
3. Чи може кут між прямими бути тупим або розгорнутим?
4. Які дві прямі простору називають перпендикулярними?
5. Які відрізки або промені називають перпендикулярними?
6. Чому дорівнює кут між паралельними прямими? А між перпендикулярними прямими?
7. *ABCD* – правильний тетраедр (мал. 187). З'ясуйте, чому дорівнює кут між його ребрами *AB* і *CD*, *AC* і *BD*.

Виконаємо разом

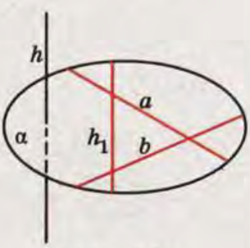


Мал. 188

1. Знайдіть кут між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба.

• Розв'язання. Знайдемо кут між діагоналями AB_1 і BC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 188). Оскільки $DC_1 \parallel AB_1$, то кут між прямими AB_1 і BC_1 дорівнює куту BC_1D. $\angle BC_1D = 60°$, оскільки $\triangle BC_1D$ рівносторонній.

Відповідь. 60°.



Мал. 189

2. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються, перетинає площину, що проходить через них.

• Розв'язання. Припустимо, що пряма h, перпендикулярна до двох прямих a і b, які перетинаються, не перетинає площину α, що проходить через них (мал. 189). Тоді $h \parallel \alpha$ або $h \subset \alpha$. В обох випадках у площині α знайдеться пряма h_1, паралельна h.

І якщо пряма h перпендикулярна до прямих a і b, то паралельна їй пряма h_1 теж перпендикулярна до цих прямих. Прийшли до суперечності, оскільки пряма, яка лежить у площині, не може бути перпендикулярною до двох прямих цієї площини, що перетинаються. Отже, пряма h перетинає площину α.

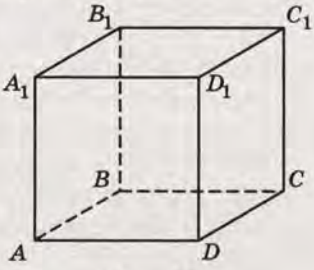
Виконайте усно

973. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану на цій прямій точку? А через точку, яка не лежить на даній прямій?

974. Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки прямих, перпендикулярних до прямої a, можна провести у площині α?

975. З планіметрії відомо: дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Чи правильне це твердження для стереометрії?

976. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 190). Знайдіть кут між прямими: а) DC і BC; б) AB і BB_1; в) AA_1 і D_1C_1; г) AA_1 і D_1C_1; ґ) A_1C_1 і AC; д) AB і B_1D_1.



Мал. 190

А

977. Зобразіть куб і позначте його вершини. Випишіть ребра, перпендикулярні до: а) одного з ребер нижньої основи; б) бічного ребра; в) діагоналі верхньої основи куба.

978. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими AB_1 і AD_1.

979. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Знайдіть кут між мимобіжними прямими AD_1 і B_1C, якщо: а) $\angle B_1CB = 50°$; б) $BC = a$, $BC_1 = 2a$.

980. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими:
а) DC_1 і AB; б) A_1C_1 і AB; в) B_1D_1 і C_1C; г) B_1D і AC.

981. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AA_1 = 2AB$, $ABCD$ – квадрат. Знайдіть кут між прямими:
а) B_1C і AD; б) AB_1 і CD_1; в) AB_1 і A_1C_1.

982. Дано чотири прямі: $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведіть, що коли $a \perp b$, то $a_1 \perp b_1$.

983. Чи можуть бути перпендикулярними прямі OB і OC, якщо $\angle AOB = \angle AOC = 60°$?

984. Прямі a і b перетинаються під кутом 30°, а прямі a і c – під кутом 40°. Чи можуть бути перпендикулярними прямі b і c?

985. Чи існує замкнена неплоска ламана з п'яти ланок, кожна ланка якої перпендикулярна до суміжної?

986. $ABCDA_1B_1C_1D_1$– куб. Доведіть, що $AB_1 \perp CD_1$.

987. A, B, C – точки на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $OA = OB = OC$.

988. Промені OA, OB, OC попарно перпендикулярні. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо: а) $OA = OB = OC = 4$ см; б) $OA = OB = OC = a$; в) $OA = OB = 3$ дм, $OC = 4$ дм.

Б

989. Дано тетраедр $ABCD$, в якому $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, M – середина AB, N – середина CD і $MN = 5$ см. Знайдіть кут між BD і AC.

990. Доведіть, що діагоналі протилежних граней куба або паралельні, або перпендикулярні. Чи виконується це твердження для прямокутного паралелепіпеда?

991. M – середина ребра AD правильного тетраедра $ABCD$. Опустіть перпендикуляри з точки M на прямі AB, BD, AK, де K – середина BD. Знайдіть довжину кожного перпендикуляра, якщо довжина ребра тетраедра дорівнює a.

992. K і P – середини ребер AB і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Опустіть перпендикуляр з вершини A_1 на прямі BD, AD_1, KP, C_1D, KD_1. Знайдіть довжину кожного перпендикуляра, якщо $AB = a$.

993. Точки K і M – середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$. Доведіть, що $KM \perp AB$ і $KM \perp CD$. Знайдіть довжину KM, якщо $AB = a$.

994. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною a. Його бічне ребро дорівнює $a\sqrt{3}$. Знайдіть кут між прямими:

а) AB_1 і D_1C; б) AB_1 і A_1C_1; в) A_1C і BD; г) AB_1 і A_1D_1.

995. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, O – точка перетину діагоналей AC і BD. Знайдіть кут між прямими:

а) OB_1 і DD_1; б) OB_1 і A_1C_1; в) B_1O і BD_1; г) B_1O і BC.

996. $ABCD$ – тетраедр, $M \in AC$, $N \in BD$, $BC = 10{,}5$ см, $AD = 24$ см, $MN = 13$ см, $AM : MC = DN : NB = 2 : 1$. Знайдіть кут між AD і BC.

997. У тетраедрі $ABCD$ довжина кожного ребра дорівнює a і $CM = MB$ ($M \in CB$). Знайдіть кут між прямими AM і BD.

998. $ABCD$ – тетраедр, у якому $DA = DB = DC = a$, $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Знайдіть кут між прямими DM і AB, якщо M – середина BC.

Вправи для повторення

999. Через точку M проведіть пряму, паралельну кожній з двох площин, що перетинаються.

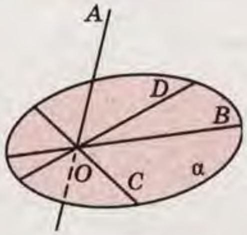
1000. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через внутрішню точку грані AC паралельно прямим CB і CD.

1001. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 16 см.

§ 28. Перпендикулярність прямої і площини

Якщо пряма не лежить у площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину.

Нехай пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD, ... лежать у площині α (мал. 191). Кути AOB, AOC, AOD, ... можуть бути різними. Заслуговує на увагу випадок, коли всі ці кути прямі. У цьому разі кажуть, що пряма AO перпендикулярна до площини α. Пишуть: $AO \perp \alpha$, або $\alpha \perp AO$.

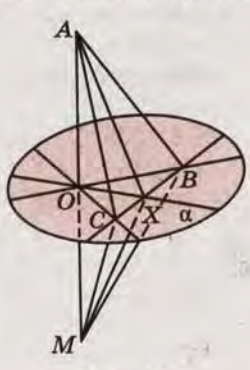


Мал. 191

Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у площині і проходить через точку перетину.

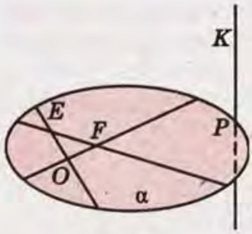
Теорема 13 (ознака перпендикулярності прямої і площини). ***Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох різних прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.***

Доведення. Нехай пряма AO, яка перетинає площину α в точці O, перпендикулярна до прямих OB і OC цієї площини (мал. 192). Доведемо, що пряма AO перпендикулярна до будь-якої прямої OX, яка лежить у площині α. Для цього проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OC і OX у точках B, C і X. На прямій OA по різні боки від O відкладемо рівні відрізки OA і OM. Сполучивши відрізками точки A і M з точками B, C, X, дістанемо кілька пар трикутників. $\triangle ABM$ і $\triangle ACM$ рівнобедрені, оскільки їх медіани BO і CO є також висотами. Отже, $AB = MB$ і $AC = MC$. За трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle MBC$, тому $\angle ABC = \angle MBC$. Рівні також трикутники ABX і MBX – за двома сторонами і кутом між ними. Отже, $AX = MX$. Оскільки трикутник AXM рівнобедрений, то його медіана XO є і висотою, тобто $AO \perp OX$. Що й треба було довести.

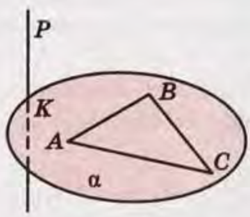


Мал. 192

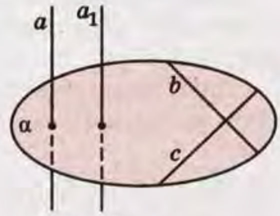
Доведену теорему можна узагальнити. На основі теореми 12 пряму AO можна замінити будь-якою прямою KP, паралель-



Мал. 193



Мал. 194



Мал. 195

ною їй, а пряму OX – будь-якою прямою EF, що лежить у площині α і паралельна OX (мал. 193). Варто також врахувати твердження задачі 2 на с. 195. Тому з доведеної теореми випливають такі наслідки.

Пряма, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, перпендикулярна до площини, що проходить через ці дві прямі.

Пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Якщо пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони (мал. 194).

Теорема 14. ***Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.***

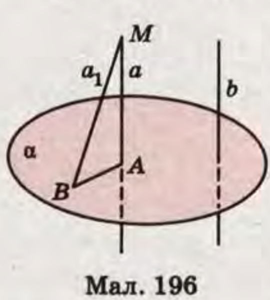
Доведення. Нехай прямі a, a_1 і площина α такі, що $a \parallel a_1$ і $a \perp \alpha$ (мал. 195). Доведемо, що $a_1 \perp \alpha$.

Оскільки $a \perp \alpha$, то в площині α знайдуться прямі b і c, які перетинаються і перпендикулярні до a. Оскільки $a \parallel a_1$, то прямі b і c перпендикулярні і до прямої a_1. Отже, пряма a_1 перпендикулярна до прямих b і c площини α, які перетинаються, тому $a_1 \perp \alpha$.

Теорема 15. ***Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.***

Доведення. Нехай прямі a, b і площина α такі, що $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$ (мал. 196). Доведемо, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді через яку-небудь точку M прямої a проведемо пряму a_1, паралельну b. Оскільки $b \perp \alpha$, то і $a_1 \perp \alpha$ – згідно з попередньою теоремою. За умовою $a \perp \alpha$. Якщо A і B – точки перетину прямих a і a_1 з площиною α, то з припущення випливає, що в ΔMAB два прямих кути. Цього не може бути. Тому прямі a і b паралельні.



Мал. 196

Відрізок називається перпендикулярним до площини, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до даної площини.

Деякі стереометричні твердження схожі на твердження планіметричні, тільки в них замість поняття *пряма* треба написати *площина*.

У планіметрії	*У стереометрії*
Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.	Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.
Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.	Через дану точку проходить тільки одна площина, перпендикулярна до даної прямої.

Подібних *аналогій* між твердженнями планіметрії і стереометрії можна навести багато. Корисно помічати їх. Науковці на такі аналогії звертають особливу увагу.

С. Банах: *«Математик – це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями».*

Й. Кеплер: *«Я найбільше ціную Аналогії, моїх найвірніших учителів. Вони знають усі секрети Природи, і ними найменше треба нехтувати в Геометрії».*

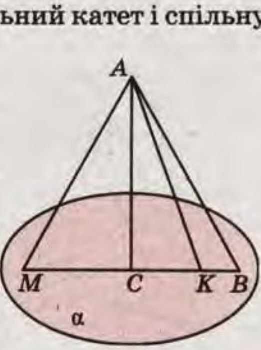
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Наведіть кілька властивостей відношення перпендикулярності прямих і площин.
4. Яке слово пропущене в реченні?
   а) Якщо один катет прямокутного трикутника перпендикулярний до площини, то другий катет ... їй.
   б) Якщо одна діагональ ромба перпендикулярна до площини, то друга ... їй.

Виконаємо разом

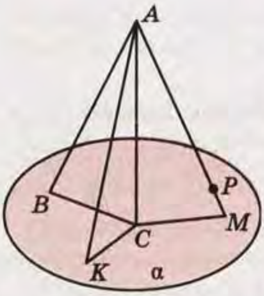
1. Три прямокутні трикутники мають спільний катет і спільну вершину прямого кута. Доведіть, що інші їхні катети лежать в одній площині.

Розв'язання. Нехай усі три трикутники зі спільним катетом AC і спільною вершиною прямого кута C лежать в одній площині (мал. 197). Тоді їхні другі катети CB, CK і CM лежать на одній прямій, а отже, в одній площині, яка проходить через цю пряму.



Мал. 197

Якщо, наприклад, трикутники ACB і ACK не лежать в одній площині, то три точки C, B і K визначають деяку площину α,



Мал. 198

перпендикулярну до AC (мал. 198). Пряма AM перетинає α в деякій точці P. Оскільки $AC \perp \alpha$ і $CP \in \alpha$, то $\angle ACP = 90°$. За умовою і $\angle ACM = 90°$. Отже, точка M збігається з точкою P, тому і катет CM лежить у площині α.

2. Як через дану на площині точку провести пряму, перпендикулярну до цієї площини?

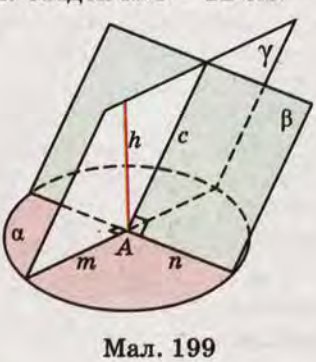
Розв'язання. Нехай точка A лежить у площині α. Пряму, перпендикулярну до площини α, через точку A можна провести так. Проводимо в площині α через точку A дві перпендикулярні прямі m і n (мал. 199). Через пряму n проводимо довільну площину β, а в ній через A – пряму c, перпендикулярну до n. Через прямі c і m проводимо площину γ, а в ній через точку A – пряму h, перпендикулярну до m.

Пряма h – та, яку треба було побудувати. Адже за побудовою $h \perp m$. Крім того, оскільки $n \perp c$ і $n \perp m$, то $n \perp \gamma$ і $n \perp h$. Отже, пряма h перпендикулярна до двох пересічних прямих площини α, тому $h \perp \alpha$.

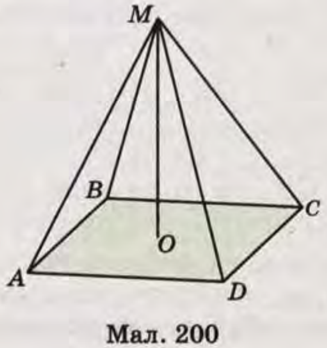
3. O – центр прямокутника $ABCD$. Точка M однаково віддалена від усіх вершин прямокутника (мал. 200). Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини прямокутника. Знайдіть довжину відрізка MO, якщо сторони прямокутника мають довжини 8 см і 6 см, а $MA = 13$ см.

Розв'язання. Трикутники AMC і DMB – рівнобедрені, отже, $MO \perp AC$ і $MO \perp DB$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $MO \perp (ABC)$.

Якщо в даному прямокутнику $AB = 6$ см, а $BC = 8$ см, то за теоремою Піфагора $AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, або $AC = 10$ см. Оскільки $MO \perp AC$, то за теоремою Піфагора $MO^2 = MA^2 - AO^2 = 169 - 25 =$ $= 144$. Звідси $MO = 12$ см.



Мал. 199



Мал. 200

Виконайте усно

1002. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Назвіть прямі, перпендикулярні до площини грані ABB_1A_1.

1003. Пряма a перпендикулярна до двох прямих площини α. Чи випливає з цього, що $a \perp \alpha$?

1004. Скільки: а) площин, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку; б) прямих, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану точку?

1005. У якій площині обертається шліфувальний диск, якщо його вісь розташована: а) горизонтально; б) вертикально?

1006. Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до прямої a?

1007. Пряма a не перпендикулярна до площини α, але перпендикулярна до прямих l і c цієї площини. Якими є ці прямі?

А

1008. Через вершину прямого кута C трикутника ABC з катетами 6 см і 8 см до його площини проведено перпендикуляр MC. $MC = 12$ см, CL – медіана трикутника. Знайдіть ML.

1009. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що AB_1C_1D – прямокутник.

1010. Трикутник ABC рівносторонній, а відрізок AM перпендикулярний до його площини. Знайдіть периметр і площу трикутника MBC, якщо: а) $AB = 3$ см, $AM = 4$ см; б) $AB = AM = c$.

1011. Площина α перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC і ділить його у відношенні $AA_1 : A_1C = m : n$. У якому відношенні площина α ділить гіпотенузу AB?

1012. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середину його ребра перпендикулярно до цього ребра. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

1013. Відстані від точки M до всіх вершин квадрата однакові; точка O, відмінна від M, – центр квадрата. Доведіть, що пряма MO перпендикулярна до площини квадрата.

1014. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини квадрата, якщо $AM = 10$ см, $AB = 6\sqrt{2}$ см.

1015. O – центр кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, MO – перпендикуляр до площини прямокутника. Знайдіть відстані від точки M до вершин прямокутника, якщо $OM = a\sqrt{3}$, а довжина діагоналі AC дорівнює $2a$.

1016. Сторони прямокутника пропорційні числам 2 і 3, а його периметр 40 см. Точка P рівновіддалена від вершин прямокутника, $PA = 14$ см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки P до площини прямокутника.

Б

1017. Трикутник ABC – рівнобедрений, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Пряма MB перпендикулярна до AB і BC, K – середина AC. Доведіть, що $\triangle MBK$ і $\triangle MAK$ прямокутні. Знайдіть їх площі, якщо $MB = 15$ см.

1018. Пряма MO перпендикулярна до діагоналей паралелограма $ABCD$, які перетинаються в точці O. Установіть вид $\triangle MOK$. Знайдіть MO і MK, якщо $K \in AB$, $OK = a$, $\angle OMK = \alpha$.

1019. Точка M рівновіддалена від вершин трикутника ABC, MO – перпендикуляр до площини трикутника, $O \in (ABC)$. Доведіть, що O – центр кола, описаного навколо трикутника.

1020. Точка M рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника ABC. $AB = a$, $AM = 2a$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини трикутника.

1021. Точка S знаходиться на відстані 13 см від вершин трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки S до площини трикутника.

1022. Відрізок AM перпендикулярний до площини рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть периметр трикутника MBC, якщо: а) $AB = 3$ см і $AM = 4$ см; б) $AB = AM = c$.

1023. Прямі AA_1 і BB_1 перпендикулярні до площини α, перетинають її в точках A_1 і B_1, а пряма AB – у точці C. Знайдіть відстань B_1C, якщо $AA_1 = 12$ см, $A_1B_1 = BB_1 = 3$ см.

1024. З кінців відрізка AB і точки M цього відрізка до площини α, яка не перетинає відрізок AB, проведено перпендикуляри AA_1, BB_1 і MM_1. Знайдіть MM_1, якщо $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см і: а) M – середина AB; б) $AM : MB = 1 : 3$.

1025. З вершин паралелограма $ABCD$ на площину α опущено перпендикуляри AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Знайдіть DD_1, якщо:
а) $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 20$ см, $CC_1 = 13$ см; б) $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 25$ см, $CC_1 = 13$ см.

1026. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини, яка проходить через точки B, B_1, D_1.

1027. Побудуйте переріз правильного тетраедра $ABCD$ площиною, яка перпендикулярна до ребра AB і проходить через його середину. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 12$ см.

1028. BK – пряма, проведена перпендикулярно до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки K до вершин квадрата, якщо $AB = a$, $BK = b$.

Вправи для повторення

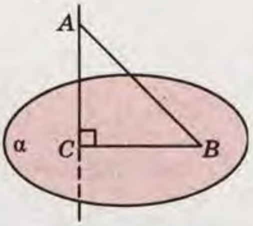
1029. Периметр паралелограма дорівнює 52 см, а його площа 60 см^2. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його гострий кут 30°.

1030. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 1 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають площину в точках A_1, C_1 і B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

1031. $SABC$ – тетраедр. Точки K і M – середини ребер AS і CS. Побудуйте переріз тетраедра площиною (BKM).

§ 29. Перпендикуляр і похила до площини

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, *називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.*



Мал. 201

Наприклад, якщо пряма AC перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці C, то відрізок AC – перпендикуляр, опущений з точки A на площину α. Точка C – *основа перпендикуляра* (мал. 201).

Якщо AC – перпендикуляр до площини α, а B – відмінна від C точка цієї площини, то відрізок AB називають *похилою, проведеною з точки A до площини* α. Точка B – *основа похилої*, а відрізок CB – *проекція похилої AB* на площину α.

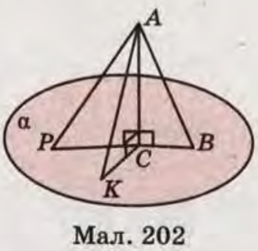
Зауважимо, що тут ідеться про *прямокутну проекцію* похилої[1]. Такі проекції дістають за умови, що всі проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій. Далі, говорячи про проекції, матимемо на увазі тільки прямокутні проекції.

Теорема 16. ***Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведено до цієї площини перпендикуляр і похилі, то:***

1) проекції рівних похилих рівні;

2) з двох похилих більша та, проекція якої більша;

3) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу.



Мал. 202

Доведення. Нехай AC – перпендикуляр, а AB, AK, AP – похилі до площини α (мал. 202).

1) Якщо $CB = CK$, то $\triangle ACB = \triangle ACK$ (за двома катетами). Тому $AB = AK$.

2) З прямокутних трикутників ACB і ACP маємо:

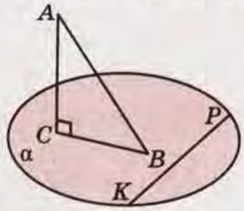
$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}, \quad AP = \sqrt{AC^2 + CP^2}.$$

Отже, якщо $CB < CP$, то $AB < AP$.

[1] Детальніше про прямокутні проекції див. на с. 223.

3) Перпендикуляр AC – катет, а будь-яка похила AB – гіпотенуза трикутника ABC. Тому $AC < AB$. Теорему доведено.

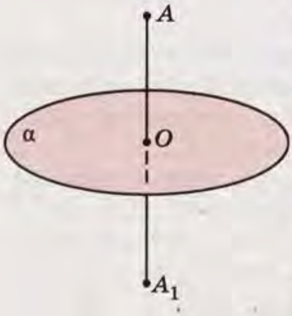
Приклади матеріальних моделей перпендикулярів до площини: стовп, телевізійна вежа. Перпендикулярно до площини зазвичай забивають палі та бурять свердловини. Будуючи багатоповерховий будинок, спочатку зводять каркас, в якому кожна вертикальна колона перпендикулярна до площини горизонту і до кожної горизонтальної балки.



Мал. 203

Теорема 17 (про три перпендикуляри). ***Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проекції похилої, перпендикулярна до цієї похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.***

Доведення. Нехай AC і AB – перпендикуляр і похила до площини α (мал. 203). Якщо пряма KP лежить у площині α, то $KP \perp AC$. Якщо, крім того, пряма KP перпендикулярна до BC або AB, то вона перпендикулярна до площини трикутника ABC. Тобто якщо $KP \perp BC$, то $KP \perp AB$, а якщо $KP \perp AB$, то $KP \perp BC$. Що й вимагалося довести.

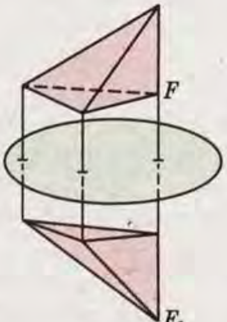


Мал. 204

З наведених міркувань випливає, що коли пряма KP не перпендикулярна до BC, то вона не перпендикулярна і до AB. Тому теорему про три перпендикуляри можна сформулювати й одним реченням.

Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли ця пряма перпендикулярна до проекції похилої.

Теоремою про три перпендикуляри її називають, маючи на увазі перпендикуляри $AC \perp \alpha$, $BC \perp KP$, $AB \perp KP$.

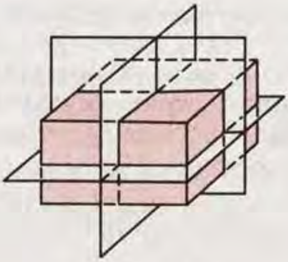


Мал. 205

На основі перпендикулярності прямої і площини можна ввести поняття симетрії в просторі.

Точки A і A_1 називають *симетричними відносно площини*, якщо вона перпендикулярна до відрізка AA_1 і проходить через його середину (мал. 204). Фігури F і F_1 називають симетричними відносно площини, якщо кожна точка фігури F симетрична відносно площини деякій точці фігури F_1, і навпаки (мал. 205).

Існують фігури, які відносно деяких площин симетричні самі собі. Наприклад, кожний прямокутний паралелепіпед має три площини симетрії (мал. 206), а куб – 9. Зобразіть на малюнку кілька площин симетрії куба, які проходять через: а) середини його паралельних ребер; б) його протилежні ребра.



Мал. 206

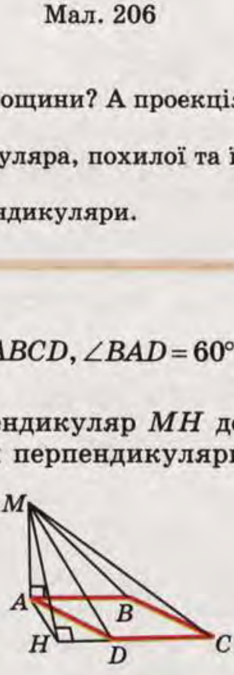
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке перпендикуляр до площини?
2. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? А проекція похилої на площину?
3. Укажіть найважливіші властивості перпендикуляра, похилої та її проекції на площину.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.

Виконаємо разом

1. MA – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, $\angle BAD = 60°$. Побудуйте висоту MH трикутника MCD.

• Розв'язання. Треба побудувати перпендикуляр MH до прямої CD (мал. 207). За теоремою про три перпендикуляри $AH \perp CD$. Оскільки $\angle ADH = 60°$, то точка H повинна лежати на прямій CD поза відрізком CD так, що $HD = 0{,}5\ CD$. Побудувавши точку H, проводимо відрізок MH. Він і є висотою трикутника MCD, яку треба було побудувати.



Мал. 207

2. Відрізки $OA = 15$ см, $OB = 20$ см, $OC = 35$ см попарно перпендикулярні (мал. 208). Знайдіть площу трикутника ABC.

• Розв'язання. Основу AB $\triangle ABC$ знайдемо за теоремою Піфагора з трикутника AOB:

$AB^2 = 15^2 + 20^2 = 625$,

$AB = 25$ см.

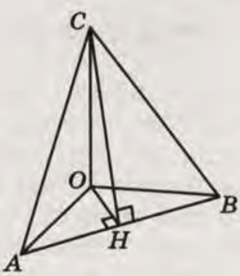
Проведемо висоту CH $\triangle ABC$ і точку H з O сполучимо відрізком. За теоремою про три перпендикуляри $OH \perp AB$.

Щоб знайти довжину OH, виразимо подвійну площу $\triangle AOB$ двома способами:

$OH \cdot AB = OA \cdot OB$,

$OH \cdot 25 = 15 \cdot 20$,

звідси $OH = 12$ (см).



Мал. 208

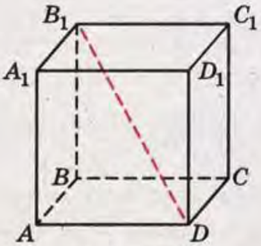
З прямокутного $\triangle COH$ за теоремою Піфагора
$CH^2 = 35^2 + 12^2 = 1369$, $CH = 37$ см.
Отже, шукана площа $\triangle ABC$: $S = 0{,}5 \cdot 25 \cdot 37 = 462{,}5$ (см²).

Виконайте усно

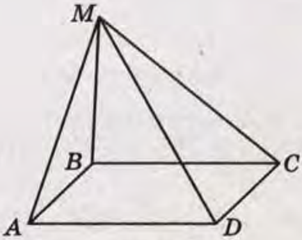
1032. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 209). Укажіть проекції відрізка B_1D на площини $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1, BCC_1B_1.

1033. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 209) $DC_1 \perp BC$, $A_1C \perp BD$, $AC \perp BD_1$.

1034. BM – перпендикуляр до площини чотирикутника $ABCD$ (мал. 210). Які з пар прямих MA і AD, MC і CD, MD і AC перпендикулярні, якщо: а) $ABCD$ – прямокутник, відмінний від квадрата; б) $ABCD$ – ромб, відмінний від квадрата; в) $ABCD$ – квадрат?



Мал. 209



Мал. 210

1035. Через точку перетину діагоналей трапеції проходить перпендикуляр до площини трапеції. Точку на цьому перпендикулярі сполучено з усіма вершинами трапеції. Чи можуть серед проведених похилих бути рівні? Чи можуть усі похилі бути рівними?

А

1036. З точки A до площини α проведено перпендикуляр $AC = 40$ см і похилу $AB = 50$ см. Знайдіть довжину проекції похилої.

1037. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AC і похилу $AB = l$, причому $\angle BAC = 30°$. Знайдіть довжину перпендикуляра і проекції похилої.

1038. З точки S до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими α. Знайдіть: а) довжину перпендикуляра і проекції похилої, якщо довжина похилої l; б) довжину похилої і її проекції, якщо перпендикуляр дорівнює h; в) довжину похилої і перпендикуляра, якщо довжина проекції дорівнює a.

1039. З точки M поза площиною проведено до цієї площини перпендикуляр і похилу. Знаючи, що похила довша за перпендикуляр на 25 см, а її проекція на площину дорівнює 65 см, знайдіть довжину похилої.

1040. З точки M до площини проведено перпендикуляр MO і похилі MA та MB. $\angle AMO = 60°$, $\angle BMO = 45°$. Знайдіть довжини похилих, якщо проекція меншої похилої дорівнює a.

1041. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AC_1 \perp BD$. Доведіть, що грань $ABCD$ – квадрат.

1042. Учень каже: «Пряма, перпендикулярна до похилої, перпендикулярна і до проекції цієї похилої». Наведіть контрприклад.

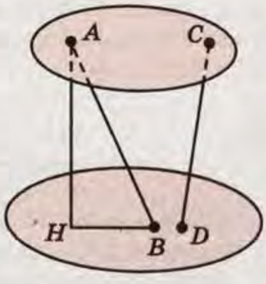
1043. MA – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC. K – середина сторони BC. Доведіть, що $MK \perp BC$.

1044. Трикутник ABC – рівнобедрений, $AB = BC$, BM – перпендикуляр до площини трикутника. Побудуйте $MK \perp AC$, $K \in AC$.

1045. $ABCD$ – прямокутник, O – точка перетину його діагоналей, MO – перпендикуляр до площини прямокутника. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін прямокутника.

1046. Через точку O перетину медіан рівностороннього трикутника проведено перпендикуляр MO до його площини. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до сторін трикутника.

1047. Два відрізки, довжини яких 13 дм і 37 дм, упираються кінцями у дві паралельні площини (мал. 211). Проекція меншого з них на площину дорівнює 5 дм. Знайдіть довжину проекції другого відрізка.



Мал. 211

Б

1048. Основою тетраедра $SABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Ребро AS перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що всі бічні грані піраміди – прямокутні трикутники.

1049. Доведіть, що в правильному тетраедрі протилежні ребра перпендикулярні.

1050. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки K, L, M – середини ребер AA_1, CC_1, AD відповідно, O – точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $OM \perp AB$ і $OD \perp KL$.

1051. K – середина сторони ромба, $MK = 12$ см – перпендикуляр, проведений до площини ромба. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки M до діагоналей ромба. Знайдіть довжини цих перпендикулярів, якщо сторона ромба 20 см, а кут 60°.

1052. O – середина гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами 10 см і 18 см. OS – перпендикуляр до площини трикутника, $OS = 12$ см. Побудуйте перпендикуляри, проведені з точки S до катетів трикутника, і знайдіть їх довжину.

1053. Сторони трикутника ABC дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, O – центр вписаного в трикутник кола, MO – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть довжини перпендикулярів, проведених з M до сторін трикутника, якщо $MO = 3$ см.

1054. У трикутнику ABC $AB = BC = 10$ см, $\angle ABC = 120°$. MB – перпендикуляр, проведений до площини трикутника. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до AC, якщо $MC = 15$ см.

1055. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см. CM – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть CM, якщо $MK \perp AB$, $K \in AB$ і $MK = 10$ см.

1056. Через вершину C прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α, $\alpha \parallel AB$. Проекція меншого катета на площину дорівнює 8 см. Знайдіть проекції інших сторін трикутника на площину α, якщо $AB = 26$ см, а різниця катетів 14 см.

1057. З вершин B і C ромба $ABCD$ до площини α, яка проходить через сторону AD, проведено перпендикуляри BB_1 і CC_1. Знайдіть проекції діагоналей і сторін ромба на площину α, якщо $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $BB_1 = 8$ см.

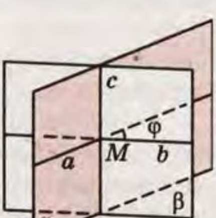
Вправи для повторення

1058. Прямі a і b – мимобіжні. Точки A і B лежать на прямій a, а точки M і N – на прямій b. Як розташовані прямі AN і BM?

1059. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 – теж паралелограм.

1060. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки A, B_1 і D_1.

§ 30. Перпендикулярні площини



Мал. 212

Спочатку введемо поняття кута між площинами. Нехай α і β – площини, які перетинаються по прямій c (мал. 212). Проведемо в цих площинах через точку M прямі a і b, перпендикулярні до c. Нехай кут між ними $\angle(ab) = \varphi$. Якщо в площинах α і β провести які-небудь інші прямі, перпендикулярні до c, то кут між ними також дорівнюватиме φ. (Чому?) Отже, можна прийняти таке означення.

***Кутом між площинами**, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину.*

Якщо площини паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°. Кут між площинами α і β позначають: $\angle(\alpha\beta)$, $0° \leqslant \angle(\alpha\beta) \leqslant 90°$.

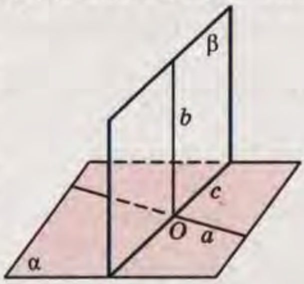
*Дві площини називаються **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°.*

Якщо площини α і β перпендикулярні, пишуть: $\alpha \perp \beta$.

Теорема 18 (ознака перпендикулярності площин). ***Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то такі площини перпендикулярні.***

Доведення. Нехай площина β проходить через пряму b, перпендикулярну до площини α (мал. 213). Доведемо, що $\beta \perp \alpha$.

Пряма b перетинає площину α в деякій точці O. Ця точка спільна для площин α і β. Тому дані площини перетинаються по прямій c, яка проходить через точку O. Проведемо у площині α через O пряму a, перпендикулярну до c. Оскільки $b \perp \alpha$, а прямі a і c лежать у площині α, то $b \perp a$ і $b \perp c$. Крім того, $a \perp c$. Отже, $\angle(\alpha\beta) = \angle(ab) = 90°$, тобто $\beta \perp \alpha$. Що й треба було довести.



Мал. 213

Який існує зв'язок між перпендикулярністю і паралельністю площин? *Площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини.* Тобто якщо $\alpha \parallel \beta$ і $\gamma \perp \alpha$, то $\gamma \perp \beta$.

Цю властивість можна й узагальнити. *Січна площина нахилена до паралельних площин під рівними кутами.* Спробуйте довести ці властивості самостійно.

Властивості паралельних і перпендикулярних площин використовують у багатьох сферах науки і виробництва, зокрема у будівництві. Стелю і підлогу, протилежні стіни роблять найчастіше паралельними, стіну і підлогу, стіну і стелю – перпендикулярними. І протилежні грані цеглини, бруска, дошки найчастіше роблять паралельними, а суміжні – перпендикулярними. Окремі поверхи будинку роблять не тільки паралельними, а й горизонтальними, а різні колони – вертикальними. Чому?

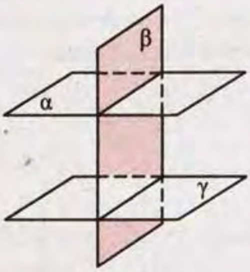
Під однаковими кутами до горизонтальної площини бувають нахилені вугільні пласти, стіни каналів, відкоси насипів, скати дахів тощо.

Теорему 18 можна ілюструвати таким наочним прикладом. Якщо пряма, яка проходить через центри петель дверей, перпендикулярна до площини підлоги, то як би не повертали двері, їх площина буде перпендикулярною до площини підлоги.

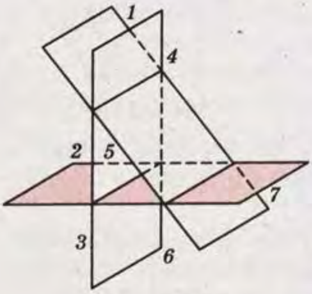
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке кут між двома площинами?
2. У яких межах може змінюватися кут між площинами?
3. Чому дорівнює кут між паралельними площинами?
4. Які площини називають перпендикулярними?
5. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.

Виконаємо разом



Мал. 214



Мал. 215

1. Кут між двома площинами – це фігура?

• Розв'язання. Ні. Кут між площинами – не фігура, не множина точок, а величина, міра нахилу однієї площини до другої.

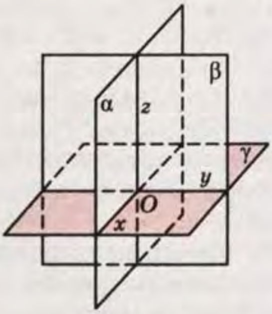
2. На скільки частин простір може поділятися трьома площинами, принаймні дві з яких перпендикулярні?

• Розв'язання. Такі площини можуть поділити простір на 6, 7 або 8 частин (мал. 214–216).

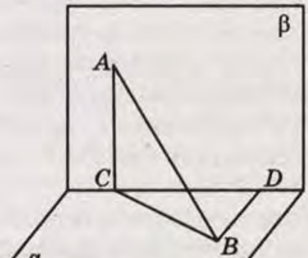
3. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах (мал. 217). AC і BD – перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин, $AC = 5\sqrt{11}$ см, $BD = 24$ см, $CD = 7$ см. Знайдіть довжину відрізка AB.

• Розв'язання. З $\triangle CDB$ ($\angle D = 90°$) за теоремою Піфагора знайдемо BC:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2,\ BC = \sqrt{576+49} = \sqrt{625} = 25.$$



Мал. 216



Мал. 217

Оскільки площини α та β перпендикулярні і $AC \perp CD$, то $\angle ACB = 90°$. Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ACB$ знайдемо AB:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$, $AB = \sqrt{275 + 625} = \sqrt{900} = 30$.

Отже, $AB = 30$ см.

Виконайте усно

1061. Знайдіть міру кута між двома: а) суміжними гранями куба; б) протилежними гранями куба.

1062. Чи можна через пряму a, перпендикулярну до площини α, провести площину, не перпендикулярну до α?

1063. Чи правильно, що площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої площини?

1064. Чи правильно, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?

1065. Чи можуть бути не перпендикулярними дві площини, які проходять через дві перпендикулярні прямі?

1066. Площини α і β не перпендикулярні. Чи існує площина, перпендикулярна до кожної з них?

1067. Дано площину α і точку A. Скільки існує площин, перпендикулярних до α, які проходять через точку A?

1068. На скільки частин ділять простір дві перпендикулярні площини? А три попарно перпендикулярні площини?

1069. Чи кожна трійка попарно перпендикулярних площин має спільну точку? Чи мають вони спільну пряму?

1070. Чи існує чотири попарно перпендикулярні площини?

А

1071. Скільки площин, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

1072. Пряма a перетинає площину α під кутом 45°. Чи можна через пряму a провести площину, яка перетинається з α під кутом 30°?

1073. Чи можна через дві перпендикулярні прямі провести площини, які перетинаються під кутом 30°?

1074. Скільки пар перпендикулярних площин можна провести через дві паралельні прямі?

1075. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть, що площини (MAC) і (MBD) перпендикулярні.

1076. O – точка перетину діагоналей ромба, OM – перпендикуляр до площини ромба. Доведіть, що площини, які проходять через точку M і діагоналі ромба, – перпендикулярні.

1077. Трикутник ABC і прямокутник $ABMN$ лежать у взаємно перпендикулярних площинах. Доведіть, що кут CAN прямий.

1078. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої, то лінія їх перетину перпендикулярна до цієї площини.

1079. Точка P знаходиться на відстані 12 см і 16 см від двох перпендикулярних площин, які перетинаються по прямій m. Знайдіть відстань від точки P до прямої m.

1080. Відстані від точки M до кожної з двох перпендикулярних площин пропорційні числам 2 і 3. Знайдіть ці відстані, якщо точка M віддалена від лінії перетину площин на $2\sqrt{13}$ см.

Б

1081. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD – перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин. Знайдіть CD, якщо: а) $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, $AB = 12$ см; б) $AD = 4$ см, $BC = 7$ см, $AB = 8$ см; в) $AC = BD = a$, $AB = 2a$.

1082. Кінці відрізка AB лежать у перпендикулярних площинах. AC і BD – перпендикуляри, проведені до лінії перетину цих площин, $AC = 6$ м, $BD = 3\sqrt{3}$ м. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $\angle DBC = 30°$.

1083. Дві перпендикулярні площини перетинаються по прямій a. У одній з площин паралельно a проведено відрізок AB, який віддалений від a на 6 см. Точка K другої площини віддалена від a на 9,1 см. Знайдіть відстань від точки K до AB.

1084. Через паралельні прямі a і b проведено дві перпендикулярні площини, які перетинаються по прямій c. Відстані від прямих a і b до прямої c дорівнюють відповідно 8 см і 15 см. Знайдіть відстань між прямими a і b.

1085. Розв'яжіть попередню задачу, якщо кут між площинами дорівнює 60°.

1086. Квадрат $ABCD$ перегнули по діагоналі AC так, що площини (ABC) і (ADC) стали перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками B і D, якщо $AB = a$.

1087. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у площинах, кут між якими 60°. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо $AB = 2m$.

1088. Площини квадратів $ABCD$ і ABC_1D_1 перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть: а) відстань CC_1; б) відстань C_1D; в) кут між діагоналями AC і AC_1.

1089. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть відстань CD і кут $\varphi = \angle CAD$.

1090. Знайдіть довжини сторін правильних трикутників ABC і ABD, якщо їх площини перпендикулярні і $CD = a$.

1091. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Точки M, N і K – середини ребер AB, B_1C_1 і BC відповідно. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки M, N і K. Доведіть, що площина основи і площина перерізу перпендикулярні. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо $BB_1 = 16$ м, $B_1D = 20$ м.

Вправи для повторення

1092. У прямокутному паралелепіпеді ребра $AA_1 = 5$, $AB = 4$, $BC = 3$. Знайдіть довжину похилої A_1C і кут її нахилу до площини (ABC).

1093. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник, якщо вони мають спільний прямий кут.

1094. Точка K – середина ребра AS тетраедра $SABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B, C і K.

§ 31. Ортогональне проектування

Про паралельне проектування йшлося в § 23. Якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій, то таке проектування називають *прямокутним*, або *ортогональним*.

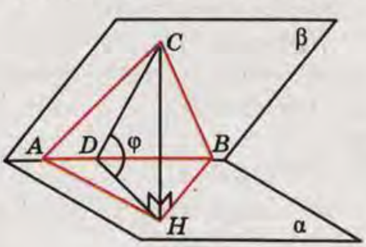
Ортогональне проектування – окремий вид паралельного проектування, тому воно має всі властивості паралельного проектування. У кресленні воно – основне. І ми, говорячи далі про проекції, матимемо на увазі тільки ортогональні проекції. Тобто *проекцією точки* називатимемо основу перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Якщо точка лежить на площині проекцій, то вона збігається зі своєю проекцією.

Проекцією фігури на площину називають множину проекцій усіх точок даної фігури на дану площину. Зокрема, проекцією n-кутника є n-кутник (якщо площини проекцій і многокутника не перпендикулярні).

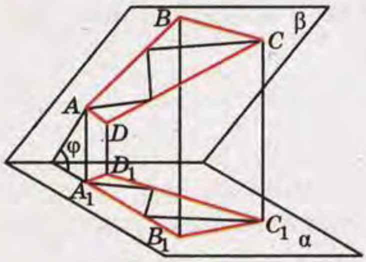
Теорема 19. ***Площа проекції многокутника дорівнює площі проектованого многокутника, помноженій на косинус кута між їх площинами.***

Тобто якщо S і $S_{пр}$ – площі многокутника і його проекції, а кут між їх площинами дорівнює φ, то $S_{пр} = S\cos\varphi$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли даний многокутник – трикутник ABC, сторона AB якого лежить у площині проекцій α (мал. 218). Якщо CH – перпендикуляр до площини α і $CD \perp AB$, то $HD \perp AB$. (Чому?)



Мал. 218



Мал. 219

Мал. 220

Отже, $S_{ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot HD = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos\varphi = S_{ABC} \cos\varphi$.

Якщо за площину проекцій взяти будь-яку іншу площину, паралельну α, то результат буде такий самий. Оскільки проекції тієї самої фігури на паралельні площини рівні, а рівні фігури мають рівні площі.

Тепер розглянемо загальний випадок. Нехай дано довільний многокутник (на мал. 219 – це чотирикутник $ABCD$). Його можна розбити на скінченне число трикутників таких, що одна із сторін кожного з них паралельна площині проекцій. Якщо площі таких трикутників $S_1, S_2, \ldots, S_m$, то площі їх проекцій $S_1\cos\varphi, S_2\cos\varphi, \ldots, S_m\cos\varphi$, де φ – кут між площиною даного многокутника і площиною проекцій. Отже,

$$S_{пр} = S_1\cos\varphi + S_2\cos\varphi + \ldots + S_m\cos\varphi =$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots + S_m)\cos\varphi = S\cos\varphi,$$

тобто

$$S_{пр} = S\cos\varphi.$$

Наслідок. **Якщо S і Q – площі многокутників площини α, а $S_{пр}$ і $Q_{пр}$ – площі їх проекцій на площину α, то $S_{пр} : Q_{пр} = S : Q$.**

Поняття проектування, паралельне проектування і ортогональне проектування пов'язані між собою, як показано на діаграмі (мал. 220). Тобто ортогональне проектування – окремий вид паралельного проектування, а паралельне проектування – вид проектування. Інший вид останнього – центральне проектування (перспектива).

Зображати фігури при ортогональному проектуванні можна різними способами, докладно їх розглядають у кресленні і нарисній геометрії.

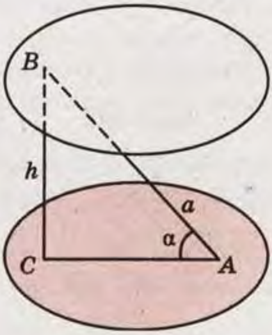
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Чим відрізняється ортогональне проектування від паралельного проектування?
2. Що називають проекцією фігури на площину?

3. Перерахуйте найважливіші властивості паралельного проектування.
4. Сформулюйте та доведіть теорему про площу многокутника і його ортогональної проекції.
5. Сформулюйте наслідок про відношення площ многокутників і їх проекцій.

Виконаємо разом

1. Кінці відрізка AB завдовжки a лежать на двох паралельних площинах, відстань між якими дорівнює h. Знайдіть тангенс кута між похилою і однією з площин.



Мал. 221

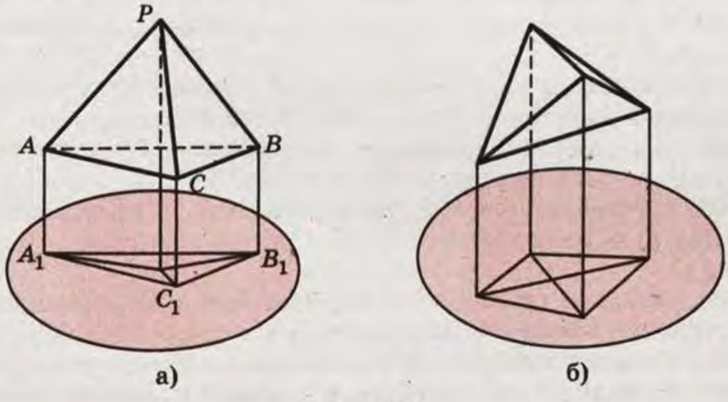
• Розв'язання. Якщо AC – проекція похилої AB на площину α, то трикутник ABC прямокутний (мал. 221). За теоремою Піфагора

$AC = \sqrt{a^2 - h^2}$, тому $\operatorname{tg} A = BC : AC = \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}$.

2. Якою може бути проекція правильного тетраедра?

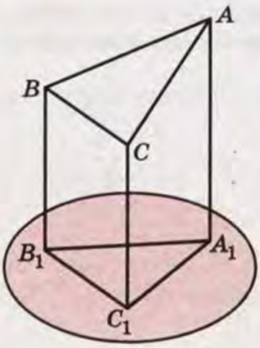
• Розв'язання. Проекція правильного тетраедра на площину може бути трикутником (мал. 222, *а*), зокрема правильним трикутником, якщо площина проекцій паралельна якій-небудь грані тетраедра. Вона може бути і чотирикутником (мал. 222, *б*), зокрема паралелограмом, якщо площина проекцій паралельна двом протилежним ребрам тетраедра.

3. Ортогональною проекцією $\triangle ABC$ є прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з гіпотенузою 15 см і різницею катетів 3 см. Знай-



Мал. 222

15-Matematika 10kl



Мал. 223

діть площу даного трикутника, якщо кут між площинами дорівнює 30°.

Розв'язання. На малюнку 223 $\triangle A_1B_1C_1$ ($\angle C_1 = 90°$) – ортогональна проекція $\triangle ABC$. Нехай $A_1C_1 = x$, тоді $B_1C_1 = x + 3$. За теоремою Піфагора $A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2$. Тоді

$$x^2 + (x + 3)^2 = 225,$$
$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225,$$
$$2x^2 + 6x - 216 = 0,$$
$$x^2 + 3x - 108 = 0;\ x_1 = 9,\ x_2 = -12.$$

Отже, $A_1C_1 = 9$ см, тоді $B_1C_1 = 12$ см. Площа $\triangle A_1B_1C_1$

$S_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1C_1$, тобто $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ (см^2). Тоді площа $\triangle ABC$

$$S = \frac{S_1}{\cos 30°},\quad S = \frac{54 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{54 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 36\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Виконайте усно

1095. Чи може площа паралельної проекції фігури бути більшою за площу самої фігури?

1096. Чи може площа ортогональної проекції фігури бути більшою за площу самої фігури? А дорівнювати?

1097. Чи може проекцією кута бути промінь? А пряма?

1098. Проекцією яких прямих може бути пара паралельних прямих?

1099. Чи може проекцією довільного трикутника бути: а) відрізок; б) рівносторонній трикутник; в) прямокутний трикутник; г) тупокутний трикутник?

1100. Чи є катет прямокутного трикутника проекцією його гіпотенузи?

1101. Чи можна одну сторону рівностороннього трикутника вважати ортогональною проекцією другої його сторони?

1102. Чи може пара паралельних прямих бути проекцією пари мимобіжних прямих?

1103. Чи може бути квадрат проекцією: а) прямокутника; б) ромба; в) паралелограма; г) трапеції; ґ) довільного чотирикутника?

1104. Чи може трапеція бути проекцією: а) квадрата; б) ромба; в) прямокутника; г) паралелограма; ґ) іншої трапеції?

1105. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а площа його ортогональної проекції 18 см^2. Знайдіть кут між площинами квадрата і його проекції.

1106. Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу ортогональної проекції цього трикутника на площину, яка утворює з площиною трикутника кут $60°$.

А

1107. Знайдіть довжину проекції відрізка AB на площину α, якщо $AB = 9$ см, а пряма AB нахилена до площини α під кутом $30°$.

1108. Кінці відрізка довжиною 25 см віддалені від площини α на 13 см і 20 см. Знайдіть довжину його проекції на площину α.

1109. Відрізок, довжина якого 10 см, перетинає площину. Знайдіть довжину проекції даного відрізка на цю площину, якщо його кінці віддалені від площини на 3 см і 5 см.

1110. Відрізок AB паралельний площині α і дорівнює m. Точка A_1 – проекція точки A. Знайдіть довжину відрізка A_1B, якщо він утворює з площиною α кут $60°$.

1111. Дві похилі, проведені з однієї точки, мають довжини 15 см і 20 см. Проекція однієї з них 16 см. Знайдіть проекцію другої похилої.

1112. З точки M до площини проведено похилі MA і MB, довжини яких дорівнюють 10 см і $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть проекції похилих, якщо їх різниця дорівнює 2 см.

1113. Відрізки двох прямих лежать між паралельними площинами і відносяться як 20 : 13. Проекція одного відрізка на одну з площин дорівнює 16 см, а іншого відрізка на іншу площину – 5 см. Знайдіть довжини цих відрізків.

1114. Відрізок завдовжки 26 см опирається кінцями на дві взаємно перпендикулярні площини. Довжини перпендикулярів, опущених з кінців відрізка до лінії перетину площин, дорівнюють 10 см і 20 см. Знайдіть проекцію відрізка на кожну з площин.

1115. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, довжини яких дорівнюють 16 см і 20 см. Обчисліть проекцію перпендикуляра на похилу.

1116. Площа трикутника дорівнює 48 см^2, а його проекції – 24 см^2. Знайдіть кут між площиною проекцій і площиною даного трикутника.

1117. Знайдіть площу проекції фігури F на площину α, яка з площиною даної фігури утворює кут $60°$, якщо фігурою F є:

а) квадрат, діагональ якого дорівнює 2 см;

б) трикутник зі сторонами 3 дм, 4 дм і 5 дм;

в) правильний трикутник зі стороною a;

г) ромб, сторона якого дорівнює c, а кут $45°$;

ґ) правильний шестикутник зі стороною a.

1118. Ортогональною проекцією прямокутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 4 см, є чотирикутник, площа якого 12 см^2.

Обчисліть кут між площинами чотирикутників. Чи може дана проекція бути квадратом?

Б

1119. Ортогональною проекцією прямокутника є квадрат. Площа прямокутника 128 см^2, а кут між площинами 60°. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його сторона паралельна площині проекцій.

1120. Ортогональною проекцією правильного трикутника зі стороною 20 см на площину, що містить одну з його вершин і паралельна одній зі сторін, є рівнобедрений трикутник з бічною стороною $5\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

1121. Ортогональною проекцією правильного трикутника є трикутник зі сторонами 13 м, 14 м, 15 м. Кут між площинами трикутників 30°. Знайдіть периметр даного трикутника.

1122. Ортогональною проекцією трапеції, площа якої $52\sqrt{2}$ см^2, є рівнобічна трапеція з основами 16 см і 10 см та бічною стороною 5 см. Знайдіть кут між площинами трапецій.

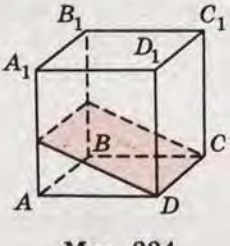
1123. Чотирикутник $AB_1C_1D_1$ – ортогональна проекція ромба $ABCD$ на площину, паралельну меншій діагоналі. Знайдіть довжини проекцій діагоналей, якщо $AB = 20$ см, $BB_1 = 10$ см, $\angle B = 120°$.

1124. Ортогональною проекцією паралелограма $ABCD$ на площину, яка проходить через вершину A паралельно BD, є чотирикутник $AB_1C_1D_1$. Обчисліть AC, якщо $BD = 3\sqrt{21}$ м, $CC_1 = 10$ м, $AD_1 = 12$ м, $D_1C_1 = 9$ м.

1125. $ABCD$ – правильний тетраедр, ребро якого дорівнює a. Побудуйте проекцію грані CDB на площину (ABC). Знайдіть площу проекції та кут між площинами (ABC) і (CDB).

1126. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 3$, $M \in CC_1$, $CM : MC_1 = 2 : 1$. Знайдіть кут між площиною BMD та її проекцією на площину: а) (ABC); б) (BB_1D).

1127. Побудуйте проекцію діагоналі куба на площину, яка проходить через дві діагоналі його суміжних граней. Знайдіть довжину проекції, якщо довжина діагоналі дорівнює d.



Мал. 224

1128. У кубі через ребро основи і середини двох бічних ребер проведено площину (мал. 224). Знайдіть кут між даною площиною і площиною основи та площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

1129. В основі тетраедра лежить правильний трикутник зі стороною l. Через ребро основи і середину протилежного ребра проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу перерізу, якщо всі бічні ребра тетраедра рівні.

1130. В основі прямого паралелепіпеда лежить квадрат зі стороною a. Через середини двох суміжних сторін основи проведена площина, яка перетинає три бічні ребра паралелепіпеда і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу перерізу.

Мал. 225

1131. Намалюйте або опишіть фігури, проекції яких на дві взаємно перпендикулярні площини зображені на малюнку 225.

Вправи для повторення

1132. Через точку перетину прямих AB і AC проведено пряму l, яка не лежить з ними в одній площині. Доведіть, що прямі l і BC мимобіжні.

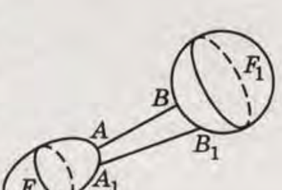
1133. AP – перпендикуляр до площини паралелограма $ABCD$, $PC \perp BD$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.

1134. З точок A і B, які лежать у перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AC і BD на пряму CD перетину цих площин. Знайдіть довжину AB, якщо $AC = 12$, $CD = 3$, $BD = 4$.

§ 32. Відстані в просторі

Що таке відстань між точками, вам уже відомо. Узагальнимо це поняття на випадок довільних фігур.

Нехай дано дві фігури F і F_1 (мал. 226). Точки $A \in F$ і $B \in F_1$ називають найближчими точками цих фігур, якщо для будь-яких точок $A_1 \in F$ і $B_1 \in F_1$ виконується нерівність $AB \leqslant A_1B_1$.



Мал. 226

Відстанню між двома фігурами називають відстань між найближчими точками цих фігур (якщо такі точки існують). Якщо дві фігури мають спільні точки, то вважають, що відстань між ними дорівнює 0.

Зауваження. Не будь-які дві фігури мають найближчі точки. Але ми вивчатимемо тільки такі фігури, для яких найближчі точки існують.

Розглянемо конкретні приклади.

Відстань від точки до прямої. Перпендикуляр, опущений з точки на пряму, коротший від будь-якого відрізка, що сполучає цю точку з даною прямою. Тому відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.

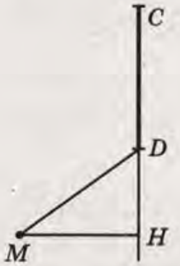
Відстань від точки до відрізка не завжди дорівнює відстані від точки до прямої, якій належить цей відрізок. Вона може дорівнювати відстані від даної точки до кінця відрізка. Подивіться на малюнок 227. Відстань від точки M до відрізка DC дорівнює MD, а не MH.

Відстань від точки до площини. Оскільки перпендикуляр коротший від похилої (теорема 16), то відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a, то відстань від точки A_1 до площини грані $ABCD$ дорівнює a. Але якщо A_1 – середина відрізка B_1P, то відстань від точки P до квадрата $ABCD$ дорівнює $a\sqrt{2}$. Узагалі, відстань від точки до плоскої фігури не завжди дорівнює відстані від цієї точки до площини, в якій лежить дана фігура.

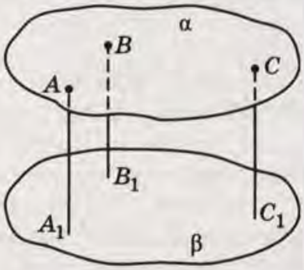
Відстань між паралельними площинами. Якщо площини α і β паралельні, то перпендикуляри, опущені з точок однієї з цих площин на другу, рівні (мал. 228). Справді, всі ці перпендикуляри паралельні один одному, а відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні (теорема 10). Довжина перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки площини на паралельну їй площину, є відстанню між даними паралельними площинами.

З тієї ж причини відстань між прямою і паралельною їй площиною дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої на дану площину.

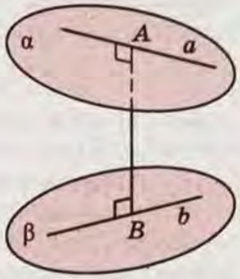
Відстань між мимобіжними прямими. Нехай дано мимобіжні прямі a і b (мал. 229). Існує відрізок AB, перпендикулярний до кожної з даних мимобіжних прямих a і b, його називають *спільним перпендикуляром мимобіжних прямих.* Для будь-яких мимобіжних прямих існує єдиний їх спільний перпендикуляр. Спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих коротший від будь-якого відрізка, що сполучає довільні точки цих прямих. Тому відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра.



Мал. 227



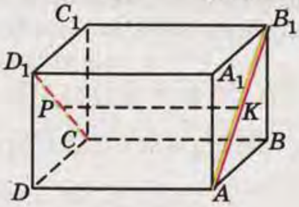
Мал. 228



Мал. 229

Корисно пам'ятати таке. Дві мимобіжні прямі визначають пару паралельних площин (див. задачу 2, с. 190). Відстань між цими площинами дорівнює відстані між даними прямими.

Приклад. Якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, то спільним перпендикуляром мимобіжних прямих AB_1 і CD_1 є відрізок, який сполучає середини відрізків AB_1 і CD_1 (мал. 230). Довжина цього спільного перпендикуляра дорівнює BC і дорівнює відстані між даними мимобіжними прямими.



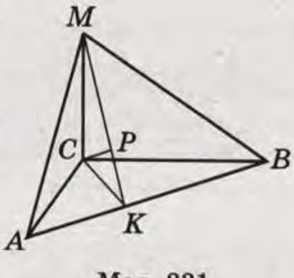
Мал. 230

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що називається відстанню між двома фігурами?
2. Чому дорівнює відстань від точки до: а) прямої; б) відрізка; в) площини?
3. Як знайти відстань між паралельними площинами? А між прямою і паралельною їй площиною?
4. Що називається спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих?
5. Як знайти відстань між мимобіжними прямими?

Виконаємо разом

1. Через вершину прямого кута C трикутника ABC проведено перпендикуляр CM до площини трикутника (мал. 231). $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $CM = 6{,}4$ см. Знайдіть відстань: а) від точки M до прямої AB; б) від точки C до площини (AMB).



Мал. 231

• **Розв'язання.** Проведемо $CK \perp AB$ і точку K сполучимо з точкою M. За теоремою про три перпендикуляри $MK \perp AB$. Значить, довжина відрізка MK – відстань від точки M до AB.

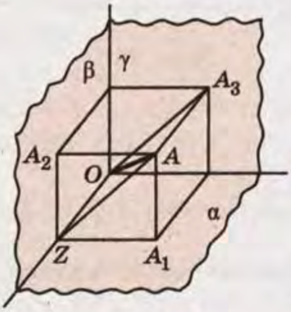
З $\triangle ABC$ за теоремою Піфагора знайдемо, що $AB = 10$ см. Тоді за методом площ $CK = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ (см). З $\triangle MCK$ за теоремою Піфагора знайдемо MK:

$$MK = \sqrt{MC^2 + CK^2} = \sqrt{6{,}4^2 + 4{,}8^2} = 8 \text{ (см)}.$$

Отже, відстань від точки M до прямої AB дорівнює 8 см.

Оскільки $KC \perp AB$ і $KM \perp AB$, то $AB \perp (MKC)$, а значить, площини (AMB) і (MKC) перпендикулярні, MK – лінія їх перетину. У площині (MKC) проведемо $CP \perp MK$, тоді за властивістю перпендикулярних площин $CP \perp (AMB)$. Значить CP – відстань від точки M до площини (AMB). Знайдемо її. З $\triangle MCK$ за методом площ $CP = \dfrac{CK \cdot CM}{KM} = \dfrac{4{,}8 \cdot 6{,}4}{8} = 3{,}84$ (см).

Отже, $CP = 3{,}84$ см.



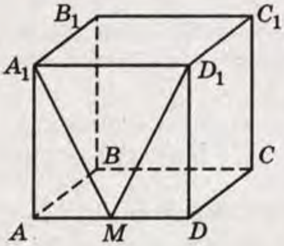
Мал. 232

2. Кожна з трьох попарно перпендикулярних площин проходить через точку O. Точка A віддалена від цих площин на 90 см, 120 см і 80 см. Знайдіть відстань OA.

• **Розв'язання.** Нехай $AA_1 = 80$ см, $AA_2 = 90$ см і $AA_3 = 120$ см – відстані від даної точки A до площин α, β і γ (мал. 232). Площина, яка проходить через точки A, A_1 і A_2, перетинає пряму перетину площин α і β у такій точці Z, що чотирикутник AA_1ZA_2 – прямокутник. Чотирикутник AA_3OZ – теж прямокутник. За теоремою Піфагора:

$$OA = \sqrt{AA_3^2 + AZ^2} = \sqrt{AA_3^2 + AA_2^2 + AA_1^2} =$$
$$= \sqrt{120^2 + 90^2 + 80^2} = 170 \text{ (см)}.$$

Виконайте усно



Мал. 233

1135. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a, M – середина AD (мал. 233).

а) Знайдіть відстані AC, MC, MD_1.

б) Яка з відстаней AC, MC, BC найбільша, а яка – найменша?

в) Порівняйте відстані MC, MD_1, MA_1.

г) Знайдіть відстань від точки M до прямих A_1D_1, B_1C_1, до площин $A_1B_1C_1D_1$, DD_1C_1C.

ґ) Знайдіть відстань між площинами $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.

д) Знайдіть відстань від прямої A_1M до площини BB_1C_1C.

е) Знайдіть відстань між прямими AD і B_1C_1, CC_1 і A_1D_1.

А

1136. Через середину відрізка AB проведено площину. Доведіть, що відстані від точок A і B до даної площини рівні.

1137. Через діагональ паралелограма проведено площину. Доведіть, що кінці другої діагоналі однаково віддалені від цієї площини.

1138. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 7 см і 13 см. Як віддалена від площини середина відрізка?

1139. Точки C і D, які ділять відрізок AB на три рівні частини, віддалені від площини на 4 см і 8 см. Як віддалені від площини кінці відрізка?

1140. Відрізок завдовжки a перетинає площину, а його кінці віддалені від неї на b і c. Знайдіть довжину проекції відрізка на площину.

1141. MA – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки M до прямих AB і BC, якщо $AB = 3$ дм, $MA = 4$ дм.

1142. До площини трикутника з центра вписаного в нього кола радіуса r проведено перпендикуляр завдовжки h. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до сторін трикутника.

1143. З вершини B рівнобедреного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр $BK = 12$ см. Знайдіть відстань від точки K до сторони AC, якщо $AC = 24$ см, $AB = BC = 20$ см.

1144. З вершини B рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) до його площини проведено перпендикуляр BM. Відстань від точки M до сторони AC дорівнює 15 см, а до точки A – $3\sqrt{34}$ см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

1145. З центра O кола, описаного навколо прямокутного трикутника з кутом 30°, до площини трикутника проведено перпендикуляр OK. Точка K віддалена від більшого катета на 10 см. Знайдіть відстань від точки K до меншого катета, якщо $OK = 8$ см.

1146. AK – перпендикуляр, проведений до площини трикутника ABC. Знайдіть відстань від точки K до сторони BC, якщо $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $AK = 16$ см.

1147. Через вершину B трикутника ABC проведено перпендикуляр BM до площини трикутника. Точка M рівновіддалена від вершин A і C. Знайдіть відстань від точки M до сторони AC, якщо $AC = a$, $BM = \frac{a}{2}$, $\angle B = 60°$.

1148. Точка M знаходиться на відстані 26 см від усіх сторін прямокутного трикутника. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо його висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9 : 16.

1149. Точка R знаходиться на відстані $2a$ від усіх сторін правильного трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки R до площини трикутника.

1150. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 17 см, 21 см. Точка простору O знаходиться на відстані 12,5 см від усіх сторін трикутника. Знайдіть відстань від O до площини трикутника.

1151. Більша діагональ ромба дорівнює d, а гострий кут α. Точка простору M рівновіддалена від сторін ромба і знаходиться на відстані $2d$ від його площини. Знайдіть відстань від точки M до сторін ромба.

Б

1152. З точки P до площини проведено дві рівні похилі PM і PN, кут між якими $60°$, а кут між їх проекціями $120°$. Знайдіть відстань від точки P до площини і до прямої MN, якщо $MN = a$.

1153. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 17 м і 10 м. Різниця проекцій цих похилих 9 м. Знайдіть відстань від даної точки до площини.

1154. Точка A віддалена від однієї з двох перпендикулярних площин на x, а від другої – на y. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину даних площин.

1155. Площина α проходить через сторону AB паралелограма $ABCD$ і віддалена на d від точки перетину його діагоналей. Знайдіть відстань від прямої CD до площини α.

1156. Вершини A, B, C квадрата $ABCD$ віддалені від площини, яка не перетинає його, відповідно на 13 м, 14 м, 17 м. Як віддалені від площини центр квадрата і вершина D?

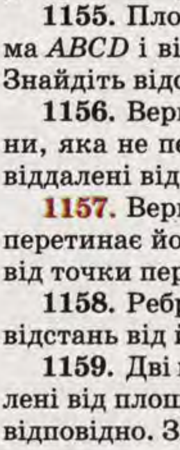
1157. Вершини трикутника віддалені від площини, яка не перетинає його, відповідно на 6 м, 8 м, 10 м. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до площини.

1158. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань від його вершини до протилежної грані.

1159. Дві вершини трикутника і точка перетину медіан віддалені від площини, яка не перетинає його, на 40 см, 24 см і 38 см відповідно. Знайдіть відстань від третьої вершини до площини.

1160. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 40 см. Відрізок завдовжки 50 см своїми кінцями впирається в ці площини. Знайдіть довжини проекцій відрізка на кожну з площин.

1161. Задача з несподіваною відповіддю. На книжковій полиці стоїть тритомник (мал. 234). Товщина кожної книжки 40 мм, а книжки без обкладинки 35 мм. Знайдіть відстань від першої сторінки першого тому до останньої сторінки третього тому.



Мал. 234

1162. З точки K, розміщеної по один бік від паралельних площин α і β, проведено дві прямі, які перетинають α у точках A і C, а β – у точках B і D відповідно. Знайдіть відстань між площинами, якщо точка K віддалена від β на 14 м, $AK = 9$ м, $CD = 16$ м, $KC = AB$.

1163. Через точку O, яка лежить між паралельними площинами α і β, проведено дві прямі, які перетинають α в точках A і C, а β – у точках B і D відповідно. $AO = OD$, $OC = 18$ м, $OB = 32$ м. Знайдіть відстань між площинами, якщо O віддалена від β на 16 м.

1164. M, N, K – середини ребер PA, PB, PC правильного тетраедра $PABC$. Знайдіть відстань між площинами (MNK) і (ABC), якщо $AB = a$.

1165. AK – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, $AB = a$, $AK = 2a$. Знайдіть відстань між прямими KB і CD, KB і AD.

1166. Ребро куба дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між діагоналлю куба і мимобіжною з нею діагоналлю основи.

1167. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть відстань між CC_1 і BD.

1168. Ребро правильного тетраедра a. Знайдіть відстань між його протилежними ребрами.

1169. Ребро куба a. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями його протилежних граней.

1170. Знайдіть відстань між діагоналлю куба, ребро якого дорівнює a, і будь-яким ребром, мимобіжним з цією діагоналлю.

Вправи для повторення

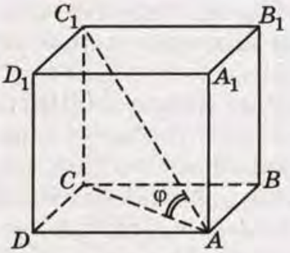
1171. Зобразіть паралельні площини α, β і прямі a, b, які перетинають площину α в точках M, N, а площину β – у точці K.

1172. З точок A і B площини α перпендикулярно до неї проведено відрізки $AK = 25$ см і $BM = 20$ см. Пряма KM перетинає площину α в точці C. Знайдіть відстань AC, якщо $AB = 16$ см. Розгляньте два випадки.

1173. Точка M – середина ребра CS тетраедра $ABCS$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму AB і точку M.

§ 33. Вимірювання кутів у просторі

З планіметрії ви вже знаєте, що таке кут, кут між двома прямими однієї площини. Знаєте також, що розуміють під кутом між мимобіжними прямими (с. 203). Розглянемо ще кілька стереометричних понять, пов'язаних з кутами.



Мал. 235

Кут між прямою і площиною. Що розуміють під кутом між прямою і площиною?

Якщо пряма паралельна площині, то вважають, що кут між такою прямою і площиною дорівнює 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює 90°. У решти випадків *кутом між прямою і площиною* називають кут між прямою і її ортогональною проекцією на площину.

Приклад. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 235). Знайдіть кут між прямою AC_1 і площиною його грані $ABCD$.

Проекція відрізка AC_1 на площину грані $ABCD$ – відрізок AC. Тому шуканий кут $\varphi = \angle C_1AC$. Його тангенс

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{CC_1}{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707, \text{ звідси } \varphi \approx 35^\circ 16'.$$

До кута між прямою і площиною близьке поняття кута між похилою і площиною. ***Кутом між похилою і площиною*** *називають кут між похилою і її проекцією на площину.*

Йдеться про прямокутну (ортогональну) проекцію. Якщо φ – кут між прямою і площиною, то $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$; якщо φ – кут між похилою і площиною, то $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

Можна довести, що **кут між похилою і площиною найменший з усіх кутів, які похила утворює з прямими, проведеними на площині через основу похилої.**

Кути між прямими і площинами часто доводиться вимірювати астрономам, геодезистам, географам, маркшейдерам, працівникам транспорту. Найпростіший саморобний прилад для вимірювання кутів між горизонтальною площиною і похилими – *еклімектр* (мал. 236). Бувають екліметри і фабричного виготовлення (мал. 237). У його циліндричному корпусі при натиснутій кнопці вільно обертається і встановлюється за виском градуйований диск. Якщо кнопку відпустити, диск закріплюється, і на

Мал. 236

Мал. 237

Мал. 238

його шкалі можна прочитати градусну міру кута, який вимірюють. Якщо потрібна більша точність, кути вимірюють *теодолітами* (мал. 238).

Теодоліт має два круги з градусними поділками (лімби). Користуючись горизонтальним лімбом, визначають кути в горизонтальній площині, вертикальний лімб дає змогу вимірювати кут між горизонтальною площиною і похилими до неї напрямами.

Кут між площинами. Якщо дві площини паралельні, то вважається, що кут між ними дорівнює 0°. Якщо площини α і β перетинаються по прямій c, то, щоб визначити кут між цими площинами, у кожній з них через довільну точку M прямої c можна провести прямі a і b, перпендикулярні до прямої c (мал. 212). Кут між прямими a і b приймають за кут між даними площинами α і β. Можна довести, що міра цього кута φ не залежить від вибору точки O на прямій c. Кут між двома площинами, як і між двома прямими, знаходиться в межах від 0° до 90°.

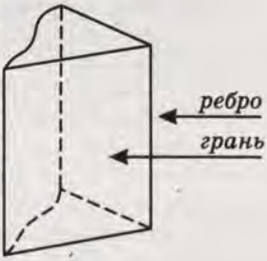
Якщо кут між двома площинами дорівнює 90°, то площини перпендикулярні.

Якщо дві площини перетинаються, то вони весь простір поділяють на 4 частини, які називають двогранними кутами.

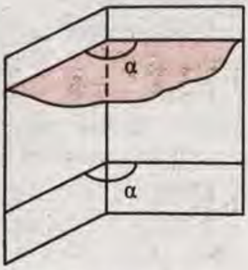
Двогранним кутом *називається частина простору, обмежена двома півплощинами, які виходять з однієї прямої.*

Півплощини, які обмежують двогранний кут, називають його гранями, а їх спільну пряму – *ребром* двогранного кута (мал. 239).

Кут, утворений перетином двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називають *лінійним кутом* даного двогранного кута. Будь-які два лінійні кути двогранного кута рівні (мал. 240). Тому двогранні кути можна характеризувати відповідними лінійними кутами. Якщо, наприклад, лінійний кут деякого двогранного кута дорівнює 60°, то кажуть, що це – двогранний кут 60°. Двогранний кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого залежно від того, чи є його лінійний кут гострим, прямим, тупим, розгорнутим чи більшим від розгорнутого (мал. 241).



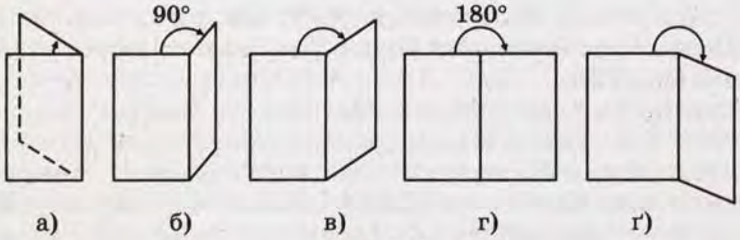
Мал. 239



Мал. 240

Не слід ототожнювати міру двогранного кута з кутом між площинами. Кут між площинами може змінюватися в межах від 0° до 90°, а міра двогранного кута – від 0° до 360°.

Замість «двогранний кут, міра якого дорівнює α» нерідко кажуть коротше:



Мал. 241

Мал. 242

«двогранний кут α». У таких випадках під двогранним кутом розуміють і певну фігуру, і відповідне її числове значення.

Найпростішими матеріальними моделями двогранного кута є краї різальних інструментів: зубил, стамесок, різців для токарних верстатів тощо. Вони бувають більш або менш гострими. Вимірюють такі кути *кутомірами* (мал. 242).

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке кут? Які бувають кути?
2. Що таке кут між прямою і площиною?
3. Яким може бути кут між прямою і площиною?
4. Що таке кут між похилою і площиною?
5. Що таке кут між двома площинами?
6. Якими приладами вимірюють кут між прямою і горизонтальною площиною?
7. Що таке двогранний кут? Які бувають двогранні кути?
8. На скільки двогранних кутів розбивають простір дві непаралельні площини?
9. Що таке лінійний кут двогранного кута?
10. Який з двох двогранних кутів більший?
11. У яких межах може змінюватися міра двогранного кута?

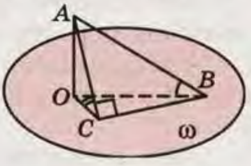
Виконаємо разом

1. Учень говорить: «Кути бувають плоскі і двогранні». Чи це правильно?

Відповідь. Ні, неправильно. Кутом називається частина площини, обмежена двома променями із спільною вершиною. Жоден з двогранних кутів не підходить під це означення, тому не є кутом.

2. Один з катетів рівнобедреного прямокутного трикутника лежить у площині ω, а другий нахилений до неї під кутом 45°. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною ω.

Розв'язання. Нехай ABC – трикутник, у якого $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$, а AO – перпендикуляр до площини ω, яка проходить через BC (мал. 243). Тоді $\angle ACO = 45°$. Якщо $AC = a$, то $BC = a$, $AB = a\sqrt{2}$, $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$.



Мал. 243

Маємо $\sin \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

Отже, $\angle ABO = 30°$.

Відповідь. 30°.

Виконайте усно

1174. Чи може бути від'ємним косинус кута нахилу похилої до площини?

1175. На малюнку 235 AC_1 – діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Під яким кутом нахилена діагональ куба до кожної його грані?

1176. Похила AB завдовжки d нахилена до площини α під кутом 30°. Знайдіть відстань від точки A до площини α.

1177. Чи правильно, що дві непаралельні площини ділять простір на чотири двогранні кути?

1178. Кут між двома площинами дорівнює 100°. Укажіть міру меншого з утворених двогранних кутів.

1179. Є два двогранні кути, лінійні кути яких дорівнюють 100° і 120°. Чи може їх об'єднання бути двогранним кутом?

1180. Є два двогранні кути, лінійні кути яких дорівнюють по 200°. Чи може їх об'єднання бути двогранним кутом?

1181. Є рівні двогранні кути, міра кожного з яких дорівнює 30°. Скількома такими двогранними кутами можна заповнити простір?

1182. Якою площиною можна розрізати двогранний кут на два рівні двогранні кути? А на дві рівні фігури?

1183. Скількома площинами двогранний кут можна розрізати на 4 рівні фігури? А на 4 рівні двогранні кути?

1184. Три площини, які проходять через одну пряму, ділять простір на рівні двогранні кути. Знайдіть міру одного з них.

1185. Скільки прямих, які перетинають дану площину під кутом 50°, можна провести через дану точку?

А

1186. Похила вдвічі довша за її проекцію на площину. Знайдіть кут між похилою і площиною.

1187. Точка A віддалена від площини α на 2 м. Знайдіть довжину похилої AB, нахиленої до α під кутом 30°.

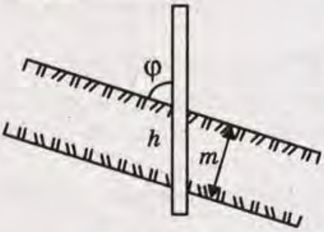
1188. Знайдіть кут між похилою і площиною, якщо вершина похилої віддалена від площини на відстань, що дорівнює довжині проекції похилої.

1189. Пряма AB з площиною α утворює кут $60°$. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α, якщо $AB = 48$ см.

1190. Довжина похилої AB дорівнює 50 см, а точка A віддалена від площини на 25 см. Знайдіть кут між похилою і площиною.

1191. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин під кутом α, то і другу площину вона перетинає під кутом α.

1192. Доведіть, що паралельні прямі нахилені до однієї і тієї самої площини під рівними кутами. Чи правильне обернене твердження?



Мал. 244

1193. Знайдіть товщину m вугільного пласта, якщо вертикальна свердловина нахилена до нього під кутом $\varphi = 72°$ і проходить по вугіллю відстань $h = 2{,}5$ м (мал. 244).

1194. На якій глибині знаходиться станція метро, якщо її ескалатор довжиною 85 м нахилений до площини горизонту під кутом $42°$?

1195. Кут між двома площинами $70°$. Знайдіть градусні міри двогранних кутів, утворених перетином цих площин.

1196. Дано двогранний кут $60°$. Точка A однієї його грані віддалена на 12 см від другої. Знайдіть відстань від точки A до ребра даного двогранного кута.

1197. Точка A прямого двогранного кута віддалена від його граней на 3 дм і 4 дм. Знайдіть її відстань від ребра двогранного кута.

1198. На зображенні правильного тетраедра побудуйте зображення лінійного кута одного з його двогранних кутів.

1199. З точки C на ребрі двогранного кута $90°$ у його гранях проведено перпендикуляри до ребра: $CA = 3{,}5$ дм і $CB = 1{,}2$ дм. Знайдіть відстань від A до B.

1200. Знайдіть кут між двома прямими, перпендикулярними до граней двогранного кута $100°$.

1201. Знайдіть кут між однією гранню двогранного кута $100°$ і прямою, перпендикулярною до другої грані.

1202. Визначте міру двогранного кута, якщо точка, взята на одній грані, віддалена від ребра вдвічі далі, ніж від другої грані.

1203. З точки, взятої всередині двогранного кута, опущено перпендикуляр на ребро; він утворює з гранями кути $38°24'$ і $71°36'$. Визначте міру двогранного кута.

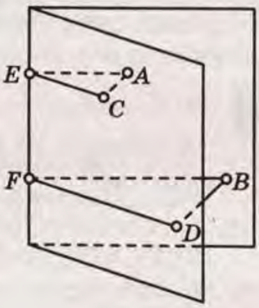
1204. Точка, взята всередині двогранного кута 60°, віддалена від обох граней на відстань a. Знайдіть відстань від точки до ребра.

1205. A і B – точки на ребрі прямого двогранного кута; AC і BD – перпендикуляри до ребра, проведені в різних гранях. Визначте відстань CD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см і $BD = 2$ см.

1206. Розв'яжіть попередню задачу, замінивши прямий двогранний кут кутом 120° і взявши: а) $AB = AC = BD = a$; б) $AB = 3$, $AC = 2$, $BD = 1$.

Б

1207. На одній грані двогранного кута дано дві точки A і B (мал. 245); з них опущено перпендикуляри на другу грань: $AC = 1$ дм, $BD = 2$ дм та на ребра: $AE = 3$ дм і BF. Знайдіть BF.



Мал. 245

1208. На одній грані двогранного кута взято дві точки, що віддалені від ребра на 51 см і 34 см. Відстань від першої точки до другої грані дорівнює 15 см. Визначте відстань від другої точки.

1209. Двогранний кут дорівнює 45°. На одній грані дано точку на відстані a від другої грані. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра.

1210. Якщо рівнобедрений прямокутний трикутник ABC перегнути по висоті BD так, щоб площини (ABD) і (CBD) утворили прямий двогранний кут, то лінії DA і DC стануть взаємно перпендикулярними, а BA і BC утворять кут 60°. Доведіть.

1211. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть міру двогранного кута BAC_1D.

1212. У тетраедрі $ABCD$ ребра AB, AC і AD попарно перпендикулярні і рівні. Знайдіть міри його двогранних кутів при ребрах BC, CD, BD.

1213. Кінці відрізка лежать на гранях прямого двогранного кута і віддалені від його ребра на 12 см і 16 см. Знайдіть відстань від даного відрізка до ребра двогранного кута.

1214. З точок A і B однієї грані гострого двогранного кута опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на другу грань і AA_2, BB_2 – на ребро. Знайдіть довжину BB_2, якщо $AA_1 = 3$ дм, $AA_2 = 5$ дм, $BB_1 = 9$ дм.

1215. Доведіть, що всі двогранні кути правильного тетраедра рівні.

1216. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною його основи кут 45°. Сторони основи дорівнюють 10 см і 24 см. Визначте висоту паралелепіпеда.

1217. AH – перпендикуляр до площини трикутника ABC, $AB = AC$. Доведіть, що похилі HB і HC з площиною трикутника утворюють рівні кути.

1218. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 6 см, точка M знаходиться на відстані 6 см від кожної з його вершин. Знайдіть кут між прямою MA і площиною квадрата.

1219. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює $3a$, точка M віддалена від кожної з його вершин на $2a$. Під якими кутами нахилені прямі MA, MB і MC до площини даного трикутника?

1220. Практичне завдання. Зробіть із цупкого паперу модель поверхні двогранного кута, накресліть будь-який його лінійний кут і продемонструйте, як змінюється двогранний кут зі зміною його лінійного кута.

Вправи для повторення

1221. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 32 см, а одна зі сторін – 14 см. Знайдіть периметр паралелограма.

1222. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, K – середини ребер AB, BC і BB_1.

1223. Побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в коло.

1224. До площини прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр BM завдовжки 12 см. Знайдіть довжини MA, MC, MD, якщо $AB = 5$ см, $BC = 9$ см.

1225. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки A, C і середину ребра DD_1.

1226. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $AK = KB$, CM – перпендикуляр до площини трикутника. Знайдіть CM, якщо $MK = 12,25$ см.

Самостійна робота № 7

Варіант 1

1. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до діагоналей паралелограма, перпендикулярна і до його сторін.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими: а) BC і AA_1; б) AC і B_1D_1.

3. Точки A і B віддалені від площини α на 13 см і 25 см. Як віддалена від площини α середина відрізка AB? Відрізок AB площину α не перетинає.

4. З точки M до площини α проведені похилі MA і MB завдовжки 13 см і 20 см. Знайдіть відстань від точки M до площини α, якщо проекції похилих пропорційні числам 5 і 16.

Варіант 2

1. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до бічних сторін трапеції, перпендикулярна і до її основ.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між прямими: а) BC_1 і CD; б) BC_1 і A_1D.

3. Кінці відрізка віддалені від площини на 8 м і 14 м. Знайдіть відстань від середини даного відрізка до площини. Відрізок перетинає площину.

4. З точки M до площини α проведені похилі MA і MB, різниця довжин яких дорівнює 7 см. Знайдіть відстань від точки M до площини α, якщо проекції похилих дорівнюють 5 см і 16 см.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке стереометрія?
2. Які фігури називають неплоскими? Наведіть приклади.
3. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
4. Сформулюйте і доведіть наслідки з аксіом стереометрії.
5. Як можна задати площину в просторі?
6. Накресліть паралелепіпед. Назвіть його елементи.
7. Який паралелепіпед називають прямокутним? Що таке куб?
8. Накресліть тетраедр. Назвіть його елементи.
9. Який тетраедр називають правильним?
10. Що таке переріз многогранника площиною? Наведіть приклади.
11. Які прямі називають мимобіжними?
12. Які прямі називають паралельними?
13. Сформулюйте теорему про транзитивність паралельних прямих.
14. Дайте означення прямої, паралельної площині.
15. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
16. Сформулюйте означення паралельних площин.
17. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності двох площин.
18. Сформулюйте і доведіть властивості паралельних площин.
19. Що таке паралельне проектування?
20. Перелічіть властивості паралельних проекцій відрізків.
21. Дайте означення кута між прямими в просторі.
22. Які прямі називають перпендикулярними?
23. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
24. Доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
25. Сформулюйте наслідки з ознаки перпендикулярності прямої і площини.
26. Що таке перпендикуляр до площини, основа перпендикуляра?
27. Що таке похила, основа похилої, проекція похилої на площину?
28. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.
29. Що таке відстань між фігурами?
30. Як знаходять відстань між мимобіжними прямими?
31. Що таке кут між прямою і площиною?
32. Якими приладами вимірюють кути в просторі?
33. Сформулюйте означення перпендикулярних площин.
34. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.

Головне в розділі 4

Кут між прямими. Кут між двома прямими, що перетинаються, – менший із утворених ними чотирьох кутів. Кут між паралельними прямими дорівнює 0°. Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, що перетинаються і які паралельні даним прямим.

Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює 90°. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.

Пряма називається *перпендикулярною до площини*, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до кожної прямої, що лежить у площині, і проходить через точку перетину (означення). Якщо пряма перетинає площину і перпендикулярна до двох різних прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна і до площини (ознака перпендикулярності прямої і площини).

Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до неї. Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.

Пряма, яка лежить у площині, перпендикулярна до похилої тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до проекції похилої (теорема про три перпендикуляри).

Кутом між прямою і площиною називають кут між прямою і її ортогональною проекцією на площину. Якщо пряма паралельна (перпендикулярна) площині, то кут між ними дорівнює 0° (90°). *Кутом між площинами* називають кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину. Кут між паралельними площинами дорівнює 0°.

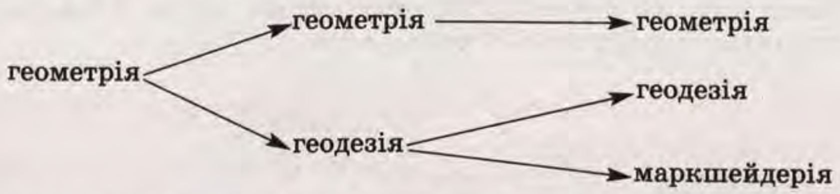
Дві площини називають перпендикулярними, якщо кут між ними прямий. Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої, то такі площини перпендикулярні (ознака перпендикулярності площин).

Проектування називають прямокутним, або ортогональним, якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій. Якщо S і $S_{\text{пр}}$ – площі многокутника і його ортогональної проекції, а кут між їх площинами φ, то

$$S_{\text{пр}} = S \cos \varphi.$$

Історичні відомості

Зародилася геометрія як наука про вимірювання земельних ділянок; у перекладі з грец. «геометрія» – землемірство. Але згодом давньогрецькі геометри відірвали геометрію від землі, перетворивши її на абстрактну науку. На геометричному матеріалі вони почали досліджувати означення, доведення, формальні побудови тощо. Оскільки потреба в удосконаленні вимірювань земельних ділянок залишалася, то виникла нова наука – *геодезія* (γῆ – земля, δαίω – поділяю). У ній розглядаються різні способи вимірювання відстаней, кутів, площ та інших геометричних величин, спеціальні вимірювальні засоби і т. ін. Згодом від геодезії відійшла ще одна окрема гілка прикладної геометрії – *маркшейдерія* (нім. Mark – межа, scheiden – розділяти), яка займається геометричними вимірюваннями в шахтах та інших гірничих виробках. Наочно ці розгалуження можна зобразити такою схемою:



Геодезія і маркшейдерія – дві гілки прикладної геометрії, їх теоретичною базою є наука геометрія.

Сучасну геометрію науковці звичайно будують на аксіоматичній основі. Тобто спочатку наводять неозначувані геометричні поняття, а потім на їх основі формулюють означення всіх інших геометричних понять. Так само спочатку формулюють аксіоми, потім на їх основі доводять всі інші твердження. Отже, геометрія складається з двох досить довгих і розгалужених ланцюгів: один містить означення геометричних понять, другий – доведення геометричних тверджень. Ці ланцюги не ізольовані один від одного, бо в кожному геометричному твердженні розглядаються ті чи інші геометричні поняття. До геометричних понять відносимо і геометричні відношення: паралельність, перпендикулярність, симетричність тощо.

Майже всі поняття і теореми з геометрії, що є в цьому підручнику, були відомі старогрецьким геометрам. В «Основах» Евкліда (III ст. до н. е.) про паралельність прямих і площин у просторі доведено 9 теорем, про перпендикулярність – 11. Це значно більше, ніж у нашому підручнику. Звичайно, означення, аксіоми і теореми формулювали інакше. Наприклад, аксіоми C_3 і C_4 відповідають першому і другому твердженням книги XI «Основ» Евкліда: «Частини прямої лінії не можуть лежати одна над площиною, а друга – у самій площині», «Дві площини перетинаються по прямій лінії». Тетраедри, паралелепіпеди, куби та багато інших геометричних тіл також були добре відомі стародавнім грецьким геометрам. І вивченням перерізів вони також займалися. Так, понад 22 століття тому Аполлоній Пергський написав праці «Про просторові перерізи» і «Конічні перерізи».

Зрозуміло, що геометрію тоді вивчали далеко не всі греки, однак такі були. У Стародавній Греції існували школи трьох рівнів: 1) школи граматиста або кифариста; 2) палестри; 3) гімнасії. У школах першого рівня діти ознайомлювалися з початками арифметики, в палестрах – з геометрією. До гімнасіїв ішли люди, які вже знали геометрію. Над входом до гімнасію Платона був напис: «Хай не ввійде сюди той, хто не знає геометрії!». Математика в античних школах була основоположним навчальним предметом, бо слово «математика» означало тоді знання, науку. Гімнасії існували в Ольвії, Херсонесі, а школи нижчих рівнів і в багатьох інших містах сучасного українського узбережжя Чорного моря.

ЕВКЛІД

(бл. 365–300 до н. е.)

Давньогрецький математик, учень Платона, автор праці «Основи», у якій систематизовано майже всі попередні математичні відомості. Після 1482 р. цю книгу передруковували понад 500 разів багатьма мовами. В Англії і деяких інших країнах «Основи» Евкліда аж до XX ст. були підручником геометрії для середніх шкіл.

Про життя Евкліда відомостей мало. Він народився в Афінах і навчався у Платона. На запрошення Птолемея І переїхав працювати до Александрії, яка на той час була центром наукової думки. Папп Александрійський зображає Евкліда як людину лагідну і скромну, виключно чесну і незалежну.

Основну свою працю Евклід грецькою мовою називав "Στοιχεῖα", тобто стихії. Латинською мовою її називали «Elementa» (елементи), російською – «Начала», тобто початки, або основи.

Праця Евкліда складається з 13 книжок. Планіметричний матеріал викладено в п'яти книжках (I–IV, VI). Стереометричний – у книжках XI, XII і XIII. Матеріал, що розглядається зараз у 10-му класі, викладено в книжці XI. Спочатку подається 28 означень, серед яких означення прямої, перпендикулярної до площини, і двох перпендикулярних площин, піраміди, призми, сфери, конуса, циліндра, куба, октаедра, ікосаедра, додекаедра. А потім розглядаються 39 положень. Зокрема, положення про паралельні і перпендикулярні прямі та площини, про кути, утворені прямими і площинами. Тут досліджуються також паралелепіпед і призма.

Не слід думати, що автор «Основ» першим відкрив і довів усі викладені ним теореми. Багато з них було відомо і його попередникам. Але Евклід настільки вдало систематизував математичні відомості, що його «Основи» були головним підручником математики майже для всього світу протягом більш як 2000 років. Книжка Евкліда цікава не тільки своїм багатим змістом, а й формою викладу. У ній спочатку сформульовані означення і аксіоми, а всі наступні твердження доведені як теореми. Це – перша спроба аксіоматичної побудови геометрії.

«Основи» Евкліда були зразком логічної строгості до XIX ст., аж поки не виявилися суттєві недоліки в їх побудові. Системі аксіом та постулатів Евкліда бракує повноти та аксіом порядку.

Сучасна геометрія займається здебільшого дослідженням абстрактних геометричних фігур, розміщених в абстрактних геометричних просторах. Таких просторів відомо багато: двовимірні, тривимірні, чотиривимірні, n-вимірні, евклідові, неевклідові тощо.

Стереометрія – це розділ геометрії про властивості фігур тривимірного евклідового простору.

Ортогональне проектування європейським математикам було відоме в XVIII ст. Французький геометр і громадський діяч Г. Монж запропонував здійснювати ортогональне проектування одночасно на дві взаємно перпендикулярні площини, створивши тим самим окрему галузь геометричної науки – *нарисну геометрію*. Метод Монжа виявився настільки важливим і корисним для військової справи, що його впродовж багатьох років було засекречено, як військову таємницю. Розсекретили тільки в 1794 р. Тепер нарисну геометрію вивчають у кожному вищому технічному навчальному закладі.

ГАСПАР МОНЖ

(1746–1818)

Французький геометр і політичний діяч, творець нарисної геометрії і один з основоположників диференціальної геометрії. Досліджував проблеми креслення, математичного аналізу, метрології, хімії, механіки. Палкий прихильник Французької революції, морський міністр, організатор національної оборони, товариш Наполеона. Математичну освіту здобував самостійно, навчався, а потім і працював у школі військових інженерів.

Багато для розвитку геометрії зробили також Л. Ейлер, К.Ф. Гаусс, Ж. Лагранж, Ж. Понселе, А. Мебіус, Д. Гільберт, Г. Ріман, Г. Мінковський та десятки інших учених.

Особливо великий внесок у розвиток геометрії М.І. Лобачевського. Він відкрив у 1892 р. існування зовсім нової геометрії, пізніше названої на його честь геометрією Лобачевського.

МИКОЛА ІВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСЬКИЙ

(1792–1856)

Народився у Нижньому Новгороді, навчався у Казанському університеті, пізніше був викладачем, деканом, ректором цього університету. Його рід походив з Волині. Його відкриття нової геометрії було настільки глибоким і несподіваним, що деякі видатні вчені висміювали автора.

Геометрію Лобачевського вивчають у вищих навчальних закладах. У школі ж розглядають лише евклідову геометрію. Логічно строгі обґрунтування різних геометрій вперше було здійснено наприкінці XIX ст. в роботах італійського математика Маріо Пієрі (1860–1904), професора Геттінгенського університету Давида Гільберта (1862–1943) і приват-доцента Новоросійського (Одеського) університету Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953). В.Ф. Каган побудував «метричну» систему аксіом евклідової геометрії. Векторну аксіоматику евклідової геометрії створив Герман Вейль (1885–1955).

Багато зробив для розвитку геометрії відомий український математик Г.Ф. Вороний (1868–1908) – творець геометричної теорії чисел. Зокрема він досліджував різні заповнення простору рівними многогранниками. Значний внесок у розвиток геометричної науки зробили українські математики М.Є. Ващенко-Захарченко (1825–1912), С.Й. Шатуновський (1859–1929), О.С. Смогоржевський (1896–1969), М.І. Кованцов (1924–1987) та багато інших.

ГЕОРГІЙ ФЕОДОСІЙОВИЧ ВОРОНИЙ

Український математик. Народився в с. Журавка Чернігівської області. Досліджував проблеми геометричної теорії чисел, геометрії многогранників. Математики всього світу все частіше використовують поняття: алгоритм Вороного, клітини Вороного, метод Вороного, многокутники Вороного, діаграми Вороного, розбиття Вороного, мозаїка Вороного та ін.

Додатки

Теми для завдань творчого характеру

1. Нумерації та системи числення – 22[1], 23
2. Фалес Мілетський – 2, 12, 18
3. Піфагор і його школа – 2, 12, 22, 23
4. Платон і геометрія – 2
5. Прості числа – 10, 22, 23
6. Магічні квадрати – 23
7. Що є число? – 10, 18
8. Математичні софізми – 23
9. Число π – 5, 18, 23
10. Математика і календар – 23
11. Ейлер і геометрія – 5, 23, 26
12. Діофантові рівняння – 5, 10, 12, 23
13. Перспектива в геометрії і мистецтві – 17, 23
14. Неевклідові геометрії – 5
15. Що таке топологія? – 6, 23
16. Задачі Наполеона – 23
17. Математика в Стародавній Греції – 5, 6
18. Математика в Європі до Відродження – 5
19. Омар Хайям – математик і поет – 2, 5, 12
20. Декарт – математик і філософ – 2, 5, 10, 12
21. Ферма – математик і юрист – 2, 5, 12, 23
22. Паскаль і психологія моралі – 2, 12
23. Галуа – математик і політик – 2, 6, 10, 23
24. Геометрія і Марсельєза – 7
25. Бібліотекар та історіограф Лейбніц – 2, 6, 12, 23
26. Ковалевська – математик і літератор – 2, 23
27. Що таке математика? – 11, 18, 22
28. Математика і шахи – 23
29. Що таке математична логіка? – 22, 23
30. Як творилась кібернетика? – 10, 14, 23
31. Розвиток математики в Україні – 1, 13, 24
32. Остроградський – математик і патріот – 23
33. Ймовірності – 22, 23
34. Клітини Вороного – 2, 14
35. Комбінаторні задачі і комбінаторика – 6, 22, 23
36. Множини в сучасній математиці – 10, 23
37. Математика і романтика – 9
38. Геометрія паркетів і орнаментів – 23, 25
39. Доля академіка М. Кравчука – 1, 2, 16

[1] Числа відповідають номерам книг зі списку літератури, в яких висвітлено названі теми.

Література

1. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці/ Упоряд. О.К. Романчук. – Львів, 1992.
2. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К., 1973.
3. Василенко О. Серенада математиці. – К., 1996.
4. Вірченко Н.О. Математика в афоризмах і висловлюваннях. – К., 1974.
5. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII–VIII классы. – М., 1982.
6. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX–X классы. – М., 1983.
7. Демьянов В. Геометрия и Марсельеза. – М., 1979.
8. Игнатьев Е.И. Хрестоматия по математике. – Ростов, 1995.
9. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К., 1980.
10. Кованцов М.І. Математична хрестоматія. – К., 1977.
11. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М., 1991.
12. Конфорович А.Г. Колумби математики. – К., 1982.
13. Конфорович А., Сорока М. Остроградський. – К., 1980.
14. Конфорович А.Г. У пошуках інтеграла. – К., 1990.
15. Ліо Кі. Ломиголовки. – К., 1996.
16. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К., 1991.
17. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. – К., 1988.
18. Тадеєв В.О. Математика: Тлумачний словник-довідник. – Тернопіль, 1989.
19. У світі математики. – К., 1968–1991. – Вип. 1–20.
20. У світі математики: Журнал для школярів.
21. Шафаревич И. Есть ли у России будущее? – М., 1991.
22. Шляхами математики / Упоряд. Т.М. Хмара. – К., 1999.
23. Энциклопедический словарь юного математика. – М., 1985.
24. Шмигевський М.В. Видатні математики. – Харків, 2004.
25. Бевз Г.П. Геометрія паркетів. – К., 2008.
26. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К., 2009.
27. Тадеєв В.О. Геометрія, 10 клас. – Тернопіль, 2003.

Відомості з математики 5–9 класів

Пригадаємо найважливіші відомості з попередніх класів, які часто використовуються.

Закони дій

$$a + b = b + a$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$ab = ba$$
$$(ab)c = a(bc)$$
$$a(b + c) = ab + ac$$

Властивості дробів

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$$
$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$
$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

Формули скороченого множення

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Степені і корені

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$
$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Рівняння

Рівняння $ax = b$ має:
1 корінь, якщо $a \neq 0$;
0 коренів, якщо $a = 0$, $b \neq 0$;
безліч коренів, якщо $a = 0$ і $b = 0$.

Квадратні рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$ – рівняння,

$D = b^2 - 4ac$ – дискримінант,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$x^2 + px + q = 0$ – зведене рівняння,

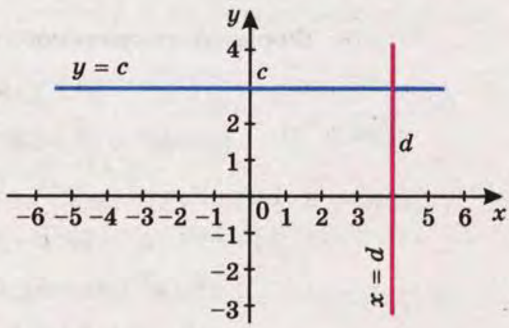
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ – його корені,

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$ – теорема Вієта.

Рівняння з двома змінними

Лінійне рівняння з двома змінними $ax + by = c$ має безліч розв'язків або не має жодного (якщо $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$).

Графіки рівнянь $y = c$, $x = d$.

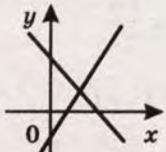


Система лінійних рівнянь

Система лінійних рівнянь:

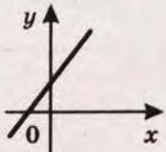
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$



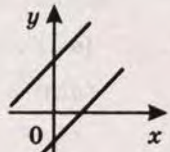
Має один розв'язок

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$



Має безліч розв'язків

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$



Не має жодного розв'язку

Прогресії

Арифметична прогресія:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d, \ldots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрична прогресія:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3,\ b_1q^4, \ldots$$

$$b_n = b_1q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},$$

$$S_n = \frac{b_1}{q-1}, \text{ якщо } |q| < 1.$$

Нерівності

$a > b$, якщо число $a - b$ додатне,

$a < b$, якщо число $a - b$ від'ємне.

Властивості числових нерівностей

Якщо $a < b$, то $b > a$.

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$.

Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$.

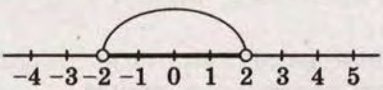
Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$.

Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Якщо $0 < a < b$ і $0 < c < d$, то $ac < bd$.

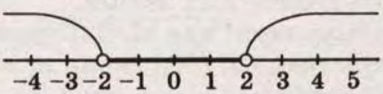
Розв'язування нерівностей, які містять модуль

$|x| < 2$



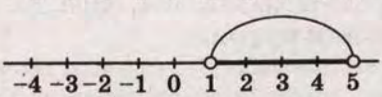
$(-2; 2)$

$|x| > 2$



$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$|x - 3| < 2$



$(1; 5)$

Аксіоми планіметрії. Основне в геометрії – її поняття і твердження. Для більшості понять формулюються означення, але існують поняття *неозначувані*. Це – *точка*, *пряма*, *площина* та деякі інші.

Переважну більшість геометричних тверджень доводять, тобто показують, що вони як логічні наслідки випливають з інших істинних тверджень. А як бути, коли на початку курсу ще немає «інших тверджень»? У цих випадках кілька тверджень приймають за істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*. А твердження, що доводяться, – *теоремами*.

Для планіметрії можна обирати різні системи аксіом. Одна з них може бути такою.

1. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.*
2. *Через будь-які дві різні точки можна провести пряму і тільки одну.*
3. *З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.*
4. *Кожний відрізок має певну довжину.*
5. *Кожний кут має певну міру.*
6. *Пряма розбиває площину на дві півплощини.*
7. *На будь-якій прямій від заданої точки у заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.*
8. *Від будь-якого променя у даній півплощині можна відкласти даний кут з вершиною у початку променя і тільки один.*
9. *Який би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно заданої прямої.*
10. *Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій (аксіома Евкліда).*

Розділи про геометричні величини, геометричні перетворення і побудови потребують додаткових аксіом.

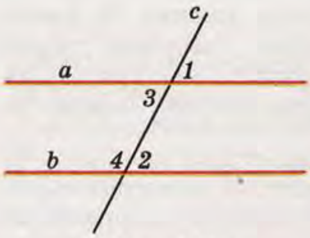
Паралельні і перпендикулярні прямі. Дві прямі однієї площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Два відрізки або промені називають *паралельними*, якщо вони належать паралельним прямим.

Ознаки паралельності прямих. Дві прямі a і b однієї площини паралельні (мал. 246), якщо їх січна утворює з ними:

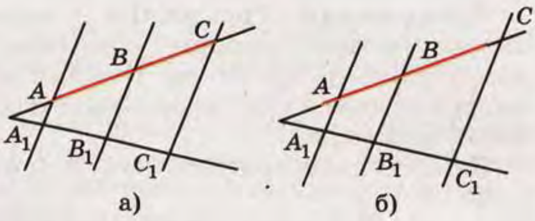
а) рівні відповідні кути ($\angle 1 = \angle 2$); або

б) рівні внутрішні різносторонні кути ($\angle 2 = \angle 3$); або

в) внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° ($\angle 3 + \angle 4 = 180°$).



Мал. 246



Мал. 247

Властивості паралельних прямих. Якщо прямі a і b паралельні, то виконуються всі три рівності, зазначені вище в пунктах а) – в).

Відношення паралельності прямих транзитивне: якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Дві прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Відрізки або промені називають *перпендикулярними*, якщо вони належать перпендикулярним прямим.

Дві прямі однієї площини, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута і на одній стороні відтинають рівні відрізки, то і на другій стороні вони відтинають рівні відрізки.

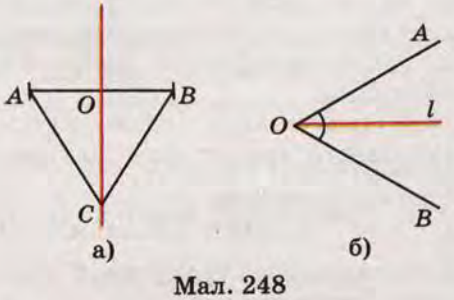
Якщо $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ і $AB = BC$, то $A_1B_1 = B_1C_1$ (мал. 247, *а*).

Узагальнена теорема Фалеса. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.

Якщо $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, то $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$ (мал. 247, *б*).

Геометричне місце точок – це множина усіх точок, які задовольняють певну умову.

Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр цього відрізка (мал. 248, *а*).



Мал. 248

Якщо $AO = BO$ і $CO \perp AB$, то $AC = BC$.

Геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін, – бісектриса цього кута (мал. 248, *б*).

Трикутники. *Трикутник* – замкнена ламана із трьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається трикутником. Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути. Суму сторін трикутника називають його *периметром*.

Якщо сторони трикутника a, b, c, а протилежні їм кути α, β, γ, то:

$$|b - c| < a < b + c;$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ознаки рівності трикутників. Два трикутники рівні, якщо:

1) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника; або

2) сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника; або

3) три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника.

У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута – більша сторона.

Відрізок, який сполучає середини двох сторін трикутника, – його *середня лінія*. Середня лінія трикутника паралельна його третій стороні і дорівнює її половині.

Трикутники, в яких усі відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні, називаються *подібними*.

Основна теорема про подібність трикутників. Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

Ознаки подібності трикутників. Два трикутники подібні, якщо:

1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника; або

2) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника, а кути між ними рівні; або

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника.

Два прямокутні трикутники подібні, якщо:

1) гострий кут одного трикутника дорівнює куту другого трикутника; або

2) катети одного трикутника пропорційні катетам другого трикутника; або

3) катет і гіпотенуза одного трикутника пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.

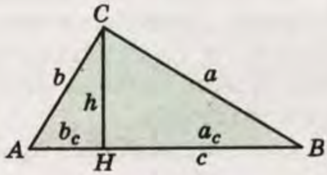
З ознак подібності трикутників випливають такі теореми.

Бісектриса трикутника ділить його протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

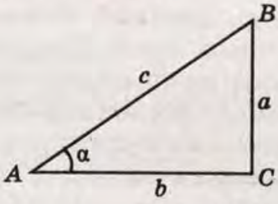
Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

Катет прямокутного трикутника – середнє пропорційне гіпотенузи c і його проекції на гіпотенузу. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, – середнє пропорційне відрізків, на які висота ділить гіпотенузу (мал. 249).

$$a^2 = a_c \cdot c; \quad b^2 = b_c \cdot c; \quad h^2 = a_c \cdot b_c.$$



Мал. 249



Мал. 250

Якщо c – гіпотенуза, а a, b – катети прямокутного трикутника (мал. 250), то:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ – } \textit{теорема Піфагора};$$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Якщо a, b, c – сторони трикутника, а α, β, γ – протилежні їм кути, то завжди

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ – } \textit{теорема косинусів};$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \text{ – } \textit{теорема синусів}.$$

Кожний з трьох останніх дробів дорівнює $2R$, де R – радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

Навколо кожного трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів його сторін. У кожний трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину його бісектрис.

Площа трикутника. Кожний трикутник (як частина площини, обмежена замкненою ламаною) має площу. Формули для визначення площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a; \; S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \; S = rp; \; S = \frac{abc}{4R}.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ – } \textit{формула Герона}, \text{ де } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Для прямокутних і рівносторонніх трикутників формули простіші:

Прямокутний трикутник	Рівносторонній трикутник
$S = \frac{1}{2}ab$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Чотирикутники. *Чотирикутник* – проста замкнена ламана з чотирьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається чотирикутником. Сума всіх кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°. Кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших його сторін.

Чотирикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні, – *паралелограм.*

Ознаки паралелограма. Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

1) кожна його сторона дорівнює протилежній стороні; або
2) дві його сторони паралельні й рівні; або
3) його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

Властивості паралелограма:

- кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні і дорівнює їй;
- кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту;
- кожна діагональ паралелограма точкою перетину ділиться навпіл;
- сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

Окремі види паралелограмів – *прямокутники, ромби, квадрати* – мають додаткові властивості:

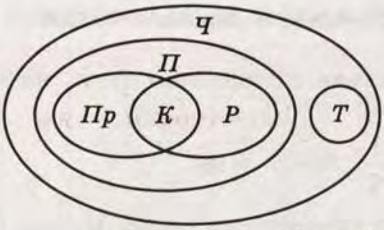
– діагоналі прямокутника (квадрата) рівні;

– діагоналі ромба (квадрата) перпендикулярні і належать бісектрисам його кутів.

Чотирикутник, тільки дві сторони якого паралельні, – *трапеція.* Паралельні сторони трапеції – її основи, дві інші – бічні сторони. Окремі види трапецій – рівнобічні і прямокутні трапеції. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, – її *середня лінія.* Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.

Співвідношення між окремими видами чотирикутників показано на схемі (мал. 251).

Площі чотирикутників. Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін $S = ab$.



Ч — чотирикутники
П — паралелограми
Пр — прямокутники
Р — ромби
К — квадрати
Т — трапеції

Мал. 251

Площа паралелограма

$$S = ah_a \text{ або } S = ab\sin\gamma,$$

де a, b – його сторони, γ – кут між ними, h_a – висота, опущена на сторону a.

Якщо діагоналі чотирикутника дорівнюють d_1 і d_2, а кут між ними α, то його площа $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$.

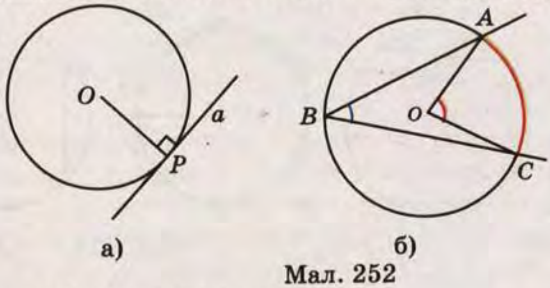
Площа ромба дорівнює $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Коло. Кути та відрізки, пов'язані з колом. *Коло* – фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки – *центра кола*. Частина площини, обмежена колом, – *круг*. *Радіус* – відрізок, що сполучає будь-яку точку кола з його центром. Відрізок, що сполучає дві довільні точки кола, називають *хордою*. Хорда, що проходить через центр кола, – *діаметр*.

Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку і лежить у площині кола, називається *дотичною* до кола.



а) б)

Мал. 252

Мають місце такі властивості:

- діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї;
- дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику (мал. 252, *а*);

- відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки, рівні;
- вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається (мал. 252, *б*):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.$$

Довжину кола C радіуса r визначають за формулою $C = 2\pi r$. Довжину l дуги кола радіуса r, яка має n градусів, можна визначити за формулою $l = \frac{\pi r n}{180}$.

Площу S круга радіуса r знаходять за формулою $S = \pi r^2$.

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором*, а частину круга, обмежену його хордою і дугою, – *сегментом* (мал. 253). Сегмент може бути півкругом, меншим від півкруга або більшим. Півкруг – один з видів сектора. Якщо сектор круга радіуса r має n градусів, то його площа $S_{сек} = \frac{\pi r^2 n}{360}$. Площа довільного сегмента дорівнює сумі або різниці площ сектора і трикутника.

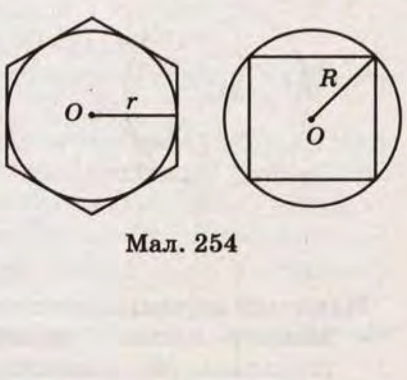
Сторона a_n правильного n-кутника через радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола (мал. 254) виражається формулами:

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n} \text{ і } a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n};$$

$$a_3 = R\sqrt{3},\ a_4 = R\sqrt{2},\ a_6 = R;$$

$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ a_4 = 2r,\ a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Мал. 253



Мал. 254

Таблиця значень тригонометричних функцій

Градуси	Синуси	Косинуси	Тангенси	Котангенси	Градуси
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63698	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27685	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07239	47
44	0,69466	0,71134	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
	cos	sin	tg	ctg	

Таблиця квадратів чисел

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	764	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	34814
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881
11	12100	12321	12544	12769	12996	13225	13456	13689	13924	14161
12	14400	14641	14884	15129	15376	15625	15876	16129	16384	16641
13	16900	17161	17424	17689	17956	18225	18496	18769	19044	19321
14	19600	19881	20164	20449	20736	21025	21316	21609	21904	22201
15	22500	22801	23104	23409	23716	24025	24336	24649	24964	25281

Предметний покажчик

А

Аксіоми стереометрії 159
Аналогії 209
Аргумент функції 31
Арккосинус 138
Арксинус 139
Арктангенс 140

В

Вирази алгебраїчні 54
– ірраціональні 54
– раціональні 54
– трансцендентні 54
Відношення геометричні 159
– паралельності 159
–– площин 194
–– прямих 171
–– прямої і площини 188
Відрізки паралельні 171
– перпендикулярні 203
Відсотки 22
Відстань між точками 229
– прямими мимобіжними 230
– паралельними площинами 230
– фігурами 229
Властивості коренів 51
– паралельного проектування 176
– степенів 59

Г

Геометрія 4

Д

Двогранний кут 237
Дослідження функції 42

Е

Екліметр 236

З

Значення функції 31
– найбільші 43
– найменші 44

К

Корінь арифметичний 51
– n-го степеня 50
Косинус кута 85
– числа 92
Котангенс кута 85
– числа 93
Кут між площинами 219, 237
– похилою і площиною 236
– прямими 202
– прямою і площиною 236
Кутомір 238

Л

Лінійний кут двогранного кута 237
Лінія 182
– штрихова 182
– штрихпунктирна 182

М

Мимобіжні прямі 170
Множина нескінченна 8
– порожня 156
– щільна 9
Моделі мимобіжних прямих 170
– паралельних площин 194
– перпендикулярів до площин 214

Н

Найбільше значення функції 43
Найменше значення функції 43
Неперервність функції 44
Нерівність ірраціональна 71
– тригонометрична 137

О

Область визначення функції 31
– значень функції 31
Одиничне коло 85
Ознака мимобіжності прямих 170
– паралельності площин 193
– прямої і площини 207
– перпендикулярності площин 219
Ортогональне проектування 223
Основа перпендикуляра 213
– похилої 213
Основна властивість степеня 59

П

Паралелепіпед 154
Паралельне проектування 176
Паралельність відрізків 171
– площин 193
– прямої і площини 188
Переріз многогранника 165
Період функції 109, 118
Перпендикуляр 213
Перпендикулярні відрізки 203
– площина і пряма 207
– площини 218
– прямі 203
Перспектива 176
Планіметрія 154
Площа проекції многокутника 223
Площина 155
– проекцій 176
– січна 165
Площини паралельні 193
– перпендикулярні 219
Показник кореня 51
– степеня 58
Поняття неозначувані 159
Похила 213
Проектування ортогональне 223
Правило зведення 105
Проекція вироджена 177
– похилої 213
– фігури 176
Проміжки зростання функції 42
– спадання функції 42
Прямі 155, 159
– мимобіжні 170
– паралельні 170
– пересічні 164

Р

Радіан 91
Ребро двогранного кута 237
Рівняння ірраціональне 70
– тригонометричне 137

С

Секанс кута 148
Симетрія відносно площини 214
Синус кута 85
– числа 92
Синусоїда 111
Січна площина 165
Спільний перпендикуляр 230
Степінь числа 58
– з натуральним показником 58
– з раціональним показником 59
– з цілим показником 58
Стереометрія 154

Т

Тангенс кута 85
– числа 93
Тангенсоїда 112
Теодоліт 237
Теорема про три перпендикуляри 214
– про властивості степеня 59
Тетраедр 154

Ф

Фігура неплоска 154
– плоска 154
Формули додавання 125
– зведення 103
– подвійних кутів 130
– половинних кутів 131
– пониження степеня 131
Функція 30
– зростаюча 43
– непарна 42
– неперервна 44
– парна 42
– періодична 209
– спадна 43
– степенева 64
– тригонометрична 91

Ч

Числа дійсні 6
– ірраціональні 8
– комплексні 8
– натуральні 6
– раціональні 8
– цілі 7

Ц

Центральне проектування 176

Відповіді

4. Ні. **11.** 38 000 007 005. **15.** 4950. **17.** а) XLVII. **18.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{13}{10}$. **19.** б) 0,75. **20.** б) 5,133... . **21.** б) $\frac{1}{4}<\frac{2}{7}$. **27.** $10\,111_2 = 23$. **28.** Сума дорівнює 10 010 001. **29.** Цього не могло бути. **30.** $\overline{abcabc} = 1001\overline{abc}$, де a, b, c – цифри, а $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. **31.** У 1931 р. **32.** 1659 р. **37.** Сума двох ірраціональних чисел може бути як раціональним, так і ірраціональним числом. **38.** Правильно. **41.** а) 1 і 6. **49.** а) 24,1. **51.** а) 20. **52.** в) 7,8. **54.** 10; 6. **57.** а) 0,92. **59.** а) 4. **61.** а) 28. **63.** а) 3. **65.** а) 20. **66.** а) 426 км. **68.** 2,64 кг. **72.** б) 20. **73.** а) 22,5. **75.** а) −4. **77.** а) 1,6; б) 52. **79.** б) 7. **83.** 675 000 л. **84.** 9,93 Ом. **85.** а) 43 км. **88.** 19 і 14. **91.** а) 2000. **101.** 7500 т. **102.** 100 т. **103.** ≈ 22 %. **106.** 15 м. **107.** 500 кг. **109.** На 32 %. **110.** 76 найменувань. **112.** 34 %. **113.** 220 студентів. **114.** 420 клієнтів. **116.** 5200 грн. **119.** 2000 кг. **120.** ≈ 327 т. **122.** 134,4 грн. **125.** На 20 %. **126.** На 14,5 %. **127.** Знизилася на 6,5 %. **130.** 67,2 грн. і 60 грн. **131.** ≈ 22 %. **133.** На 50 %. **134.** 1,25 кг. **135.** 220 кг. **136.** Зменшилась удвічі. **137.** 125 г. **140.** 60 г. **144.** а) На 400 %. **146.** а) $(-\infty; 21)$. **155.** $S=\frac{1}{16}P^2$. **157.** Обидва говорять правильно. **158.** $L=\frac{3937}{3600}l$. **161.** в) 1; 0; 1; 2; 3. **163.** б) 5; 1,5; 1; 0,5; −9. **167.** а) (0; 0). **168.** б) $[-1; +\infty)$; г) $x \neq 1$. **169.** [0; 25]. **170.** [−2; 3]. **173.** $m = 0{,}8V + 40$. **175.** $y = 200 - 2{,}5x$, $x \in [0; 80]$. **177.** в) $y = 3x$. **180.** $y = x + 3$. **182.** Через точку (0; 5) графік не проходить. **190.** $t=\frac{2}{61}h+14\frac{51}{61}$. **194.** а) $3a^2bc^3$. **203.** а) [0; 6]. **204.** а) [4; 7]. **209.** а) Один; в) два. **210.** в) 25. **211.** а) $y > 0$, якщо $x > -3$; $y < 0$, $x < -3$. **212.** б) Спадна. **218.** а) $y = 0$, якщо $x = -11$ і $x = 1$; $y < 0$, якщо $x \in (-11; 1)$. **219.** б) −2. **220.** в) −1. **223.** а) $x > -2{,}5$. **226.** а) (3; 2). **227.** а) 3 і −3. **229.** а) 3; д) −0,2. **235.** в) 1,5. **238.** б) 0,8. **239.** в) 7. **243.** б) −5. **244.** в) $5+2\sqrt{6}$. **246.** в) $\sqrt[6]{40}$. **247.** а) 4. **249.** а) $10\sqrt[3]{3}$. **250.** б) $2ab\sqrt[3]{4a^2}$. **251.** б) $\sqrt[4]{48}$. **252.** а) $\sqrt[4]{5a^4b^4}$. **253.** в) $5\sqrt[5]{16a^3}$. **254.** г) $\sqrt[3]{3}$. **255.** а) 8 і −8. **256.** в) 4 і −4. **257.** в) 5. **258.** в) 9. **259.** в) 0. **260.** в) 1. **261.** в) 0. **262.** ґ) −0,25. **263.** б) 6. **264.** а) $a\sqrt[4]{b}+b\sqrt[4]{a}$. **265.** а) $\sqrt{5}$. **266.** а) $3\sqrt[4]{8}$. **267.** б) $-3\left(1+\sqrt{6}\right)$. **269.** $\sqrt{11}$ і $-\sqrt{11}$. **270.** в) $\sqrt[9]{-2}$. **271.** в) 8.

272. в) -8. **273.** в) $7{,}5\cdot10^5$. **274.** а) $(-\infty; 3)$. **281.** в) 343. **282.** в) 1. **283.** а) 8. **284.** в) 2. **285.** в) 25. **286.** в) 6. **287.** б) 0,5. **288.** а) 3. **289.** а) 4. **291.** б) x^2. **292.** б) $c+1$. **295.** б) $\sqrt[3]{x-3}$. **296.** в) $a^2(x-a)^{0,5}$. **297.** а) $\sqrt[3]{c}+\sqrt[5]{c}$. **298.** в) $c^{2,2}$. **299.** б) a^1. **300.** б) 4. **301.** в) 2. **302.** а) 1000. **303.** б) 0,8. **304.** а) a^2-x. **305.** б) $n+8$. **306.** б) $x^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$. **307.** в) $c+1$; г) $-\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$. **308.** в) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$. **310.** б) 5 і -4. **323.** Ні. **325.** $-m$. **335.** а) 2; г) 0,5. **337.** б) 8. **340.** б) 1. **342.** г) $-0{,}25$. **350.** а) 2. **352.** 60 кг. **356.** а) 81. **357.** а) 8. **358.** а) 9. **359.** а) 5; б) 5. **360.** а) 2; г) 5. **361.** а) 0,75 і -2; б) 7 і -11; в) 2 і $-1{,}4$. **362.** а) 8. **363.** а) $[0; 9)$; в) $(49; +\infty)$. **364.** а) 0,25. **365.** а) 9 і -9. **366.** а) 4 і 9. **367.** б) -1 і 27. **368.** в) 5. **369.** а) 3; в) 0, 3 і 4. **370.** а) 3; в) 61. **371.** а) 7; в) 84. **372.** а) 4; в) 3. **373.** а) $[2; 3)$. **374.** а) $(-\infty; 25)$. **375.** а) $[-4; -1)$. **376.** а) $(8; 1)$. **377.** а) $(9; 1)$. **378.** а) $(25; 9)$. **379.** 5 см і 12 см. **380.** 16 см і 63 см. **391.** $360°$; $4320°$. **395.** $\sin\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$ або $\sin\alpha=-0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=-1\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$. **397.** б) $\cos10° > \cos40°$; в) $\sin20° = \sin160°$. **398.** а) $0{,}5\left(1+\sqrt{3}\right)$; в) 0,5. **399.** б) $\sin90°=1$, $\cos90°=0$, $\operatorname{ctg}90°=0$. **400.** а) $\cos5° > \cos7°$. **401.** б) $0{,}25\sqrt{3}$. **402.** а) Мінус; г) плюс. **404.** а) Плюс. **406.** а) 0. **407.** а) $2\sqrt{2}$. **409.** в) 2 і 0. **410.** в) Ні. **414.** а) $30°$. **415.** а) $0{,}5\sqrt{2}$ або $-0{,}5\sqrt{2}$. **419.** а) $\beta>\alpha$. **431.** д) $\frac{3\pi}{4}$. **432.** в) $\frac{7\pi}{12}$. **433.** а) $120°$. **434.** а) $\approx114°$. **440.** а) Мінус. **445.** а) 0. **446.** в) 0,5. **447.** б) 1,25. **448.** б) $\sqrt{2}$. **449.** б) $\sin1>\sin3$. **456.** а) 2. **458.** в) 1. **467.** а) $\sin^2\alpha$; в) 1. **468.** а) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}x$. **469.** б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **470.** б) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$. **471.** б) $\sin\alpha=-0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$. **472.** а) 0. **478.** а) $2\sin^2\alpha$. **479.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$. **480.** б) $\frac{2}{\sin\alpha}$. **489.** а) $-\sin\alpha$. **491.** а) $\cos2\alpha$. **494.** а) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **495.** б) $\sin^2\alpha$. **497.** а) $\sin x+\cos x$. **498.** а) 0. **499.** а) -1. **500.** в) 1. **501.** а) 0,5. **502.** б) 1. **503.** а) $-\cos\alpha$. **504.** б) $-\cos3\alpha$. **505.** а) 0; в) 1. **506.** в) 0,5. **508.** а) -1. **511.** а) $\cos^2\alpha$. **512.** а) 1. **514.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **534.** а) R; б) $x\neq\pi n$, $n\in Z$. **535.** а) $[-2; 2]$; в) $[0{,}5; 1{,}5]$. **537.** а) $2\pi n$, $n\in Z$. **539.** а) Непарна; б) парна.

547. Так. **549.** б) 0. **551.** На 32 %. **560.** б) π. **561.** в) $0{,}5\pi$. **566.** а) π. **567.** а) 20π. **568.** б) 4π. **583.** а) $\sin(\alpha + x)$. **584.** а) $\cos\alpha \sin\beta$. **585.** в) $-0{,}5$. **586.** а) 0. **587.** а) $\sqrt{3}$. **592.** а) $0{,}25\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. **593.** б) $0{,}25\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$. **594.** г) $2+\sqrt{3}$. **595.** б) $0{,}25\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$. **596.** а) 0. **597.** а) $\sin\alpha$. **598.** а) $-0{,}5\sqrt{3}\cos x$; в) $-\mathrm{ctg}\beta$. **599.** а) 1. **600.** а) $0{,}5\sqrt{3}$. **603.** $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = 2{,}375$. **607.** 75 км/год і 25 км/год. **608.** б) $[0{,}5; 5]$. **613.** а) $0{,}5$; б) $0{,}5\sqrt{2}$. **614.** а) 1; г) $\cos 2\beta$. **615.** а) $\sin\alpha$. **616.** а) $\mathrm{tg}\alpha$. **617.** б) $2\sin 3x$. **621.** а) $\cos 20°$. **622.** а) $2\sin 3\alpha \cos 2\alpha$. **625.** а) $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$. **626.** а) $\cos\alpha$. **627.** а) $\sqrt{2}\sin x$. **632.** в) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{2}\right)$. **633.** а) $4\cos 2x\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3x}{2}\right)$. **636.** а) $\sin 2\alpha = -0{,}96$; $\cos 2\alpha = -0{,}28$. **647.** $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. **659.** в) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. **660.** а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$. **663.** а) Розв'язків немає. **664.** а) $\pi n,\ n \in Z$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. **665.** а) $\pi k,\ k \in Z$. **666.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. **667.** а) $2\pi n,\ n \in Z$. **668.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. **669.** а) $\frac{\pi}{2} - 2\pi n,\ n \in Z$. **670.** а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **671.** 45° і 135°. **672.** а) 30° і 150°. **674.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$. **680.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. **682.** а) $\pi k,\ k \in Z$. **686.** а) $\pi k,\ k \in Z$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z$. **687.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. **692.** в) Розв'язків немає. **693.** а) $(\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k),\ k \in Z$. **695.** а) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. **701.** Так. **714.** а) Безліч, одну або жодної. **723.** На три або чотири частини. **741.** Ні. **744.** а) 1) AD; в) 1) ні. **745.** а) $(ABC)\cap(ABD) = AB$. **757.** Ні. **762.** 6 см. **764.** 32 см. **771.** а) Безліч. **772.** а) Одну. **773.** Ні. **775.** Ні. **776.** Ні. **777.** Відрізок BC не перетинає α, а пряма BC може перетинати. **784.** Чотири. **794.** Так. **795.** Шестикутник. **808.** а) $a \cap AB = A$. **809.** б) $MN \parallel BC$. **810.** Ні. **811.** Ні. **812.** Ні. **815.** 7,6 см. **818.** 22 м. **825.** 15 см. **826.** У 2 рази. **827.** 36 см; $5\frac{1}{7}$ см. **828.** 1 м; 7,5 м. **829.** 5 : 2. **847.** Променем, прямою або довільним кутом, який менший від розгорнутого. **850.** Ні. **853.** $A_1B_1 = 5$ см; $A_1C_1 = 3$ см. **854.** 15 см і 10 см, або 3 см і 2 см. **863.** 10 см і 6 см. **915.** 4 : 1. **922.** 6 см. **923.** 5 см. **924.** б) 12 см. **925.** $\left(2\sqrt{2}-1\right):1$. **926.** 10 см. **927.** а) 4 см; в) 7 см. **928.** а) 11 см; б) 9 см. **933.** $2{,}25\sqrt{3}\,\text{см}^2$. **934.** $\frac{a}{16}\sqrt{16b^2-5a^2}$. **935.** $\left(2+\sqrt{2}\right)l$; $\frac{l^2\sqrt{2}}{2}$. **936.** 40 см і 96 см^2. **948.** Ні. **957.** Ні. **960.** Ні. **961.** 10 дм. **962.** 10,5 дм і 1,6 дм. **963.** в) 4 см; г) 4 м. **964.** б) 6 см; г) 6 см. **965.** $2a+1{,}2\sqrt{2}a$. **967.** $16\sqrt{3}\,\text{см}^2$. **978.** 60°. **979.** а) 80°. **980.** а) 45°. **983.** Можуть. **984.** Ні. **985.** Так. **987.** По 60°. **988.** а) $12\sqrt{2}$ см. **994.** б) $\arccos\frac{3}{4}$. **997.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$. **998.** 60°. **1008.** 13 см. **1011.** $m : n$. **1012.** a^2. **1014.** 8 см. **1015.** $2a$. **1016.** 12 см. **1020.** $\frac{a\sqrt{33}}{3}$. **1021.** $\frac{3\sqrt{231}}{4}$ см. **1022.** 13 см. **1024.** б) 7 см. **1025.** а) 2 см. **1036.** 30 см. **1039.** 97 см. **1040.** $2a$ і $a\sqrt{2}$. **1047.** 35 см. **1052.** 13 см і 15 см. **1053.** 5 см. **1054.** $5\sqrt{6}$ см. **1055.** 2,8 см. **1073.** Ні. **1074.** Безліч. **1079.** 20 см. **1080.** 4 см і 6 см. **1081.** а) $2\sqrt{11}$ см; б) 1 см. **1082.** $6\sqrt{2}$ см. **1086.** a. **1087.** m або $\sqrt{3}m$. **1088.** а) $a\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{3}$; в) 60°. **1089.** $a\sqrt{1{,}5}$; $\cos\varphi = 0{,}25$. **1091.** 44 см; 96 см^2. **1107.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **1111.** 9 см. **1117.** а) 1 см^2; б) 3 дм^2. **1119.** 48 см. **1121.** $12\sqrt{14}$ см. **1123.** 20 см; $20\sqrt{2}$ см. **1124.** 19 см. **1129.** $\frac{l^2\sqrt{3}}{6\cos\beta}$. **1130.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **1140.** $\sqrt{a^2-(b+c)^2}$. **1141.** 4 дм і 5 дм. **1144.** 12 см. **1148.** 24 см. **1151.** $\frac{\alpha}{2}\sqrt{16+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **1157.** 8 м. **1158.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **1160.** 30 см. **1161.** 45 мм. **1163.** 28 м. **1166.** $\sqrt{6}$ см. **1168.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1170.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1193.** $\approx 2{,}38$ м. **1195.** 70°, 110°, 70°, 110°. **1196.** $8\sqrt{3}$ см. **1197.** 5 см. **1199.** 3,7 дм. **1200.** 80°. **1216.** 26 см. **1218.** 45°. **1219.** 30°.

ЗМІСТ

Передмова 3

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1. **Числа, функції, рівняння** 5
§ 1. Дійсні числа 6
§ 2. Обчислення 14
§ 3. Відсоткові розрахунки 22
Самостійна робота № 1 30
§ 4. Числові функції 30
§ 5. Властивості функції 42
Самостійна робота № 2 49
§ 6. Корені n-го степеня 50
§ 7. Степені з раціональними показниками 58
§ 8. Степеневі функції 64
§ 9. Ірраціональні рівняння і нерівності 70
Самостійна робота № 3 75
Історичні відомості 76
Головне в розділі 1 81

Розділ 2. **Тригонометричні функції** 83
§ 10. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута 84
§ 11. Тригонометричні функції числового аргументу 91
§ 12. Основні тригонометричні формули 99
§ 13. Формули зведення 103
§ 14. Властивості і графіки тригонометричних функцій 109
§ 15. Періодичні функції і гармонічні коливання 117
§ 16. Формули додавання 125
§ 17. Наслідки із формул додавання 130
§ 18. Тригонометричні рівняння і нерівності 137
Самостійна робота № 4 146
Історичні відомості 147
Головне в розділі 2 151

ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 3. **Паралельність прямих і площин у просторі** . . . 153
§ 19. Що вивчається в стереометрії? 154
§ 20. Основні поняття і аксіоми стереометрії 159
§ 21. Наслідки з аксіом стереометрії 163
Самостійна робота № 5 169

§ 22. Прямі в просторі 170
§ 23. Паралельне проектування 176
§ 24. Зображення фігур у стереометрії 181
§ 25. Паралельність прямої і площини 188
§ 26. Паралельність площин 193
Самостійна робота № 6 199
Головне в розділі 3 199

Розділ 4. **Перпендикулярність прямих і площин у просторі** 201
§ 27. Кут між прямими. Перпендикулярність прямих . . . 202
§ 28. Перпендикулярність прямої і площини 207
§ 29. Перпендикуляр і похила до площини 213
§ 30. Перпендикулярні площини 218
§ 31. Ортогональне проектування 223
§ 32. Відстані в просторі 229
§ 33. Вимірювання кутів у просторі 235
Самостійна робота № 7 242
Головне в розділі 4 244
Історичні відомості 245

Додатки 249
Теми для завдань творчого характеру 249
Література 250
Відомості з математики 5–9 класів 251
Таблиця значень тригонометричних функцій 261
Таблиця квадратів чисел 262
Предметний покажчик 263
Відповіді 266

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна

МАТЕМАТИКА
10 клас

Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

2-ге видання

Редактор *О. Мовчан*. Обкладинка, макет, ілюстрації *В. Соловйова*. Технічний редактор *В. Олійник*. Коректори *І. Іванюсь*, *Л. Леуська*. Комп'ютерна верстка *К. Шалигіної*, *Ю. Лебедєва*

Формат $60\times90/_{16}$. Умовн. друк. арк. 17. Обл.-вид. арк. 16,05. Тираж 5023 пр. Вид. № 1050. Зам. № 323.

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212. Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 3966 від 01.02.2011.

Віддруковано з готових позитивів на ДП «Видавництво і друкарня "Таврида"», вул. Генерала Васильєва, 44, м. Сімферополь, АРК, 95000 Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 1174 від 25.12.2002.

E-mail: marketing@tavridabook.com.ua

Висновок санітарно-епідеміологічної експертизи № 05.03.02-04/27643 від 27.04.2010 р.