Г.П. БЕВЗ, В.Г. БЕВЗ

МАТЕМАТИКА

11

Рівень стандарту

ББК 22.1я721
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України № 235 від 16.03.2011 р.)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив Інститут математики
Національної академії наук України

Психолого-педагогічну експертизу проводив Інститут
педагогіки Національної академії педагогічних наук України

Бевз Г. П.
Б36 Математика : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Генеза, 2011. – 320 с. : іл. – Бібліогр. : с. 294.
ISBN 978-966-11-0063-2.

Цей підручник призначений для завершення вивчення математики в середній школі. Він відповідає рівню стандарту. Підручник містить шість розділів: «Показникові та логарифмічні функції», «Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування», «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики», «Координати і вектори у просторі», «Геометричні тіла. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл».

ББК 22.1я721

ISBN 978-966-11-0063-2

ПЕРЕДМОВА

Про користь математики для людей різних інтересів і професій добре знаємо. Ось як про це говорили відомі математики:

«Вивчення математики важливе з двох поглядів: по-перше, через сильний вплив цієї строгої науки на розвиток розумових здібностей; по-друге, через загальність її застосувань» (М.В. Остроградський).

«Без знання математики неможливо зрозуміти ні основ сучасної техніки, ні того, як вчені вивчають природні й соціальні явища» (А.М. Колмогоров).

«Є одна наука, без якої неможлива жодна інша. Це – математика. Її поняття, зображення й символи служать тією мовою, якою говорять, пишуть і думають інші науки. Вона пояснює закономірності складних явищ, зводячи їх до простих, елементарних явищ природи. Вона передбачає і далеко наперед вираховує з величезною точністю перебіг подій» (С.Л. Соболєв).

Ця книжка – підручник, за яким ви будете завершувати вивчення математики в середній школі. Щоб уявити її всю та зрозуміти, яке місце відводиться в ній матеріалу 11-го класу, розгляньте таблицю, де кольором виділено матеріал, який ви будете вивчати цього року.

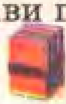
МАТЕМАТИКА	
Алгебра і початки аналізу	*Геометрія*
Функції, рівняння та нерівності	Точки, прямі, відрізки, кути, многокутники, кола, круги
Степеневі функції	Довжини, площі, міри кутів і дуг
Тригонометричні функції	Рухи та перетворення подібності
Тригонометричні рівняння та нерівності	Координати й вектори на площині
Показникові та логарифмічні функції	Прямі та площини в просторі
Похідна та її застосування	Координати й вектори у просторі
Інтеграл та його застосування	Многогранники, тіла обертання
Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики	Площі поверхонь та об'єми геометричних тіл

Підручник адресовано учням загальноосвітніх навчальних закладів, які навчаються за програмою рівня стандарту. Програма передбачає як спільне, так і роздільне вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу. Загалом для вивчення всього курсу відводиться 3–4 години на тиждень. Основним для вас у навчанні математики є розвиток загальної та математичної культури і формування навичок застосування математичних знань.

Окремі теми, що розглядаються в цьому підручнику, ви вже знаєте з попередніх класів, але більшість їх – зовсім нові. Намагайтеся опанувати ці теми. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. *Курсивом* виділено терміни та назви понять. **Жирним шрифтом** надруковано важливі твердження й теореми.

Вивчення математики істотно полегшується, якщо математичні поняття розглядати не ізольовано одне від одного, а розрізняти, які з них родові, а які видові. Намагайтеся зрозуміти, наприклад, що куб – окремий вид паралелепіпеда, паралелепіпед – вид призми, призма – вид многогранника, многогранник – вид геометричних тіл і т. д. Зверніть увагу на те, що логарифмування – це операція, обернена до піднесення до степеня, а інтегрування – обернена до диференціювання.

Вивчаючи ту чи іншу тему, намагайтеся систематизувати матеріал: малюйте відповідні діаграми та схеми.

Знати математику – це насамперед уміти користуватися нею. Учитися користуватися математичними знаннями найкраще під час розв'язування задач. У підручнику є задачі до кожної теми, до кожного параграфа – різних рівнів складності. Задачі та вправи поділені на:  «Виконайте усно» (рівень А та рівень Б) і  «Вправи для повторення». Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором. У кожному параграфі підручника є рубрика  «Виконаємо разом», у якій подано задачі з розв'язаннями. Радимо переглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Цікаві доповнення до основного матеріалу містяться в рубриці «Історичні відомості».

Для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу призначено рубрики «Головне в розділі» і  «Самостійна робота».

Для тих, хто хоче дізнатися більше, у додатках пропонуються теми для робіт творчого характеру і список відповідної літератури.

Математику можна порівняти з великим і барвистим квітником, у якому кожен може дібрати собі букет за смаком. Зрозуміло, щоб зробити це, спершу треба ввійти в цей квітник.

Ласкаво просимо!

Автори

*Немає жодної галузі людського знання,
куди не входили б поняття про функції
та їх графічне зображення.*

К. Лебединцев

1 Показникові та логарифмічні функції

ТЕМИ РОЗДІЛУ

- Повторення відомостей про функції.
- Степеневі й показникові функції.
- Показникові рівняння та нерівності.
- Логарифми та їх властивості.
- Логарифмічні функції.
- Логарифмічні рівняння та нерівності.

§ 1. Функції та їх основні властивості

Повторимо основні відомості про функції, які ви знаєте з попередніх класів.

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y, то таку відповідність називають *функцією*.

Тут x – ***незалежна змінна***, або ***аргумент***, y – ***залежна змінна***, або ***функція***.

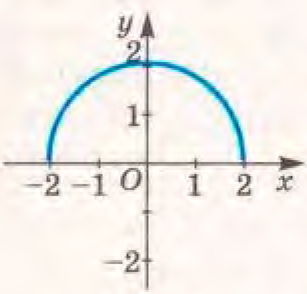
Множину всіх значень x, яких може набувати аргумент функції, називають ***областю визначення*** даної функції і позначають буквою D.

Множину всіх значень y, яких може набувати функція, називають її ***областю значень*** і позначають буквою E.

Найчастіше функції задають: а) таблично; б) графічно; в) за допомогою формули.

Наприклад, відповідність між довжиною a ребра куба та його об'ємом V можна задати формулою $V = a^3$, де $a > 0$.

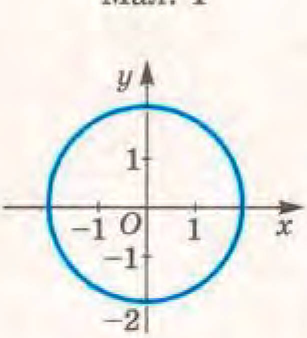
Якщо функцію задають формулою і нічого не говорять про область її визначення, то вважають, що ця область – множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = x^2 + x - 1$ – множина R, а функції $y = \dfrac{x}{x-1}$ – множина $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.



Мал. 1

Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції – проекція її графіка на вісь x, а область значень – проекція її графіка на вісь y. Наприклад, на малюнку 1 зображено графік функції $y = \sqrt{4 - x^2}$. Область визначення цієї функції – множина $[-2; 2]$, а множина значень – $[0; 2]$.

Нагадаємо, що ***графіком функції*** називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, ординати – відповідним значенням функції.



Мал. 2

Чи задає функцію графік, зображений на малюнку 2? Ні, оскільки на цьому графіку одному значенню аргументу x (наприклад, $x = 1$) відповідають два різні значення y. А згідно з означенням, функцією вважається тільки така відповідність, при якій одному значенню аргументу x з області визначення відповідає є д и н е значення функції y.

Дивлячись на графік, одразу можна: з'ясувати властивості функції, яку він задає, – область визначення та область значень; з'ясувати, чи є дана функція періодичною, парною або непарною; знайти точку перетину графіка функції з віссю y, нулі функції ($y = 0$) та проміжки знакосталості ($y > 0$ чи $y < 0$); визначити проміжки зростання чи спадання; з'ясувати, чи має функція найбільше та найменше значення тощо.

Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

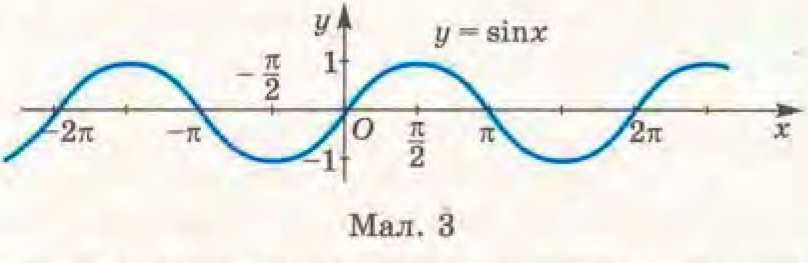
Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Існують функції ні парні, ні непарні. Це такі функції, в яких або область визначення не симетрична відносно нуля, або для яких не виконується жодна з умов $f(-x) = \pm f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі y (див. мал. 1), а непарної – відносно початку координат (мал. 3).

Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною*** з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області її визначення $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Область визначення періодичної функції – вся числова пряма R, або нескінченна з обох боків множина числових проміжків. Графік періодичної функції з періодом T паралельним перенесенням на відстань T вздовж осі x відображається на себе. Періодичними є всі тригонометричні функції. На малюнку 3 зображено графік функції $y = \sin x$, найменший додатний період якої $T = 2\pi$.



Мал. 3

Функцію називають ***зростаючою*** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції. Функцію називають ***спадною*** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

Функція $y = \sqrt{4 - x^2}$ (див. мал. 1) зростає на проміжку $[-2; 0]$ і спадає на проміжку $[0; 2]$.

Функція $y = \sin x$ (див. мал. 3) зростає на кожному проміжку $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, а спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$.

Характеризуючи властивості функції, зазначають також її найбільше та найменше значення. Наприклад, функція $y = \sqrt{4 - x^2}$ у точці $x = 0$ має найбільше значення 2, а в точках -2 і 2 – найменше значення, яке дорівнює 0 (див. мал. 1). За малюнком 3 визначте самостійно найбільше та найменше значення функції $y = \sin x$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке функція? Що таке аргумент функції?
2. Що таке область визначення функції?
3. Як можна задавати функцію?
4. Які функції ви знаєте? Які їх графіки?
5. Які функції називають зростаючими? А спадними?
6. Які функції називають парними? А непарними? Наведіть приклади.
7. Які функції називають періодичними? Наведіть приклади періодичних функцій.

Виконаємо разом

1. Для функції $y = x^3 - 5$ знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 10;

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 120.

• **Розв'язання.** а) Якщо $x = 10$, то $y = 10^3 - 5 = 1000 - 5 = 995$; б) якщо $y = 120$, то $x^3 - 5 = 120$, звідки $x^3 = 125$, а $x = 5$.

Відповідь. а) 995; б) 5.

2. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

• **Розв'язання.** Змінна x може набувати будь-яких значень, при яких підкореневий вираз буде невід'ємним числом. Щоб знайти такі значення, розв'яжемо нерівність $x^2 - 4 \geqslant 0$.

Мал. 4

Оскільки квадратний тричлен $x^2 - 4$ має корені -2 і 2, то множина розв'язків нерівності $x^2 - 4 \geqslant 0$ запишеться так: $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ (мал. 4).

Відповідь. $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

3. Доведіть, що функція $y = x\cos x$ – непарна.

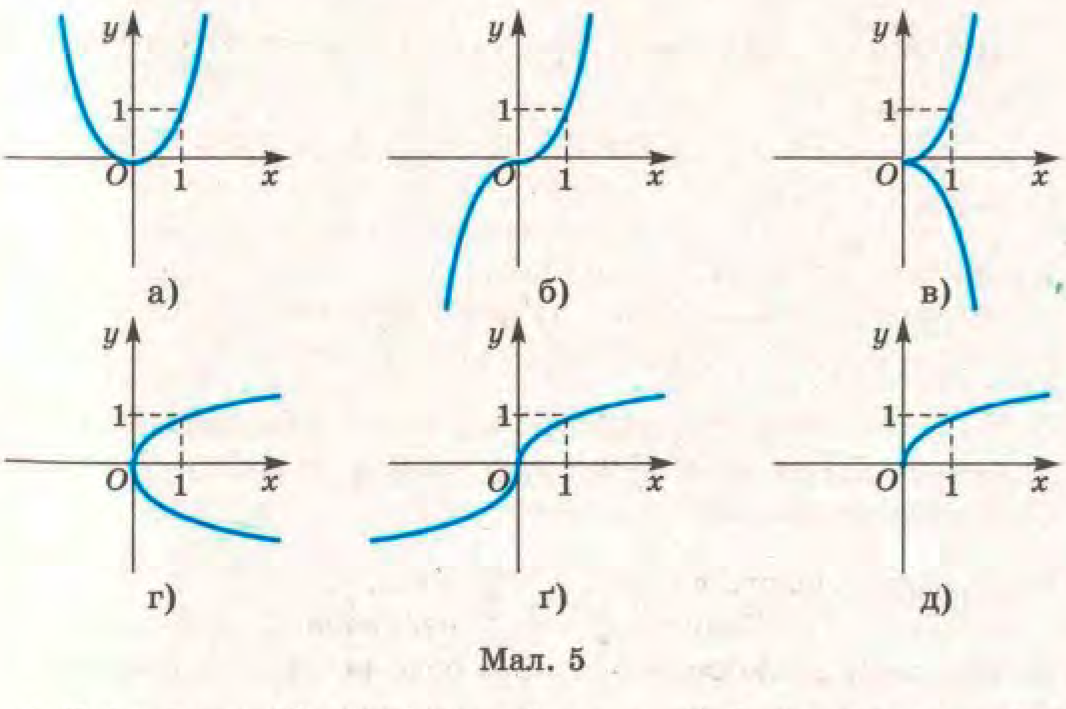
Розв'язання. Область визначення функції $y = x\cos x$ – множина всіх дійсних чисел R – симетрична відносно початку координат. Знайдемо $y(-x)$, врахувавши, що $y = x$ – непарна функція, а $y = \cos x$ – парна функція. Маємо:

$$y(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos x = -y(x).$$

Отже, функція $y = x\cos x$ – непарна.

Виконайте усно

1. Функція $y = x^2$ задана на множині перших п'яти натуральних чисел. Якою є її область значень?
2. Знайдіть область визначення функції $y = x^3$, якщо її область значень $[-1; 27]$.
3. Який з графіків, зображених на малюнку 5, не є графіком функції?
4. Які з функцій, графіки яких зображено на малюнку 5, є непарними? А які – парними?



Мал. 5

5. Які з функцій $y = x^3$, $y = x^2$, $y = x$, $y = 1$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \sqrt{x}$ парні, а які – непарні?
6. Чи може одна й та сама функція бути парною і непарною?
7. Які з функцій $y = -x^2$, $y = -\cos x$, $y = \sin 2x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \operatorname{tg} x$ періодичні?

8. Виберіть один із графіків, зображених на малюнку 5, та охарактеризуйте основні властивості відповідної функції.

9. Графік якої з поданих нижче функцій проходить через початок координат:
а) $y = x^3$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = x^{-2}$;
г) $y = \cos x$; ґ) $y = \sqrt{x}$; д) $y = \operatorname{tg} x$?

А

10. Знайдіть $f(-10)$, $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$, $f(10)$, якщо:
а) $f(x) = 0{,}2x + 1$; б) $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

11. Вартість ксерокса після t років використання задається формулою $B(t) = 8940 - 745t$ (грн.). Укажіть:
а) яку функцію задає ця формула;
б) що означає і чому дорівнює $B(5)$;
в) значення t, якщо $B(t) = 4470$, і поясніть, на що це вказує;
г) початкову вартість ксерокса.

12. Знайдіть значення функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ в точках -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3, якщо:
а) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = |2x - 3|$;
б) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.
Результати подайте у вигляді таблиці.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

13. Обчисліть значення виразу $f(5) - f(3) - 1$, якщо:
а) $f(x) = x^3 - 2x + 1$; б) $f(x) = (x^2 - 2)(x + 5)$.

14. Функцію задано формулою $y = 2x^2 - 1$. Знайдіть значення:
а) функції, якщо значення аргументу дорівнює 2; 4; 6; 8;
б) аргументу, якщо значення функції дорівнює 1; 3; 5; 7; 9.

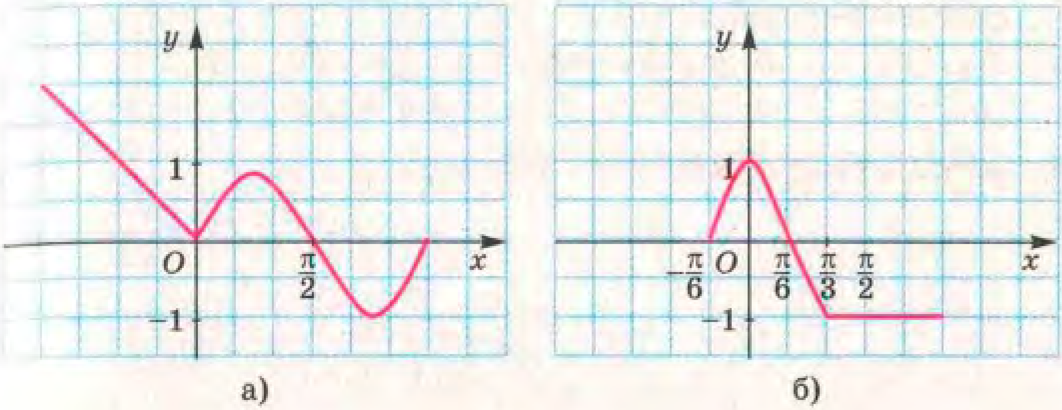
Знайдіть область визначення функції (15, 16).

15. а) $y = \sqrt{2x}$; б) $y = \dfrac{x}{x - 4}$; в) $y = \dfrac{5}{x^2 + 2}$; г) $y = \sqrt{x^2}$.

16. а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{x + 4}{x - 2}$; в) $y = x + \dfrac{4}{x}$; г) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

17. Для кожної з функцій, графіки яких подано на малюнку 6, установіть:
а) область визначення; б) область значень; в) нулі ($y = 0$);

г) проміжки знакосталості ($y > 0$, $y < 0$);
ґ) проміжки зростання;
д) проміжки спадання.



Мал. 6

Побудуйте графік функції (**18–20**). За допомогою графіка визначте, які з цих функцій парні, а які – непарні.

18. а) $y = x^3$; б) $y = -x^2$; в) $y = x^{-2}$; г) $y = x^{\frac{1}{2}}$.
19. а) $y = 2x - 5$; б) $y = 1 - x^2$; в) $y = 3$; г) $y = \sqrt{2x}$.
20. а) $y = \sin x$; б) $y = -\cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

Б

21. Опір R провідника визначається за формулою $R = \rho\frac{l}{S}$, де l і S – відповідно довжина і площа поперечного перерізу провідника, а ρ – питомий опір речовини, з якої виготовлено провідник. Запишіть залежність: а) S від R; б) l від R. Який графік має кожна з цих функцій?
22. Відповідність між довжиною маятника l і його періодом коливання T задається формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де $\pi \approx 3{,}14$, $g \approx 9{,}8$ м/с^2. Яку функцію задає ця залежність? Якою функцією задається залежність довжини маятника від періоду його коливання?

Запишіть область значень функції (**23, 24**).

23. а) $y = \sqrt{4 - x}$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = 3 - x$; г) $y = 2 + \sqrt{x}$.
24. а) $y = x^2 + 4$; б) $y = \sqrt{1 + x}$; в) $y = 3x$; г) $y = 9 - \sqrt{x}$.

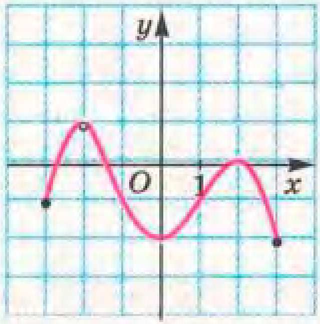
25. Доведіть, що функція $y = f(x)$ – парна, якщо:
а) $f(x) = x^4 + 3x^2$; б) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$.

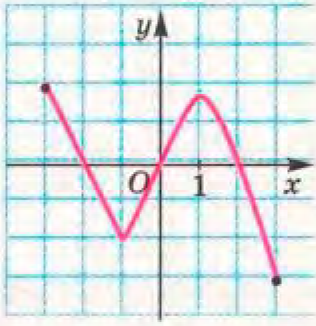
26. Доведіть, що функція y – непарна, якщо:
а) $y = x(1 - x^2)$; б) $y = 7x^3 + x$.

27. Знайдіть значення функції $f(x) = x^2 - 2x$, якщо:
а) $x = a$; б) $x = a + 3$; в) $x = 2a$; г) $x = 5a - 1$.

28. Спростіть вираз $\frac{f(x+3)-f(3)}{x}$, якщо:
а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 1 - x^3$; в) $f(x) = (2x^2 - 1)(1 + 2x^2)$.

29. На малюнку 7 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графіки функцій $y = f(x + 1)$; $y = f(x) + 1$; $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$. За допомогою побудованих графіків для кожної функції встановіть: а) проміжки монотонності; б) інтервали знакосталості; в) найбільше та найменше значення функції; г) яка з функцій є парною.





Мал. 7

В одній системі координат побудуйте графіки функцій і встановіть їх проміжки монотонності (**30–32**).

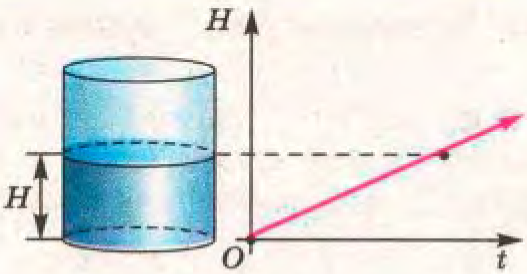
30. а) $y = 3x$; б) $y = 3x - 1$; в) $y = 3|x| - 1$; г) $y = |3x - 1|$.

31. а) $y = x^2$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 2x^2 - 3$; г) $y = |2x^2 - 3|$.

32. а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = \frac{12}{x} - 4$; в) $y = \frac{12}{|x|} - 4$; г) $y = \left|\frac{12}{x} - 4\right|$.

33. Рух двох мотоциклістів у одній системі координат задано функціями $x_1(t) = 0{,}2t^2 + 2t$ і $x_2(t) = 80 - 4t$ (x – у кілометрах, t – у хвилинах). Установіть час зустрічі мотоциклістів.

34. Якщо в контейнер додавати воду зі сталою швидкістю, то висота води в ньому буде функцією від часу (мал. 8). Зобразіть схематично графік залежності висоти води від часу наповнення контейнерів, зображених на малюнку 9.



Мал. 8

а)

б)

в)

Мал. 9

35. Функцію $y = |1 - x^2|$ задано на проміжку [–2; 2]. Продовжте її графік з періодом $T = 4$ на всю числову пряму. Знайдіть: а) $y(10)$; б) $y(100)$.

36. Побудуйте на проміжку [–1,5; 1,5] графік деякої функції та продовжте його з періодом $T = 3$ на всю числову пряму.

Вправи для повторення

37. Порівняйте числа:

а) $0{,}1^{\frac{2}{3}}$ і $0{,}1^{\frac{3}{4}}$; б) $10^{\frac{2}{3}}$ і $10^{\frac{3}{4}}$; в) $\sqrt[5]{1{,}7}$ і $\sqrt[5]{2}$; г) $\sqrt[4]{12}$ і 2.

38. Запишіть у вигляді степеня:

а) $a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-2}$; б) $(p^{0,1})^2 \cdot p^{\frac{2}{5}} \cdot p^{-0,4}$; в) $\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^2 : x^{0,5}$.

39. Розв'яжіть рівняння:

а) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$; б) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

40. Сергій зловив 10 карасів, а Андрій – на 100 % більше. Скільки карасів зловили хлопці разом?

§ 2. Степеневі та показникові функції

Повторимо і дещо розширимо відомості про степені.

Вираз a^α називають *степенем*. Тут a – основа степеня, α – його показник. Показник степеня може бути будь-яким дійсним числом. Наприклад:

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ $\quad$ $(a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}},\ a \in R,\ n \in N)$;

$4^1 = 4;\ 4^0 = 1$ $\quad$ $(a^1 = a;\ a^0 = 1,\ a \neq 0)$;

$4^{-1} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad$ $\left(a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ a \neq 0,\ n \in N\right)$;

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ $\quad$ $\left(a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ n \in N,\ m \in Z,\ a > 0\right)$.

Якщо показник степеня – число ірраціональне, значення степеня можна обчислювати, користуючись калькулятором або комп'ютером.

Наближені значення (з точністю до десятих, сотих, тисячних і т. д.) для степенів $3^{\sqrt{2}}$ і $5^{\sqrt{2}}$ подано в таблиці, виконаній за допомогою табличного процесора **Excel** (мал. 10).

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\sqrt{2}$	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421	1,414214
2	$3^{\sqrt{2}}$	4,7	4,73	4,729	4,7288	4,72880	4,728804
3	$5^{\sqrt{2}}$	9,7	9,74	9,739	9,7385	9,73852	9,738518
4							

Мал. 10

Отже, $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}73$; $5^{\sqrt{2}} \approx 9{,}74$.

Якими б не були дійсні числа $a > 0$ і α, степінь a^α завжди має зміст, тобто дорівнює деякому дійсному числу. Для таких степенів справджуються властивості:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $\quad$ 2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; $\quad$ 3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$; $\quad$ 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

Вирази з будь-якими дійсними показниками степенів і додатними основами можна перетворювати так само, як з раціональними показниками. Наприклад,

$$\frac{49^{\sqrt{2}} - a^{\frac{2}{\pi}}}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{(7^{\sqrt{2}})^2 - \left(a^{\frac{1}{\pi}}\right)^2}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{\left(7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}\right)\left(7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}\right)}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = 7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}.$$

Зі степенями тісно пов'язані степеневі та показникові функції. Степеневі функції ($y = x^p$) ви вивчали в попередніх класах. Далі розглянемо показникові функції.

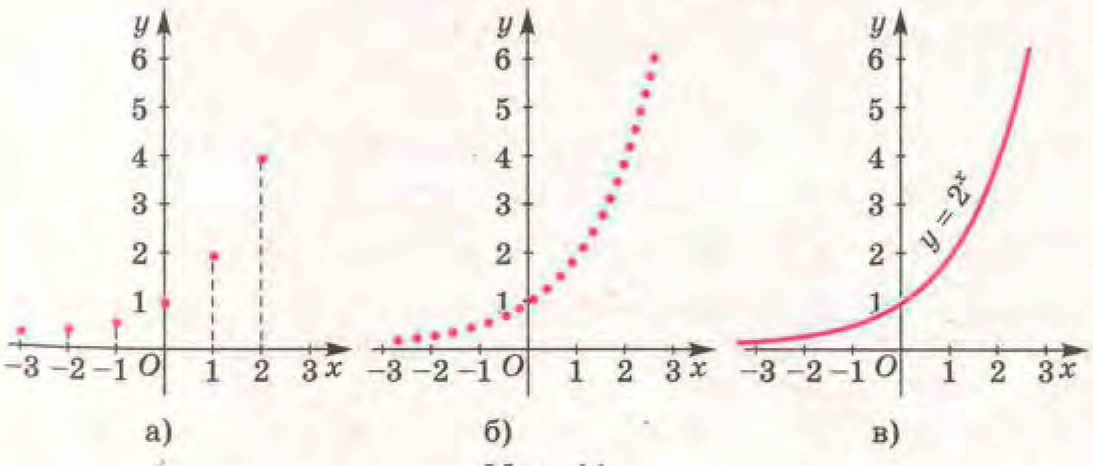
Функція називається *показниковою*, якщо її можна задати формулою $y = a^x$, де a – довільне додатне число, відмінне від 1.

Приклади показникових функцій: $y = 2^x$, $y = 0{,}3^x$, $y = (\sqrt{2})^x$.

Побудуємо графік функції $y = 2^x$. Складемо таблицю значень функції для кількох цілих значень аргументу x:

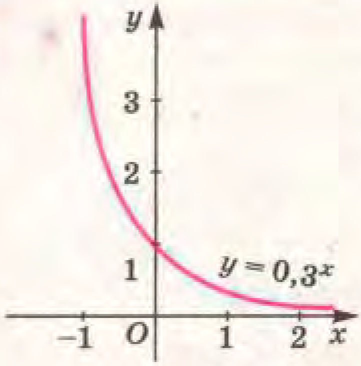
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

На малюнку 11, *а* позначено точки, координати яких x, y – пари чисел з таблиці. Позначивши на координатній площині більше точок з координатами x і y, що задовольняють формулу $y = 2^x$, одержимо малюнок 11, *б*. А якби для кожного значення x за формулою $y = 2^x$ обчислили відповідне значення y і позначили точки з такими координатами, то дістали б неперервну криву лінію (мал. 11, *в*). Це – графік функції $y = 2^x$.



Мал. 11

Як бачимо, показникова функція $y = 2^x$, визначена на всій множині дійсних чисел, має тільки додатні значення і на всій



Мал. 12

області визначення зростає. А функція $y = 0,3^x$ на всій області визначення спадає (мал. 12).

Сформулюємо основні властивості показникових функцій.

1. *Область визначення функції* $y = a^x$ *– множина* R, оскільки при кожному додатному a і дійсному x вираз a^x має числове значення.

2. *Функція* $y = a^x$ *набуває тільки додатних значень*, оскільки, якщо основа a степеня додатна, то додатний і степінь a^x. Отже, область значень функції $y = a^x$ – множина $(0; \infty)$.

3. *Якщо* $a > 1$, *функція* $y = a^x$ *зростає, а якщо* $0 < a < 1$ *– спадає*. Цю властивість добре видно на графіках функцій (див. мал. 11, 12).

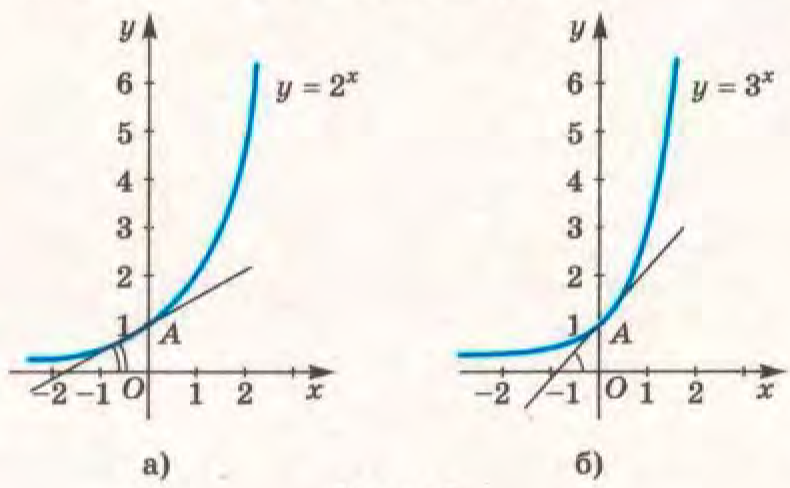
4. *Функція* $y = a^x$ *набуває кожного свого значення тільки один раз*. Тобто пряму, паралельну осі x, графік показникової функції може перетнути тільки в одній точці. Це випливає з властивості 3.

5. *Функція* $y = a^x$ *ні парна, ні непарна, ні періодична*. Оскільки кожного свого значення вона набуває тільки один раз, то не може бути парною або періодичною. Не може вона бути і непарною, бо не набуває ні від'ємних, ні нульових значень.

6. *Графік кожної показникової функції проходить через точку* $A(0; 1)$, оскільки, якщо $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Зверніть увагу на твердження, які випливають із монотонності показникової функції:

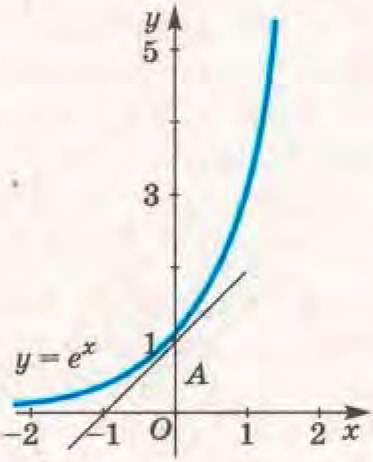
1. Якщо $a > 0$ і $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$;
2. Якщо $a > 1$ і $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 > x_2$;
3. Якщо $0 < a < 1$ і $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 < x_2$.



Мал. 13

Придивіться до графіків показникових функцій $y = 2^x$ і $y = 3^x$ (мал. 13). Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в точці $A(0;\ 1)$ до графіка функції $y = 2^x$, менший за 1, а до графіка функції $y = 3^x$ – більший за 1. А чи існує така показникова функція, щоб кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в точці $A(0;\ 1)$ дорівнював 1? Існує (мал. 14). Основа цієї показникової функції – ірраціональне число 2,71828..., яке прийнято позначати буквою e.

Показникова функція $y = e^x$ в математиці і багатьох прикладних науках трапляється досить часто. Її називають *експонентою* (лат. *exponens* – виставляти напоказ).



Мал. 14

На багатьох мікрокалькуляторах є окрема клавіша для функції e^x. Ця функція і справді вирізняється з усіх інших функцій. За її допомогою описуються закони природного зростання чи спадання.

Наприклад, процеси новоутворення та розпаду можна описати за допомогою формули $P = P_0 e^{kt}$. Тут P – кількість новоутвореної речовини (або речовини, що розпалася) в момент часу t; P_0 – початкова кількість речовини; k – стала, значення якої визначається для конкретної ситуації. Доберіть самостійно відповідні приклади.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке степінь числа з натуральним показником?
2. Якими рівностями можна визначити степінь числа з цілим від'ємним показником? А з дробовим показником?
3. Як можна знайти степінь додатного числа з ірраціональним показником?
4. Які властивості мають степені з довільними дійсними показниками?
5. Сформулюйте означення показникової функції.
6. Назвіть область визначення показникової функції. І область значень.
7. Через яку точку проходить графік кожної показникової функції?
8. Чи може значення показникової функції бути від'ємним? А дорівнювати нулю?
9. За якої умови показникова функція зростає? А за якої – спадає?
10. Що таке експонента?

Виконаємо разом

1. Спростіть вираз $(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання.

$$(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}(1 - 5^{-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{5} = 0{,}8.$$

2. Функція $f(x) = 0{,}5^x$ задана на проміжку $[-2; 3]$. Знайдіть її найменше та найбільше значення.

Розв'язання. Оскільки $0{,}5 < 1$, то дана функція спадна. Тому її найменшим і найбільшим значеннями будуть:

$f(3) = 0{,}5^3 = 0{,}125$; $\quad f(-2) = 0{,}5^{-2} = 4$.

Відповідь. 0,125 і 4.

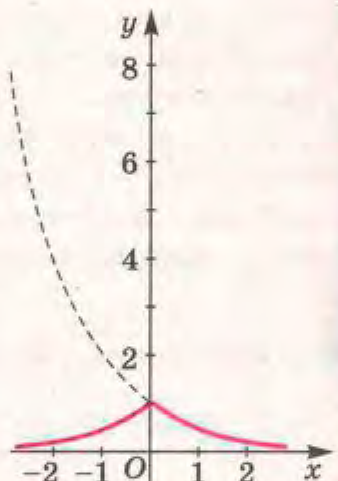
3. Порівняйте з одиницею число: а) $0{,}5^{1,5}$; б) $(\sqrt{5})^{-0,2}$.

Розв'язання. а) Подамо число 1 у вигляді степеня з основою 0,5. Маємо: $1 = 0{,}5^0$. Оскільки функція $y = 0{,}5^x$ – спадна і $1{,}5 > 0$, то $0{,}5^{1,5} < 0{,}5^0$, звідки $0{,}5^{1,5} < 1$.

б) Оскільки $1 = (\sqrt{5})^0$; $y = (\sqrt{5})^x$ – зростаюча функція і $-0{,}2 < 0$, то $(\sqrt{5})^{-0,2} < (\sqrt{5})^0$, звідки $(\sqrt{5})^{-0,2} < 1$.

4. Побудуйте графік функції $y = 0{,}5^{|x|}$.

Розв'язання. Функція $y = 0{,}5^{|x|}$ – парна (перевірте). Графік парної функції симетричний відносно осі y, тому достатньо побудувати графік заданої функції для $x \geqslant 0$ і відобразити його відносно осі y. Якщо $x \geqslant 0$, то $0{,}5^{|x|} = 0{,}5^x$. Побудуємо графік функції $y = 0{,}5^x$ для $x \geqslant 0$ і відобразимо його відносно осі y (мал. 15).



Мал. 15

Виконайте усно

Обчисліть (41–43).

41. а) $81^{\frac{1}{4}}$; б) $625^{\frac{1}{4}}$; в) $0{,}0016^{\frac{1}{4}}$; г) $1^{\frac{1}{4}}$.

42. а) $9^{0,5}$; б) $6{,}25^{0,5}$; в) $0{,}16^{0,5}$; г) $0^{0,5}$.

43. а) 4^{-1}; б) 2^{-1}; в) $0{,}5^{-1}$; г) $(-1)^{-1}$.

44. Який з поданих нижче виразів не існує:

а) $(-4)^{-1}$; б) 2^0; в) $(-5)^{0,5}$; г) $(-1)^0$; ґ) π^{π}; д) $0^{-\sqrt{3}}$?

45. Які з функцій $y = x^{1,5}$; $y = x^{5-x}$; $y = \pi^x$; $y = \sqrt{2^x}$ показникові?

46. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = 2{,}5^x$; б) $y = e^x$; в) $y = 0{,}5^x$; г) $y = 3^{-x}$; ґ) $y = \pi^x$?

47. Чи мають спільні точки графіки функцій:

а) $y = 2^x$ і $y = 2$; б) $y = 2^x$ і $y = 2x$;
в) $y = 2^x$ і $y = -2x$; г) $y = 2^x$ і $y = -2$?

А

48. Подайте у вигляді степеня з основою 2 число:

а) 8; б) $\frac{1}{16}$; в) $\sqrt{2}$; г) 0,25;
ґ) 1024; д) 0,5; е) $\sqrt[3]{4}$; є) 0,0625.

49. Подайте у вигляді степеня з основою 3 число:

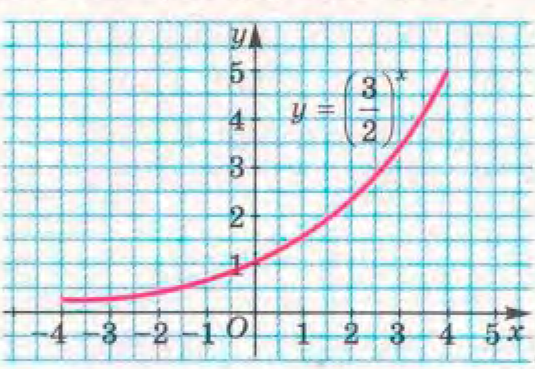
а) 81; б) 27; в) $9^{\sqrt{2}}$; г) 81^{-1};
ґ) $\sqrt[3]{9}$; д) 1; е) $729^{0,25}$; є) 27^{π}.

50. Обчисліть:

а) $32^{0,4}$; б) $27^3 : 9^4$; в) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}$; г) $(81^{-1})^{0,25}$;
ґ) $(9^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; д) $25^{\pi} : 5^{-2\pi}$; е) $49^{0,25}$; є) $2^{\pi} \cdot 0{,}5^{\pi}$.

51. Використовуючи графік функції $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (мал. 16), знайдіть наближене значення:

а) функції y в точці з абсцисою: -2; $-1{,}5$; 0; 1; 2,5; 3,5; 4;
б) аргументу x, при якому значення функції дорівнює: 0,25; 0,4; 0,5; 1,2; 1,5; 2,8; 3,5; 4,25.



Мал. 16

Спростіть вираз (52, 53).

52. а) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$; б) $(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}})(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}})$;
в) $(a - b) : (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$; г) $(x - 4) : (x^{0,5} + 2)$.

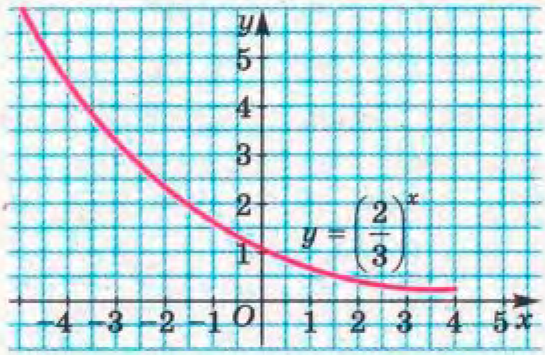
53. а) $(x^{\frac{1}{3}}-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)$; б) $(n^{\frac{1}{3}}+2)(n^{\frac{2}{3}}-2n^{\frac{1}{3}}+4)$;

в) $(a-8):(a^{\frac{1}{3}}-2)$; г) $(1-x):(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})$.

54. Використовуючи графік функції $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ (мал. 17), знайдіть наближене значення:

а) функції y в точці з абсцисою: −2; −1; 0; 1; 1,5; 2; 3; 4;

б) аргументу x, при якому значення функції дорівнює: 0,25; 0,4; 0,5; 1,2; 1,5; 2,8; 3,5; 4,25.



Мал. 17

55. Опишіть властивості функції:

а) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$; б) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

56. Побудуйте графік функції: а) $y=4^x$; б) $y=0{,}5^x$.

57. За допомогою калькулятора знайдіть з точністю до 10^{-4} значення функції $y=1{,}7^x$, якщо:

а) $x=0{,}5$; б) $x=1{,}3$; в) $x=\sqrt{3}$.

58. Заповніть таблицю з точністю до 10^{-3}.

x	−3,5	−2,5	−1,5	1,5	2,5	3
2^x						
$0{,}5^x$						

59. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y=5^x$; б) $y=\left(\frac{9}{10}\right)^x$; в) $y=(\sqrt{2})^x$;

г) $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; ґ) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$; д) $y=2^{-x}$;

е) $y=(\sqrt{5}-2)^x$; є) $y=\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^x}$?

60. Порівняйте з одиницею число:

а) $2^{-\sqrt{5}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; в) $0{,}3^2$; г) $1{,}7^3$;

ґ) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$; е) $(\sqrt{2})^3$; є) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{e}$.

61. Порівняйте числа:

а) $4^{-\sqrt{3}}$ і $4^{-\sqrt{2}}$; б) $2^{\sqrt{3}}$ і $2^{1,7}$; в) $5^{0,2}$ і $5^{-1,2}$;

г) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ і $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$; ґ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ і $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$.

62. Чи проходить графік функції $y = 4^x$ через точку A, якщо: а) $A(4;\ 16)$; б) $A(4;\ 256)$; в) $A(-2;\ -0{,}5)$; г) $A(-2;\ 0{,}0625)$?

63. Чи проходить графік функції $y = (\sqrt{3})^x$ через точку M, якщо: а) $M(1;\ \sqrt{3})$; б) $M(\sqrt{3};\ 3)$; в) $M(2;\ 3)$; г) $M(0;\ 0)$?

64. Знайдіть a, коли відомо, що графік функції $y = a^x$ проходить через точку: а) $P(2;\ 9)$; б) $P(0{,}5;\ 0{,}2)$; в) $P(-1;\ 0{,}5)$.

65. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

а) $y = 3^x$ на проміжку $[-1;\ 3]$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на проміжку $[-1;\ 3]$;

в) $y = 4^x$ на проміжку $[-0{,}5;\ 2]$;

г) $y = 0{,}25^x$ на проміжку $[-0{,}5;\ 2]$.

Б

Подайте число у вигляді степеня (**66, 67**).

66. а) $\sqrt[4]{27}$; б) $\frac{8}{125}$; в) $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}$; г) $5\frac{4}{9}$.

67. а) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; в) $3\sqrt[3]{9}$; г) $7\frac{1}{5}$.

Обчисліть вираз (**68, 69**).

68. а) $243^{0,4}$; б) $(27^3)^{\frac{2}{9}}$; в) $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25}$; г) $8^{2\frac{1}{3}} : 81^{0,75}$.

69. а) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $3^{-2\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{3}}$; в) $8^{\sqrt{2}} : 2^{\sqrt[3]{2}}$; г) $(3^{\sqrt[5]{8}})^{\sqrt[5]{4}}$.

Побудуйте графік функції та знайдіть її область значень (**70, 71**).

70. а) $y = 3^{-x}$; б) $y = -2^x$; в) $y = 2^{2x}$; г) $y = -2^{-2x}$.

71. а) $y = 2^x - 3$; б) $y = 2 + 2^x$; в) $y = 2^{x-3}$; г) $y = 2 \cdot 2^x$.

72. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $3^x = 4 - x$; б) $4^x + x = 5$; в) $0{,}5^x = \sqrt{x+5}$.

73. Використовуючи зростання функції $y = 2^x$, розв'яжіть рівняння і нерівності:

а) $2^x = 16$; $2^x > 16$; $2^x \leqslant 16$;

б) $2^x = 0{,}25$; $2^x \geqslant 0{,}25$; $2^x \leqslant 0{,}25$;

в) $2^x = \sqrt{32}$; $2^x \geqslant \sqrt{32}$; $2^x < \sqrt{32}$.

74. Використовуючи спадання функції $y = 0{,}2^x$, розв'яжіть рівняння і нерівності:

а) $0{,}2^x = 0{,}04$; $0{,}2^x > 0{,}04$; $0{,}2^x \leqslant 0{,}04$;

б) $0{,}2^x = \frac{1}{625}$; $0{,}2^x \leqslant \frac{1}{625}$; $0{,}2^x > \frac{1}{625}$;

в) $0{,}2^x = 25$; $0{,}2^x > 25$; $0{,}2^x \leqslant 25$.

75. Ентомолог, вивчаючи нашестя саранчі, дослідив, що площа (у м^2), заражена саранчею, змінюється за формулою $S_n = 1000 \cdot 2^{0{,}2n}$, де n – кількість тижнів після зараження. Знайдіть:

а) початкову площу зараження;

б) яку площу заражено через 5 тижнів;

в) яку площу заражено через 10 тижнів.

76. Коли CD-програвач вимикають, то сила струму в ньому зменшується за формулою $I(t) = 24 \cdot (0{,}25)^t$ (А), де I – сила струму в амперах, t – час у секундах. Знайдіть:

а) силу струму в момент вимкнення CD-програвача;

б) $I(t)$, якщо t дорівнює: 1 с, 2 с, 3 с, 4 с;

в) протягом якого часу сила струму у вимкненому CD-програвачі перевищує 4 А. Скористайтеся графіком залежності $I(t) = 24 \cdot (0{,}25)^t$.

77. Під час вирощування бактерій маса культури змінюється за формулою $m(t) = 2 \cdot e^{\frac{t}{2}}$ (г), де t – час у годинах, пройдений після початку розмноження. Знайдіть масу культури через:

а) 30 хв; б) 40 хв; в) 1 год; г) 3 год; ґ) 4 год; д) 6 год. Побудуйте відповідний графік.

Вправи для повторення

78. У геометричній прогресії $b_1 = 0{,}25$, $q = 2$. Знайдіть b_{10} і S_{10}.

79. Стародавня китайська задача. 5 волів і 2 барани коштують 10 таелів, а 2 воли і 8 баранів коштують 8 таелів. Скільки коштують окремо віл і баран?

80. Запишіть у стандартному вигляді число:
а) 47 000 000; б) 308 000 000; в) 0,000000039;
г) 0,00000407; ґ) $803 \cdot 10^9$; д) $0{,}067 \cdot 10^7$.

§ 3. Показникові рівняння та нерівності

Рівняння називається *показниковим*, якщо його змінні входять *лише* до показників степенів при сталих основах.

Приклади:
$9^x = \sqrt{3}$; $4^x + 2^{x+1} = 3$; $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x - (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 2$.

Існує багато видів показникових рівнянь і різних підходів до їх розв'язування. Основні з них:

I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами;

II. Метод уведення нової змінної;

III. Функціонально-графічний метод.

Розглянемо на конкретних прикладах кожен метод детальніше.

I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами стосується двочленних рівнянь, які можна звести до виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$.

Такі рівняння розв'язуються на основі монотонності показникової функції.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ і $f(x) = \varphi(x)$ – рівносильні.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння: а) $4^{x-5} = 8^{2x}$; б) $3^x = 7^x$.

• **Розв'язання.** а) Запишемо праву та ліву частини рівняння як степені числа 2: $(2^2)^{x-5} = (2^3)^{2x}$ або $2^{2x-10} = 2^{6x}$, звідки $2x - 10 = 6x$, $4x = -10$, $x = -2{,}5$.

б) Оскільки $7^x > 0$, то можемо поділити обидві частини рівняння $3^x = 7^x$ на 7^x. Маємо: $\frac{3^x}{7^x} = 1$, або $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$. Запишемо число 1 у вигляді степеня. Тоді $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^0$, звідки $x = 0$.

Відповідь. а) $-2{,}5$; б) 0.

II. Метод уведення нової змінної.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

а) $4^x + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$; б) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$.

• **Розв'язання.** а) $(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$. Позначимо $2^x = y$. Дістанемо квадратне рівняння $y^2 + 4y - 32 = 0$, корені якого $y_1 = -8$ та $y_2 = 4$. Корінь y_1 – сторонній, бо $2^x \neq -8$. Розв'яжемо рівняння $2^x = 4$: $2^x = 2^2$, звідки $x = 2$.

б) Запишемо рівняння у вигляді $3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 75$, або $3 \cdot 3^x - \frac{2}{9} \cdot 3^x = 75$. Позначимо $3^x = y$; дістанемо рівняння $3y - \frac{2}{9}y = 75$. Розв'яжемо його: $27y - 2y = 675$, $25y = 675$, $y = 27$. Маємо: $3^x = 27$, $3^x = 3^3$, звідки $x = 3$.

Відповідь: а) 2; б) 3.

Розв'язуючи друге рівняння, не обов'язково вводити нову змінну, а можна зразу виносити спільний множник 3^x за дужки. Саме тому такий спосіб називають ще *способом винесення спільного множника за дужки*.

III. Функціонально-графічний метод полягає в тому, що, знайшовши один корінь рівняння за допомогою побудови графіків (або добором), доводять, що інших коренів рівняння не має.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + 0{,}5^x$.

• **Розв'язання.** Графічно або методом спроб переконуємося, що $x = 1$ – корінь рівняння. Оскільки $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ – зростаюча функція (бо $\frac{3}{2} > 1$), а $y = 1 + 0{,}5^x$ – спадна ($0{,}5 < 1$), то інших коренів рівняння не має.

Якщо в показниковому рівнянні знак рівності змінити на знак нерівності, то дістанемо показникову нерівність.

Нерівність називається *показниковою*, якщо її змінні входять *лише* до показників степенів при сталих основах.

Для розв'язування показникових нерівностей використовують ті самі методи, що й для показникових рівнянь, а також правила розв'язування найпростіших показникових нерівностей виду

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \text{ чи } a^{f(x)} \geqslant a^{\varphi(x)}, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1.$$

Розв'язуючи такі нерівності, використовують монотонність (зростання чи спадання) показникової функції, а саме:

1. Якщо $a > 1$ і $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, то $f(x) > \varphi(x)$;
2. Якщо $0 < a < 1$ і $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, то $f(x) < \varphi(x)$.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність:

а) $2^x \cdot 3^x > 36$; б) $3 \cdot 7^{2x} - 2 \cdot 7^x - 1 < 0$.

Розв'язання. а) Подамо праву й ліву частини нерівності у вигляді степеня з основою 6: $6^x > 6^2$.

Оскільки $6 > 1$, то $x > 2$, або $x \in (2; \infty)$.

б) Нехай $7^x = y$, тоді $7^{2x} = y^2$. Підставимо y у дану нерівність. Маємо: $3y^2 - 2y - 1 < 0$. Оскільки квадратний тричлен $3y^2 - 2y - 1$ має корені $-\frac{1}{3}$ і 1, то множина розв'язків відповідної нерівності буде така:

$$-\frac{1}{3} < y < 1, \text{ або } \begin{cases} y < 1, \\ y > -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Оскільки $y = 7^x > 0$, то умова $y > -\frac{1}{3}$ виконується завжди.

Якщо $y < 1$, то $7^x < 1$, або $7^x < 7^0$. Отже, $x < 0$, або $x \in (-\infty; 0)$.

Відповідь. а) $(2; \infty)$; б) $(-\infty; 0)$.

Показникові рівняння та нерівності – це окремий вид *трансцендентних* (не алгебраїчних) рівнянь і нерівностей. Ви вже знаєте, що до трансцендентних належать тригонометричні рівняння та нерівності. Крім них, трансцендентними також є рівняння та нерівності, в яких поєднуються трансцендентні вирази з алгебраїчними:

$$5^{x+1} + 5x > 10; \; 2^x = \sqrt{x+2}; \; \pi^x - 1 = \sin x.$$

Тільки для деяких із подібних рівнянь можна вказати точні розв'язки. Їх наближені корені знаходять здебільшого графічним способом.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які рівняння називають показниковими? Наведіть приклади.
2. Які нерівності називають показниковими? Наведіть приклади.
3. Скільки розв'язків може мати рівняння $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$)?
4. Які методи розв'язування показникових рівнянь ви знаєте?
5. Які нерівності називають найпростішими показниковими нерівностями?
6. Як розв'язують найпростіші показникові нерівності?

Виконаємо разом

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 3\frac{3}{8}$; б) $2^{5x} + 2^{5x-1} + 2^{5x+2} = 22$.

Розв'язання. а) Подамо праву частину рівняння у вигляді неправильного дробу: $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{27}{8}$.

Запишемо праву й ліву частини рівняння у вигляді степеня з основою $\frac{2}{3}$. Маємо: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, звідки $2x = -3$, $x = -1,5$.

б) Запишемо рівняння у вигляді $2^{5x} + 2^{5x} \cdot 2^{-1} + 2^{5x} \cdot 2^2 = 22$. Винесемо за дужки спільний множник 2^{5x} і виконаємо дії в дужках. Маємо: $2^{5x} \cdot (1 + 2^{-1} + 2^2) = 22$, або $2^{5x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + 4\right) = 22$, звідки $2^{5x} \cdot 5,5 = 22$. Розв'яжемо утворене рівняння: $2^{5x} = 4$, $2^{5x} = 2^2$, $5x = 2$, $x = \frac{2}{5}$.

Відповідь. а) $-1,5$; б) $\frac{2}{5}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $0,5^{5-3x} \leqslant 0,25$; б) $3^{2x+4} - 2 \cdot 3^{x+2} \leqslant 3$.

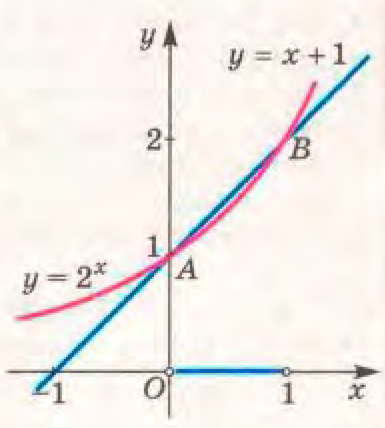
Розв'язання. а) Подамо праву частину нерівності у вигляді степеня з основою 0,5: $0,5^{5-3x} \leqslant (0,5)^2$. Оскільки $0,5 < 1$, то $5 - 3x \geqslant 2$, $-3x \geqslant -3$, звідки $x \leqslant 1$, або $x \in (-\infty; 1]$.

б) Нехай $3^{x+2} = y$. Тоді $3^{2x+4} = y^2$. Маємо квадратну нерівність $y^2 - 2y - 3 \leqslant 0$, множина розв'язків якої $[-1; 3]$. До того ж $y > 0$, отже, $0 < 3^{x+2} \leqslant 3$, звідки $x + 2 \leqslant 1$, $x \leqslant -1$, або $(-\infty; -1]$.

Відповідь. а) $(-\infty; 1]$; б) $(-\infty; -1]$.

3. Розв'яжіть графічно нерівність $2^x < x + 1$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2^x$ і $y = x + 1$ (мал. 18). Вони перетинаються в точках $A(0; 1)$ і $B(1; 2)$. Перевірка показує, що координати цих точок – числа точні, а не наближені. Отже, значення 2^x менші за відповідні значення $x + 1$, якщо $0 < x < 1$.



Мал. 18

Відповідь. (0; 1).

Виконайте усно

81. Які з рівнянь показникові:
а) $2^x = 3$; б) $\sqrt{x} = 4$; в) $2 - 0{,}5^x = 0$; г) $x^2 = 2^2$?

82. Скільки розв'язків має рівняння:
а) $12^x = 3$; б) $1 + 2^x = 0$; в) $5^x = 0$; г) $3^{2x} = 4$?

83. Чи має розв'язок нерівність:
а) $10^x > 10$; б) $7^x < -9$; в) $5^x \leqslant 0{,}5$; г) $5^x > -5$; ґ) $4^x \leqslant 0$?

84. Знайдіть корені рівняння:
а) $3^x = 81$; б) $7^x = 1$; в) $5^x = 625$; г) $6^x = -2$; ґ) $4^{-x} = 16$.

85. Розв'яжіть нерівність:
а) $3^x > 1$; б) $7^x < 49$; в) $5^x \leqslant 125$; г) $15^x > -2$; ґ) $4^x \leqslant 0{,}25$.

А

86. Знайдіть корені рівняння:
а) $2^x = 4$; б) $3^x = 81$; в) $5^x = 1$; г) $3^x = 5$;
ґ) $2^x = -4$; д) $0{,}1^x = 0{,}01$; е) $e^x = e$; є) $0{,}5^x = 0{,}125$.

87. Розв'яжіть рівняння:
а) $3^{x-2} = 27$; б) $4^{2x-1} = 16$; в) $5^{x+3} + 3 = 4$; г) $2^{x+1} = 3$.

Зведіть праву та ліву частини рівняння до степеня з однією основою і розв'яжіть його (**88, 89**).

88. а) $2 \cdot 4^x = 8^{x+1}$; б) $27^{x-1} = 9^{x+1}$;
в) $(0{,}1)^x = 100$; г) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$.

89. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{9}{4}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -4$; г) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{x-3} = \frac{16}{25}$.

Розв'яжіть рівняння і нерівність (**90, 91**).

90. а) $2^{x+1} = 16$, $2^{x+1} \geqslant 16$; б) $3^{2-x} = 27$, $3^{2-x} < 27$;
в) $4^{x-1} = 32$, $4^{x-1} \leqslant 32$; г) $8^{x+2} = 128$, $8^{x+2} > 128$.

91. а) $9^{-x} = 27$, $9^{-x} > 27$; б) $8^{-x} = 16$, $8^{-x} < 16$;
в) $3^{8-2x} = 1$, $3^{8-2x} < 1$; г) $4^{3+5x} = 1$, $4^{3+5x} > 1$.

Розв'яжіть нерівність (**92–95**).

92. а) $3^x > 1$; б) $4^{2x} \leqslant 0{,}25$; в) $5^{x-1} \leqslant 125$;
г) $5^x > -2$; ґ) $7^{-x} < 49$.

93. а) $2^x < 32$; б) $0{,}2^x > 0{,}008$; в) $10^x < 0{,}001$.

94. а) $5^{2x} < 25^{x+1}$; б) $0{,}1^{3x} < 0{,}1^{2x-3}$; в) $\pi^x < \pi^{2+3x}$.

95. а) $0{,}5^x \leqslant \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} > \frac{9}{4}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < -4$; г) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+3} \leqslant 1\frac{24}{25}$.

Розв'яжіть рівняння, використавши спосіб винесення за дужки спільного множника (**96, 97**).

96. а) $3^{x+1} + 3^x = 108$; б) $2^{x+2} + 2^x = 5$;
в) $2^x - 2^{x-2} = 12$; г) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$.

97. а) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} = 33$; б) $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180$;
в) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$; г) $5 \cdot 0{,}5^{x-3} + 0{,}5^{x+1} = 162$.

Розв'яжіть рівняння заміною змінної (**98–100**).

98. а) $6^{2x} - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$; б) $64^x - 8^x - 56 = 0$;
в) $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$; г) $7^{2x} + 7 = 8 \cdot 7^x$.

99. а) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; б) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;
в) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; г) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$.

100. а) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$; б) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$;
в) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$; г) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

Розв'яжіть нерівність (**101–104**).

101. а) $3^{x+2} - 3^x < 8$; б) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

102. а) $5^{x+1} + 5^x > 150$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15$.

103. а) $2^{2x} - 2^x < 0$; б) $0{,}25^x - 0{,}5^{x+1} - 3 < 0$.

104. а) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; б) $3^{-2x} - 3^{-x} \geqslant 0$.

105. Розв'яжіть графічно нерівність:
а) $2^x > 4$; б) $0{,}5^x \geqslant 8$; в) $2^{-x} < 0{,}5$.

Б

Розв'яжіть рівняння (**106–112**).

106. а) $4^{x-2} = 2$; б) $9^{3-x} = \sqrt{3}$; в) $5^{2x-1} = 125$.

107. а) $8^{2x-1} = 2\sqrt{2}$; б) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$; в) $(\sqrt{7})^{x+1} = 49$.

108. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$; б) $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$; в) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{25}\right)^x = \frac{27}{250}$.

109. а) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} = 3^{5x-1}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-1}$;

в) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2-x}$; г) $\left(\frac{7}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+3x}$.

110. а) $8^{x+1} = 5^{x+1}$; б) $13^{x-3} - 11^{3-x} = 0$;
в) $5^x \cdot 2^{2x} = 400$; г) $2^x \cdot 3^{2x} = 324$.

111. а) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;
б) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$.

112. а) $7^{3x+3} + 7^{3x+2} + 7^{3x+1} = 57$; б) $4^{4x-1} + 4^{4x-2} + 4^{4x-3} = 168$.

113. При яких значеннях змінної значення виразу: 1) дорівнює одиниці; 2) не перевищує одиницю?
а) $0{,}3^{x^2-x}$; б) 7^{x^2-4}; в) $5^{x(x+3)}$; г) $0{,}5^{x^2-3x+2}$; ґ) $4^{\sqrt{x}-1}$.

Розв'яжіть нерівність (114, 115).

114. а) $3^{x+0,5} \cdot 3^{x-2} \geqslant 3$; б) $0{,}5^{x+7} \cdot 0{,}5^{1-2x} \leqslant 2$;
в) $8^x \cdot 4^{x+13} < \dfrac{1}{16}$; г) $2^{x-2} \cdot 4^{1+x} > \dfrac{1}{8}$.

115. а) $13^{2x+1} - 13^x < 12$; б) $3^{2x+1} > 10 \cdot 3^x - 3$;
в) $9^x + 3^{x+1} > 108$; г) $4^x + 2^{x+1} > 80$.

116. Розв'яжіть графічно нерівність:
а) $2^x \leqslant \dfrac{2}{x}$; б) $0{,}5^x \geqslant x + 3$; в) $3x + x > 4$.

117. Металеву кульку, температура якої дорівнює 120 °C, помістили в приміщення з температурою повітря 20 °C. Через скільки хвилин температура кульки буде 84 °C, якщо закон охолодження тіла виражається формулою $D = D_0 \cdot b^{kt}$, де D – різниця між температурою тіла, яке охолоджується, і температурою навколишнього середовища; D_0 – початкова різниця температур тіла й середовища; t – час у хвилинах; b і k – сталі величини, які залежать від форми тіла і матеріалу? Для даного тіла $b = 0{,}8$, $k = 0{,}1$.

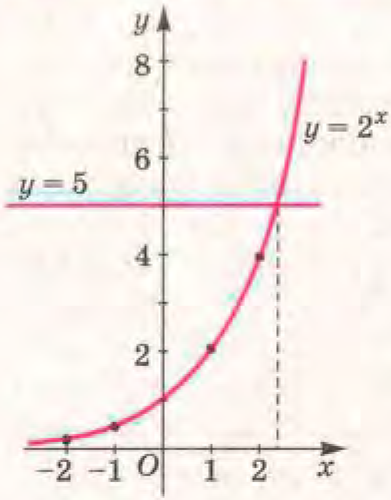
Вправи для повторення

118. Обчисліть:
а) $81^{0,75}$; б) $32^{0,6}$; в) $25^{1,5}$; г) $100^{2,5}$.

119. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = -7x + 3$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = \sqrt{x+4}$;
г) $y = \dfrac{3}{x+9}$; ґ) $y = \dfrac{-1}{x^2+4}$; д) $y = \dfrac{x}{1-x}$.

120. Знайдіть основу показникової функції, якщо її графік проходить через точку:
а) $A(5; 32)$; б) $B(-1; 2)$; в) $C(-2; 4)$.

§ 4. Логарифми та логарифмічні функції



Мал. 19

1. Логарифми. Неважко переконатися, що рівняння $2^x = 4$ має корінь $x = 2$, а рівняння $2^x = 8$ – корінь $x = 3$. А який корінь має рівняння $2^x = 5$? За допомогою графічного методу можна переконатися, що воно має єдиний розв'язок (мал. 19). Це число більше за 2 і менше за 3, але як його записати?

Нехай число a додатне і відмінне від 1. Якщо рівність $a^\alpha = b$ правильна, то число α називають *логарифмом* числа b за основою a.

Тобто ***логарифмом* числа *b* за основою *a* називають *показник степеня*, до якого слід піднести число *a*, щоб дістати *b*.** Логарифм числа b за основою a позначають $\log_a b$.

Приклади:

$\log_2 8 = 3$, бо $2^3 = 8$; $\log_{0,5} 16 = -4$, бо $0,5^{-4} = 16$.

Основою логарифма може бути довільне додатне число a, крім 1. З рівності $a^\alpha = b$ випливає, що коли число a додатне, то і b додатне. Отже, якщо число b не додатне (від'ємне або дорівнює 0), то $\log_a b$ не існує. Логарифм кожного додатного числа завжди існує.

Знаходження логарифма числа називають *логарифмуванням*. Ця операція обернена до операції піднесення до степеня з відповідною основою.

За означенням логарифма, якщо $a^\alpha = b$, то $\alpha = \log_a b$. Це різні записи тієї самої залежності. З них випливає рівність

$$a^{\log_a b} = b.$$

Цю рівність називають ***основною логарифмічною тотожністю.*** Вона правильна для будь-яких додатних a і b, $a \neq 1$.

Наприклад:

$$2^{\log_2 32} = 32;\ (\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 25} = 25;\ 0,1^{\log_{0,1} 0,001} = 0,001.$$

За допомогою основної логарифмічної тотожності будь-яке додатне число можна подати у вигляді степеня, що має задану основу.

Наприклад: $7 = 5^{\log_5 7}$; $7 = 12^{\log_{12} 7}$; $7 = 0,5^{\log_{0,5} 7}$.

Для будь-яких додатних значень x, y і $a \neq 1$ виконуються рівності:

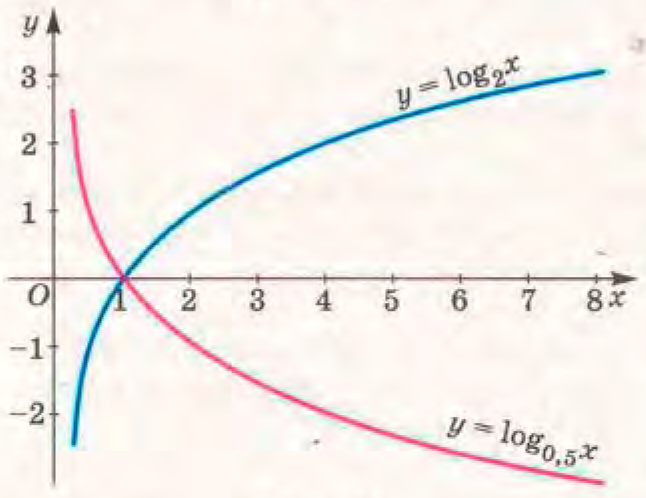
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;\ \log_a x^p = p\log_a x.$$

Доведемо першу з цих рівностей. Нехай $\log_a x = m$ і $\log_a y = n$. Тоді $a^m = x$ і $a^n = y$, звідки $a^m \cdot a^n = xy$, або $a^{m+n} = xy$.

Тут $m + n$ – логарифм числа xy за основою a, тобто $\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$. А це й вимагалося довести.

Доведену властивість коротко формулюють так: логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників. Аналогічно можна довести й інші твердження про логарифм дробу і логарифм степеня (доведіть самостійно). За допомогою цих тверджень і таблиць логарифмів упродовж кількох століть учені спрощували громіздкі обчислення. Адже логарифми дають можливість множення чисел замінити додаванням їх логарифмів, ділення – відніманням, піднесення до степеня – множенням тощо. Тільки в другій половині XX ст., коли з'явилися калькулятори та інші ЕОМ, потреба в логарифмічних обчисленнях відпала. Відійшли в історію також спеціальні логарифмічні лінійки, якими інженери та вчені колись користувалися для обчислень. Проте логарифмічні функції й тепер використовують досить часто.

2. Логарифмічна функція. Функцію називають *логарифмічною*, якщо її можна задати формулою $y = \log_a x$, де x – аргумент, a – додатне і відмінне від 1 дане дійсне число. Приклади логарифмічних функцій: $y = \log_2 x$, $y = \log_{0,5} x$. Їх графіки подано на малюнку 20.

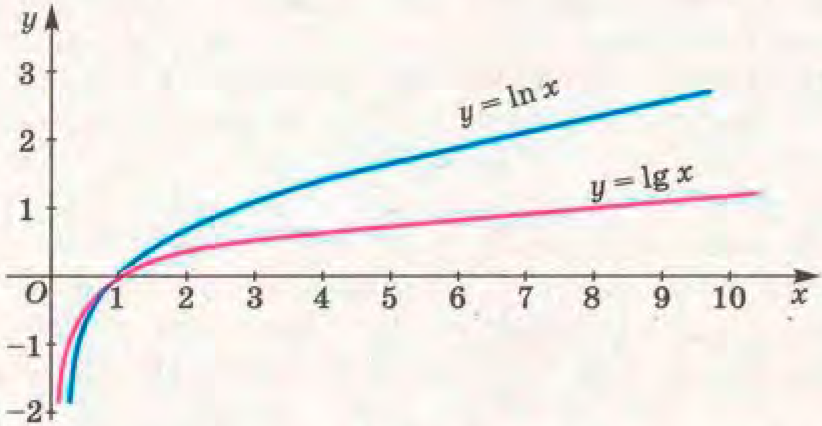


Мал. 20

Графіки логарифмічних функцій не обов'язково будувати за точками. Виявляється, що графік функції $y = \log_a x$ симетричний графіку функції $y = a^x$ відносно бісектриси першого координатного кута. Адже рівності $y = \log_a x$ і $a^y = x$ виражають одну й ту саму залежність між змінними x і y. Якщо в другій із цих рівностей поміняти x на y, а y на x, то це рівнозначно заміні осі x віссю y і навпаки. Такі функції, як

$y = \log_a x$ і $y = a^x$ називаються *оберненими*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = 2^x$ та переконайтеся, що вони симетричні відносно прямої $y = x$.

Найчастіше розглядають логарифми з основами e і 10. Їх називають відповідно *натуральними* та *десятковими логарифмами* і позначають символами ln і lg. Графіки функцій $y = \ln x$ і $y = \lg x$ зображено на малюнку 21.



Мал. 21

Основні властивості логарифмічних функцій:

1) область визначення функції $y = \log_a x$ – проміжок $(0; \infty)$;

2) область значень – множина R;

3) функція зростає на всій області визначення, якщо $a > 1$, і спадає, коли $0 < a < 1$;

4) функція ні парна, ні непарна, ні періодична;

5) графік кожної логарифмічної функції проходить через точку $A(1; 0)$.

Зверніть увагу на твердження, які випливають з монотонності логарифмічної функції $y = \log_a x$ і виконуються для всіх x з її області визначення:

1) якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$;

2) якщо $a > 1$ і $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 > x_2$;

3) якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 < x_2$.

Показникові та логарифмічні функції досить зручні для моделювання процесів, пов'язаних зі зростанням населення, капіталу, розмноженням бактерій, зміною атмосферного тиску, радіоактивним розпадом і т. п. Тому їх часто використовують для розв'язування прикладних задач.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке логарифм числа a за основою b? Як його записують?
2. Якою може бути основа логарифма?
3. Чи існує логарифм від'ємного числа? А нуля?

4. Яку рівність називають основною логарифмічною тотожністю?
5. Чому дорівнює логарифм добутку? А частки?
6. Які логарифми називають десятковими? А натуральними? Як їх записують?
7. Сформулюйте означення логарифмічної функції.
8. Яка область визначення логарифмічної функції? А область значень?
9. Через яку точку проходить графік кожної логарифмічної функції?
10. Чи може аргумент логарифмічної функції бути від'ємним? А дорівнювати нулю?
11. За якої умови логарифмічна функція зростає? А за якої – спадає?

Виконаємо разом

1. Обчисліть: а) $3\lg5 + 0,5\lg64$; б) $25^{1-0,5\log_5 10}$.

Розв'язання.

а) $3\lg5 + 0,5\lg64 = \lg5^3 + \lg64^{0,5} = \lg125 + \lg8 = \lg1000 = 3$;

б) $25^{1-0,5\log_5 10} = 25 : (25^{0,5})^{\log_5 10} = 25 : 5^{\log_5 10} = 25 : 10 = 2,5$.

2. Знайдіть x за логарифмом:
$\log_{0,3}x = 0,5\log_{0,3}a - 2\log_{0,3}b + \log_{0,3}c$.

Розв'язання. $\log_{0,3}x = 0,5\log_{0,3}a - 2\log_{0,3}b + \log_{0,3}c =$

$= \log_{0,3}a^{0,5} - \log_{0,3}b^2 + \log_{0,3}c = \log_{0,3}\dfrac{\sqrt{a}c}{b^2}$.

Оскільки $\log_{0,3}x = \log_{0,3}\dfrac{\sqrt{a}c}{b^2}$, то $x = \dfrac{\sqrt{a}c}{b^2}$.

3. Порівняйте числа $\log_{0,1}9$ і $\log_{0,1}0,9$.

Розв'язання. Функція $y = \log_{0,1}x$ – спадна, бо $0,1 < 1$. Оскільки $9 > 0,9$, то $\log_{0,1}9 < \log_{0,1}0,9$.

Виконайте усно

121. Відомо, що $3^5 = 243$. Чому дорівнює $\log_3 243$?

Обчисліть (122–124).

122. а) $\log_2 4$; б) $\log_2 32$; в) $\log_2 0,5$; г) $\log_2 4$; ґ) $\log_2 2$.
123. а) $\log_3 3$; б) $\log_3 81$; в) $\log_3 27$; г) $\log_3 1$; ґ) $\log_3 9$.
124. а) $\log_{0,5}2$; б) $\log_{0,5}1$; в) $\log_{0,5}0,5$; г) $\log_{0,5}4$; ґ) $\log_{0,5}8$.
125. Спростіть вираз: а) $3^{\log_3 x}$; б) $7^{\log_7(y+1)}$; в) $3^{2\log_3 x}$; г) $49^{\log_7(y+1)}$.
126. Знайдіть x:

а) $\log_a x = \log_a 15 - \log_a 3$; б) $\log_a x = 0,5\log_a 64$;
в) $\log_2 x = \log_2 a + \log_2 c$; г) $\log_2 x = 2\log_2 a$.

127. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = \log_{0,3}x$; б) $y = \ln x$; в) $y = \log_2 x$; г) $y = \lg x$?

128. Вкажіть область визначення функції:

а) $y = \log_3(x - 3)$; б) $y = \ln(x + 1)$; в) $y = \log_2 x^2$.

A

129. Знайдіть логарифми чисел 1; 2; 4; 8; 16 за основою 4.

130. Обчисліть: $\lg 10$; $\lg 100$; $\lg 1000$; $\ln e$; $\ln e^3$.

131. Покажіть, що:

а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_5 125 = 3$; в) $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$.

132. Запишіть за допомогою логарифмів співвідношення:

а) $5^4 = 625$; б) $9^{0,5} = 3$; в) $4^{1,5} = 8$;

г) $6^0 = 1$; ґ) $10^{-3} = 0{,}001$; д) $a^{3x} = c$.

133. Запишіть за допомогою показника степеня співвідношення:

а) $\log_3 81 = 4$; б) $\log_2 64 = 6$; в) $\log_{64} 2 = \frac{1}{6}$;

г) $\log_4 x = 3$; ґ) $\log_5 2x = 2$; д) $\log_x 49 = 2$.

134. Чи правильна рівність:

а) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$; б) $\log_{0,5} 4 = -2$; в) $\log_9 \sqrt{3} = 0{,}25$?

Обчисліть значення виразу (**135, 136**).

135. а) $5^{\log_5 4}$; б) $1{,}2^{\log_{1,2} 7}$; в) $0{,}3^{2\log_{0,3} 0,3}$;

г) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$; ґ) $\lg 300 - \lg 3$; д) $\ln 3e - \ln 3$.

136. а) $\log_3 2 + \log_3 4{,}5$; б) $\log_5 4 - \log_5 0{,}8$;

в) $3\log_2 6 - \log_2 27$; г) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$;

ґ) $\frac{\lg 27 - \lg 3}{\lg 15 - \lg 5}$; д) $\frac{\ln 18 + \ln 8}{2\ln_2 + \ln 3}$.

137. Заповніть таблицю і побудуйте графік функції $y = \log_8 x$.

x	0,25	0,5	1	2	4	8
$y = \log_8 x$						

138. Використовуючи малюнок 22, знайдіть наближені значення функції $y = \log_{2,5} x$ у точках з абсцисами:

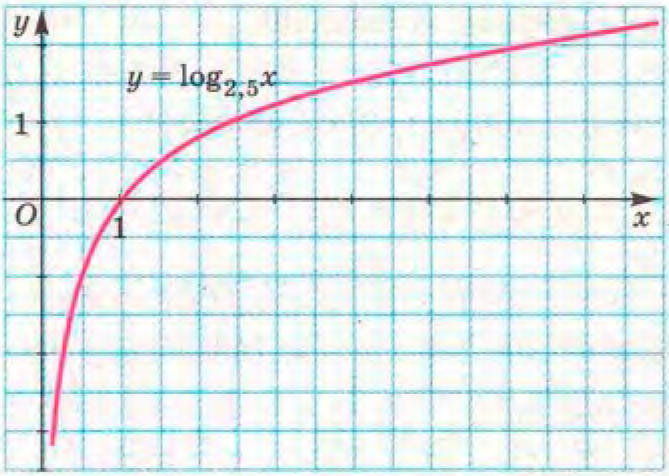
а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; б) 0,4; 1,4; 2,5; 3,8; 6,25.

139. Використовуючи малюнок 22, установіть, при яких значеннях аргументу x значення функції $y = \log_{2,5} x$ дорівнює:

а) −1; −2; −3; 0; 1; 2; 3; б) −0,5; −2,2; 0,4; 1,4; 2; 2,2.

140. Чи проходить графік функції $y = \log_{\sqrt{3}} x$ через точку:

а) $A(6; 27)$; б) $B(27; 6)$; в) $C(\sqrt{3}; 1)$?



Мал. 22

141. Знайдіть a, коли відомо, що графік функції $y = \log_a x$ проходить через точку:

а) $M(8; 3)$; б) $M(8; -3)$; в) $M(121; 2)$; г) $M(81; -4)$.

142. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \log_3 2x$; б) $y = \ln(x - 3)$;
в) $y = \log_9(x + 5)$; г) $y = \ln(1 - x)$.

143. Розв'яжіть нерівність:

а) $\log_5 x > \log_5 3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$; в) $\lg x < \lg 4$;

г) $\ln x > \ln 0,5$; ґ) $\log_3 x < 2$; д) $\log_{0,4} x > 2$.

Б

144. Знайдіть логарифм за основою 3 числа:

а) $\frac{1}{27}$; б) 729; в) $\sqrt[4]{9}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; ґ) $3^{\sqrt{3}}$.

145. Подайте числа -2; $-\sqrt{3}$; -1; $-0,5$; 0; 0,5; 1; $\sqrt{3}$; 2 у вигляді логарифма за основою:

а) 5; б) 0,1; в) 11; г) 2,5; ґ) $\sqrt{5}$.

146. Спростіть вираз:

а) $2^{4\log_2 3}$; б) $9^{\log_3 5}$; в) $8^{\log_2 7}$;
г) $5^{-\log_5 4}$; ґ) $10^{1-\lg 5}$; д) $e^{2-\ln 2}$.

Знайдіть x за даним логарифмом (**147, 148**).

147. а) $\log_5 27 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5 x$; б) $\log_5 x = \frac{1}{3}\log_5 8 - 2$;

в) $\log_3 120 - \log_3 15 = \log_3 x$; г) $\log_{20} x = 1 + \log_{20} 10$.

148. а) $\log_7 x = 1 - \log_7 2 + 0{,}5\log_7 100$;
б) $\log_3 x = 2 - 0{,}5\log_3 4 - \log_3 5$.

149. Враховуючи, що $\log_a b = 8$, обчисліть:

а) $\log_a(ab)$; б) $\log_a \dfrac{a}{b}$; в) $\log_a \dfrac{b}{a}$;

г) $\log_a(a^2b)$; ґ) $\log_a \sqrt{ab}$; д) $\log_a(ab)^{\frac{2}{3}}$.

150. Прологарифмуйте основну логарифмічну тотожність і доведіть, що $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

151. Доведіть, що коли $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то
а) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; б) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$;

в) $a^{\lg b} = b^{\lg a}$; г) $\dfrac{\lg a}{\lg b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

152. Порівняйте з нулем числа:
а) $\log_{0,5}5$; б) $\log_{0,5}0{,}1$; в) $\log_2 0{,}5$; г) $\lg 4$;
ґ) $\log_{25}7$; д) $\log_{\sqrt{5}}50$; е) $\log_{0,5}\sqrt{3}$; є) $\ln 0{,}01$.

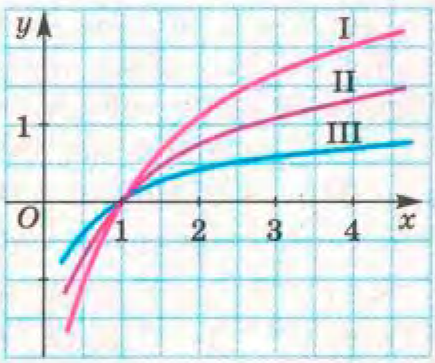
153. Порівняйте з одиницею числа:
а) $\log_{49}3$; б) $\log_2 14$; в) $\log_{98}128$; г) $\log_2 e$.

Порівняйте числа (**154, 155**).

154. а) $\log_2 0{,}4$ і $\log_2 0{,}6$; б) $\log_2 3$ і $\log_2 \pi$;
в) $\log_{0,2}1{,}4$ і $\log_{0,2}4{,}1$; г) $\log_{0,5}e$ і $\log_{0,5}\pi$.

155. а) $\log_2 0{,}4$ і $\log_{0,2}0{,}4$; б) $\log_2 3$ і $\ln 0{,}01$;
в) $\log_{0,2}4$ і $\log_2 1{,}6$; г) $\log_{25}0{,}7$ і $\lg 4$.

156. На малюнку 23 зображено графіки функцій $y = \ln x$, $y = \lg x$ та $y = \log_2 x$. Установіть відповідність між цими функціями і лініями I, II, III. Побудуйте графік функції (див. с. 301–302):
а) $y = 3 + \lg x$; б) $y = 2\lg x$;
в) $y = \lg|x|$; г) $y = 2 + \ln x$;
ґ) $y = -1 + \ln x$; д) $y = |\ln x|$.



Мал. 23

157. Побудуйте графік функції:
а) $y = \log_4 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$; в) $y = 2 + \log_3 x$;
г) $y = -\log_3 x$; ґ) $y = \log_2(x - 1)$; д) $y = \log_{0,5}(x + 2)$.

Вправи для повторення

158. Побудуйте графік функції:
а) $y = 2^x$; б) $y = 2^{x+1}$; в) $y = 2^x + 1$; г) $y = 2^{|x|}$.

159. Розв'яжіть нерівність:
а) $8x - 3 > 5x + 6$; б) $7y - 13 < 5y - 9$;
в) $7x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$; г) $x^2 - 6x - 55 \leqslant 0$.

160. З перевернутих 28 пластинок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього:
а) 2 очки (подія A); б) 5 очок (подія B)?

§ 5. Логарифмічні рівняння та нерівності

Рівняння називається *логарифмічним*, якщо його змінні входять *лише* під знаки логарифмів.

Приклади: $\log_3 x = 2$; $\lg x + \lg 4 = 2$; $\ln(3x - 2) = 1 - \ln x$.

Найпростішими логарифмічними рівняннями називають рівняння виду

$$\log_a x = b, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1.$$

За означенням логарифма, при будь-якому дійсному b це рівняння має єдиний розв'язок: $x = a^b$.

Розв'язування інших логарифмічних рівнянь ґрунтується на властивостях логарифмічної функції, означенні та властивостях логарифма.

Розв'язуючи логарифмічні рівняння, потрібно встановити область допустимих значень рівняння або здійснити перевірку отриманих коренів.

Для логарифмічних рівнянь немає загального методу розв'язування, проте можна виокремити кілька груп рівнянь, для розв'язування яких використовують певні способи. Розглянемо ці способи на конкретних прикладах.

I. *За означенням логарифма.*

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(x^2 - 4x + 12) = 3.$$

Розв'язання. За означенням логарифма, $2^3 = x^2 - 4x + 12$. Отже, $x^2 - 4x + 12 = 8$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, звідки $(x - 2)^2 = 0$ і $x = 2$.

Перевірка. $\log_2(2^2 - 4 \cdot 2 + 12) = \log_2 8 = 3$.

Відповідь. $x = 2$.

II. *За властивостями логарифмів і логарифмічної функції.*

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 1) = 3 + \log_2(x - 4).$$

Розв'язання. Скористаємося властивостями логарифмів $3 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3$, $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab)$ та запишемо рівняння у вигляді $\log_2((x-3)(x-1)) = \log_2 2^3(x-4)$. Використовуючи властивості логарифмічної функції, знаходимо: $(x-3)(x-1) = 8(x-4)$.

Отже, $x^2 - 4x + 3 = 8x - 32$, або $x^2 - 12x + 35 = 0$, звідки $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

Перевірка. Якщо $x = 5$, то $\log_2(5-3) + \log_2(5-1) = 3 + \log_2(5-4)$, $\log_2 2 + \log_2 4 = 3 + \log_2 1$, $1 + 2 = 3$, $3 = 3$.

Якщо $x = 7$, то $\log_2(7-3) + \log_2(7-1) = 3 + \log_2(7-4)$, $\log_2 4 + \log_2 6 = 3 + \log_2 3$, $\log_2 24 = \log_2(8 \cdot 3)$, $24 = 24$.

Відповідь. $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

Багато показникових і логарифмічних рівнянь *заміною* $a^{f(x)} = y$ або $\log_a f(x) = y$ можна звести до алгебраїчного рівняння з невідомим y.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння

$$(\lg x - 6)^{-1} + 5(\lg x + 2)^{-1} = 1.$$

Розв'язання. Замінивши $\lg x$ на y, дістанемо рівняння

$$\frac{1}{y-6} + \frac{5}{y+2} = 1,$$

коренями якого є: $y_1 = 2$; $y_2 = 8$. Отже, $\lg x_1 = 2$ або $\lg x_2 = 8$, звідки $x_1 = 100$; $x_2 = 10^8$.

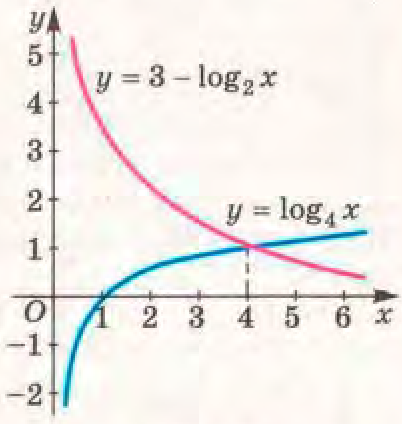
Перевірка показує, що обидва значення задовольняють рівняння.

Відповідь. $x_1 = 100$; $x_2 = 10^8$.

III. Деякі показникові та логарифмічні рівняння можна розв'язувати *графічним способом*.

Приклад 4. Розв'яжіть графічно рівняння $\log_4 x = 3 - \log_2 x$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \log_4 x$ і $y = 3 - \log_2 x$ (мал. 24). Як бачимо, графіки цих функцій перетинаються в точці з абсцисою $x = 4$. Щоб переконатися, що $x = 4$ – корінь даного рівняння, зробимо перевірку: $\log_4 4 = 3 - \log_2 4$, $1 = 3 - 2$, $1 = 1$.



Мал. 24

Відповідь. $x = 4$.

Якщо в логарифмічному рівнянні знак рівності змінити на знак нерівності, то дістанемо логарифмічну нерівність.

Нерівність називається *логарифмічною*, якщо її змінні входять *лише* під знаки логарифмів.

Для розв'язування логарифмічних нерівностей використовують ті самі методи, що й для розв'язування логарифмічних рівнянь.

Найпростіші логарифмічні нерівності виду

$$\log_a x > b \text{ чи } \log_a x < b,\ a > 0,\ a \neq 1$$

розв'язують, використовуючи монотонність і область визначення логарифмічної функції, а саме:

1) якщо $a > 1$ і $\log_a x > b$, то $x > a^b$;

2) якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x > b$, то $0 < x < a^b$.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} x > 3$.

Розв'язання. Оскільки $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 0,5^3$, то функція $y = \log_{0,5} x$ на всій області визначення $(0; \infty)$ спадає, бо $0,5 < 1$. Тому $x < 0,5^3$.

Відповідь. $0 < x < 0,125$.

Приклад 6. Розв'яжіть нерівність

$$\lg(x - 1) + \lg(8 - x) < 1.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку область допустимих значень x. Система нерівностей $x - 1 > 0$ і $8 - x > 0$ має множину розв'язків $(1; 8)$. На цій множині дана нерівність рівносильна нерівності $\lg(x - 1)(8 - x) < 1$, або $(x - 1)(8 - x) < 10$, звідки $x^2 - 9x + 18 > 0$.

Множиною розв'язків утвореної квадратної нерівності є $(-\infty; 3) \cup (6; \infty)$. Враховуючи, що $x \in (1; 8)$, дістанемо відповідь: $(1; 3) \cup (6; 8)$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які рівняння називають логарифмічними?
2. Яке рівняння називають найпростішим логарифмічним?
3. Скільки розв'язків має найпростіше логарифмічне рівняння?
4. Які способи розв'язування логарифмічних рівнянь ви знаєте?
5. Які нерівності називають логарифмічними?
6. Які способи розв'язування логарифмічних нерівностей ви знаєте?

Виконаємо разом

1. Розв'яжіть рівняння $\ln(x - 8) + \ln(1 - x) = 1$.

Розв'язання. Щоб $\ln(x - 8)$ і $\ln(1 - x)$ мали зміст, потрібне одночасне виконання нерівностей $x - 8 > 0$ і $1 - x > 0$.

Система цих нерівностей розв'язку не має.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків.

2. Розв'яжіть рівняння $\log_5\log_4\log_3 x = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння так:

$$\log_5(\log_4\log_3 x) = 0.$$

Число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма, дорівнює 5^0, тобто 1:

$$\log_4\log_3 x = 1.$$

Запишемо це рівняння так: $\log_4(\log_3 x) = 1$. Звідси дістаємо $\log_3 x = 4$, або $x = 3^4 = 81$.

Відповідь. 81.

3. Розв'яжіть нерівність $\log^2_{0,5} x - 4 \geqslant 0$.

Розв'язання. Нехай $\log_{0,5} x = y$. Тоді $y^2 - 4 \geqslant 0$. Цю нерівність задовольняють значення $y \geqslant 2$, а також $y \leqslant -2$. Нехай $\log_{0,5} x \geqslant 2$, звідки $\log_{0,5} x \geqslant \log_{0,5} 0,5^2$, $0 < x \leqslant 0,25$. Якщо $\log_{0,5} x \leqslant -2$, то $\log_{0,5} x \leqslant \log_{0,5} 0,5^{-2}$, $x \geqslant 4$.

Відповідь. $(0; 0,25] \cup [4; \infty)$.

4. Розв'яжіть нерівність $\lg(x + 3) + \lg 2 < 2\lg x - \lg(x - 4)$.

Розв'язання. Область допустимих значень: $(4; \infty)$. Перенесемо $\lg(x - 4)$ з правої частини нерівності в ліву та перетворимо утворену нерівність, використовуючи властивості логарифмів:

$$\lg(x + 3) + \lg 2 + \lg(x - 4) < 2\lg x,$$
$$\lg\big(2(x + 3)(x - 4)\big) < \lg x^2.$$

Звідси $2(x + 3)(x - 4) < x^2$, або $x^2 - 2x - 24 < 0$. Множина розв'язків останньої нерівності – це проміжок $(-4; 6)$.

Врахувавши область допустимих значень, знайдемо множину розв'язків заданої нерівності: $(-4; 6) \cap (4; \infty) = (4; 6)$.

Відповідь. $(4; 6)$.

Виконайте усно

Розв'яжіть рівняння (**161–164**).

161. а) $\log_3 x = 1$; б) $\ln x = 1$; в) $\log_5 x = -1$.

162. а) $\lg x = 0$; б) $\log_4 x = 2$; в) $\log_7 x = -2$.

163. а) $\ln x = -1$; б) $\log_{0,1} x = -2$; в) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$.

164. а) $\log_x 16 = 2$; б) $\log_x 5 = -1$; в) $\log_x 81 = -4$.

Розв'яжіть нерівність (**165–167**).

165. а) $\lg x > \lg 2$; б) $\ln x < \ln 2$; в) $\lg x^2 < \lg 9$.

166. а) $\log_2 x > 2$; б) $\log_2 x < 3$; в) $\lg x < 0$.

167. а) $\log_{0,2} x > 1$; б) $\log_{0,2} x < 0$; в) $\log_{0,5} x \geqslant 2$.

А

Знайдіть корені рівняння, використовуючи означення логарифма (168–172).

168. а) $\log_2(x-3)=4$; б) $\lg(x+5)=2$; в) $\ln(2-x)=-3$.

169. а) $\lg 2x = 4$; б) $\lg x^2 = 4$; в) $\lg\dfrac{x}{2} = 3$.

170. а) $\log_5(x-1)=2$; б) $\log_2(x^2+3x)=2$;
в) $\log_2(x^2-1)=3$; г) $\log_x(x^2-2x+6)=2$.

171. а) $\log_2(x+5)=1$; б) $\log_2(x^2+x)=1$;
в) $\log_3(x^2+2)=3$; г) $\log_x(16-x^3)=3$.

172. а) $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x)=-2$; б) $\log_{16}(x^2-3x)=0,5$;
в) $\log_{0,5}(3x-1)=3$; г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x+1)=-2$.

Використовуючи властивості логарифмів, розв'яжіть рівняння (173–176).

173. а) $\lg(3x-17)=\lg(x+1)$; б) $\log_6(5x+3)=\log_6(7x+5)$;
в) $\lg(4x+5)=\lg(5x+2)$; г) $\log_2(6x-8)=\log_2(3x+1)$.

174. а) $\lg(2x^2+3x)=\lg(6x+2)$;
б) $\lg(4x+1)-\lg x=0$;
в) $\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x)$;
г) $\lg(x+4)-\lg(3x)=0$.

175. а) $\lg(x-1)=\lg 2+\lg(2x-11)$; б) $\log_5 x+\log_5(x-4)=1$;
в) $\lg(3x-1)=\lg 5+\lg(x+5)$; г) $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$.

176. а) $\log_{12}(x-3)+\log_{12}(x-2)=1$;
б) $1+\log_5(2x-1)=\log_5(7x+4)$;
в) $\log_2(x+1)=1+\log_2(x-3)$;
г) $2\log_3 x=1+\log_3(2x-3)$.

Розв'яжіть нерівність (177–180).

177. а) $\log_2(3-2x)<\log_2 13$; б) $\log_{0,5}(1-3x)\geqslant\log_{0,5}4$;
в) $\log_{0,7}(2x-7)>\log_{0,7}5$; г) $\log_7(3x+8)<\log_7 5$.

178. а) $\log_2(4-x)-\log_2 8<0$; б) $\lg x>\lg 7+1$;
в) $\log_{0,25}(2-x)-\log_{0,25}2>0$; г) $\lg x\leqslant 2-\lg 5$.

179. а) $\log_3(x-7)<3$; б) $\log_3(v+1)<-2$;
в) $\log_{\frac{1}{3}}(y-7)>-2$; г) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5z)<-2$.

180. а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < 0$; б) $\log_{\frac{1}{4}}(3 - 4x) > -1$;
в) $\lg(12 - 5x) < 0$; г) $\log_{16}(4x + 3) > \frac{1}{2}$.

Б

Розв'яжіть рівняння (181–183).

181. а) $\log_7\log_2\log_{13}x = 0$; б) $\log_5\log_4\log_3x = 0$.

182. а) $\log_{2008}\log_3\log_2x = 0$; б) $\lg\lg\log_5x = 0$.

183. а) $\lg(x + 1) - \lg(x + 3) = \lg3 - \lg(x - 1)$;
б) $\log_2(x + 3) - \log_2(x - 1) = 2 - \log_2(2x - 8)$.

Розв'яжіть рівняння заміною змінної (184–186).

184. а) $\lg^2x - 4\lg x + 4 = 0$; б) $\log_5x \cdot (\log_5x - 1) = 2$;
в) $\frac{1}{5-\log_2 x} + \frac{2}{1+\log_2 x} = 1$; г) $\lg10x = \frac{3}{\lg x - 1}$.

185. а) $\lg^2x - \lg x - 2 = 0$; б) $\ln^2x - 2\ln x = 3$;
в) $\frac{1}{1+\lg z} + \frac{6}{5+\lg z} = 1$; г) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$.

186. а) $\log_2^2(x - 1) - \log_2(x - 1) - 6 = 0$; б) $\lg^2x + 2\lg x - 3 = 0$;
в) $2\log_9^2(x + 5) - 3\log_9(x + 5) + 1 = 0$; г) $\ln^2x - 2\ln x = 0$.

Розв'яжіть рівняння (187, 188).

187. а) $\log_3x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$; б) $4 - \lg z = 3\sqrt{\lg z}$;
в) $\log_{0,5}\log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = 0$; г) $\log_x2 + \log_2x = 2,5$.

188. а) $2\lg(-x) = \lg(x + 2)$; б) $\ln(x^2 - 2x) = \ln(2x + 12)$;
в) $\log_2x + \log_x16 = 5$; г) $x^{2+\lg x} = 1000$.

Розв'яжіть нерівність (189–193).

189. а) $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) > 3$;
б) $\log_3(x - 2) + \log_3(x + 6) \leqslant 2$.

190. а) $\log_5(x + 13) < \log_5(x + 3) + \log_5(x - 5)$;
б) $\log_4(x + 32) \geqslant \log_4(1 - x) + \log_4(8 - x)$.

191. а) $\lg(x - 1) - \lg(2x - 11) \geqslant \lg2$;
б) $\lg(3x - 1) - \lg(x + 5) > \lg5$.

192. а) $\log_3^2(4 - x) < 1$; б) $\log_3^2x - \log_3x - 6 < 0$;
в) $\log_5^2(5 - x) \leqslant 4$; г) $\log_2^2x - 3\log_3x - 4 > 0$.

193. а) $\log_{0,2}^2(x-1) > 4$; б) $\log_3^2 x - 2\log_3 x < 3$;
в) $\log_4^2(x-3) \geqslant 1$; г) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

194. Розв'яжіть графічно рівняння:
а) $\log_3 x = 1 - x$; б) $x - 1 = 3\log_4 x$;
в) $\log_2 x = \sqrt{3-x}$; г) $\log_{0,5} x = -\frac{2}{x}$.

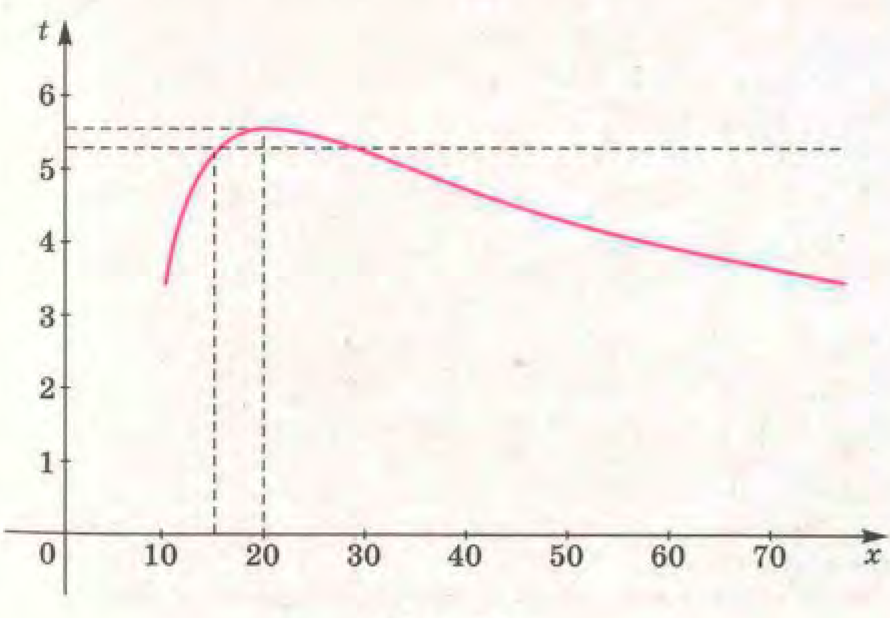
195. Розв'яжіть графічно нерівність:
а) $\log_2 x < 3 - x$; б) $\ln x < x^3 + 1$;
в) $\log_4 x > \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$; г) $x < 11 - \lg x$.

196. Знайдіть з точністю до 10^{-4} корені рівняння:
а) $\lg x = 0,4$; б) $\lg x = -1,5$; в) $\ln x = 3,7$;
г) $\log_3 x = 2,5$; ґ) $\log_{0,5} x = 3$; д) $\log_{\sqrt{2}} x = \sqrt{3}$.

197. Ємність легенів людини виражається функцією

$$t(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x},$$

де x – вік людини в роках ($x \geqslant 10$); $t(x)$ – ємність легенів у літрах.
За допомогою графіка функції $t(x)$, зображеного на малюнку 25, установіть:
а) у якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює;
б) протягом якого часу ємність легенів більша, ніж у 15 років.



Мал. 25

Вправи для повторення

198. Катер пройшов за течією річки 80 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 8 год 20 хв. Скільки часу катер рухався за течією річки, якщо її швидкість дорівнює 4 км/год?

199. Побудуйте графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$.

200. Розташуйте в порядку зростання числа:

а) $0,5^{0,5}$; $0,5^{-5}$; $0,5^{1,5}$; $0,5^{\sqrt{5}}$;

б) $3^{0,3}$; 3^{-5}; $3^{1,3}$; $3^{\sqrt{5}}$.

Самостійна робота №1

Варіант 1

1. Побудуйте графік функції: а) $y = 3^x$; б) $y = \log_{0,5} x$.
2. Обчисліть: а) $\log_2 32$; б) $\log_6 2 + \log_6 3$.
3. Розв'яжіть рівняння:
   а) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; б) $\log_5(2x + 3) = 2$;
   в) $4^{x+1} - 4^{x-1} = 60$; г) $\lg(3x + 1) + \lg x = 1$.
4. Розв'яжіть нерівність: а) $3^{4x} - 9^{x+2} < 0$; б) $\log_2 4x < 3$.

Варіант 2

1. Побудуйте графік функції: а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y = \log_3 x$.
2. Обчисліть: а) $\log_9 81$; б) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$.
3. Розв'яжіть рівняння:
   а) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$; б) $\log_3(7x - 1) = 3$;
   в) $6^x - 6^{x-2} = 210$; г) $\lg(2x + 4) = 1 - \lg(x - 2)$.
4. Розв'яжіть нерівність: а) $2^{4x} - 4^{x-2} > 0$; б) $\log_{0,6} 3x > 2$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Сформулюйте означення показникової функції.
2. Назвіть основні властивості показникової функції.
3. За якої умови показникова функція зростає; спадає?
4. Чи задає рівність $y = 1^x$ функцію? Який її графік? Чи є ця функція показниковою?
5. Що таке експонента? Накресліть її графік.
6. Що таке логарифм числа? Наведіть приклади.

7. Які логарифми називають десятковими; натуральними?
8. Сформулюйте основні властивості логарифмів.
9. Напишіть основну логарифмічну тотожність.
10. Які функції називають логарифмічними?
11. Назвіть основні властивості логарифмічної функції.
12. За якої умови логарифмічна функція зростає; спадає?
13. Які функції називають взаємно оберненими? Наведіть приклади.
14. Які рівняння називають показниковими; логарифмічними?
15. Як розв'язують показникові та логарифмічні рівняння?
16. Як розв'язують показникові та логарифмічні нерівності?
17. Які рівняння або нерівності називають трансцендентними?

Історичні відомості

Функції та графіки. Поняття функції з'явилось у математиці в XVII ст. Його введенню сприяли насамперед роботи Р. Декарта, П. Ферма, І. Ньютона. Термін «функція» запропонував Г. Лейбніц. Пізніше Й. Бернуллі, Г. Лопіталь, К. Гаусс та інші математики уточнювали й розширювали це поняття.

Л. Ейлер

Основні властивості числових функцій, зокрема їх парність, непарність, періодичність, неперервність, диференційовність тощо, дослідив у двотомній праці «Вступ до аналізу нескінченно малих» Л. Ейлер (1707–1783).

С. Стевін

Найзагальніше сучасне означення функції запропонувала у XX ст. група математиків, що виступала під псевдонімом Н. Бурбакі.

Степені з невеликими натуральними показниками розглядали вавилонські вчені ще понад 4000 років тому. Степені з дробовими, нульовими та від'ємними показниками входили в математику поступово в XIV–XVII ст. Різні математики позначали їх по-різному. Від'ємні та дробові показники степенів використовували Н. Орезм, М. Шюке, С. Стевін. Після публікації праць І. Ньютона сучасні позначення цих степенів стали загальноприйнятими. Тоді ж почали розглядати степені з довільними дійсними показниками.

Дж. Непер

В. Отред

Дж. Валліс

Логарифми введено в математику наприкінці XVI ст. Цей термін запровадив англійський математик Дж. Непер (1550–1617) в розумінні числового відношення (грец. λογος – відношення, αριθμος – число). Десяткові логарифми ввів англійський математик Г. Брігс. У 1620 р. Вільям Отред винайшов першу логарифмічну лінійку, яка протягом тривалого часу була незамінним інструментом інженера.

Близьке до сучасного розуміння логарифмування як операції, оберненої до піднесення до степеня, вперше з'явилось у Валліса та Йогана Бернуллі. Відкриття логарифмів і створення таблиць логарифмів значно спростило громіздкі обчислення, тому вони широко використовувалися на практиці. Французький математик П. Лаплас зазначав, що винахід логарифмів подовжив життя обчислювачів. Згодом було створено логарифмічну лінійку – прилад для механічного виконання дій другого і третього ступенів.

З появою мікрокалькуляторів обчислення за допомогою таблиць логарифмів і логарифмічних лінійок відійшло в історію. А логарифмічні та обернені їм показникові функції використовуються і тепер.

Показникові й логарифмічні функції ґрунтовно досліджував Л. Ейлер, називаючи їх «показниковими та логарифмічними кількостями».

Головне в розділі 1

Вираз a^α називають *степенем*. Тут a – основа степеня, α – його показник. Значення степеня з раціональним показником знаходять за формулами:

$$a^1 = a;\ a^0 = 1\ (a \neq 0);\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{разів}},\ (a \in R,\ n \in N);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0,\ n \in N);\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (n \in N,\ m \in Z,\ a > 0).$$

Основні властивості степенів:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; 5) $(a : b)^n = a^n : b^n$.

Значення степеня з дійсним показником степеня знаходять наближено за допомогою калькулятора або комп'ютера.

Функція виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається показниковою.

Основні властивості показникової функції:

1) область визначення функції $y = a^x$ – множина R;

2) область значень функції $y = a^x$ – множина $(0; \infty)$;

3) якщо $a > 1$, функція $y = a^x$ зростає, а якщо $0 < a < 1$ – спадає;

4) функція $y = a^x$ – ні парна, ні непарна, ні періодична;

5) графік кожної показникової функції проходить через точку (0; 1).

Логарифмом числа b за основою a називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб дістати b.

Тобто, якщо $a^x = b$, то $x = \log_a b$ $(b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$.

Властивості логарифмів:

1) $\log_a 1 = 0$; 2) $\log_a a = 1$;

3) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$; 4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

5) $\log_a x^n = n \log_a x$; 6) $a^{\log_a b} = b$.

Функція виду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається логарифмічною.

Основні властивості логарифмічної функції:

1) область визначення функції $y = \log_a x$ – множина $(0; \infty)$;

2) область значень функції $y = \log_a x$ – множина R;

3) якщо $a > 1$, функція $y = \log_a x$ зростає, а якщо $0 < a < 1$ – спадає;

4) функція $y = \log_a x$ – ні парна, ні непарна, ні періодична;

5) графік кожної логарифмічної функції проходить через точку (1; 0).

Функції $y = \log_a x$ і $y = a^x$ – взаємно обернені, тому їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$.

Показниковими називаються рівняння та нерівності, у яких змінні містяться лише в показниках степенів.

Основні методи розв'язування показникових рівнянь і нерівностей:

I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів (логарифмів) з однаковими основами;

II. Метод уведення нової змінної;

III. Функціонально-графічний метод.

Логарифмічними називаються рівняння та нерівності, у яких змінні містяться лише під знаками логарифмів.

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей:

I. За означенням логарифма;

II. За властивостями логарифмів і логарифмічної функції;

III. Введення нової змінної;

IV. Графічний;

V. Логарифмування.

Показникові та логарифмічні рівняння й нерівності входять до складу трансцендентних рівнянь і нерівностей.

Що може бути простіше
за диференціальне числення!

М. Остроградський

2 Похідна та її застосування

ТЕМИ РОЗДІЛУ

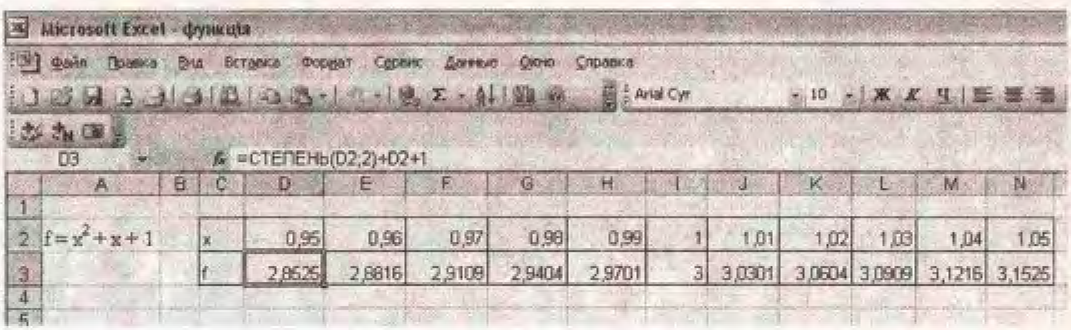
- Поняття про неперервність і границю функції в точці.
- Похідна функції; її геометричний і фізичний зміст.
- Таблиця похідних.
- Правила диференціювання.
- Похідна складеної функції.
- Ознаки сталості, зростання й спадання функції.
- Екстремуми функції.
- Застосування похідної для дослідження функцій та побудови графіків.
- Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для розв'язування задач прикладного змісту.

§ 6. Границя функції

Часто говорять про значення функції в точці, границю функції в точці, приріст функції в точці, неперервність функції в точці. Про які точки йдеться? Про точки осі абсцис – значення аргументу.

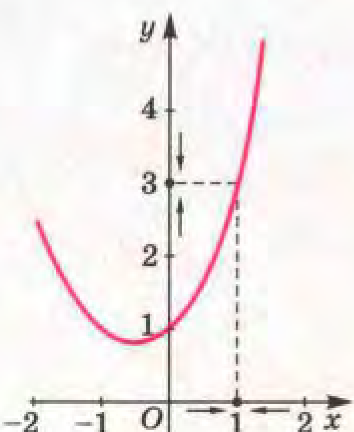
Значення функції в точці. Нехай задано, наприклад, функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо $x = 1$, то відповідне значення функції дорівнює 3. Кажуть, що в точці $x = 1$ значення функції $f(x)$ дорівнює 3. У точці $x = 0$ її значення дорівнює 1, у точці $x = 10$ значення функції $f(x)$ дорівнює 111. Пишуть: $f(1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(10) = 111$.

Границя функції в точці. Візьмемо ту саму функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо значення її аргументу x досить близько і з обох боків наближаються до 1, то відповідні значення функції як завгодно близько наближаються до числа 3. Про це свідчать дані таблиці (мал. 26), у якій містяться значення функції $y = x^2 + x + 1$ для 10 значень аргументу, близьких до числа 1, і графік, зображений на малюнку 27.

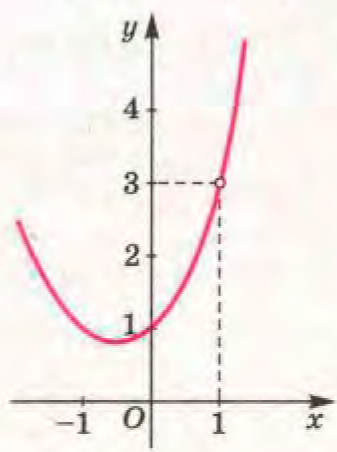


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	f = x2 + x + 1		x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
3			f	2,8525	2,8816	2,9109	2,9404	2,9701	3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525
4														
5														

Мал. 26



Мал. 27



Мал. 28

Іншими словами: різниця $|f(x) - 3|$ може стати і залишатись як завгодно малою, якщо різниця $|x - 1|$ буде досить малою. У цьому разі кажуть, що границя функції $f(x)$ у точці $x = 1$ дорівнює 3. Пишуть: якщо $x \to 1$, то $f(x) \to 3$, або $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

Істотна деталь: функція може мати границю навіть у такій точці, в якій вона не визначена. Наприклад, функція $\varphi(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ у точці $x = 1$ не має значення, бо знаменник не може дорівнювати нулю. В усіх інших точках функція $\varphi(x)$ має такі самі значення, як і функція $f(x)$, бо $(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$. Графік функції $\varphi(x)$ зображено на малюнку 28. Хоч значення функції $\varphi(x)$ у точці $x = 1$ не існує, її границя в цій точці існує і дорівнює 3.

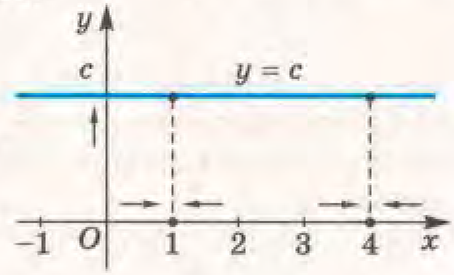
Означення границі функції можна сформулювати так.

Число b називається *границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε можна вказати таке додатне число δ, що для всіх значень x із проміжку $(a - \delta;\ a + \delta)$, крім, можливо, самої точки $x = a$, справджується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пишуть: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

П р и м і т к а. Означення границі функції досить важке, тому його можна не запам'ятовувати.

Границя функції в точці має такі властивості.



Мал. 29

• Функція не може мати двох різних границь у точці.

• Якщо c – число, то $\lim\limits_{x\to a} c = c$ (мал. 29).

• Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має границю в точці a, то в цій точці існують границі функцій $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $kf(x)$ і $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$, для яких характерні рівності:

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\big(kf(x)\big) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Останню властивість можна сформулювати іншими словами.

4*

Границя суми (різниці, добутку) функцій дорівнює сумі (різниці, добутку) границь цих функцій. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню їхніх границь, якщо границя дільника не дорівнює нулю.

Ці властивості використовують для обчислення границь функцій у заданих точках.

Приклад. За умови, що $x \to 5$, обчисліть границю функції $f(x)$, якщо: а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = x^2 - 10x + 17$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to5}(2x+3) = \lim\limits_{x\to5}2x + \lim\limits_{x\to5}3 = 2\lim\limits_{x\to5}x + 3 = 2\cdot5+3 = 13.$

б) $\lim\limits_{x\to5}(x^2-10x+17) = \lim\limits_{x\to5}x^2 + \lim\limits_{x\to5}(-10x) + \lim\limits_{x\to5}17 =$

$= (\lim\limits_{x\to5}x)^2 - 10\cdot\lim\limits_{x\to5}x + \lim\limits_{x\to5}17 = 5^2 - 10\cdot5 + 17 =$

$= 25 - 50 + 17 = -8.$

Зауваження. Розв'язуючи такі вправи, деякі перетворення можна виконувати усно.

Знаходження границь суттєво спрощується для ***неперервних функцій*** – функцій, графіком яких є неперервна лінія. Для них виконується співвідношення

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Тобто *границя неперервної функції в кожній точці проміжку, на якому функція неперервна, дорівнює її значенню в цій точці*.

Запам'ятайте! Неперервними в кожній точці числової прямої є всі цілі раціональні функції. Дробово-раціональні та ірраціональні функції неперервні в кожній точці області визначення.

Докладно теорію границь функцій розглядають у курсі вищої математики.

Приріст аргументу і функції. Нехай дано, наприклад, функцію $f(x) = x^2$. У точці $x_0 = 2$ її значення $f(2) = 4$. Збільшимо значення аргументу на 0,01, тобто нехай $x = 2{,}01$. Відповідне значення функції $f(2{,}01) = 4{,}0401$. Порівняно з попереднім значенням воно збільшилося на 0,0401. Тут 0,01 – *приріст аргументу*, а 0,0401 – відповідний *приріст функції*, а саме: приріст функції $f(x) = x^2$ на проміжку $[2; 2{,}01]$.

Приростом аргументу в точці $x_0 = a$ називають різницю $x - a$, де x – довільне число, яке мало відрізняється від a. Він може бути додатним або від'ємним. Відповідним приростом функції $f(x)$ є різниця $f(x) - f(a)$.

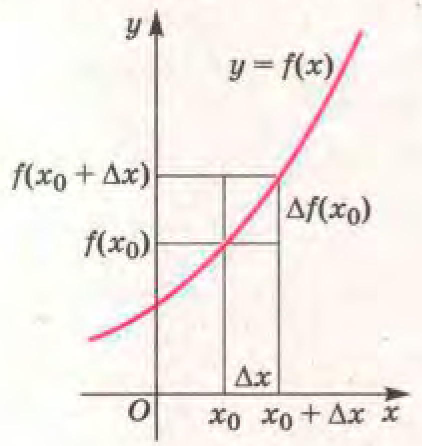
Приріст аргументу x позначають символом Δx, а приріст функції Δf, Δy (читають: дельта ікс, дельта еф, дельта ігрек).

Ці записи не означають добутки. У розглянутому прикладі $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta f = 0{,}0401$.

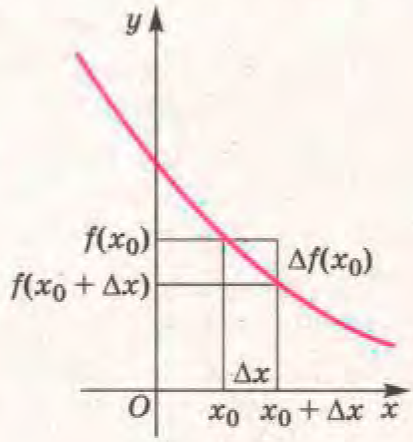
Геометрично приріст аргументу зображається приростом абсциси точки кривої, а приріст функції – приростом ординати цієї точки (мал. 30). Властивості цих понять видно на малюнках 30 і 31.

Якщо $y = f(x)$ – зростаюча і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ – число додатне.

Якщо $y = f(x)$ – спадна і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ – число від'ємне.



Мал. 30



Мал. 31

Теорія границь – великий і важливий розділ курсу математичного аналізу, який вивчається в університетах. Він є основою для вивчення похідної та її застосувань – могутнього апарату для дослідження багатьох реальних процесів. У школі цей матеріал вивчають оглядово, на основі наочних уявлень та інтуїції.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке границя функції в точці?
2. Що таке приріст аргументу? Як його позначають?
3. Що таке приріст функції? Як його позначають?
4. Сформулюйте властивості границі функції в точці.
5. Які властивості приросту функції ви знаєте?

Виконаємо разом

1. Обчисліть: а) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

Розв'язання. а) У точці $x = 3$ функція $y = \sqrt{x+1}$ неперервна, тому її границя дорівнює значенню функції в цій точці, а саме: $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2$.

б) У точці $x = 1$ функція не визначена, але дріб $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ можна скоротити: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2.$

Оскільки для обчислення границі функції при $x \to 1$ саму точку $x = 1$ можна вилучити й не розглядати, то

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x - 2) = \lim_{x \to 1} x - 2 = 1 - 2 = -1.$$

2. Для функції $y = x^2$ знайдіть приріст функції, якщо значення аргументу переходить від 3 до 3,5.

Розв'язання. Спосіб 1. Маємо $f(x) = x^2$, а $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$. Тоді $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Отже, $\Delta f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

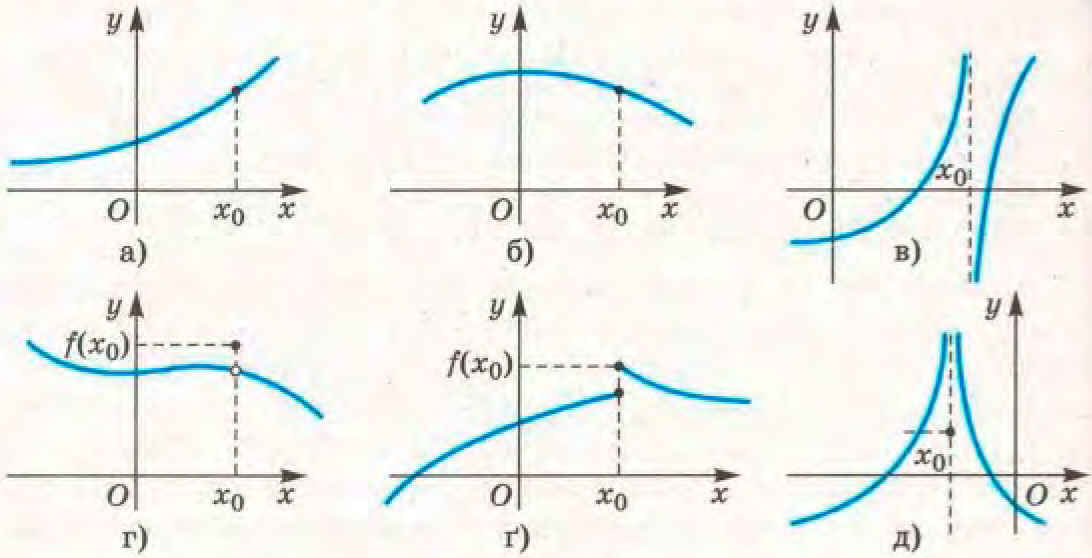
За цією формулою можна обчислити значення $\Delta f(x)$ для будь-яких x і Δx. Зокрема, у нашому прикладі $x = 3$, $\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$.

Тому $\Delta f(x) = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25$.

Спосіб 2. $f(3) = 3^2 = 9$, а $f(3{,}5) = 3{,}5^2 = 12{,}25$. Отже, $\Delta f(x) = f(3{,}5) - f(3) = 12{,}25 - 9 = 3{,}25$.

Виконайте усно

201. Яка з функцій, графіки яких зображені на малюнку 32, є неперервною: 1) на всій області визначення; 2) на проміжку $(-\infty; 0)$; 3) на проміжку $(0; \infty)$?



Мал. 32

202. Для кожної з функцій, графіки яких зображені на малюнку 32, встановіть: а) чи визначена ця функція в точці x_0; б) чи існує границя функції в точці x_0 і чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.

203. Чи має функція $y = 5x$ границю в точці: а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = -0{,}2$?

204. Обчисліть границю функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 0$, якщо:
а) $f(x) = x - 5$; б) $f(x) = x^2 - x + 7$;
в) $f(x) = \sqrt{2x+1}$; г) $f(x) = 3x^2 - x$.

А

205. Дано функції $f(x) = x^2 - x + 1$ і $\varphi(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$. Перемалюйте таблицю в зошит і заповніть її.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$\varphi(x)$							

206. Відомо, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 3$.
Обчисліть:
а) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) + \varphi(x) - g(x)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(2f(x) - \varphi(x) + g(x)\right)$;
в) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot\varphi(x)\cdot g(x)\right)$; г) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot\varphi^2(x)\cdot g(x)\right)$.

207. Обчисліть границю функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 1$, якщо:
а) $f(x) = 2x - 5$; б) $f(x) = 3x^2 - x + 1$; в) $f(x) = \dfrac{5}{x-3}$.

208. Обчисліть границю функції $y = \varphi(x)$ у точці $x_0 = 2$, якщо:
а) $\varphi(x) = 3x^3 - x$; б) $\varphi(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$; в) $\varphi(x) = x^2 - 7x + 3$.

Обчисліть границі (**209–212**).

209. а) $\lim\limits_{x\to 10}(12x - 30)$; б) $\lim\limits_{x\to 5}(8 - 3x)$; в) $\lim\limits_{x\to 5}(2x + 0{,}5)$.

210. а) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2 - 5)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1 - 3x^3)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(2x + 5x^2)$.

211. а) $\lim\limits_{x\to 0}(2 + x + x^2)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(7 - 3x^2)$; в) $\lim\limits_{x\to 3} x(x + 5)$.

212. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x}{x^2-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2}{7}$.

213. Знайдіть приріст аргументу в разі переходу від точки x_0 до точки x, якщо:
а) $x_0 = 1$, $x = 1{,}3$; б) $x_0 = 3$, $x = 3{,}5$; в) $x_0 = 2{,}1$, $x = 2{,}7$.

214. Знайдіть приріст функції $y = 3x + 1$ у разі переходу від точки x_0 до точки x, якщо:

а) $x_0 = 2$, $x = 2{,}3$; б) $x_0 = 5$, $x = 5{,}5$; в) $x_0 = 2{,}5$, $x = 2{,}7$.

215. Для функції $y = 0{,}5x - 3$ знайдіть x і Δy, якщо:

а) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$; б) $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}4$;
в) $x_0 = 2{,}1$, $\Delta x = 0{,}9$.

216. Для функції $y = 10x - 1$ знайдіть Δx і Δy, якщо:

а) $x_0 = 1$, $x = 1{,}2$; б) $x_0 = 3$, $x = 3{,}1$; в) $x_0 = 2{,}1$, $x = 2{,}5$.

Б

217. Відомо, що $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 2$. Обчисліть:

а) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)+1}{g(x)-\varphi(x)}$; б) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{2-5\varphi(x)}$; г) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$.

Обчисліть границі (**218–220**).

218. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

219. а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$.

220. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-5x+2}{8x^3-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-5x^2+2x+2}{x^2+5x-6}$.

221. Обчисліть границю функції $f(x)$ у точці, в якій функція не визначена, якщо:

а) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$; б) $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$; в) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$.

222. Для функції $y = 5 + x^2$ знайдіть границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

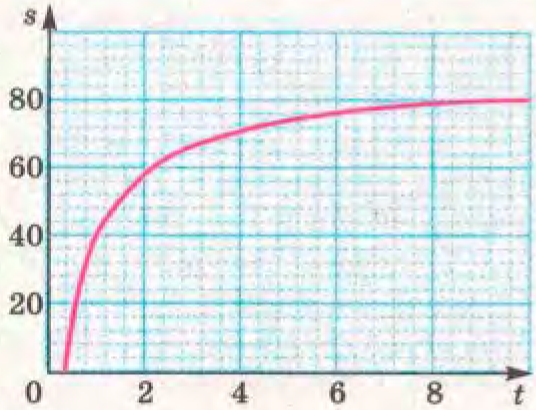
223. Знайдіть границю відношення приросту функції $y = f(x)$ до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, якщо:

а) $f(x) = -x + 3$; б) $f(x) = 3x^2$; в) $f(x) = x^3 + 1$.

224. Кількість мишей у колонії записували щотижня і побудували відповідний графік (мал. 33). Визначте середню швидкість зростання популяції мишей:

а) з 4-го по 6-й тиждень; б) за перші 5 тижнів.

Мал. 33



Мал. 34

225. На малюнку 34 подано графік руху тіла $s(t)$ (шлях s у км, час t у год). Визначте середню швидкість руху за час t, якщо: а) $1 \leqslant t \leqslant 4$; б) $4 \leqslant t \leqslant 8$.

226. Відомо, що для деякої фірми витрати на випуск x одиниць продукції описуються функцією $K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}3x^2 + 20x + 100$ (грн.), а дохід, одержаний від реалізації x одиниць продукції, можна обчислити за формулою $R(x) = 200x - 0{,}05x$ (грн.). Визначте приріст витрат і доходу для збільшення випуску одиниць продукції:

а) з 20 до 100; б) з 30 до 50.

227. За деякими підрахунками визначено, що фірма, виробляючи x одиниць продукції щомісяця, має витрати $K(x)$, що виражаються формулою $K(x) = 150 + 30x$ (грн.), а дохід $R(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї самої продукції, становить $R(x) = 90x - 0{,}02x^2$ (грн.). Якщо фірма збільшить щомісячний випуск продукції з 300 до 320 одиниць, як зміняться її: а) витрати; б) дохід; в) прибуток?

Вправи для повторення

228. Розміри прямокутника – 20 м і 10 м. Довжину кожної сторони цього прямокутника збільшили на 10 %. Знайдіть площу утвореного прямокутника.

229. Розв'яжіть нерівність:

а) $|x - 1| < 2$; б) $|x + 3| > 4$; в) $2|x - 3| < 5$; г) $|2x + 3| > 5$.

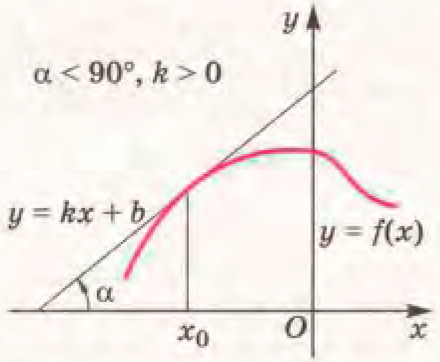
230. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x - y}$; в) $\dfrac{x + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$.

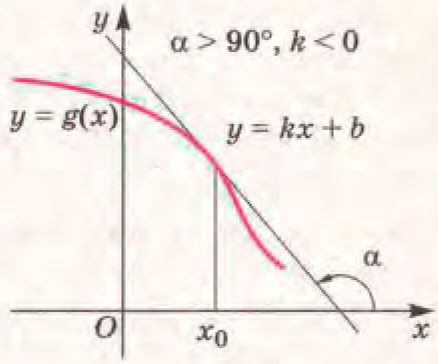
§ 7. Дотична до графіка функції. Похідна

Багатьом фахівцям часто доводиться досліджувати функції, тобто з'ясовувати, за яких умов та чи інша функція зростає чи спадає, за яких набуває найменшого чи найбільшого значення тощо. Досліджувати функції найкраще за допомогою *похідної* чи тісно пов'язаної з нею *дотичної* до графіка функції. Скористаємося спочатку інтуїтивним уявленням про дотичну. Згадайте, що дотична до кола – це пряма, яка лежить у площині цього кола і має з ним тільки одну спільну точку.

На малюнках 35 і 36 зображено графіки неперервних функцій $f(x)$ і $g(x)$ та дотичні, проведені до них у точках x_0. Дотична до кривої – це пряма. Її рівняння має вигляд $y = kx + b$, де k – *кутовий коефіцієнт*, $k = \operatorname{tg}\alpha$ (якщо $k \neq 0$, то α – кут між променем дотичної, розміщеним вище від осі x, і додатним напрямом цієї осі).



Мал. 35



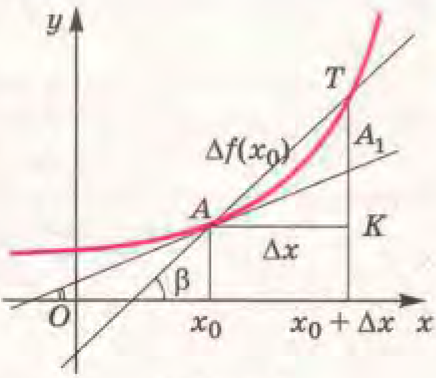
Мал. 36

Зверніть увагу на кутовий коефіцієнт k дотичної, проведеної до графіка функції в його точці з абсцисою x.

Якщо число x_0 належить проміжку зростання функції, то відповідне значення k додатне (мал. 35). Якщо x_0 належить проміжку спадання функції, то відповідне значення k від'ємне (мал. 36). І навпаки, якщо кожному значенню x із деякого проміжку $(a; b)$ відповідає додатне значення k, то на $(a; b)$ дана функція зростає; якщо кожному значенню x з деякого проміжку $(c; d)$ відповідає від'ємне значення k, то на $(c; d)$ функція спадає. Заслуговують на увагу і ті точки графіка функції, в яких дотична не існує і в яких вона паралельна осі x, тобто коли її кутовий коефіцієнт дорівнює 0.

Отже, для дослідження функцій важливо вміти визначати кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка. Розглянемо детальніше зв'язок цього коефіцієнта з досліджуваною функцією.

Нехай дано графік функції $y = f(x)$ і на ньому точку A, в якій існує дотична до графіка (мал. 37). Якщо абсциса точки A дорівнює x_0, то її ордината – $f(x_0)$. Надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx. Нарощеному значенню аргументу $x_0 + \Delta x$ на графіку функції відповідає точка T з абсцисою $x_0 + \Delta x$ і ординатою $f(x_0 + \Delta x)$.



Мал. 37

Через точки A і T проведемо прямі AK і TK, паралельні осям абсцис і ординат; вони перетнуться в деякій точці K. Тоді $AK = \Delta x$ – приріст аргументу, а $TK = \Delta y$ – приріст функції на $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Кутовий коефіцієнт січної AT дорівнює тангенсу кута β, тобто відношенню Δy до Δx:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо приріст аргументу Δx зменшувати так, щоб він прямував до нуля, то січна AT, повертаючись навколо точки A, наближатиметься до прямої AA_1. Таку пряму AA_1 – граничне положення січної AT при $\Delta x \to 0$ – називають *дотичною до графіка* даної функції в точці x_0.

Якщо $\Delta x \to 0$, то міра кута β прямує до α, а тангенс кута β – до $\operatorname{tg}\alpha$. Тобто, якщо k – кутовий коефіцієнт цієї дотичної і $\Delta x \to 0$, то

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

До обчислення значення виразу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ чи $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ приводять розв'язування багатьох задач із механіки, електрики, біології, економіки, статистики тощо. Саме тому цей вираз отримав спеціальну назву – *похідна*.

Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.

Похідну функції $f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$. Її означення записують також у вигляді рівності

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ або } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$ у точці $x = 3$.

Розв'язання. Надамо аргументу $x = 3$ приріст Δx. Відповідний приріст функції $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$. Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 6$. Отже,

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Відповідь. $f'(3) = 6$.

Так розв'язують задачу, користуючись означенням похідної функції в точці.

Досі йшлося про похідну функції в точці. А можна розглядати похідну функції і як функцію. Нехай, наприклад, дано функцію $y = x^2$. Знайдемо її похідну в довільній точці x. Для цього надамо значенню x приріст Δx. Відповідний йому приріст функції $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

Тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$. Маємо

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Отже, похідна функції x^2 у кожній її точці x дорівнює $2x$. Пишуть: $(x^2)' = 2x$, або якщо $y = x^2$, то $y' = 2x$.

Зверніть увагу! **Похідна функції в точці – це число.** Але коли говорять про похідну, не вказуючи «в точці», мають на увазі похідну як функцію: **похідною функції $y = x^2$ є функція $y' = 2x$**, похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$ і т. д.

Знаючи це, похідну функції в точці можна обчислювати простіше, ніж за означенням похідної функції в точці.

Приклад 2. Дано функцію $f(x) = x^2$. Знайдіть $f'(3)$, $f'(0)$, $f'(-2)$.

Розв'язання. Похідною функції $f(x) = x^2$ є функція $f'(x) = 2x$. Тому $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Лінійна функція $y = ax + b$ має похідну в кожній точці x. Її похідна

$$y' = (ax + b)' = a.$$

Зокрема, $x' = 1$; $a' = 0$.

Запам'ятайте! Похідна сталої дорівнює нулю. В кожній точці дотична до графіка функції $y = a$, де a – стала, паралельна осі x.

Дотичною до прямої є ця сама пряма. З курсу планіметрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$, де k – кутовий коефіцієнт прямої. Оскільки для дотичної до графіка функції $y = f(x)$ кутовий коефіцієнт дорівнює значенню похідної в точці дотику, то можемо записати *рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці дотику $(x_0; y_0)$*:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ або } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Зверніть увагу: $f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$ (див. мал. 35).

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте означення похідної функції в даній точці.
2. Чим є похідна функції в точці?
3. Чим є похідна функції на проміжку?
4. Що розуміють, кажучи «похідна – це коефіцієнт дотичної»?
5. Чому дорівнює похідна сталої?
6. Що означає запис $(ax + c)' = a$? Який його геометричний зміст?

Виконаємо разом

1. Доведіть, що для кожного дійсного числа k та аргументу x $(kx^2)' = 2kx$.

• **Доведення.** Надамо аргументу x приріст Δx. Відповідний приріст функції kx^2 дорівнює $k(x + \Delta x)^2 - kx^2$. Спростимо цей вираз: $k(x + \Delta x)^2 - kx^2 = k(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2) = k\Delta x(2x + \Delta x)$.

Отже, $(kx^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{k\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(2x + \Delta x) = 2kx$.

2. Доведіть, що для будь-якого значення x, відмінного від нуля, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

• **Доведення.** Надамо аргументу x приріст Δx. Відповідний приріст функції дорівнює

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}.$$

Отже, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x \cdot \Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{(x + \Delta x)x} = -\dfrac{1}{x^2}$.

3. Доведіть, що для функції $y = x^3$ похідною є функція $y' = 3x^2$.

Доведення. $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$. А це означає, що похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$.

4. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x = 5$.

Розв'язання. Запишемо рівняння дотичної:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Знайдемо $f'(x)$, $f'(x_0)$ і $f(x_0)$:

$$f'(x) = (x^2)' = 2x;\ f'(x_0) = 2 \cdot 5 = 10;\ f(x_0) = 5^2 = 25.$$

Підставимо знайдені значення в рівняння дотичної. Маємо:

$$y = 10(x - 5) + 25, \text{ або } y = 10x - 25.$$

Відповідь. $y = 10x - 25$.

Виконайте усно

231. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:
а) $y = 2x$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 2 + 0{,}5x$; г) $y = 2$.

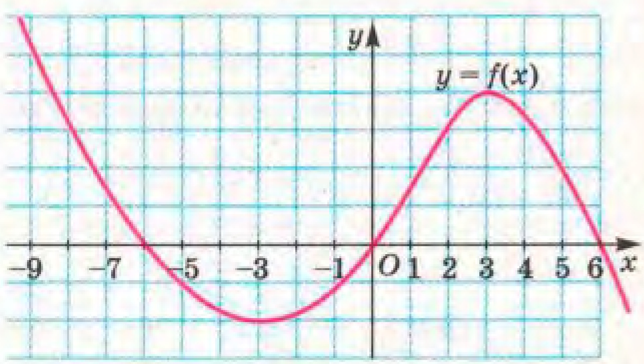
232. Знайдіть значення похідної функції $y = 2x + 5$ у точці:
а) $x = 2$; б) $x = 0$; в) $x = 10$; г) $x = 100$.

233. Знайдіть значення похідної функції $y = x^2$ у точці:
а) $x = 1$; б) $x = 0$; в) $x = 10$; г) $x = -10$.

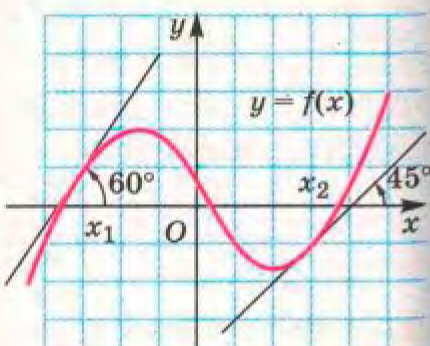
234. Чому дорівнює похідна функції:
а) $y = 5$; б) $y = x$; в) $y = x^2$; г) $y = x^3$?

А

235. Укажіть кілька точок, у яких дотична до графіка функції $f(x)$ (мал. 38) утворює з додатним напрямом осі x: а) гострий кут; б) тупий кут.



Мал. 38



Мал. 39

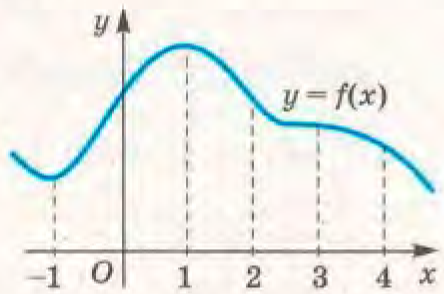
236. Укажіть проміжки, на яких кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$ (див. мал. 38) набуває:
а) додатних значень; б) від'ємних значень.

237. Які кутові коефіцієнти мають дотичні до графіка функції $\varphi(x)$ (мал. 39), проведені в точках x_1, x_2?

238. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $\varphi(x)$ (див. мал. 39), проведений у деякій точці, дорівнює k. Чи існують точки, в яких: а) $k < 0$; б) $k = 0$?

239. Визначте знак кутового коефіцієнта дотичної, проведеної до графіка функції (мал. 40) у точках з абсцисами $-0{,}5$; $0{,}5$; $1{,}5$; $2{,}5$.

240. За графіком функції $y = f(x)$ (мал. 40) визначте наближені значення її похідної в точках x, що дорівнюють: -1, 0, 1, 2, 3, 4.



Мал. 40

241. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:
а) $y - x + 5 = 0$; б) $x + 2y + 3 = 0$; в) $3x - 5y = 1$.

242. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $(-3; 5)$. Кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в кожній точці проміжку $(-3; 2)$ додатний, а в кожній точці проміжку $(2; 5)$ – від'ємний. Знайдіть проміжки зростання та спадання цієї функції.

243. Обчисліть похідну функції $y = 5x$ у точці $x = 2$; в довільній точці x.

244. Обчисліть похідну функції $y = 3x + 5$ у точці $x = 4$; в довільній точці x.

245. Знаючи, що $(x^2)' = 2x$, обчисліть похідну функції $y = x^2$ у точці:
а) $x = -2$; б) $x = 3$; в) $x = 10$; г) $x = -2{,}5$.

246. Побудуйте графік функції $y = 2x^2$ і проведіть до нього дотичну в точці з абсцисою x_0. Користуючись малюнком, визначте знак кутового коефіцієнта дотичної, якщо: а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = 1$. Скориставшись формулою $(kx^2)' = 2kx$, знайдіть точне значення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $y = x^2$ у цих точках.

247. Користуючись попередньою задачею, обчисліть значення похідних функції $f(x)$ у точках $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$, якщо:
а) $f(x) = 2x^2$; б) $f(x) = 0{,}5x^2$; в) $f(x) = 3x^2$.

248. Знаючи, що $(x^3)' = 3x^2$, обчисліть похідну функції $y = x^3$ у точці:

а) $x = 1$; б) $x = 5$; в) $x = 10$; г) $x = -1{,}5$.

249. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці:

а) $x = 2{,}5$; б) $x = -2{,}5$; в) $x = \sqrt{5}$.

250. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у його точці з абсцисою:

а) $x = 1$; б) $x = -2$; в) $x = 0$.

Б

251. Знайдіть координати точки дотику дотичної до графіка функції $y = x^2$, якщо кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює 6.

252. Доведіть за допомогою означення, що для функції $y = \sqrt{x}$ похідною буде функція $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

253. Користуючись попередньою задачею, обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{x}$ у точці:

а) $x = 1$; б) $x = 4$; в) $x = 36$; г) $x = 625$.

254. Користуючись задачею 2 (с. 61), обчисліть значення похідної функції $y = \dfrac{1}{x}$ у точці:

а) $x = 1$; б) $x = -4$; в) $x = 5$; г) $x = 10$.

255. Перепишіть у зошит подану нижче таблицю похідних найпоширеніших функцій і вивчіть її напам'ять.

$$a' = 0;\ x' = 1;$$
$$(ax + b)' = a;$$
$$(x^2)' = 2x;\ (x^3)' = 3x^2;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

256. Доведіть, що похідна заданої функції набуває невід'ємних значень при всіх допустимих значеннях аргументу:

а) $y = 3x - 7$; б) $y = x^3 + 1$; в) $y = \sqrt{x}$.

257. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \dfrac{6}{x}$ у точці:

а) $x = -1$; б) $x = -2$; в) $x = 3$; г) $x = 6$.

Вправи для повторення

258. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 6x = 0$; б) $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

259. Спростіть вираз:

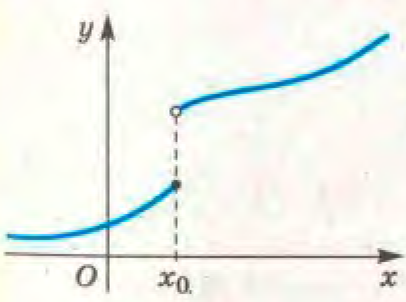
а) $(1 - \mathrm{tg}^2 x)\cos^2 x$; б) $(\mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}x)\sin 2x$.

260. Порівняйте значення виразів:

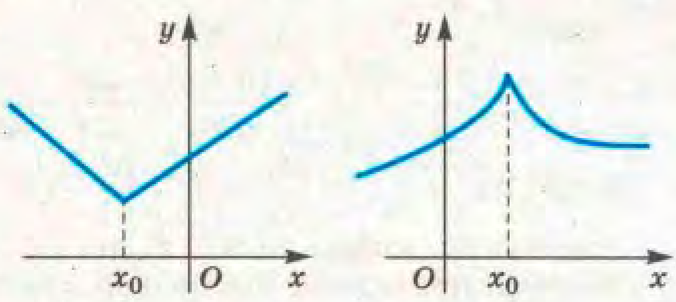
а) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; б) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ і $-\frac{3}{\sqrt{3}}$.

§ 8. Диференціювання функцій

Ви вже вмієте знаходити похідні деяких функцій, користуючись означенням похідної. Далі доведемо кілька теорем, які дають змогу порівняно легко і швидко визначати похідні багатьох інших функцій. Треба, однак, мати на увазі, що не кожна функція має похідну в кожній точці. Наприклад, не мають похідних функції в точках розриву (мал. 41), у точках зламу (мал. 42) та в кінцевих точках області визначення функції. Але ми розглядаємо тільки такі функції, графіки яких – неперервні лінії, без точок зламу.



Мал. 41



Мал. 42

Операцію визначення похідної функції називають *диференціюванням*. Якщо функція має похідну в деякій точці (в кожній точці деякого проміжку), то говорять, що дана функція *диференційовна* в цій точці (на цьому проміжку). Кожний многочлен і кожна з функцій $\sin x$ і $\cos x$ диференційовні в кожній точці області визначення, тобто на всій множині дійсних чисел R.

Для доведення першої теореми скористаємося тотожністю

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

У її правильності можна переконатися, перемноживши многочлени в правій частині.

Теорема 1 (про похідну одночлена). ***Для кожного натурального n і дійсного k в кожній точці x***

$$(kx^n)' = kn \cdot x^{n-1}.$$

● **Доведення.** Надамо змінній x приріст Δx. Відповідний приріст функції дорівнює $k(x+\Delta x)^n - kx^n$.

Отже, шукана похідна

$$(kx^n)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(x+\Delta x)^n - kx^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{k((x+\Delta x)^n - x^n)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(x+\Delta x - x)((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} k((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}) =$$

$$= k(x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \ldots + x\cdot x^{n-2} + x^{n-1}) = kn\cdot x^{n-1}.$$

Приклади. $(5x^3)' = 5\cdot 3x^2 = 15x^2$; $(-2x^4)' = -2\cdot 4\cdot x^3 = -8x^3$.

Теорема 2 (про похідну суми). ***Якщо функції u та v диференційовні в точці x, то в цій точці $(u+v)' = u' + v'$.***

● **Доведення.** Знайдемо приріст $\Delta(u+v)$ суми даних функцій на $[x;\ x+\Delta x]$:

$$\Delta(u+v) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x) =$$
$$= (u(x+\Delta x) - u(x)) + (v(x+\Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$$

Тому

$$\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$ і $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, тому $(u+v)' = u' + v'$.

Аналогічно можна довести, що $(u-v)' = u' - v'$.

Теорема правильна також для трьох і більше функцій.

Наприклад,

$(u + v - w)' = ((u+v) - w)' = (u+v)' - w' = u' + v' - w'$.

Теорема 3 (про похідну добутку). ***Якщо функції u та v диференційовні в точці x, то $(uv)' = u'v + uv'$.***

● **Доведення.** Знайдемо приріст $\Delta(uv)$ добутку даних функцій на $[x;\ x+\Delta x]$, врахувавши, що $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$ і $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$:

$$\Delta(uv) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) = \big(u(x) + \Delta u\big)\big(v(x) +$$
$$+ \Delta v\big) - u(x)\cdot v(x) = \Delta u\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v.$$

Тому

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u\cdot v(x)}{\Delta x} + \frac{u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\dfrac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} \to 0$, бо $\Delta v \to 0$.

Отже,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Наслідок. *Сталий множник можна виносити за знак похідної.* Адже якщо $u = C$, де C – сталий множник, то $u' = 0$ і за теоремою про похідну добутку $(Cv)' = C'v + Cv' = Cv'$, тобто $(Cv)' = Cv'$.

Теорема 4 (про похідну частки). ***Якщо u та v – функції від x, диференційовні в точці x, причому в цій точці $v \neq 0$, то***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Існують формули, за допомогою яких знаходять похідні й багатьох інших функцій. Їх подано в таблиці похідних.

Таблиця похідних

$c' = 0$, c – const	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(ax + b)' = a$	$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$

Кожна з цих формул доведена ще в XVII ст. Ви можете спробувати довести їх самостійно.

Розглянемо на конкретних прикладах, як наведені формули застосовуються в процесі розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^5 \cdot \sin x$.

Розв'язання. $f'(x) = (x^5 \cdot \sin x)' = (x^5)'\sin x + x^5(\sin x)' = 5x^4\sin x + x^5\cos x$.

Приклад 2. Доведіть, що $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Доведення.

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

5*

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $y = 5x + \ln x$.

• **Розв'язання.** $y' = (5x + \ln x)' = (5x)' + (\ln x)' = 5 + \frac{1}{x}$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке диференціювання функції?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну суми двох функцій.
3. Як знаходять похідну добутку двох функцій?
4. Як знаходять похідну частки?
5. Чому дорівнює похідна степеня з натуральним показником?
6. Як знаходять похідні тригонометричних функцій?
7. Чому дорівнює похідна функції $y = \log_a x$?
8. Чому дорівнює похідна функції $y = a^x$?

Виконаємо разом

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^5(1 - x^2)$.

• **Розв'язання.** Спосіб 1. Скористаємося теоремою про похідну добутку:

$$f'(x) = \left(3x^5(1 - x^2)\right)' = (3x^5)' \cdot (1 - x^2) + 3x^5 \cdot (1 - x^2)' =$$
$$= 15x^4(1 - x^2) + 3x^5(-2x) = 15x^4 - 15x^6 - 6x^6 = 15x^4 - 21x^6.$$

Спосіб 2. Спочатку розкриємо дужки, а потім застосуємо теорему про похідну суми.

$$f'(x) = \left(3x^5(1 - x^2)\right)' = (3x^5 - 3x^7)' = 15x^4 - 21x^6.$$

2. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = \frac{x+12}{3x}$ у точці $x_0 = 4$.

• **Розв'язання.**

$$f'(x) = \left(\frac{x+12}{3x}\right)' = \frac{(x+12)' \cdot 3x - (x+12)(3x)'}{9x^2} =$$
$$= \frac{1 \cdot 3x - (x+12) \cdot 3}{9x^2} = \frac{3x - 3x - 36}{9x^2} = -\frac{4}{x^2};\ f'(4) = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}.$$

3. Обчисліть значення похідної функції $y = 3\sin x + 5\cos x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

• **Розв'язання.** Скористаємося теоремою про похідну суми:

$$y' = (3\sin x + 5\cos x)' = (3\sin x)' + (5\cos x)' = 3(\sin x)' + 5(\cos x)' =$$
$$= 3\cos x - 5\sin x.$$

Якщо $x_0 = \frac{\pi}{4}$, то

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\frac{\pi}{4} - 5\sin\frac{\pi}{4} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

4. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^4 + x^2$ у точці $x_0 = -2$.

• **Розв'язання.** Рівняння дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Знайдемо $f(-2)$ та $f'(-2)$:
$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20;$
$f'(x) = (x^4 + x^2)' = 4x^3 + 2x;$ $f'(-2) = 4(-2)^3 + 2(-2) = -36.$
Отже, $y = -36(x + 2) + 20$ або $y = -36x - 52$.

Виконайте усно

Знайдіть похідну функції (**261–264**).

261. а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{17}$; в) $y = 2x^5$; г) $y = 0{,}1x^{10}$.

262. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 1 + \cos x$; в) $y = 4\operatorname{tg} x$; г) $y = x + \operatorname{ctg} x$.

263. а) $y = 2e^x$; б) $y = e^x + 5$; в) $y = e$; г) $y = -e^x$.

264. а) $y = 3^x$; б) $y = 5\ln x$; в) $y = -\lg x$; г) $y = x^{-2}$.

265. Знайдіть значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо:
а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 2\pi$.

266. Чи правильно, що похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$ набуває лише від'ємних значень? А функції $y = \cos x$?

А

Знайдіть похідну функції (**267–270**).

267. а) $f(x) = 5x^4$; б) $f(x) = 0{,}8x^5$; в) $f(x) = \frac{1}{3}x^6$;
г) $f(x) = -x$; ґ) $f(x) = -2x^9$; д) $f(x) = -0{,}3x^5$.

268. а) $f(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = 7 - x^3$;
в) $f(x) = x^4 + 9x^2$; г) $f(x) = 3x^4 - x^8$.

269. а) $f(x) = 2(x^3 - 7)$; б) $f(x) = 0{,}2(5 - 3x^4)$;
в) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{3}$; г) $f(x) = \frac{40 - 3x^5}{5}$.

270. а) $y = 3x^2 - 5x + 7$; б) $y = 2 - 3x - 8x^2$;
в) $y = x^4 + 3x^3 - 5x + 4$; г) $y = 5 - 2x + 7x^2 - 3x^3$.

Обчисліть значення похідної в даних точках (271–273).

271. $f(x) = x^2 - 5x$, $x = 1$; $x = 0$; $x = -2$.

272. $f(x) = 3x^4 + 2x - 10$, $x = -2$; $x = 0$; $x = \sqrt{2}$.

273. $f(x) = -8x + 3$, $x = -2$; $x = 0$; $x = \pi$.

Знайдіть похідну функції (274, 275).

274. а) $y = 2\sin x + 1$; б) $y = 3\cos x + 2$; в) $y = 4\operatorname{tg} x - 3$;
г) $y = \sin x + 2x$; ґ) $y = \cos x + 3x$; д) $y = \operatorname{tg} x + 4x$.

275. а) $y = x^2 + \cos x$; б) $y = x^4 - \sin x$; в) $y = x^5 + \operatorname{tg} x$;
г) $y = \sqrt{x} + \operatorname{ctg} x$; ґ) $y = \sqrt{x} - \sin x$; д) $y = \sqrt{x} + \cos x$.

Обчисліть значення похідної в даних точках (276, 277).

276. а) $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; б) $y = 4\operatorname{tg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

277. а) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = \pi$; б) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

Знайдіть похідну функції (278–280).

278. а) $y = 7e^x$; б) $y = 3^x$; в) $y = \pi^x$;
г) $y = (\sqrt{2})^x$; ґ) $y = 4^x - x$; д) $y = 0{,}5^x + 1$.

279. а) $y = 8\ln x$; б) $y = -\ln x$; в) $y = \lg x$;
г) $y = \log_2 x$; ґ) $y = 2\lg x$; д) $y = 3 - \lg x$.

280. а) $y = x^{2,5}$; б) $y = -x^{0,5}$; в) $y = 2x^{1,7}$; г) $y = -x^e$.

Визначте двома способами похідну функції (281–283).

281. а) $y = x^2(x^3 - 5)$; б) $y = x^3(3x^2 - 1)$;
в) $y = (x - 2)(x + 3)$; г) $y = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$.

282. а) $y = 3x^2(5 - x^3)$; б) $y = -7x(x^2 - 4)$;
в) $y = 5(x + 3)^2$; г) $y = (2x - 7)^2$.

283. а) $f(x) = (x^4 - 2)x^3$; б) $f(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$;
в) $f(x) = (x - 3)(x^2 + 2x - 1)$; г) $f(x) = (x - 1)^3 - x + 1$.

284. Заповніть таблицю «Правила диференціювання».

Функція	Похідна
$f(x) + \varphi(x)$	
$C \cdot f(x)$	
$f(x) \cdot \varphi(x)$	
$\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$	

285. Заповніть таблицю «Формули диференціювання».

$f(x)$	C	x	x^2	x^n	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$									

Б

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 (286–288).

286. $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; $x_0 = -2$.

287. $y = x^2 + 1$, $x_0 = 0$; $x_0 = -4$.

288. $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$.

Знайдіть похідну функції (289, 290).

289. а) $f(x) = x^3\cos x$; б) $f(x) = (2x - 1)\sin x$.

290. а) $f(x) = x^3\sin x$; б) $f(x) = \sin x\cos x$.

Визначте двома способами похідну функції (291, 292).

291. а) $y = (1 - x)\sin x$; б) $y = (x + 3)\cos x$; в) $y = x(2 + \operatorname{ctg} x)$.

292. а) $y = (x^2 + 1)\cos x$; б) $y = (\sqrt{x} - 1)\sin x$; в) $y = \sqrt{x}(\operatorname{tg} x - 3)$.

Обчисліть (293–295).

293. $f'(0{,}5\pi)$, якщо: а) $f(x) = x^2 + x + \sin x$; б) $f(x) = x + x^2\sin x$.

294. $f'(\pi)$, якщо: а) $f(x) = 1 + x + \cos x$; б) $f(x) = x(1 + \cos x)$.

295. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, якщо: а) $f(x) = x\cos x + \frac{x^2}{\pi}$; б) $f(x) = \frac{x}{\cos x} - \frac{x^2}{3}$.

Знайдіть похідну добутку функцій (296, 297).

296. а) $y = x \cdot \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$; в) $y = x^5 \cdot e^x$.

297. а) $y = e^x \cdot 2x$; б) $y = x^6 \cdot \ln x$; в) $y = 2^x \cdot \cos x$.

Знайдіть похідну частки (298, 299).

298. а) $y = \frac{2}{x+1}$; б) $y = \frac{x-3}{x}$;

в) $y = \frac{\cos x}{5x}$; г) $y = \frac{x^2}{5-x}$.

299. а) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x - 3}$; б) $f(x) = \frac{5\sin x}{x^2 - 1}$;

в) $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$; г) $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$.

Знайдіть похідну заданої функції в точці $x_0 = 1$ (300–302).

300. а) $y = e^x + x^e$; б) $y = x^2 + \ln x$; в) $y = x - \log_2 x$.

301. а) $f(x) = xe^x$; б) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$; в) $f(x) = e^x + \ln x$.

302. а) $f(x) = x\ln x$; б) $f(x) = 2^x + \ln x$; в) $f(x) = x^{-1} + \ln x$.

Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у його точці з абсцисою x_0 (303, 304).

303. а) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

304. а) $f(x) = 2\ln x$, $x_0 = e$; б) $f(x) = \log_2 x$, $x_0 = 2$.

305. Знайдіть похідну функції:

а) $y = \sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x$; б) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

в) $y = \sin 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x$; г) $y = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$.

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 (306, 307).

306. а) $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; б) $y = 4\mathrm{tg}x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

307. а) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = \pi$; б) $y = \mathrm{tg}x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

Вправи для повторення

308. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^2$; б) $y = -2x^2$; в) $y = 2 + x^2$.

309. Спростіть вираз:

а) $\cos 3x - \cos 5x$; б) $\sin 10x - \sin 6x$.

310. Розв'яжіть рівняння:

а) $2^{3x+1} = 4^x$; б) $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2} = 16$.

§ 9. Похідна складеної функції

Досі розглядалися похідні функцій, аргументами яких є змінна x, наприклад $y = x^n$, $y = \sin x$. А як знаходити похідні функцій $y = (2x + 1)^{10}$, $y = \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$? Кожну з них можна розглядати як функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$, тобто $y = f(h(x))$. Таку функцію називають *складеною*, $u = h(x)$ – її внутрішньою функцією, а $f(u)$ – зовнішньою.

Розглядаючи у функції $y = f(u)$ змінну u як аргумент, можна знайти похідну цієї функції по u. Її позначатимемо знаком y'_u. Похідні функцій по x, як і раніше, позначатимемо символами y', u'.

Нехай дано функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$. Якщо в якійсь точці x існує похідна u' та у відповідній точці u існує похідна y'_u, то існує також похідна y', причому $y' = y'_u \cdot u'$.

Строге доведення цієї теореми важке, тому обмежимося тільки його схемою. Похідна y' дорівнює границі відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$. Вважаючи, що $\Delta u \neq 0$, помножимо чисельник і знаменник цього відношення на Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\Delta u \to 0$, бо йдеться про функцію $u = h(x)$, диференційовну в точці x. Тому якщо $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y', \; \frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'_u, \; \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$$

і з рівності (*) випливає доводжувана рівність $y' = y'_u \cdot u'$.

Досі йшлося про похідну y' в якійсь фіксованій точці x. Якщо ж дана складена функція $y = f(h(x))$ диференційовна в кожній точці x деякого проміжку, то рівність $y' = y'_u \cdot u'$ справджується для всього проміжку. Отже, користуючись цією рівністю, можна знаходити похідну даної функції і як функцію, задану на цьому проміжку.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y = (2x + 1)^{10}$.

● **Розв'язання.** Це функція $y = u^{10}$, де $u = 2x + 1$. Ці функції диференційовні на R, $y'_u = 10u^9$, $u' = 2$.

Отже, $y' = 10u^9 \cdot 2 = 20u^9 = 20(2x + 1)^9$.

Не обов'язково, розв'язуючи такі вправи, вводити змінну u. Її можна тільки уявляти й одразу писати, наприклад:

$(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$;

$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Якщо функція містить логарифм складного виразу, то перш ніж знаходити її похідну, доцільно цей вираз прологарифмувати.

Приклад 2. Знайдіть похідну функції

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}\right).$$

● **Розв'язання.** $\ln\left(\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}\right) = \ln x^2 - \ln((x + 2)(x - 3)) =$

$= 2\ln x - \ln(x + 2) - \ln(x - 3)$. Отже,

$$y' = \left(2\ln x - \ln(x + 2) - \ln(x - 3)\right)' = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Яку функцію називають складеною? Наведіть приклади.
2. Як знаходять похідну складеної функції? Наведіть приклади.

Виконаємо разом

1. Знайдіть $f(g(x))$, якщо:

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$; б) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + 1$.

● **Розв'язання.** а) За умовою, $f(x) = \sqrt{x}$ – зовнішня функція, а $g(x) = \sin x$ – внутрішня. Отже, аргументом зовнішньої функції має бути функція $g(x) = \sin x$, тобто замість x у виразі $\sqrt{x}$ слід записати $\sin x$. Маємо: $f(g(x)) = \sqrt{\sin x}$.

а) За умовою, $f(x) = \ln x$ – зовнішня, а $g(x) = x^2 + 1$ – внутрішня функції. Отже, аргументом функції $f(x) = \ln x$ має бути функція $g(x) = x^2 + 1$, тобто замість x у виразі $\ln x$ треба записати $x^2 + 1$. Маємо: $f(g(x)) = \ln(x^2 + 1)$.

2. Знайдіть y', якщо $y = \cos(x^2 - 1)$.

● **Розв'язання.** $y' = (\cos(x^2 - 1))' = -\sin(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x = -2x\sin(x^2 - 1)$.

3. Знайдіть значення похідної функції $y = \sqrt{x^3 + x^2}$ у точці $x = 3$.

● **Розв'язання.** $y' = (\sqrt{x^3 + x^2})' = \dfrac{(x^3 + x^2)'}{2\sqrt{x^3 + x^2}} = \dfrac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2}}$.

Якщо $x = 3$, то $y' = 2{,}75$.

Виконайте усно

311. Укажіть $f(g(x))$, якщо:

а) $f(x) = x^3$ і $g(x) = \mathrm{tg}\,x$; б) $f(x) = \mathrm{tg}\,x$ і $g(x) = x^3$;
в) $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = \mathrm{ctg}\,x$; г) $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$ і $g(x) = 2x - 1$.

312. Укажіть $f(x)$ і $g(x)$, якщо:

а) $f(g(x)) = \sin(x^2 - 5)$; б) $f(g(x)) = \sqrt{1 - x^3}$;
в) $f(g(x)) = (\mathrm{tg}\,x + 1)^5$.

313. Чому дорівнює похідна функції:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos 5x$; в) $y = \mathrm{tg}(-5x)$;
г) $y = \sin(1-x)$; ґ) $y = \cos(2+x)$; д) $y = \mathrm{tg}(x^2 - 1)$;
е) $y = 3^{2x}$; є) $y = \ln^2$; ж) $y = e^{-x+3}$?

А

Укажіть $f(g(x))$, якщо відомі функції $f(x)$ і $g(x)$ (**314, 315**).

314. а) $f(x) = x^2$ і $g(x) = 2x + 7$; б) $f(x) = 2x + 7$ і $g(x) = x^2$;
в) $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 3 - 4x$; г) $f(x) = 3 - 4x$ і $g(x) = \sqrt{x}$.

315. а) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ і $g(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = x^2 + 3$ і $g(x) = \dfrac{2}{x}$;
в) $f(x) = \sin x$ і $g(x) = 3x + 4$; г) $f(x) = 3x + 4$ і $g(x) = \sin x$.

За відомою функцією $y = f(g(x))$ укажіть функції $f(x)$ і $g(x)$ (**316, 317**).

316. а) $y = (3x + 10)^3$; б) $y = (x^2 + 5x - 1)^4$; в) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$.

317. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$; б) $y = \dfrac{1}{2x+4}$; в) $y = \dfrac{10}{(3x - x^2)^3}$.

Знайдіть похідну функції (**318–324**).

318. а) $y = (x + 3)^{20}$; б) $y = (2 - x)^7$; в) $y = (1 - x^3)^5$.

319. а) $y = 5(1 - 2x)^7$; б) $y = (3 + x^2)^9$; в) $y = (2x + 1)^5$.

320. а) $y = \sin 4x$; б) $y = \mathrm{ctg}\, 2x$; в) $y = \mathrm{tg}\, 3x$;
г) $y = \mathrm{tg}\, \dfrac{3x}{4}$; ґ) $y = \sin \dfrac{x}{3}$; д) $y = \cos \dfrac{2x}{3}$.

321. а) $y = 2 + \sin 3x$; б) $y = 1 + \mathrm{tg}\, 3x$; в) $y = x + \cos 8x$;
г) $y = \sin x + \sin 2x$; ґ) $y = \cos x - \cos 2x$; д) $y = \mathrm{ctg}\, 5x$.

322. а) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$; в) $y = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$;
г) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; ґ) $y = \mathrm{tg}(3x + 1)$; д) $y = \cos(1 - x)$.

323. а) $y = \ln\sqrt{x}$; б) $y = e^{\sin x}$; в) $y = 0{,}5^{3x+2}$.

324. а) $y = 5^{2x}$; б) $y = \ln x^6$; в) $y = \cos 2^x$.

Б

Знайдіть похідну функції (**325–327**).

325. а) $y = x\sin 2x$; б) $y = x\cos 3x$;
в) $y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; г) $y = x\,\mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}$.

326. а) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; б) $y = \sqrt{x + 3} - \sqrt{3x}$;
в) $y = \sqrt{(x-1)(x+2)}$; г) $y = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

327. а) $y = \sin^4 x$; б) $y = 5\operatorname{tg}^3 x$; в) $y = \sqrt{\sin x}$; г) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Обчисліть значення похідної функції в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$ (328, 329).

328. а) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 4x\right)$.

329. а) $y = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$; б) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Обчисліть значення похідної функції в точці x_0 (330, 331).

330. а) $y = (3x - 4)^7$, $x_0 = 2$; б) $y = (4 - 5x)^8$, $x_0 = 1$.

331. а) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$; б) $y = \sqrt{7x + 1}$, $x_0 = 5$.

Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (332, 333).

332. а) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$; б) $y = \sqrt{2x + 3}$, $x_0 = 3$.

333. а) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; б) $y = \sqrt{5x - 1}$, $x_0 = 2$.

Спростіть формулу, що задає функцію, та знайдіть її похідну (334, 335).

334. а) $y = 2\cos^2 x - 1$; б) $y = 1 - 2\sin^2 3x$;
в) $y = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$; г) $y = \sin^2 8x - \cos^2 8x$.

335. а) $y = \sin 8x \cos 5x - \cos 8x \sin 5x$;
б) $y = \cos 4x \cos 6x + \sin 4x \sin 6x$.

Продиференціюйте раціонально функцію (336, 337).

336. а) $f(x) = \ln\left((3x - 4)^3\right)$; б) $f(x) = \ln\left(x(x^2 + 1)\right)$.

337. а) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^3 + 2x}{x - 5}\right)$; б) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^3}{(2 - 3x)^2}\right)$.

Вправи для повторення

338. Побудуйте графік функції та вкажіть її проміжки монотонності:
а) $y = |2x + 3|$; б) $y = |4 - x^2|$.

339. Розв'яжіть рівняння:
а) $\lg^2 x = 1$; б) $\ln^2 x = 4$; в) $\log_2^2 x = 9$.

340. Подайте у вигляді степеня вираз:
а) $a^5a^7a^{12}$; б) $(b^{-1}b^3)^{-2}b^{-3}$; в) $(a^3)^{-3}(a^3)^2$.

Самостійна робота № 2

Варіант 1

1. Визначте кутовий коефіцієнт лінійної функції:
а) $y = \frac{1}{2}x - 3$; б) $y = -3x$; в) $y = 5x + 3$.
2. Зростає чи спадає лінійна функція:
а) $y = 3x - 1$; б) $y = 0{,}5x + 3$; в) $y = 1 - x$?
3. Знайдіть похідну функції:
а) $f(x) = 5x^3$; б) $f(x) = x^2(x - 3)$;
в) $f(x) = x + \sin x$; г) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$.

4*. Дано $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$. Обчисліть $f'(0)$, $f'(-2)$.

Варіант 2

1. Визначте кутовий коефіцієнт лінійної функції:
а) $y = 3x - 2$; б) $y = -0{,}5x$; в) $y = \frac{3}{2}x + 0{,}1$.
2. Зростає чи спадає лінійна функція:
а) $y = 0{,}1x + 10$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = 2x$?
3. Знайдіть похідну функції:
а) $f(x) = 3x^5$; б) $f(x) = (x^2 - 1)x$;
в) $f(x) = x^2 + \cos x$; г) $f(x) = 3\operatorname{ctg} x$.

4*. Дано $f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x}$. Обчисліть $f'(1)$, $f'(-2)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що означає дослідити функцію?
2. Яка функція називається зростаючою?
3. Яка функція називається спадною?
4. Що таке кутовий коефіцієнт прямої? Чому він дорівнює?
5. Що розуміють під дотичною до графіка функції?
6. Сформулюйте означення похідної функції в точці.
7. Що таке диференціювання?
8. Яку функцію називають диференційовною в точці; на проміжку?
9. Сформулюйте теорему про: а) похідну одночлена; б) похідну суми двох функцій.
10. Як знаходять похідну добутку; частки?

§ 10. Застосування похідної для дослідження функцій

За допомогою похідної можна досліджувати різні функції.

Дослідити функцію – це означає виявити її властивості: вказати її область визначення й область значень, проміжки зростання та спадання, проміжки, на яких функція набуває додатних значень, а на яких – від'ємних, з'ясувати, чи є дана функція парною або непарною і т. ін.

Для визначення проміжків зростання і спадання функції користуються такими твердженнями:

якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає;

якщо похідна в кожній точці проміжку від'ємна, то функція на цьому проміжку спадає;

якщо похідна в кожній точці проміжку тотожно дорівнює нулю, то на цьому проміжку функція стала.

Два сусідні проміжки, на одному з яких функція зростає, а на другому спадає, можуть розділятися тільки такою точкою, в якій похідна функції дорівнює нулю або не існує. Внутрішні точки області визначення функції, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками функції*.

Щоб визначити проміжки зростання чи спадання функції $f(x)$, треба розв'язати нерівності $f'(x) > 0$ та $f'(x) < 0$ або знайти всі критичні точки функції, поділити ними область визначення функції на проміжки, а далі досліджувати, на яких проміжках функція зростає, а на яких – спадає.

Приклад 1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

● **Розв'язання.** $y' = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Рівняння $3x(x - 2) = 0$ має корені $x = 0$ і $x = 2$. Це – критичні точки. Область визначення даної функції, тобто множину R, вони поділяють на три проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$. Похідна функції на цих проміжках має відповідно такі знаки: +, –, +. Дослідження зручно оформити у вигляді таблиці.

Проміжки	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	–3	↗

Як видно з таблиці, функція зростає на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(2; \infty)$ і спадає на проміжку $(0; 2)$.

Оскільки функція $y = x^3 - 3x^2 + 2$ – неперервна, то домовилися стверджувати, що вона зростає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $[2; \infty)$, а спадає на проміжку $[0; 2]$.

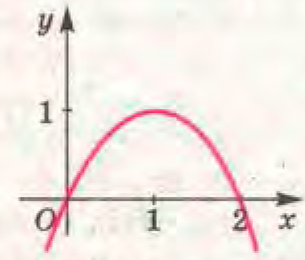
Важливу роль у дослідженні функції відіграють визначення її максимуму та мінімуму. Щоб з'ясувати, що це таке, введемо кілька нових понять.

Околом точки x_0 називається будь-який проміжок, для якого x_0 є внутрішньою точкою.

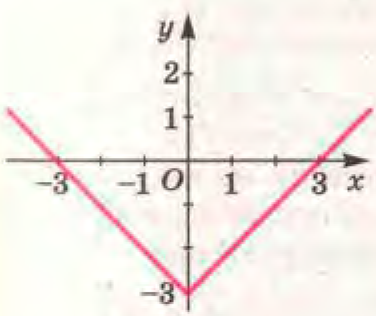
Точка x_0 називається *точкою мінімуму* (або *максимуму*) функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (або відповідно $f(x_0) > f(x)$). Значення функції в точці мінімуму називається *мінімумом функції*, а в точці максимуму – *її максимумом*. Позначають їх символами $y_{\min}$, $y_{\max}$.

Точки мінімуму й максимуму функції разом називають *точками екстремуму* (лат. *extremum* – край, кінець). Значення функції в точках її екстремуму – *екстремальні значення*, або *екстремуми*.

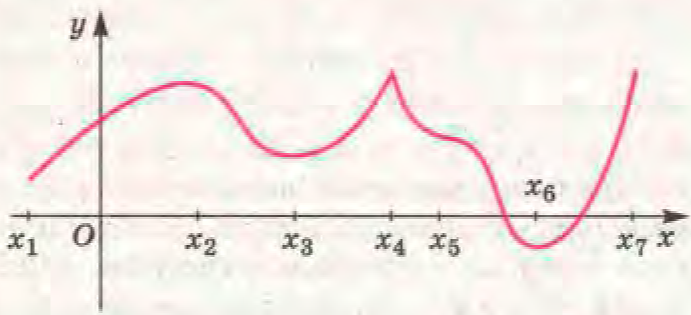
Наприклад, для функції $y = 2x - x^2$ точка $x = 1$ є точкою максимуму (мал. 43). Її максимум: $y_{\max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$.



Мал. 43



Мал. 44



Мал. 45

Для функції $y = |x| - 3$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму (мал. 44). Її мінімум: $y_{\min} = 0 - 3 = -3$.

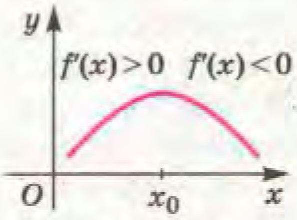
Функція, графік якої зображено на малюнку 45, має чотири точки екстремуму: x_2 і x_4 – точки максимуму; x_3, x_6 – точки мінімуму.

Точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки. Це – необхідна умова існування екстремуму.

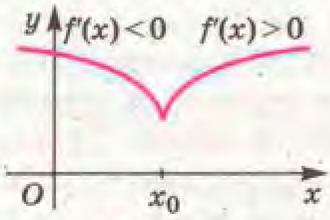
Точки екстремуму можна вибрати з критичних точок функції за наявності достатньої умови існування екстремуму.

Нехай критична точка $x = a$ є внутрішньою точкою деякого інтервалу $(b; c)$ і такою, що на кожному з інтервалів $(b; a)$ та $(a; c)$ похідна функції існує і зберігає знак. Така критична точка, переходячи через яку в напрямі зростання *аргументу похідна змінює знак з «+» на «–», є точкою максимуму, а точка, переходячи через яку похідна змінює знак з «–» на «+», – точкою мінімуму.*

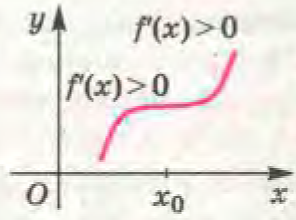
Справді, якщо, наприклад, похідна функції $f(x)$ на проміжку $(a;\ x_0)$ додатна, а на проміжку $(x_0;\ b)$ від'ємна, то, переходячи через точку x_0, функція змінює зростання на спадання (мал. 46). У цьому випадку x_0 – точка максимуму. Якщо ж під час переходу через точку x_0 спадання функції змінюється на зростання, то x_0 – точка мінімуму (мал. 47).



Мал. 46



Мал. 47



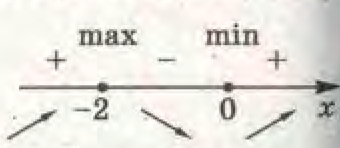
Мал. 48

Якщо ж похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю, а зліва і справа від x_0 похідна функції додатна (мал. 48) або зліва і справа від'ємна, то x_0 не є точкою екстремуму.

Приклад 2. Знайдіть точки екстремуму та екстремальні значення функції $y = 2x^3 + 6x^2 - 5$.

Розв'язання. $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.

Критичними точками функції є: $x_1 = -2$ та $x_2 = 0$. У разі переходу через точку $x_1 = -2$ похідна змінює знак з «+» на «–», тому це – точка максимуму. Якщо відбувається перехід через точку $x_2 = 0$, похідна змінює знак з «–» на «+», тому це – точка мінімуму (мал. 49).



Мал. 49

Отже,

$y_{max} = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 5 = 3;$

$y_{min} = 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 5 = -5.$

Відповідь. $x_1 = -2$ – точка максимуму, $y_{max} = 3$; $x_2 = 0$ – точка мінімуму, $y_{min} = -5$.

Функцію можна дослідити, користуючись такою схемою:

1) знайти область визначення функції;

2) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;

3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;

4) дослідити функцію на монотонність, тобто знайти проміжки зростання та спадання функції;

5) знайти точки екстремуму та екстремальні значення;

6) побудувати графік функції.

Приклад 3. Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

Розв'язання. Область визначення функції – всі дійсні числа, крім $x = -1$. З такою областю визначення функція не може бути парною, непарною чи періодичною.

Знайдемо похідну даної функції:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Критичні точки функції: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$. Вони розбивають числову вісь на чотири проміжки. Побудуємо на їх основі таблицю та з'ясуємо властивості заданої функції.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не існує	–	0	+
$f(x)$	↗	–6 max	↘	Не існує	↘	2 min	↗

На проміжках $(-\infty; -3]$ і $[1; \infty)$ функція зростає, а на проміжках $[-3; -1)$ і $(-1; 1]$ – спадає.

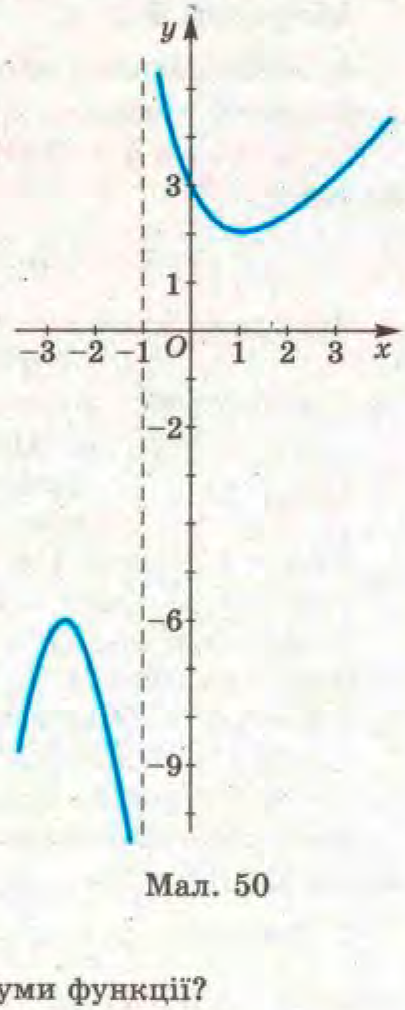
Точка максимуму $x_1 = -3$, $f(-3) = -6$; точка мінімуму $x_2 = 1$, $f(1) = 2$.

Область значень функції:

$$(-\infty; -6) \cup (2; \infty).$$

Рівняння $\dfrac{x^2+3}{x+1} = 0$ не має розв'язків, тому графік функції не перетинає вісь x. Вісь y він перетинає в точці з ординатою $f(0) = 3$.

Графік цієї функції зображено на малюнку 50.



Мал. 50

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке критичні точки функції?
2. За якої умови функція зростає (спадає) на деякому проміжку?
3. Як визначити проміжки, на яких дана функція зростає або спадає?
4. Що таке точка максимуму функції? А точка мінімуму?
5. Що таке точки екстремуму? А екстремуми функції?
6. Що означає дослідити функцію?

Виконаємо разом

1. Знайдіть критичні точки функції $y = \frac{x^2}{x+2}$.

● Розв'язання. $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$. Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+2}\right)' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

Знайдемо точки, в яких похідна дорівнює нулю чи не існує:

$y' = 0$, якщо $\frac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0$, звідки $x = 0$ і $x = -4$;

y' не існує, якщо знаменник дорівнює нулю, звідки $x = -2$. Точка $x = -2$ не входить до області визначення функції. Отже, функція має дві критичні точки: $x = 0$ і $x = -4$.

Відповідь. 0 і -4.

2. Установіть, на якому проміжку функція $y = x\ln x$ зростає, а на якому – спадає.

● Розв'язання. Спосіб 1. $D(y) = (0; \infty)$. Знайдемо похідну функції:

$$y' = (x\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

Знайдемо критичні точки функції:

Мал. 51

$y' = 0$, якщо $1 + \ln x = 0$, або $\ln x = -1$, звідки $x = e^{-1}$.

Ця точка поділяє область визначення функції на два проміжки (мал. 51). Визначимо знак похідної на кожному проміжку:

$y'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2 > 0$;

$y'(e^{-2}) = 1 + \ln e^{-2} = 1 - 2\ln e = -1 < 0$.

Отже, функція $y = x\ln x$ зростає на проміжку $[e^{-1}; \infty)$, а спадає – на $(0; e^{-1}]$.

Спосіб 2. Розв'яжемо нерівності $y' < 0$ та $y' > 0$:

$1 + \ln x < 0$, або $\ln x < \ln e^{-1}$, звідки $0 < x < e^{-1}$;

$1 + \ln x > 0$, або $\ln x > \ln e^{-1}$, звідки $x > e^{-1}$.

Відповідь. Функція зростає, якщо $x \in [e^{-1}; \infty)$ і спадає, якщо $x \in (0; e^{-1}]$.

3. Дослідіть функцію $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ і побудуйте її графік.

● Розв'язання. 1) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

2) Функція – непарна, оскільки $y(-x) = -\frac{x}{x^2 - 4} = -y(x)$.

Отже, її графік симетричний відносно початку координат, тому достатньо дослідити функцію на проміжку $[0; 2) \cup (2; \infty)$.

3) Якщо $x = 0$, то й $y = 0$ – графік перетинає осі координат тільки в одній точці (0; 0).

4) Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-4}\right)' = \frac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}.$$

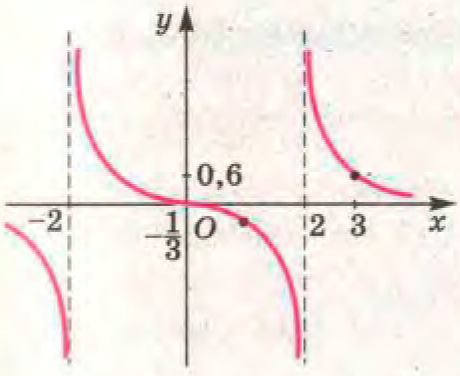
Очевидно, що $y' > 0$ для всіх x з області визначення.

Отже, функція не має максимумів і мінімумів, а спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ і $(2; \infty)$.

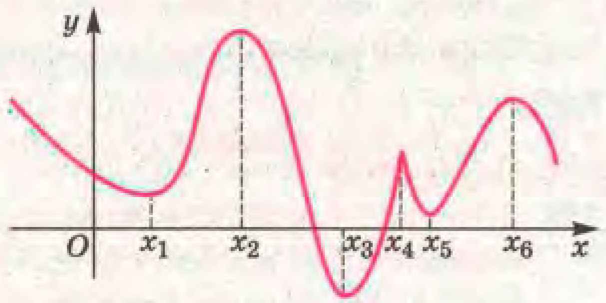
Для точнішої побудови обчислимо значення функції в кількох точках:

$$y(1) = -\frac{1}{3};\ y(1{,}5) = -\frac{6}{7};\ y(3) = 0{,}6;\ y(4) = \frac{1}{3}.$$

Графік функції подано на малюнку 52.



Мал. 52



Мал. 53

Виконайте усно

341. Знайдіть критичні точки функції:

а) $y = x^3$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = x^2 + 2x + 1$.

342. Яка з функцій зростає на всій області визначення:

а) $y = \lg x$; б) $y = x^3$; в) $y = 2^{-x}$; г) $y = 0{,}5x$?

343. Яка з функцій спадає на всій області визначення:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \log_{1,5} x$; в) $y = 0{,}5^x$; г) $y = -5x$?

344. Використовуючи малюнок 53, визначте:

а) критичні точки функції;

б) проміжки зростання та спадання;

в) точки максимуму й мінімуму.

345. Скільки точок екстремуму може мати функція $y = f(x)$, якщо $f(x)$ – многочлен третього, четвертого або п'ятого степеня?

А

Знайдіть критичні точки функції (**346–348**).

346. а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$; б) $f(x) = x - \ln x$.

347. а) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$; б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

348. а) $f(x) = e^{-x} + x$; б) $f(x) = \cos 2x$.

Доведіть, що функція $y = f(x)$ зростає на всій області визначення (**349, 350**).

349. а) $f(x) = x^3 + 3$; б) $f(x) = 4x - 1$; в) $f(x) = 5 + \ln x$.

350. а) $f(x) = 2^x - 3$; б) $f(x) = x + 2{,}5$; в) $f(x) = 5\sqrt{x}$.

Доведіть, що функція $y = f(x)$ спадає на всій області визначення (**351, 352**).

351. а) $f(x) = 1 - x^3$; б) $f(x) = -4x + 3$; в) $f(x) = -\ln x$.

352. а) $f(x) = 0{,}5^x + 7$; б) $f(x) = x + 2{,}5$; в) $f(x) = 5\sqrt{x}$.

353. Побудуйте графік неперервної функції, яка зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ і $(3; \infty)$, але спадає, якщо $x \in (-1; 3)$. Укажіть, яких значень набуває функція в критичних точках.

Знайдіть проміжки зростання та спадання функції (**354–356**).

354. а) $f(x) = 3 - 2x^2$; б) $f(x) = 2x - x^2$.

355. а) $f(x) = x^4 - 2x^2$; б) $f(x) = x^2(x + 5)$.

356. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$; б) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

357. Знайдіть точку мінімуму функції:
а) $y = x + x^2$; б) $y = x^2 - 6x - 3$; в) $y = 5x^2 - 4x$.

358. Знайдіть точку максимуму функції:
а) $y = 5 - x^2$; б) $y = 1 - x - x^2$; в) $y = x - 2x^2$.

359. Знайдіть точки екстремумів функції:
а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = 1 + 8x^2 - x^4$;
в) $y = -x^3 + 12x + 7$.

Знайдіть точки екстремуму та екстремальні значення функції (**360–362**).

360. а) $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = x^2 + x + 1$.

361. а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

362. а) $f(x) = 8 - 12x - x^3$; б) $f(x) = 1 + 8x^2 - x^4$.

363. Побудуйте графік неперервної функції, яка спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ та $[3; 5]$ і зростає на двох інших проміжках – $(-1; 3)$ та $(5; \infty)$. Врахуйте, що мінімальні значення цієї функції рівні між собою. Для побудованого графіка випишіть усі точки екстремуму та екстремальні значення функції.

Дослідіть функцію і побудуйте її графік (**364, 365**).

364. а) $f(x) = x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = 4 + 5x - x^2$;
в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; г) $f(x) = 3x - x^3$.

365. а) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x + 5$; б) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$;
в) $f(x) = 4x^2 - x^4$; г) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

Б

Знайдіть точки екстремумів функції (**366, 367**).

366. а) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; б) $f(x) = 10\cos x - 5x$.

367. а) $f(x) = x - 2\cos x$; б) $f(x) = x + 2\sin x$.

Знайдіть точки екстремумів та екстремальні значення функції (**368, 369**).

368. а) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

369. а) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; б) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$.

370. Доведіть, що не має екстремумів функція:
а) $f(x) = 2x + \sin x$; б) $f(x) = -3x - \cos x$.

371. Доведіть, що на всій області визначення функція $y = a^x$:
а) зростає, якщо $a > 1$; б) спадає, якщо $0 < a < 1$.

372. Доведіть, що на всій області визначення функція $y = \log_a x$:
а) зростає, якщо $a > 1$; б) спадає, якщо $0 < a < 1$.

373. Доведіть, що функція $y = \mathrm{tg}\,x$ зростає, а $y = \mathrm{ctg}\,x$ – спадає на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

374. Знайдіть максимальні та мінімальні значення функції:
а) $y = x - \ln(1+x)$; б) $y = xe^{-x}$; в) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.

Дослідіть функцію і побудуйте її графік (375–377).

375. а) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{3x}{1+x^2}$.

376. а) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$; б) $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$.

377. а) $f(x)=x\sqrt{3-x}$; б) $f(x)=x^2\sqrt{x+2}$.

Вправи для повторення

378. Знайдіть найменше спільне кратне та найбільший спільний дільник чисел 175 і 280.

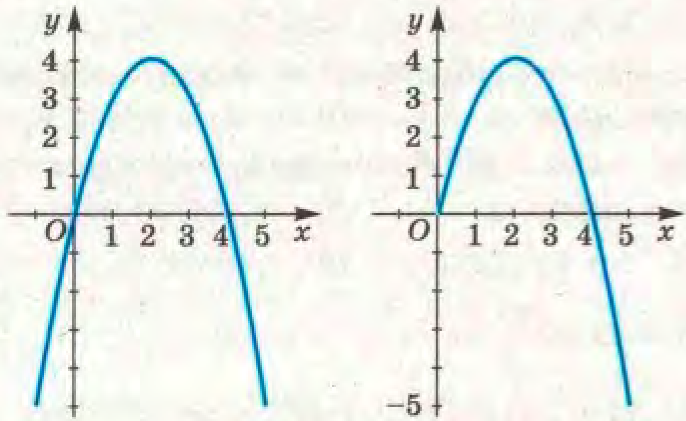
379. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$; б) $\dfrac{m}{\sqrt{n}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$.

380. На фермі були гуси та кілька собак, які їх охороняли. Скільки гусей і скільки собак було на фермі, якщо разом вони мали 98 голів і 202 ноги?

§ 11. Найбільші та найменші значення функції

Не слід ототожнювати максимум і мінімум функції з її *найбільшим* або *найменшим значенням*. Під точкою максимуму (мінімуму) розуміють точку, в якій функція має найбільше (найменше) числове значення порівняно з її значеннями в усіх досить близьких від неї точках. А найбільше або найменше значення функції на відрізку може й не бути її максимумом або мінімумом. Наприклад, функція $f(x)=4x-x^2$ має максимум у точці $x=2$, а мінімуму не має. А от на проміжку $[0; 5]$ свого найменшого значення вона досягає в кінці проміжку: $f(5)=-5$, а найбільшого – в точці $x=2$ (мал. 54).



Мал. 54

Функція може мати кілька максимумів (мінімумів) на деякому проміжку, але не більше одного найбільшого (найменшого) значення (див. мал. 53). Функція може не мати максимуму (мінімуму) на проміжку, але мати найбільше (найменше) значення.

Найбільше та найменше значення функції тісно пов'язані з її областю значень. Якщо область значень неперервної функції – проміжок $[m; M]$, то m – найменше значення даної функції, а M – найбільше значення.

Щоб знайти найбільше та найменше значення неперервної функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, треба обчислити її значення $f(a)$, $f(b)$ на кінцях цього проміжку і в критичних точках, що належать йому, вибрати з них найбільше і найменше.

Приклад. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ на проміжку $[-4; 4]$.

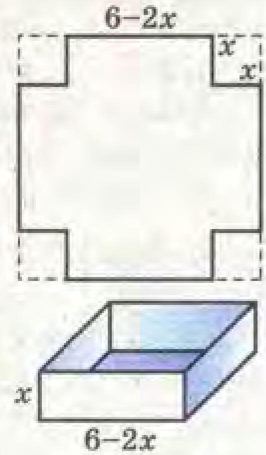
Розв'язання. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

Критичні точки: $x_1 = -3$ і $x_2 = 1$. Значеннями функції є: $f(-4) = 10$; $f(-3) = 17$; $f(1) = -15$ (найменше); $f(4) = 66$ (найбільше).

Відповідь. $\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 66$, $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = -15$.

За допомогою похідної зручно розв'язувати *екстремальні задачі*, тобто такі, в яких потрібно визначити найбільше або найменше значення певної величини.

Задача. Маємо квадратний лист жерсті зі стороною 6 дм. Які квадрати треба вирізати в кутах даного листа, щоб з одержаної заготовки зробити коробку без кришки найбільшого об'єму (мал. 55)?



Мал. 55

Розв'язання. Щоб одержати коробку у формі прямокутного паралелепіпеда, у кутах листа треба вирізати рівні квадрати. Нехай x – довжина сторони такого квадрата. Тоді висота коробки дорівнюватиме x, а сторона її основи – $6 - 2x$. Об'єм коробки $V(x) = (6 - 2x)^2 x$ – функція від x. Зрозуміло, що число x додатне і менше за 3. Маємо математичну модель задачі: визначити, при якому значенні x функція $V(x) = (6 - 2x)^2 x$, задана на проміжку $(0; 3)$, набуває найбільшого значення.

Щоб розв'язати задачу, знайдемо похідну даної функції: $V(x) = 36x - 24x^2 + 4x^3$; $V'(x) = 36 - 48x + 12x^2$.

Щоб знайти критичні точки функції, прирівняємо її похідну до нуля та розв'яжемо рівняння.

$12x^2 - 48x + 36 = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ – не належить проміжку (0; 3).

Якщо $x < 1$, то $V'(x) > 0$, а якщо $x > 1$, то $V'(x) < 0$. Отже, найбільшого значення функція $V(x)$ набуває при $x = 1$.

Відповідь. Треба відрізати квадрати, сторони яких дорівнюють 1 дм.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке найбільше (найменше) значення функції на даному проміжку?
2. Чи те саме означають максимальне значення функції та її найбільше значення?
3. Як знайти найбільше або найменше значення неперервної функції на проміжку $[a; b]$?

Виконаємо разом

1. Знайдіть область значень функції $y = x^3 - 9x^2 - 7$, якщо $x \in [0; 10]$.

● **Розв'язання.** $y' = (x^3 - 9x^2 - 7)' = 3x^2 - 18x$.

Знайдемо критичні точки: $y' = 0$, якщо $3x^2 - 18x = 0$, або $3x(x - 6) = 0$, звідки $x = 0$, $x = 6$.

Знайдемо значення функції на кінцях проміжку [0; 10] і в критичній точці $x = 6$:

$y(0) = -7$; $y(6) = -115$; $y(10) = 93$.

Задана функція неперервна; її найбільше значення – 93, а найменше -115. Отже, область її значень – відрізок $[-115; 93]$.

Відповідь. $[-115; 93]$.

2. Розкладіть число 100 на два доданки, добуток яких найбільший.

● **Розв'язання.** Нехай перше число дорівнює x, тоді друге – $100 - x$. Розглянемо функцію $y = x(100 - x)$ і визначимо, за яких значень x з проміжку (0; 100) функція набуває найбільшого значення. Знайдемо похідну цієї функції, прирівняємо її до нуля та визначимо критичні точки:

$y' = \left(x(100 - x)\right)' = (100x - x^2)' = 100 - 2x$; $100 - 2x = 0$; $x = 50$.

Якщо $x < 50$, то $y' > 0$, а якщо $x > 50$, то $y' < 0$. Отже, найбільшого значення функція $y = x(100 - x)$ досягає при $x = 50$.

Відповідь. $100 = 50 + 50$.

Виконайте усно

381. Чи має найбільше значення функція:
а) $y = x^3$; б) $y = e^x$; в) $y = \lg x$; г) $y = 2x + 1$?

382. Укажіть найменше значення функції:
а) $y = x^4$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = 2^{|x|}$.

383. Укажіть найбільше та найменше значення функції $y = x^2$ на проміжку:
а) $[0; 2]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[-5; 2]$.

384. Чи може значення функції в точці максимуму бути меншим за її значення в точці мінімуму?

385. Чи може найбільше значення функції бути меншим за її екстремум? А навпаки?

А

386. Знайдіть найменше та найбільше значення функції $y = x^3 - 1$ на проміжку:
а) $[0; 2]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[-3; 3]$.

387. Знайдіть найменше та найбільше значення функції $y = x^2 - 2x$ на проміжку:
а) $[-1; 0]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[0; 3]$.

Знайдіть найбільше та найменше значення функції (388–390).

388. $f(x) = x^2 - 4x$ на проміжку $[-3; 3]$.

389. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ на проміжку $[-2; 2]$.

390. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ на проміжку $[-3; 1]$.

391. Яке число в сумі з його квадратом має найменше значення?

392. Знайдіть найбільший добуток двох чисел, сума яких дорівнює 64.

393. Доведіть, що коли сума двох додатних чисел стала, то їх добуток найбільший тоді, коли ці числа рівні.

394. Число 10 розділіть на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

395. Яке додатне число разом з оберненим дає найменшу суму?

396. Площа прямокутного загону для страусів дорівнює 40 000 м^2. Якими мають бути його розміри, щоб на огорожу пішло найменше сітки Рабиця?

397. Треба загородити два пасовища у формі рівних прямокутників зі спільною стороною так, щоб сума їх площ дорівнювала 6 га. Знайдіть найменшу можливу довжину огорожі.

Б

Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку (**398, 399**).

398. а) $f(x) = x^5 - x^3 + x - 7$ на проміжку: 1) $[-2; 1]$; 2) $[-1; 2]$;
б) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ на проміжку: 1) $[0; 2]$; 2) $[-1; 5]$.

399. а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ на проміжку: 1) $[-2; 2]$; 2) $[0; 3]$;
б) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ на проміжку: 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; -1]$.

400. Чи має найбільше або найменше значення на множині R функція:
а) $f(x) = x^3 - 5x + 2$; б) $f(x) = 3 - 2x^2 - x^5$?

Знайдіть область значень функції (**401, 402**).

401. а) $y = x^6 - 3x^4 + 2$; б) $y = 2 - x^2 - x^4$.

402. а) $y = \sqrt{4 - x - x^2}$; б) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

403. Довжина відрізка AB дорівнює 6, точка M – його середина. Знайдіть на відрізку AB таку точку X, щоб добуток довжин XA, XB, XM був найбільшим.

404. Який з прямокутників, вписаних у дане коло, має найбільшу площу? Розв'яжіть задачу двома способами.

405. Який з прямокутників, вписаних у дане коло, має найбільший периметр?

406. Якими мають бути розміри басейну об'ємом 32 м^3 з квадратним дном і вертикальними стінами, щоб на його облицювання пішло найменше плиток?

407*. Якими слід робити літрові консервні банки циліндричної форми, щоб на їх виготовлення витрачалося найменше жерсті? Допусками на шви можна знехтувати. Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Вправи для повторення

408. Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = x^3 + x^2$ у точці $x_0 = -2$.

409. Для функції $y = 5x^2 + 1$ знайдіть границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

410. Катер пройшов відстань між двома пристанями за течією річки за 1,6 год, а на зворотну дорогу витратив 2 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

§ 12. Похідна як швидкість

Досі під похідною ми розуміли кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції (геометричний зміст похідної). Але похідну можна використовувати також для визначення швидкості проходження різних процесів – руху ракети, планети, літака, машини; обертання маховика, дзиґи, балерини; протікання хімічної реакції, нагрівання тіла; розмноження бактерій, росту рослин, тварин; зростання грошових доходів, витрат тощо.

Приклад. Нехай тіло рухається прямолінійно зі змінною швидкістю. Відстань s, пройдена тілом за час t, – функція від t. Рівність $s = f(t)$ виражає закон руху цього тіла. Як, знаючи закон руху, визначити миттєву швидкість тіла в будь-який момент часу t?

Нехай за час від t до $t + \Delta t$ тіло пройшло відстань $f(t + \Delta t) - f(t)$. Протягом цього часу воно рухалось із середньою швидкістю $\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$.

Якщо $\Delta t \to 0$, то це відношення дедалі менше відрізняється від швидкості руху тіла в момент t. Отже, швидкість руху тіла в момент t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

А це – похідна функції $s = f(t)$. Отже, *якщо відомий закон руху $s = f(t)$, то швидкість $v(t)$ цього руху в кожний момент t дорівнює похідній цієї функції:* $v(t) = f'(t)$.

Розглянемо конкретний приклад. Як відомо, вільне падіння тіла (якщо не враховувати опору повітря) відбувається за законом $s(t) = \dfrac{g}{2}t^2$ (тут $g \approx 9{,}8$ м/с^2 – прискорення земного тяжіння). З якою швидкістю тіло падає в момент t після початку падіння?

Розв'язувати задачу можна так. За час від t до $t + \Delta t$ тіло проходить відстань $\dfrac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \dfrac{g}{2}t^2 = \dfrac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2)$ із середньою швидкістю $\frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2) : \Delta t = \frac{g}{2}(2t + \Delta t)$. Якщо $\Delta t \to 0$, то $v(t) \to \frac{g}{2}(2t + 0)$, тобто $v(t) = gt$. Дістали результат, добре відомий з фізики.

Так ми розв'язали задачу, не використовуючи поняття похідної. А знаючи, що швидкість руху – похідна функція, яка виражає закон цього руху, можна відразу записати:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{g}{2}t^2\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Так можна визначати не лише швидкість прямолінійного руху тіла, а й миттєві швидкості відбування багатьох процесів: хімічної реакції, радіоактивного розпаду, нагрівання тіла, танення криги, розмноження бактерій тощо. Взагалі, якщо який-небудь процес відбувається за законом $y = f(t)$, то швидкість відбування його в момент t можна знайти за формулою $v(t) = f'(t)$. Тому коротко говорять: *похідна – це швидкість*. Такий фізичний зміст похідної.

Швидкість руху може змінюватися. Швидкість зміни швидкості прямолінійного руху – його прискорення. Тому прискорення – це похідна від швидкості руху. Якщо, наприклад, швидкість руху тіла виражається формулою $v(t) = gt$, то його прискорення $a(t) = (gt)' = g$.

Інший приклад. Якщо якийсь процес відбувається за законом $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 8$, то його миттєва швидкість у момент часу t дорівнює $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 10t$, а миттєве прискорення $a(t) = v'(t) = 12t - 10$.

За допомогою похідної розв'язують багато задач із різних галузей науки й практики. Наведемо приклади часто вживаних формул, які містять похідну:

$\omega(t) = \varphi'(t)$ – кутова швидкість – похідна від кута повороту;

$a(t) = \omega'(t)$ – кутове прискорення – похідна від кутової швидкості;

$I(t) = q'(t)$ – сила струму – похідна від кількості електрики;

$N(t) = A'(t)$ – потужність – похідна від роботи;

$C(t) = Q'(t)$ – теплоємність – похідна від кількості теплоти;

$P(t) = V'(t)$ – продуктивність праці – похідна від обсягу продукції.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. У чому полягає геометричний зміст похідної функції в точці?
2. У чому полягає фізичний зміст похідної функції в точці?
3. Як розуміти вислів «похідна – це швидкість»?

Виконаємо разом

1. Сигнальна ракета летить вертикально вгору так, що її рух описується законом $s(t) = 98t - 4{,}9t^2$ (t – у секундах, s – у метрах). Знайдіть: а) швидкість ракети через 5 с руху; б) на яку максимальну висоту долетить ракета.

• **Розв'язання.** а) Знайдемо швидкість ракети в будь-який момент часу як похідну від функції $s(t)$:

$$v(t) = s'(t), \text{ або } v(t) = (98t - 4{,}9t^2)' = 98 - 9{,}8t.$$

Тоді $v(5) = 98 - 9{,}8 \cdot 5 = 98 - 49 = 49$ (м/с).

б) Знайдемо точку екстремуму функції $s(t)$, розв'язавши рівняння $s'(t) = 0$, або $98 - 9{,}8t = 0$. Звідси $t = 10$ (с).

Якщо $t < 10$, то $s'(t) > 0$; якщо $t > 10$, то $s'(t) < 0$. Отже, $t = 10$ с – точка максимуму. Тоді $s(10) = 98 \cdot 10 - 4{,}9 \cdot 10^2 = 490$ (м).

Відповідь: а) 49 м/с; б) 490 м.

2. Кількість теплоти $Q(t)$, яка потрібна для нагрівання води масою 1 кг від 0 °С до температури t °С ($0° \leqslant t \leqslant 95°$), наближено можна визначити за формулою

$$Q(t) = 0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3.$$

Установіть залежність теплоємності води $C(t)$ від температури.

• **Розв'язання.** $C(t) = Q'(t) = (0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3)' = 0{,}396 + 4{,}162 \cdot 10^{-3}t - 15{,}072 \cdot 10^{-7}t^2$.

3. Тіло масою 10 кг рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 1$ (t – у секундах, x – у метрах). Знайдіть: а) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху; б) силу, що діє на тіло в цей час.

• **Розв'язання.** а) Кінетична енергія тіла виражається формулою $E = \frac{mv^2}{2}$, де m – маса тіла, а v – швидкість. Знайдемо швидкість тіла в будь-який момент часу $v(t)$ і через 5 с після початку руху $v(5)$:

$$v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1, \quad v(5) = 11 \text{ (м/с)}.$$

Тоді $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{10 \cdot 11^2}{2} = 5 \cdot 121 = 605$ (Дж).

б) Сила, що діє на рухоме тіло, визначається за формулою $F = ma$.

Знайдемо прискорення тіла в будь-який момент часу $a(t)$ і через 5 с після початку руху $a(5)$:

$$a(t) = v'(t) = (2t + 1)' = 2\ (\text{м/с}^2),\ a(5) = 2\ (\text{м/с}^2).$$

Тоді $F = ma = 10 \cdot 2 = 20$ (Н).

Виконайте усно

411. Знайдіть миттєву швидкість тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s – у метрах:
а) $s(t) = 5t^2 + t$; б) $s(t) = 1 - 3t$;
в) $s(t) = t^2 - 1$; г) $s(t) = 2t^3 + t$.

412. Знайдіть прискорення тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s – у метрах:
а) $s(t) = t^2 + t$; б) $s(t) = 1 - 3t^2$;
в) $s(t) = 5t - 1$; г) $s(t) = 2t^3 + 5$.

413. Як залежить продуктивність праці молодого робітника від тривалості роботи, якщо обсяг виготовленої ним продукції виражається формулою $V(t) = 10 + 6t^2 - t^3$?

А

414. Визначте швидкість коливання тіла, що рухається за законом:
а) $x(t) = 10\cos\pi t$; б) $x(t) = 2\sin(t - \pi)$; в) $x(t) = 0{,}1\cos 10\pi t$.

415. Робота, яку виконує двигун автомобіля, визначається формулою $A(t) = 15t^2 + 360$ ($A(t)$ – в Джоулях, t – у секундах). Яку потужність розвиває двигун?

416. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 100 + t^2$ (час t – у секундах, координата x – у метрах). Знайдіть швидкість v цієї точки в момент часу:
а) $t = 5$ с; б) $t = 23$ с.

417. Точка рухається так, що шлях, пройдений нею за t секунд, виражається формулою $s = 4t^2 + 3t$. Знайдіть: а) швидкість точки в будь-який момент часу; б) прискорення точки в будь-який момент часу; в) швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 5$ с.

418. Точка обертається навколо осі за законом $\varphi(t) = 3t^2 + 4t + 2$ (час t – у секундах, кут повороту $\varphi(t)$ – у радіанах). Знайдіть кутову швидкість точки: а) в довільний момент t; б) в момент $t = 4$ с.

419. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 7t^3 - 5t$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент: а) $t = 1$ с; б) $t = 2$ с; в) $t = 3$ с.

420. Маховик, затримуваний гальмом, обертається за законом $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ (час t – у секундах, кут $\varphi(t)$ – у радіанах). У який момент він зупиниться?

421. Під час нагрівання тіла його температура T із часом змінюється за законом $T = 0{,}4t^2$, де T – температура в градусах, t – час у секундах. Знайдіть швидкість зміни температури в момент $t = 5$ с.

Б

422. Маса кристалів у розчині змінюється за законом $m = \sqrt{t^2 + 5t}$, де m – маса кристалів у грамах, t – час у годинах. Знайдіть швидкість зростання маси кристалів через 4 год після початку кристалізації.

423. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2 + 8t - t^2$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). Яку відстань пройде тіло до моменту, коли його швидкість дорівнюватиме нулю?

424. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). У який момент часу тіло рухається з найбільшою швидкістю?

425. Кулька коливається за законом $x(t) = 2\sin 3t$. Доведіть, що її прискорення пропорційне координаті x.

426. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \sqrt{t}$. Доведіть, що його прискорення пропорційне кубу швидкості.

427. Обсяг продукції V майстерні, яка виготовляє ялинкові прикраси, протягом дня виражається залежністю $V(t) = \frac{5}{6}t^3 + 7\frac{1}{2}t^2 + 50t + 37$, де $t \in [1; 8]$. Обчисліть продуктивність праці майстерні протягом кожної години роботи.

428. Через поперечний переріз провідника в кожний момент часу t проходить заряд $q(t) = 5\sqrt{2t + 5}$ (q вимірюється в кулонах, а t – у секундах). Знайдіть силу струму в момент часу $t = 10$ с.

429. Через поперечний переріз провідника в кожний момент часу t проходить заряд $q(t) = \ln(t + 1)$ (q вимірюється в кулонах, а t – у секундах). У який момент часу сила струму в провіднику дорівнюватиме 0,1А?

430. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t - t^2$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). Знайдіть: а) миттєву швидкість тіла в моменти: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с; б) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 2 г.

431. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 + 3t^2$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). Знайдіть: а) прискорення його руху в момент $t = 5$ с; б) силу, що діє на тіло через 3 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 5 г.

432. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6 + 4t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). Коли його швидкість стане найбільшою? Визначте кінетичну енергію тіла в той момент, коли його швидкість стане найбільшою.

433. Тіло, підкинуте вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 40$ м/с, рухається за законом $h(t) = v_0t - \frac{gt^2}{2}$, де h – шлях у метрах, t – час у секундах, $g \approx 10$ м/с^2 – прискорення вільного падіння. Знайдіть:

а) швидкість тіла через 2 с після початку руху;

б) час, коли швидкість тіла дорівнює нулю;

в) найбільшу висоту, якої досягне тіло.

Вправи для повторення

434. Розкладіть многочлен на множники:

а) $x^6 + 2x^3 + 1$; б) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$.

435. Знайдіть середнє арифметичне всіх цілих чисел x таких, що:

а) $10 \leqslant x \leqslant 50$; б) $-10 \leqslant x \leqslant 50$.

436. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$

Самостійна робота №3

Варіант 1

1. Знайдіть критичні точки функції $f(x) = x^3 + 3x^2$.

2. Дослідіть функцію $f(x) = 3x - x^3$ та побудуйте її графік.

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 8t^2$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ с.

Варіант 2

1. Знайдіть критичні точки функції $f(x) = 3x^2 - x^3$.

2. Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x$ та побудуйте її графік.

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ с.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Які точки функції називають критичними?
2. Сформулюйте умови, за яких функція зростає на деякому проміжку.
3. Сформулюйте умови, за яких функція спадає на деякому проміжку.
4. Що таке точка максимуму; мінімуму; екстремуму?
5. Як визначити точки максимуму й мінімуму функції?
6. Як знайти найбільше або найменше значення функції на даному проміжку?
7. Розкрийте геометричний зміст похідної.
8. Розкрийте фізичний зміст похідної.
9. Які задачі можна розв'язувати за допомогою похідних?

Історичні відомості

Похідну введено майже одночасно з поняттям функції, хоча матеріали, які підводили до цих понять, накопичувалися протягом багатьох століть. Ще Архімед розв'язував задачі про дотичні до спіралей і про визначення найбільших значень виразів, які тепер розв'язують за допомогою похідної. П. Ферма вмів знаходити похідні многочленів від однієї змінної та розв'язувати багато екстремальних задач. Досить близько підійшли до введення похідної і деякі інші математики XVII ст. А ввели це поняття незалежно один від одного та йдучи різними шляхами – в Англії І. Ньютон (1643–1727), а в Німеччині Г. Лейбніц (1646–1716). Ньютон виходив з потреб фізики та розглядав похідну як швидкість, а Лейбніц під похідною розумів кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції. Частіше він користувався не похідною, а диференціалами dx і dy – нескінченно малими приростами аргументу і функції. В його позначеннях похідна дорівнює відношенню $\frac{dy}{dx}$. Слово диференціал походить від латинського *differentia*, що означає різницю. Звідси й пішла назва «диференціальне числення». Ньютон ввів поняття похідної раніше від Лейбніца, але опублікував свої роботи пізніше. Оскільки Ньютон і Лейбніц ішли різними шляхами та незалежно один від одного, їх обох вважають основоположниками диференціального числення.

О. Коші

К. Вейєрштрасс

Великий внесок у розвиток диференціального числення зробили такі відомі математики, як Я. Бернуллі, Й. Бернуллі, Л. Ейлер, Ж. Лагранж, Б. Больцано. Та все ж повне і строге обґрунтування диференціального числення і всього математичного аналізу зроблено О. Коші (1789–1857) та К. Вейєрштрассом (1815–1897).

Головне в розділі 2

Число b називається *границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$, якщо для будь-якого додатного числа ε можна вказати таке додатне число δ, що для всіх значень x із проміжку $(a - \delta; a + \delta)$, крім, можливо, самої точки $x = a$, справджується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має границю в точці a, то в цій точці існують границі функцій $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $kf(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ і мають місце рівності:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

Функція називається *неперервною* в точці x_0, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_0.

Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Правила та формули диференціювання

$C'=0$	$(x^a)'=ax^{a-1}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(Cu)'=Cu'$	$(\sin x)'=\cos x$	$(e^x)'=e^x$
$(u+v)'=u'+v'$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(a^x)'=a^x\ln a$
$(uv)'=u'v+uv'$	$(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

Якщо $y=f(u)$, де $u=h(x)$, то $y'=y'_u\cdot u'$.

$y'=k=\operatorname{tg}\alpha$ – геометричний зміст похідної.

$v=s'(t)$; $a(t)=v'(t)$ – механічний зміст похідної.

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ – рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці x_0.

Якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає.

Якщо похідна в кожній точці проміжку від'ємна, то функція на цьому проміжку спадає.

Якщо похідна в кожній точці проміжку тотожно дорівнює нулю, то на цьому проміжку функція стала.

Відкриття аналізу нескінченно малих,
тобто рахунку диференціального та інтегрального, –
справді один з найбільших винаходів, на які
коли-небудь спромігся геній людського духу.

В. Левицький

Інтеграл та його застосування

3

ТЕМИ РОЗДІЛУ

- Первісна та її властивості.
- Таблиця первісних. Знаходження первісних.
- Первісна та площа підграфіка.
- Визначений інтеграл, його геометричний зміст.
- Формула Ньютона–Лейбніца.
- Обчислення площ плоских фігур.
- Застосування інтегралів до розв'язування прикладних задач.

§ 13. Первісна

Досі ми розглядали диференціювання функцій. Не менш важливою є й обернена операція.

Нехай дано функцію $F(x)$ таку, що в кожній точці x деякого проміжку $F'(x) = f(x)$. У цьому разі функцію $f(x)$ називають *похідною функції* $F(x)$, а функцію $F(x)$ – *первісною* для функції $f(x)$.

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку I, якщо для кожного значення x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Досі за даною функцією $F(x)$ ми знаходили її похідну $f(x)$. Таку операцію, як ви вже знаєте, називають *диференціюванням*. Знаходження за даною функцією $f(x)$ її первісної $F(x)$ – операція, обернена до диференціювання; її називають *інтегруванням*.

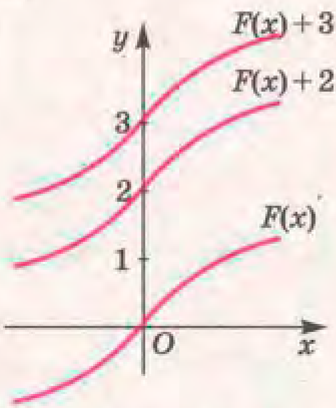
Приклади: Функція:

x^2 – первісна для $2x$, бо $(x^2)' = 2x$;

x^3 – первісна для $3x^2$, бо $(x^3)' = 3x^2$;

$\sin x$ – первісна для $\cos x$, бо $(\sin x)' = \cos x$.

Чи лише функція x^2 є первісною для $2x$? Ні. Адже $(x^2 + 3)' = 2x$, $(x^2 - 5)' = 2x$ і т. д. Отже, кожна з функцій $x^2 + 3$, $x^2 - 5$, $x^2 + \sqrt{3}$ є первісною для $2x$. Взагалі, **якщо $F'(x) = f(x)$, а C – довільне число, то кожна первісна для $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$.** Це основна властивість первісної. Геометрично це означає, що графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ такі, що їх можна сумістити паралельним перенесенням уздовж осі ординат (мал. 56). Далі буквою C позначатимемо довільне дійсне число.



Мал. 56

Використовуючи таблицю похідних (с. 64), складемо таблицю первісних. Радимо запам'ятати її.

$f(x)$	k (стала)	x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	a^x	e^x
$F(x)$	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$e^x + C$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$F(x)$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$2\sqrt{x} + C$

Обґрунтувати цю таблицю можна диференціюванням функції, яка є в її другому рядку. Користуючись таблицею, можна одразу записати, що, наприклад, для функції x^8 первісною є $\frac{1}{9}x^9 + C$ і т. ін.

Виведемо кілька правил, подібних до правил диференціювання, які полегшують знаходження первісних.

I. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ – первісні для функцій $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первісна для функції $f(x) + g(x)$.

Справді, якщо $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$, то $\left(F(x) + G(x)\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

II. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а k – довільне число, то $kF(x)$ – первісна для функції $kf(x)$.

Адже $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

III. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а k, b – довільні числа ($k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первісна для функції $f(kx + b)$.

Адже

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b) = \frac{1}{k}\cdot kf(kx+b) = f(kx+b).$$

Приклад. Знайдіть первісну для функції:

а) $x^4 + \cos x$; б) $5\sin x$; в) $(7x + 2)^3$.

Розв'язання. а) Для функцій x^4 і $\cos x$ первісними є відповідно $\frac{x^5}{5}$ і $\sin x$. Тому для суми даних функцій загальним виглядом первісних буде $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \sin x + C$.

б) За правилом II, $F(x) = -5\cos x + C$.

в) Одна з первісних для функції $(7x + 2)^3$, згідно з правилом III, є функція $\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x+2)^4}{4}$. Загальний вигляд первісних для даної функції: $F(x) = \frac{1}{28}(7x+2)^4 + C$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке диференціювання функції?
2. Як називають операцію, обернену до диференціювання?
3. Що таке первісна функції?
4. Чому дорівнює первісна одночлена ax^n?
5. Сформулюйте теорему про первісну суми двох функцій.

Виконаємо разом

1. Знайдіть первісну для функції $f(x) = x^5 + 2x - 4$.

Розв'язання. $F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{2}x^2 - 4x + C = \frac{1}{6}x^6 + x^2 - 4x + C.$

2. Доведіть, що функція $F(x) = 2\sin x + 3x$ є первісною для функції $f(x) = 2\cos x + 3$.

Доведення. $F'(x) = (2\sin x + 3x)' = 2\cos x + 3 = f(x)$.

Маємо: $F'(x) = f(x)$. Отже, за означенням, функція $F(x)$ первісна для функції $f(x)$.

3. Знайдіть для функції $y = x$ таку первісну, щоб її графік проходив через точку $P(2;\ 5)$.

Розв'язання. Одна з первісних для $y = x$ є функція $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Загальний вигляд усіх її первісних – функція $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Оскільки графік шуканої первісної має проходити через точку $P(2;\ 5)$, то $5 = \frac{2^2}{2} + C$, звідки $C = 3$.

Відповідь. Шукана первісна $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$.

4. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 2$ м/с^2. Визначте швидкість руху тіла як функцію від часу t, якщо в момент $t = 0$ вона дорівнювала 3 м/с.

Розв'язання. Прискорення – похідна швидкості. Тому якщо $v(t)$ – шукана швидкість, то $v'(t) = 2$. Отже, $v(t)$ – первісна для функції 2 (сталої), тому $v(t) = 2t + C$. Оскільки $v(0) = 3$, то $3 = 2 \cdot 0 + C$, $C = 3$.

Відповідь. $v(t) = 2t + 3$.

Виконайте усно

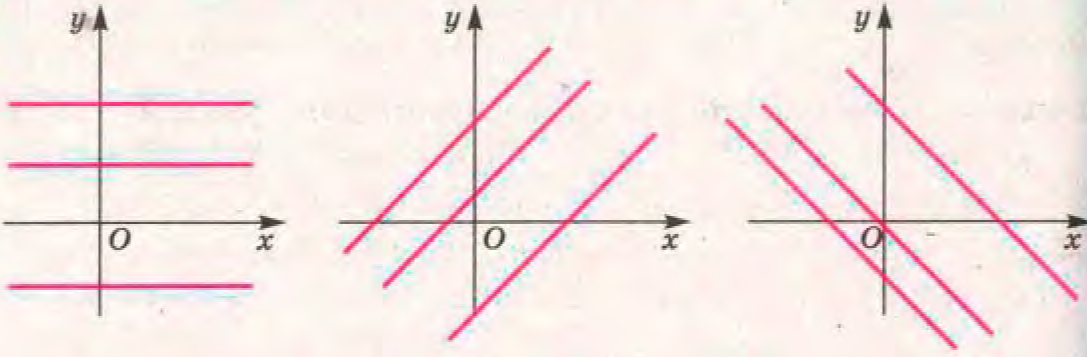
Знайдіть первісну функції (**437–439**).

437. а) $f(x) = x^9$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = x^{0,5}$.

438. а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = 0$; в) $f(x) = 5$; г) $f(x) = \cos x$.

439. а) $f(x) = 0,5^x$; б) $f(x) = e^x$; в) $f(x) = x^{-2}$; г) $f(x) = -0,1$.

440. На якому з малюнків 57 зображено три первісні функції $y = 1$?



а) б) в)

Мал. 57

441. Яке з тверджень правильне:
а) графіки двох різних первісних однієї функції збігаються;
б) графіки двох різних первісних однієї функції перетинаються;
в) графіки двох різних первісних однієї функції рівні фігури?

442. Для якої функції похідна є одночасно й первісною?

А

443. Доведіть, що функція x^4 – первісна для функції $4x^3$. Чи є функція $x^4 - 5$ первісною для функції $4x^3$?

444. Знайдіть чотири довільні первісні для функції $4x^3$.

445. Доведіть, що функція $0{,}5x^2 + x$ – первісна для функції $x + 1$.

446. Який загальний вигляд мають первісні для функції $x + 1$?

447. Доведіть, що функція $\cos x$ – первісна для функції $-\sin x$.

Знайдіть загальний вигляд первісної для функції (**448–450**).

448. а) $f(x) = 3$; б) $f(x) = 0$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = 4x^3$.

449. а) $f(x) = -5x^4$; б) $f(x) = -2x$;
в) $f(x) = x^3 - e^x$; г) $f(x) = -x^5 + e^x$.

450. а) $f(x) = x^3 + 2x$; б) $f(x) = x^6 - 4$;
в) $f(x) = 2 + \cos x$; г) $f(x) = 3 - \sin x$.

Знайдіть первісну функції (**451–453**).

451. а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 5$; в) $f(x) = x^{100}$; г) $f(x) = -3$.

452. а) $f(x) = 5^x$; б) $f(x) = 10^x$; в) $f(x) = x^{-1}$; г) $f(x) = \pi$.

453. а) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; б) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; в) $y = \dfrac{1}{x^3}$; г) $y = \dfrac{1}{x^{10}}$.

454. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:
а) $f(x) = 5 + 3x^2$; б) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 7$;
в) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$; г) $f(x) = (x - 2)^2$.

455. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, щоб:
а) $f(x) = 1 + x^2$ і $F(-1) = 2$; б) $f(x) = 3x - 7$ і $F(0) = 12$.

Б

456. Доведіть, що функція $y = 2x^4 + x$ є первісною для функції $y = 8x^3 + 1$.

457. Доведіть, що функція $y = e^x + ex$ є первісною для функції $y = e^x + e$.

458. Доведіть, що функція $y = 0{,}75x\sqrt[3]{x}$ є первісною для функції $y = \sqrt[3]{x}$.

459. Доведіть, що функція $y = 1 + 2\cos x$ є первісною для функції $y = 2\sin x$. Побудуйте в одній системі координат графіки двох інших первісних функції $y = 2\sin x$.

460. Доведіть, що функція $2\sqrt{x}$ – одна з первісних для функції $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

461. Доведіть, що функція $1 + \operatorname{tg} x$ – одна з первісних для функції $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Знайдіть загальний вигляд первісної для функції (**462–464**).

462. а) $y = 1 + x^9$; б) $y = 5 - x$; в) $y = 2x^3$; г) $y = -0{,}5x^5$.

463. а) $y = 2\sin x$; б) $y = \sin 3x$; в) $y = \cos 7x$; г) $y = 5 + \cos x$.

464. а) $y = 0{,}5^{2x}$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = (3x)^{-2}$; г) $y = 5 + x^{-1}$.

465. Для якої функції первісною є функція: а) $3x^5$; б) $2\cos x$?

466. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну, щоб її графік проходив через точку P, якщо:
а) $f(x) = 1 + x^2$, $P(-3; 9)$; б) $f(x) = x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $P(0; -3)$.

467. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, щоб:
а) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $F(2) = 3$;
в) $f(x) = \sin x$, $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$; г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $F(4) = 2$.

468. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)$, причому в момент часу t_0 швидкість тіла дорівнювала v_0. Знайдіть залежність швидкості тіла від часу, якщо:

а) $a(t) = 8t$, $t_0 = 5$ с, $v_0 = 120$ м/с;

б) $a(t) = 8$, $t_0 = 3$ с, $v_0 = 30$ м/с.

469. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$, причому в момент часу t_0 пройдений шлях дорівнював s_0. Знайдіть залежність шляху, пройденого тілом, від часу, якщо:

а) $v(t) = 3t^2$, $t_0 = 2$ с, $s_0 = 12$ м;

б) $v(t) = 2\sin t$, $t_0 = \pi$ с, $s_0 = 2$ м.

470. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, якщо:

а) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + 5 + \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;

б) $F(x) = 2\sin 3x$, $f(x) = 6\cos 3x$, $x \in R$;

в) $F(x) = 4 + \operatorname{tg} 3x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

471. Чи правильно, що функція $F(x)$ – первісна для $f(x)$, якщо:

а) $F(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$, $x \in (0; \infty)$;

б) $F(x) = 3 - x^4$, $f(x) = 3x - 0{,}2x^5 + C$, $x \in R$;

в) $F(x) = \frac{1}{x^2} + 7$, $f(x) = -\frac{1}{2x^3}$, $x \in (-\infty; 0)$?

Знайдіть первісну для функції **(472–477)**.

472. а) $f(x) = 8e^x$; б) $f(x) = e^{2-3x}$; в) $f(x) = 2e^{5x-1}$.

473. а) $f(x) = 3 \cdot 2^x$; б) $f(x) = 3^{-5x}$; в) $f(x) = 5 \cdot 2^{3x-1}$.

474. а) $y = 2\sin 7x\cos 7x$; б) $y = 2\sin^2 x - 1$.

475. а) $y = \sin^2 5x - \cos^2 5x$; б) $y = 1 + \operatorname{ctg}^2 3x$.

476. а) $y = \sin 2x\cos 13x - \cos 2x\sin 13x$; б) $y = 1 + \operatorname{tg}^2 3x$.

477. а) $y = \cos 3x\cos 7x + \sin 3x\sin 7x$; б) $y = 2\cos^2 x$.

Вправи для повторення

478. Знайдіть екстремуми функції $y = 1 - \sin x$.

479. Знайдіть точки перетину графіків функції:

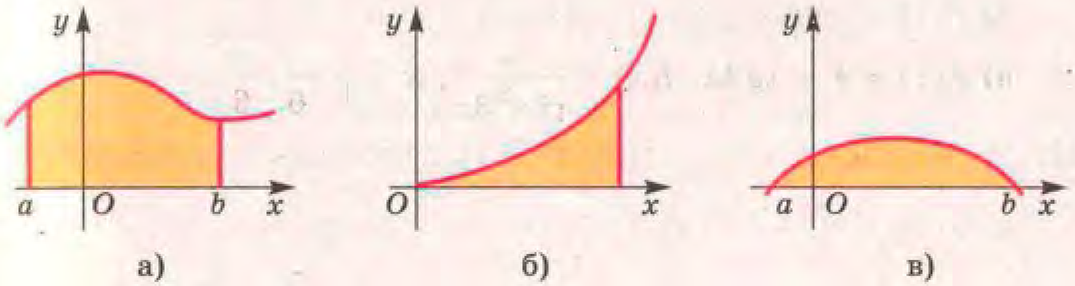
а) $y = x^2 + 3$ і $y = 4x$; б) $y = \sqrt{x}$ і $y = 0{,}5x - 4$.

480. У першому баку міститься 400 л бензину, а в другому – 900 л. Щогодини з першого бака виливають по 20 л бензину, а з другого – по 10 л. Через скільки годин у першому баку залишиться бензину в 4 рази менше, ніж у другому?

§ 14. Площа підграфіка

Поняття первісної можна застосовувати для визначення площ фігур, які досить складно знаходити без цього поняття.

Нехай на площині дано графік неперервної функції $y = f(x)$, яка на проміжку $[a; b]$ набуває тільки додатних значень. Фігуру, обмежену таким графіком, віссю абсцис і прямими $x = a$ та $x = b$, називають *підграфіком функції* $f(x)$ на проміжку $[a; b]$. Кілька таких підграфіків зображено на малюнку 58. Підграфіки функцій називають ще *криволінійними трапеціями*.

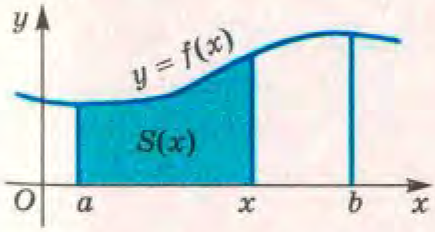


Мал. 58

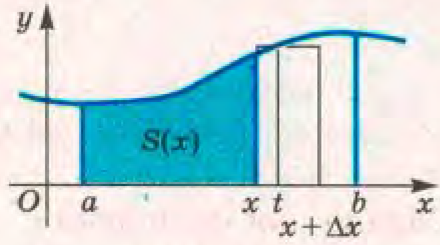
Площі підграфіків функцій можна знаходити за допомогою первісних.

Теорема 5. ***Площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ первісна для функції $f(x)$ на $[a; b]$.***

• **Доведення.** Розглянемо підграфік функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ (мал. 59).



Мал. 59



Мал. 60

Нехай x – довільна точка з проміжку $[a; b]$, а $S(x)$ – площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; x]$. Зрозуміло, що $S(x)$ залежить від x, тобто є функцією від x. Доведемо, що $S'(x) = f(x)$. Для цього надамо змінній x приріст Δx (мал. 60), від чого функція набуде приросту $S(x + \Delta x) - S(x)$. Це площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[x;\ x + \Delta x]$. Вона дорівнює площі прямокутника, в якого основа – Δx, а висота – $f(t)$, де t – деяке число з проміжку $[x;\ x + \Delta x]$. Отже,

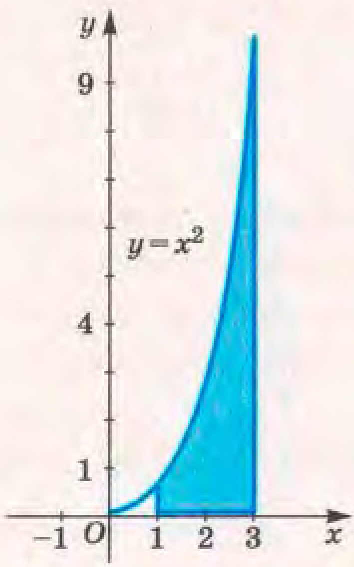
$$S(x + \Delta x) - S(x) = \Delta x \cdot f(t), \text{ звідки } \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(t).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $t \to x$ і $f(t) \to f(x)$. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ тобто } S'(x) = f(x).$$

Як бачимо, функція $S(x)$ – первісна для $f(x)$. І якщо $F(x)$ – яка-небудь інша первісна для $f(x)$, то $S(x) = F(x) + C$, де C – якесь число. Щоб визначити це число, врахуємо, що $S(a) = 0$, бо при $x = a$ підграфік функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ x]$ вироджується у відрізок, площа якого дорівнює 0. Маємо $0 = F(a) + C$, звідки $C = -F(a)$. Отже, $S(x) = F(x) - F(a)$.

Якщо в знайдену рівність підставимо значення $x = b$, то матимемо рівність, яку треба було довести: площа S підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$.



Мал. 61

Значення різниці $F(b) - F(a)$ доводиться обчислювати досить часто, тому для зручності її записують ще й так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Приклад. Знайдіть площу підграфіка функції x^2 на проміжку [1; 3].

Розв'язання. Для функції x^2 первісною є $\frac{x^3}{3}$ (мал. 61).

Тому шукана площа

$$S = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ (кв. од.).}$$

Строге доведення теореми про площу підграфіка функції досить складне. Але воно варте уваги, адже в ньому – найбільше відкриття XVII ст. Детальніше про це йтиметься далі.

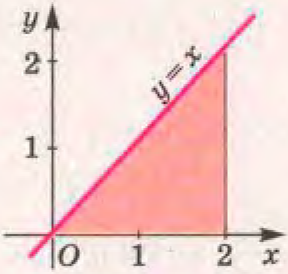
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке підграфік функції? Як його називають інакше?
2. Сформулюйте теорему про площу підграфіка функції.
3. Чим є підграфік функції $y = x$ на проміжку [0; 1]?
4. Чим є підграфік функції $y = 2$ на проміжку [0; 2]?

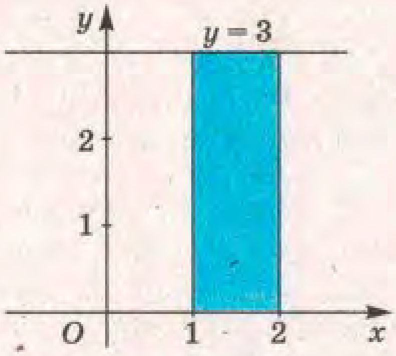
Виконаємо разом

1. Знайдіть площу підграфіка функції $y = x$ на $[0; 2]$.

Розв'язання. Підграфік цієї функції – прямокутний трикутник з катетами 2 і 2 (мал. 62). Його площа $S = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (кв. од.).



Мал. 62



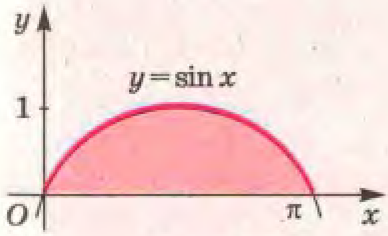
Мал. 63

2. Знайдіть площу підграфіка функції $y = 3$ на $[1; 2]$.

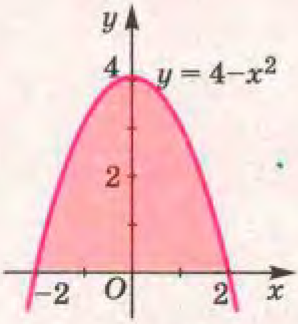
Розв'язання. Підграфік цієї функції – прямокутник з вимірами 1 і 3 (мал. 63). Його площа $S = 1 \cdot 3 = 3$ (кв. од.).

3. Знайдіть площу підграфіка функції $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$.

Розв'язання. Первісною для функції $\sin x$ є $-\cos x$, адже $(-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$. Тому шукана площа (мал. 64) дорівнює $-\cos x\big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$ (кв. од.).



Мал. 64



Мал. 65

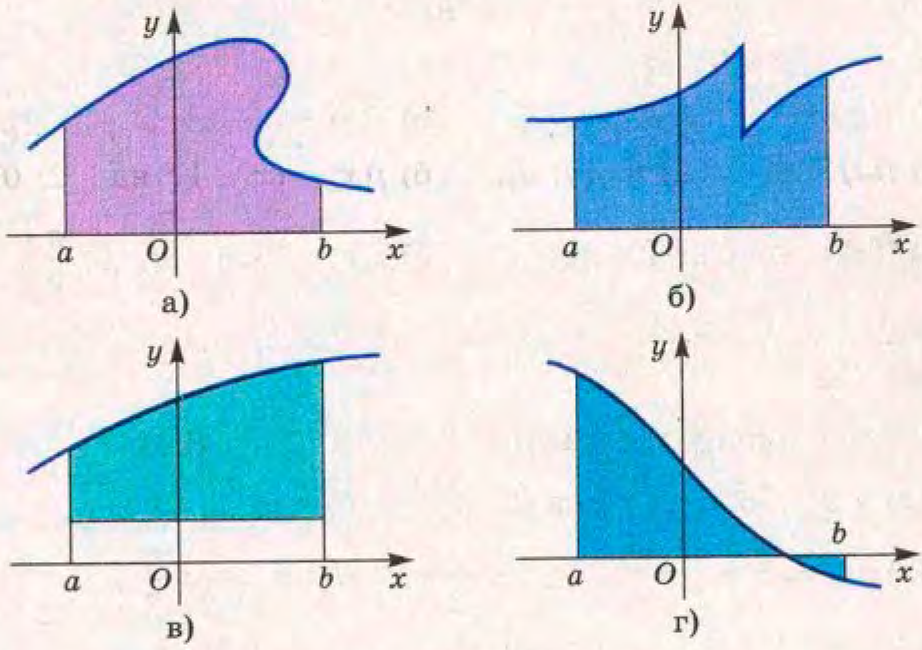
4. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 4 - x^2$ і віссю абсцис.

Розв'язання. Знайдемо абсциси точок перетину графіка даної функції з віссю абсцис (мал. 65). У цих точках ординати дорівнюють 0; $0 = 4 - x^2$, звідки $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$. Отже, треба знайти площу підграфіка функції $y = 4 - x^2$ на проміжку

$[-2;\ 2]$. Первісна для даної функції $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$. Тому шукана площа $S = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3}$ (кв. од.).

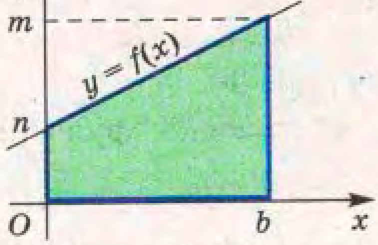
Виконайте усно

481. Які із зафарбованих на малюнку 66 фігур є підграфіком функції $y = f(x)$?

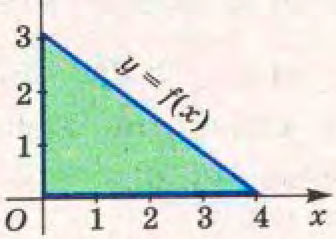


Мал. 66

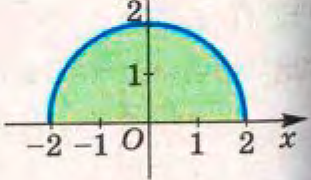
482. Укажіть кілька способів знаходження площі фігури, зображеної на малюнку 67.



Мал. 67



Мал. 68



Мал. 69

483. Дивлячись на малюнок 68, скажіть, чому дорівнює площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку: $[0;\ 4]$; $[2;\ 4]$; $[0;\ 2]$.

484. Дивлячись на малюнок 69, скажіть, чому дорівнює площа підграфіка функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ на проміжку: $[-2; 2]$; $[0; 2]$.

А

Зобразіть на малюнку підграфік функції (485–487).

485. а) $f(x) = x^2$ на $[1; 2]$; б) $f(x) = 0{,}2x^3$ на $[0; 3]$.

486. а) $f(x) = \sin x$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$ на $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

487. а) $f(x) = x^2 + 1$ на $[-1; 2]$; б) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0; 5]$.

Знайдіть площу підграфіка функції (488–491).

488. а) $y = x^3$ на $[0; 2]$; б) $y = x^3 + 1$ на $[0; 1]$.

489. а) $f(x) = x^2 + 3$ на $[-1; 1]$; б) $f(x) = 5 - x^2$ на $[-1; 2]$.

490. а) $f(x) = x(x + 4)$ на $[0; 3]$; б) $f(x) = (x - 1)^2$ на $[-2; 0]$.

491. а) $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$; б) $f(x) = 2\sin x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

492. Знайдіть площу підграфіків, зображених вами для вправ **485–487**.

Знайдіть площу підграфіка функції (493–495).

493. $f(x) = x^2 + 3$: а) на $[0; 2]$; б) на $[-2; 0]$.

494. $f(x) = \cos x$: а) на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

495. $f(x) = x^3 + 1$: а) на $[0; 2]$; б) на $[-1; 1]$.

Б

Знайдіть площу підграфіка функції (496, 497).

496. $f(x) = 1 + 2\sin x$: а) на $[0; \pi]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

497. $f(x) = (x + 2)^4$: а) на $[-2; 0]$; б) на $[-1; 0]$.

498. Обчисліть двома способами площу підграфіка функції $y = 3 + \frac{x}{2}$ на проміжку $[2; 6]$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (499–501).

499. а) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$ і $x = 0$;

б) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

500. а) $y = -\frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = -3$; б) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

501. а) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^x$; б) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^{-x}$.

502. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 3 + 2x - x^2$ і віссю абсцис.

503. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис.

Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій (504–507).

504. а) $y = x^3$, $y = 10 - x$, $y = 0$; б) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

505. а) $y = -x^3$, $y = 5 + 4x$, $y = 0$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 4$.

506. а) $y = 4 - x^2$ і $y = x + 2$; б) $y = x^2$ і $y = 2x$.

507. а) $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$; б) $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$.

Вправи для повторення

508. Знайдіть похідну функції:
а) $y = \ln(1 + 3x)$; б) $y = xe^{-x}$; в) $y = \sqrt{x^2 - x}$; г) $y = \cos 2x$.

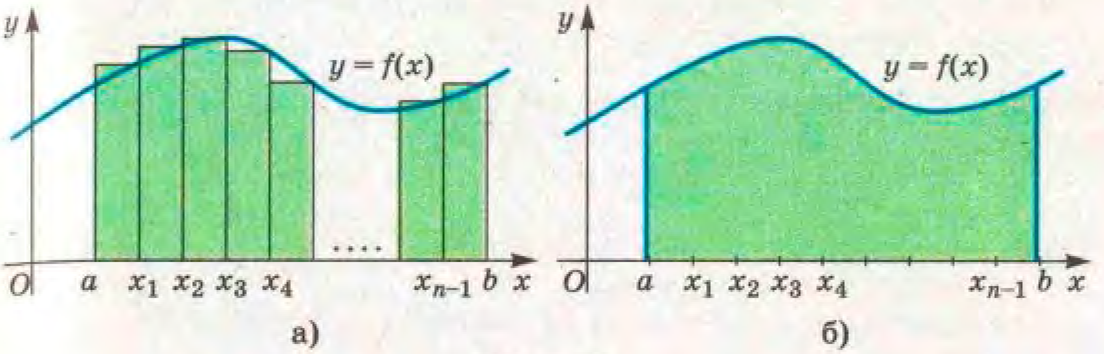
509. Розв'яжіть рівняння:
а) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$;
б) $\ln(x + 3) + \ln 2 = 2\ln x - \ln(x - 4)$.

510. У класі 40 учнів. З математики в першому семестрі четверо учнів отримали 12 балів, двоє – 10 балів, десятеро – 9 балів, п'ятеро – 7 балів, а решта – 6 балів. Побудуйте відповідні стовпчасту й секторну діаграми.

§ 15. Інтеграл

Розглянемо інший спосіб визначення площі підграфіка функції.

Нехай дано підграфік деякої функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ (мал. 70). Поділимо відрізок $[a; b]$ точками x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1} на n рівних відрізків: $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; b]$. Побудуємо на першому відрізку прямокутник висотою $f(x_1)$, на другому – прямокутник висотою $f(x_2)$ і т. д. Нарешті, на n-му відрізку побудуємо прямокутник висотою $f(b)$. Утвориться східчастий многокутник, складений з n побудованих прямокутників. Якщо основа кожного такого прямокутника дорівнює Δx, то площа всього східчастого многокутника $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(b)$.



Мал. 70

Суми такого вигляду називають *інтегральними сумами функції $f(x)$ на проміжку* $[a;\ b]$. Знайдену інтегральну суму можна вважати наближеним значенням площі S підграфіка функції $f(x)$ на $[a;\ b]$. Якщо число n прямує до нескінченності, то S_n прямує до точного значення S площі підграфіка даної функції. Пишуть:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Не лише задачі про знаходження площ підграфіків, але й багато інших досить цікавих і важливих прикладних задач зводяться до обчислення границь подібних інтегральних сум. Тому для цього поняття ввели спеціальну назву та позначення. Границю такої інтегральної суми S_n функції $f(x)$ на $[a;\ b]$ при необмеженому збільшенні числа n називають *інтегралом функції $f(x)$ від a до b*. Її позначають символом $\int_a^b f(x)dx$ (читають: інтеграл від a до b еф від ікс де ікс). Тут a і b – *межі інтегрування*, $\int$ – *знак інтеграла*, $f(x)$ – *підінтегральна функція*, x – *змінна інтегрування*. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(b)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Із цього випливає, що площею підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$ є $\int_a^b f(x)dx$. Оскільки вона дорівнює також $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Це – *формула Ньютона–Лейбніца*, її називають ще *основною формулою математичного аналізу*. Вона дає можливість розв'язувати багато важливих задач не обчисленням границь інтегральних сум, що досить важко, а за допомогою первісної.

Раціоналізувати обчислення часто допомагає така властивість інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Справедливість цієї формули випливає з таких перетворень:

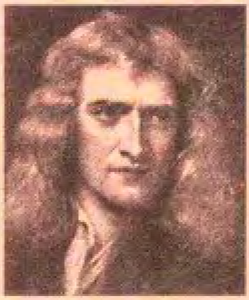
$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) =$$

$$= (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

ГОТФРІД ВІЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНІЦ

(1646–1716)

Видатний німецький математик, фізик, філософ, організатор наукових установ. Разом з Ньютоном поділяє славу відкриття диференціального та інтегрального числень. Увів багато загальновживаних тепер математичних алгоритмів, термінів і символів.



ІСААК НЬЮТОН

(1643–1727)

Видатний англійський фізик, астроном, математик. Сформулював основні закони механіки, закон всесвітнього тяжіння. Незалежно від Лейбніца започаткував математичний аналіз.

У вивченні наук приклади корисніші від правил.

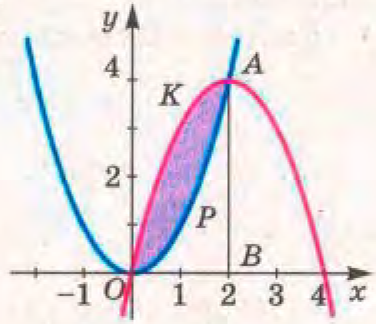
І. Ньютон

Ньютон був найвидатніший геній з усіх, що будь-коли існували.

Ж. Лагранж

Задача. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо графіки даних функцій (мал. 71). Треба знайти площу зафарбованої фігури. Вона дорівнює різниці площ підграфіків $OBAK$ і $OBAP$. Межі інтегрування – абсциси точок O і A, в яких перетинаються графіки функцій, тобто значення x, що задовольняють систему рівнянь $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$. Із цієї системи випливає рівняння $x^2 = 4x - x^2$, коренями якого є: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$.



Мал. 71

Отже, шукана площа

$$S = \int_0^2 (4x - x^2)dx - \int_0^2 x^2 dx =$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $2\frac{2}{3}$ (кв. од.).

Зауваження. Те поняття, яке в цьому підручнику названо інтегралом, у повніших курсах математичного аналізу називається *визначеним інтегралом*. Бо там розглядається ще й *невизначений інтеграл* $\int f(x)dx$, яким вважають загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$:

$$\text{якщо } F'(x) = f(x), \text{ то } \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ось чому операцію знаходження первісної називають також інтегруванням.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке інтегральна сума? Наведіть приклад.
2. Що таке інтеграл функції $f(x)$ від a до b?
3. Як читають вираз $\int_a^b f(x)dx$? Назвіть його складові частини.
4. Дайте визначення формули Ньютона–Лейбніца.
5. Яке відкриття XVII ст. вважають найважливішим?

Виконаємо разом

1. Обчисліть: а) $\int_0^1 (x^2+2x)dx$; б) $\int_0^\pi \sin 2x dx$.

● **Розв'язання.** а) Первісною для функції $f(x)=x^2$ є функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$, а для функції $f(x)=2x$ – функція $F(x)=x^2$. Отже,

$$\int_0^1 (x^2+2x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 2xdx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+x^2\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0+1-0=1\frac{1}{3}.$$

б) Первісною для функції $f(x)=\sin x$ є функція $F(x)=-\cos x$, а для $f(x)=\sin 2x$ – функція $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$. Тому

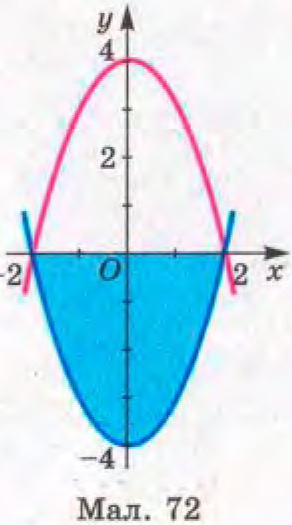
$$\int_0^\pi \sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi=-\frac{1}{2}\cos 2\pi-(-\frac{1}{2}\cos 0)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$$

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2-4$ і $y=0$.

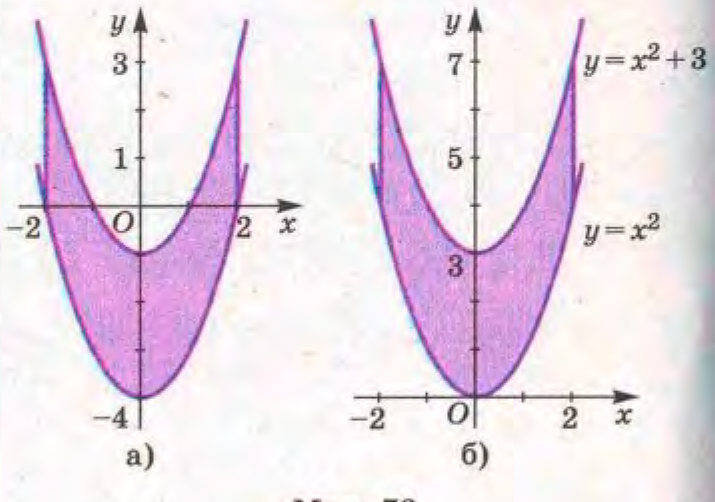
● **Розв'язання.** Фігура, про яку йдеться в задачі, розміщена нижче від осі x (мал. 72), тому не відповідає означенню підграфіка функції. Проте вона симетрична відносно осі x підграфіка функції $y=4-x^2$ на проміжку $[-2;2]$. Площі цих фігур рівні, тому

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=10\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $10\frac{2}{3}$ (кв. од.).



Мал. 72



Мал. 73

3. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $x = -2$, $x = 2$.

Розв'язання. Ця фігура розміщена по різні боки від осі x (мал. 73, *а*). Перенесемо її паралельно на 4 одиниці в напрямі осі y (мал. 73, *б*). Утворена фігура обмежена лініями: $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $x = -2$, $x = 2$. Її площа, отже, площа даної фігури

$$S = \int_{-2}^{2}(x^2 + 3)dx - \int_{-2}^{2} x^2 dx = \int_{-2}^{2} 3dx = 3x\Big|_{-2}^{2} = 12.$$

Відповідь. 12 (кв. од.).

Виконайте усно

511. Відомо, що $\int_0^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^3 f(x)dx = 5$. Знайдіть:

а) $\int_0^1 3f(x)dx$; б) $\int_0^3 f(x)dx$; в) $\int_0^3 0{,}5f(x)dx$.

512. Відомо, що $\int_{-1}^{1} f(x)dx = a$, $\int_{-1}^{1} g(x)dx = b$. Знайдіть:

а) $\int_{-1}^{1} f(2x)dx$; б) $\int_{-1}^{1} f((x) + g(x))dx$; в) $\int_{-1}^{1} 5g(x)dx$.

А

513. Обчисліть:

а) $\int_0^1 xdx$; б) $\int_{-1}^{1} xdx$; в) $\int_0^1 x^2dx$; г) $\int_{-1}^{1} x^2dx$;

ґ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$; д) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$; е) $\int_0^{\pi} \sin xdx$; є) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin xdx$.

514. Використовуючи малюнок 74, порівняйте числа a і b, якщо: $a = \int_1^3 f(x)dx$, $b = \int_1^3 g(x)dx$.

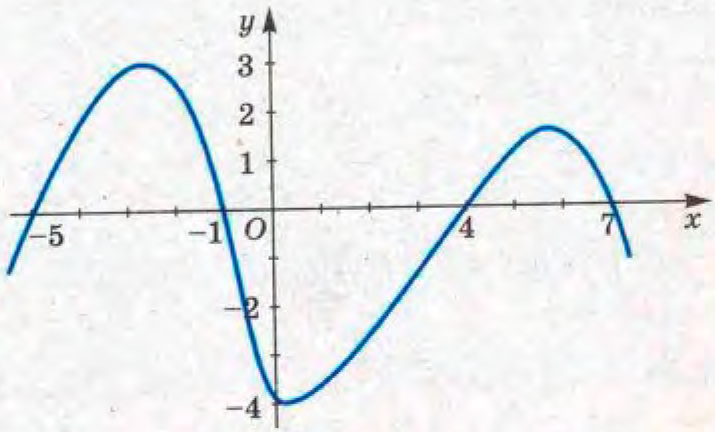
Мал. 74

515. Не обчислюючи інтеграл, порівняйте його з нулем:

а) $\int_0^1 0{,}5x\,dx$; б) $\int_{-1}^0 x\,dx$; в) $\int_0^1 (1-x^2)dx$; г) $\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx$.

516. На малюнку 75 подано графік функції $y = f(x)$. Запишіть числа a, b і c в порядку зростання, якщо:

$a = \int_{-5}^{-1} f(x)dx$, $b = \int_{-1}^{4} f(x)dx$, $c = \int_{4}^{7} f(x)dx$.



Мал. 75

Обчисліть інтеграл (**517–520**).

517. а) $\int_0^1 2x\,dx$; б) $\int_{-1}^2 x^2dx$; в) $\int_0^{1,5} 3x^3dx$.

518. а) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$; б) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

519. а) $\int_0^2 \frac{x^3}{6}dx$; б) $\int_{-1}^1 (4-x^2)dx$; в) $\int_{-2}^0 (3x^2+1)dx$.

520. а) $\int_0^1 e^x dx$; б) $\int_0^1 2^x dx$; в) $\int_1^e 2x^{-1}dx$.

Користуючись формулою Ньютона–Лейбніца, знайдіть площу підграфіка функції (**521–523**).

521. а) $f(x) = x$ на $[1;\ 2]$; б) $f(x) = \cos x$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$;

в) $f(x) = x^3 + 1$ на $[-1;\ 1]$; г) $f(x) = 2\sin x$ на $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

522. а) $f(x) = x^3$ на $[1;\ 2]$; б) $f(x) = \cos 2x$ на $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$;

в) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на $[1;\ 9]$; г) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ на $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

523. а) $y = 2e^x$ на $[0;\ 1]$; б) $y = 2^x$ на $[-1;\ 2]$;

в) $y = \frac{4}{x} + 3$ на $[2;\ 6]$; г) $y = 4 - \frac{1}{x}$ на $[-6;\ -3]$.

Б

Обчисліть (**524–527**).

524. а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{3x+1}$; б) $\int\limits_0^1 (1 + \sqrt[3]{x})dx$; в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx$.

525. а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{x}{3}dx$; б) $\int\limits_{-3}^{-1} (2 + x)^2 dx$; в) $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

526. а) $\int\limits_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x}dx$; б) $\int\limits_1^3 \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2x+1}dx$.

527. а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} 2\sin^2\frac{x}{2}dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}dx$.

528. Доведіть рівність:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (**529–531**).

529. а) $y = x^2$ і $y = 2x$; б) $y = x^2$ і $y = 2$;

в) $y = 6 + x - x^2$ і $y = 6 - 2x$; г) $y = 4x + x^2$ і $y = 4 + x$.

530. а) $y = 4x - x^2$ і $y = 4 - x$; б) $y = x^3$ і $y = x$;

в) $y = x^3$, $y = 8$ і $x = 1$; г) $y = 2x - x^2$ і $y = x^2$.

531. а) $y = 0{,}5^x$, $y = 1$, $x = -2$; б) $y = 3^{-x}$, $y = 3$, $x = 1$;

в) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = e$; г) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{-1}$, $x = 0{,}5$.

532. Чи при кожному дійсному $t > 1$ справджується рівність

$$\int\limits_1^t \frac{1}{x}dx = \ln t?$$

Проілюструйте її геометрично.

533. Доведіть: якщо при кожному $x \in [a; b]$ $f(x) > g(x)$, то фігура, обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, має площу

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

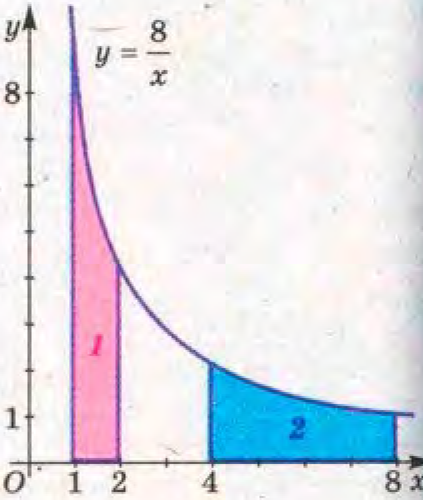
534. Доведіть, що:

а) $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$;

б) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ для кожного $k > 0$;

в) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ для $a < c < b$.

535. Доведіть, що площа фігури *1* дорівнює площі фігури *2* (мал. 76).



Мал. 76

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (**536, 537**).

536. $y = x^2 + 4x$, $y = x^2 + 4x + 3$, $x = -2$, $x = 0$.

537. $y = x^2 - 4x$, $y = x^2 - 4x + 3$, $x = 0$, $x = 4$.

Вправи для повторення

538. Знайдіть первісну функції:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = e^{-x} + x$.

539. Розв'яжіть рівняння:

а) $0{,}5^{x^2-3x+2} = 1$; б) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$;

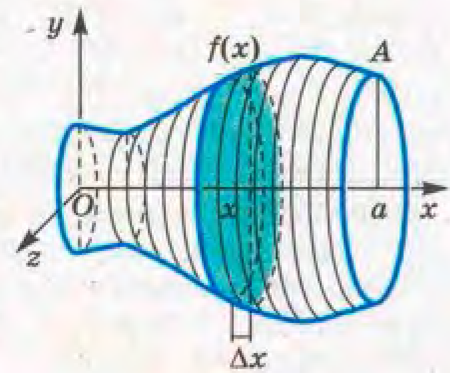
в) $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$.

540. Родина отримала нове житло у 100-квартирному будинку. Яка ймовірність того, що номер нової квартири не буде містити цифру 5?

§ 16. Застосування інтегралів

За допомогою інтегралів можна визначати не тільки площі фігур, а й багато інших величин, наближені значення яких виражаються інтегральними сумами, тобто сумами виду $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$. Такі суми коротко позначають $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$. Підграфік функції $f(x)$ – математична модель кожної такої величини, тому обчислювати границі цих сум також можна за формулою Ньютона–Лейбніца. Розглянемо три приклади таких задач.

1. *Об'єм тіла обертання.* Кожне тіло обертання можна уявити складеним з дуже великої кількості круглих пластинок чи циліндрів з малими висотами Δx (мал. 77).

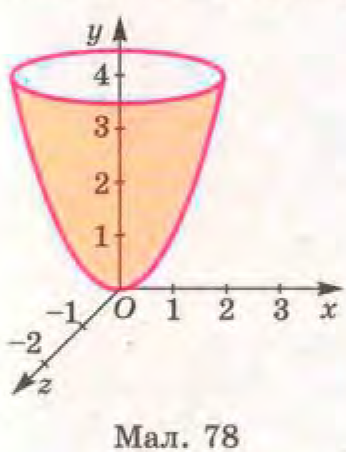


Мал. 77

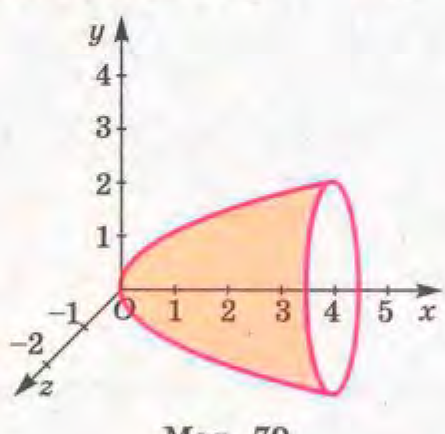
Радіус кожного такого циліндра залежить від змінної x і дорівнює $f(x)$. Об'єм одного циліндрика, що відповідає змінній x, дорівнює $\pi f^2(x)\Delta x$. Усьому тілу обертання відповідає інтегральна сума $\pi f^2(x_1)\Delta x + \pi f^2(x_2)\Delta x + \ldots + \pi f^2(x_n)\Delta x$.

Отже, його об'єм $V = \int_0^a \pi f^2(x)dx$ або $V = \pi\int_0^a f^2(x)dx$.

Приклад. Нехай треба знайти місткість посудини заввишки 4 дм, осьовий переріз якої – графік функції $y = x^2$ (мал. 78). Для невід'ємних значень x графік такої функції симетричний відносно бісектриси першого координатного кута графіка функції $y = \sqrt{x}$. Тому шуканий об'єм посудини дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням підграфіка функції $y = \sqrt{x}$ на проміжку [0; 4] навколо осі x (мал. 79).



Мал. 78



Мал. 79

Отже, шуканий об'єм

$$V = \pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_0^4 x dx = 8\pi \text{ (дм}^3\text{)}.$$

За допомогою визначених інтегралів можна обчислити об'єми не лише тіл обертання, але й багатьох інших тіл – пірамід, зрізаних пірамід тощо.

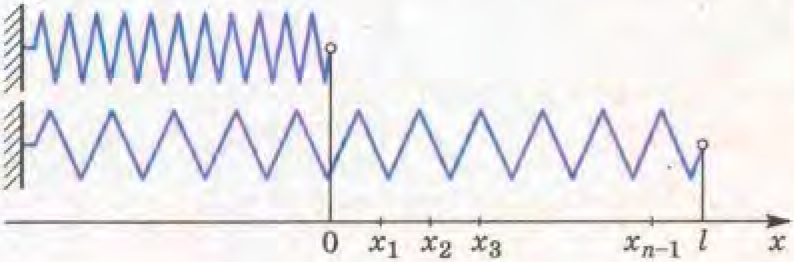
2. *Робота змінної сили.* Якщо внаслідок дії сталої сили F тіло переміщується в напрямі сили на відстань s, то виконується робота $A = Fs$. А якщо на тіло діє сила не стала, а змінна?

Приклад. Щоб розтягнути пружину на 1 см, на 2 см і т. д., треба прикладати дедалі більшу й більшу силу. Згідно із законом Гука, сила $f(x)$, яку треба прикласти, щоб розтягнути пружину на відстань x, пропорційна цій відстані (для допустимих значень x), тобто $f(x) = kx$. Коефіцієнт k різний для різних пружин. Наприклад, якщо для розтягнення пружини на 1 м треба прикласти силу в 50 Н, то $k = 50$.

Яку треба виконати роботу, щоб розтягнути таку пружину на відстань $l = 2$ м?

Поділимо відрізок $[0; l]$, на який розтягується пружина, точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n рівних частин (мал. 80). Нехай $l = x_n$, а Δx – довжина кожної частини. Щоб розтягнути пружину на відстань $[0; x_1]$, тобто перемістити її кінець з точки 0 в x_1, треба прикласти силу $f(x_1)$. У цьому разі виконана робота наближено дорівнюватиме $\Delta x \cdot f(x_1)$. Щоб розтягнути пружину на відстань $[x_1; x_2]$, треба прикласти силу $f(x_2)$ та виконати роботу, яка приблизно дорівнює $\Delta x \cdot f(x_2)$ і т. д. Отже, щоб розтягнути пружину на відстань $[0; l]$, треба виконати роботу, значення якої приблизно дорівнює інтегральній сумі

$$A_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n).$$



Мал. 80

Значення A_n зі збільшенням n (і відповідним зменшенням Δx) дедалі менше відрізнятиметься від точного значення шуканої роботи A, тобто якщо $n \to \infty$, то $A_n \to A$. Отже,

$$A = \int_0^l f(x)dx = \int_0^l kxdx = \frac{1}{2}kl^2.$$

Якщо $k = 50$, $l = 2$ м, то $A = 100$ Дж.

3. *Економічний зміст інтеграла.* Нехай функція $y = f(x)$ описує зміну продуктивності деякого підприємства протягом певного часу. Знайдемо обсяг продукції U, виробленої за проміжок часу $[0; T]$.

Зазначимо, що коли продуктивність не змінюється протягом часу ($f(t)$ – стала функція), то обсяг продукції ΔU, виробленої за деякий проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ визначається формулою $\Delta U = f(t)\Delta t$. У загальному випадку справедлива наближена рівність $\Delta U \approx f(t)\Delta t$, де $t \in [t; t + \Delta t]$, яка буде тим точніша, чим менше Δt.

Поділимо відрізок $[0; T]$ на n рівних частин точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Для обсягу продукції ΔU_k, виробленої за проміжок часу $\Delta t = [t_{k-1}; t_k]$, маємо $\Delta U_k \approx f(t_k)\Delta t$, де $t_k \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Отже,

$$U \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta U_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то кожна з використаних наближених рівностей стає точнішою, отже,

$$U = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t, то обсяг виробленої продукції за проміжок $[0; T]$ можна обчислити за формулою

$$U = \int_0^T f(t)dt.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які застосування інтегралів ви знаєте?
2. Як за допомогою інтеграла визначити об'єм тіла обертання?
3. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на l м?
4. Яким є економічний зміст інтеграла?

Виконаємо разом

1. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається формулою $f(t) = -2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1$, де

t – робочий час у годинах. Визначте обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин.

● **Розв'язання.** Обсяг випуску продукції протягом зміни є первісною від функції, що виражає продуктивність праці. Тому

$$U = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 (-2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1)dt =$$

$$= \left(-\frac{2{,}53t^3}{3} + \frac{24{,}75t^2}{2} + 111{,}1t\right)\Bigg|_0^5 = -\frac{2{,}53 \cdot 125}{3} + \frac{24{,}75 \cdot 25}{2} +$$

$$+ 111{,}1 \cdot 5 = -\frac{316{,}25}{3} + \frac{618{,}75}{2} + 555{,}5 \approx 759 \text{ (од.)}.$$

2. Точка рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v = 10t$ м/с; за перші 4 с вона пройшла 80 м. Знайдіть закон руху точки.

● **Розв'язання.** Шуканий закон руху виражається такою функцією $s = s(t)$, що $s'(t) = 10t$. Тут $s(t)$ – первісна для функції $v = 10t$. Загальний вигляд таких первісних – $s(t) = 5t^2 + C$. Оскільки за 4 с точка пройшла 80 м, то $80 = 5 \cdot 16 + C$, звідки $C = 0$.

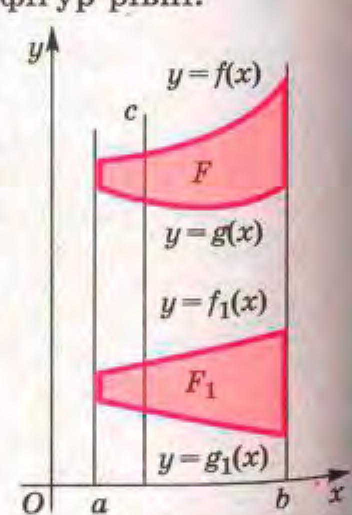
Відповідь. Шуканий закон руху точки $s(t) = 5t^2$, де t – час у секундах, $s(t)$ – відстань у метрах.

3. Доведіть твердження Кавальєрі. Якщо дві фігури можна розмістити на площині так, що кожна січна, паралельна даній прямій, перетинаючи одну з них, перетинає і другу по відрізку такої самої довжини, то площі цих фігур рівні.

● **Розв'язання.** Нехай фігуру F обмежують лінії $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ і $y = g(x)$, а фігуру F_1 – лінії $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ і $y = g_1(x)$ (мал. 81). Якщо кожна січна c, паралельна осі y, перетинає фігури F і F_1 по відрізках рівної довжини, то $f(x) - g(x) = f_1(x) - g_1(x)$ для кожного $x \in [a; b]$. Тоді

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx,$$

тобто площі фігур F і F_1 рівні.



Мал. 81

БОНАВЕНТУРА КАВАЛЬЄРІ

(1598–1647)

Італійський математик, викладач Болонського університету, автор «Геометрії», в якій викладено метод неподільних. Умів розв'язувати задачі, які й тепер розв'язують, обчислюючи інтеграли $\int_a^b x^n dx$ при натуральних $n < 10$. Інші його праці: «Сто різних задач...», «Тригонометрія плоска і сферична, лінійна й логарифмічна».

А

Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої заданими лініями (541–543).

541. $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

542. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

543. $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$.

544. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої дугою кола $x^2 + y^2 = 16$, яка лежить у першій чверті, та прямими $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

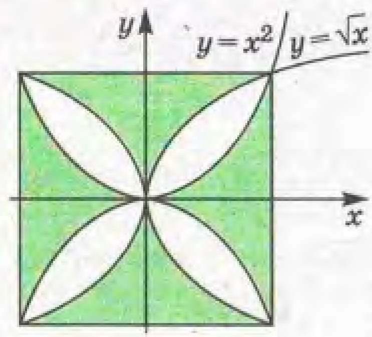
Тіло рухається зі швидкістю $v(t)$. Знайдіть шлях (у м), пройдений тілом за проміжок часу (у с) від t_1 до t_2 (545–547).

545. $v(t) = 3t + 2t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 6$.

546. $v(t) = 10t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

547. $v(t) = 3t^2 - 2t + 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.

548. Продуктивність праці робітника протягом дня визначається функцією $z(t) = -0{,}00645t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$ (грош. од./год), де t – час у годинах від початку роботи, $0 \leqslant t \leqslant 8$. Знайдіть обсяг продукції (у грошових одиницях), виготовленої за робочий день.



Мал. 82

549. Знайдіть площу зафарбованої частини фігури, зображеної на малюнку 82.

Б

Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої заданими лініями (**550, 551**).

550. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

551. $y^2 - 4x = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $y = 0$.

552. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 1 Н розтягує її на 1 см?

553. Для стиснення пружини на 1 см треба прикласти силу 9,8 Н. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 4 см?

554. Для кращого обслуговування заїзду гонок серії «Формула-1» майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою трасою: $v(t) = 2(t + 2)^{2,5}$. Який шлях проїде пілот цієї гонки з 2-ї до 7-ї секунди від початку руху?

555. Знайдіть шлях, який пройде тіло від початку руху до зупинки, якщо його швидкість $v(t) = 18t - 6t^2$.

556. Швидкість руху тіла $v(t)$ з часом t змінюється за законом $v = 20 - 3t$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройшло тіло за 4-ту секунду свого руху.

557. Сила струму в провіднику з часом змінюється за законом $I(t) = 4 + 2t$. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від 2-ї до 6-ї секунди?

Вправи для повторення

558. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти із цифр 0; 1; 2 так, щоб цифри не повторювалися? А із цифр 1; 2; 3?

559. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії з першим членом 4,5 і знаменником 0,75.

560. Спростіть вираз:

а) $3^{\log_3(1-2x)}$; б) $7^{\log_7(y+1)}$; в) $9^{\log_3 x}$; г) $7^{2\log_7(y-1)}$.

Самостійна робота № 4

Варіант 1

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:
а) $f(x) = x^4 - 3x$; б) $f(x) = \cos x$.

2. Знайдіть для функції $f(x) = 3x^2 - 2$ таку первісну, графік якої проходить через точку (0; 2).

3. Намалюйте підграфік функції $f(x) = x^3$ на проміжку [0; 2] та знайдіть його площу.

4. Обчисліть інтеграл $\int_1^2 3x^3 dx$.

Варіант 2

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:
а) $f(x) = x^5 + 2x$; б) $f(x) = \sin x$.

2. Знайдіть для функції $f(x) = 2x + 3$ таку первісну, графік якої проходить через точку (0; 1).

3. Намалюйте підграфік функції $f(x) = x^2$ на проміжку [0; 3] та знайдіть його площу.

4. Обчисліть інтеграл $\int_0^3 4x^2 dx$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Сформулюйте означення первісної. Наведіть приклади.
2. Що таке інтегрування?
3. Сформулюйте теорему про: а) первісну для одночлена; б) первісну для суми двох функцій.
4. Як знайти загальний вигляд первісних для функції?
5. Що таке підграфік функції? Як ще називають утворену фігуру?
6. Як знайти площу підграфіка функції на проміжку [a; b]?
7. Що називають інтегралом функції?
8. Як позначається інтеграл функції?
9. Запишіть формулу Ньютона–Лейбніца.
10. Що вважають найбільшим відкриттям XVII ст.?

Історичні відомості

Введенню поняття інтеграла передувала робота багатьох математиків. Зокрема, Архімед ще в III ст. до н. е. розробив методи для обчислення площ і об'ємів геометричних фігур, які досить схожі з методами інтегрального числення. Він розв'язував такі задачі, які й тепер розв'язують, обчислюючи інтеграли

$$\int_0^a x dx,\ \int_0^a x^2 dx,\ \int_0^a (x^2 + bx) dx,\ \int_0^a \sin\varphi d\varphi.$$

Подібними методами користувався також Й. Кеплер (1571–1630). Вважаючи, що кожне тіло обертання складається з безлічі «найтонших кружечків», він визначив об'єми 92 таких тіл.

Ще далі пішов італійський математик Б. Кавальєрі. Уявляючи кожну фігуру складеною з «неподільних» (плоска фігура з відрізків, а тіло – з плоских фігур), він сформулював свої принципи (див. задачу 3 на с. 124). Аналогічне твердження правильне і для об'ємів тіл. Сам Кавальєрі вважав ці твердження очевидними та приймав їх без доведення, як принципи (лат. *principium* – початок, основа, те саме, що й аксіома). Методами сучасної математики їх можна довести як теореми.

Взагалі питання диференціального й інтегрального числення були сферою багатьох провідних математиків ще задовго до Ньютона та Лейбніца, але всі вони ці дві частини математичної науки розглядали ізольовано одна від одної. Тому ті задачі, які за допомогою формули Ньютона–Лейбніца можна розв'язати в один рядок, вони розв'язували досить громіздкими штучними методами, а багато задач і не могли розв'язати. Основна заслуга Ньютона та Лейбніца в тому, що вони пов'язали диференціальне числення з інтегральним, створивши найважливішу науку – *математичний аналіз*. Їх відкриття дало математикам і прикладникам найзручніший метод розв'язування великого класу важливих задач і створило передумови для багатьох нових відкриттів. Спеціалісти вважають відкриття математичного аналізу найбільшим у XVII ст. відкриттям людства.

МИХАЙЛО ВАСИЛЬОВИЧ ОСТРОГРАДСЬКИЙ

(1801–1862)

Всесвітньо відомий український математик, член Петербурзької, Туринської, Римської, Американської та Французької академій наук. Народився в с. Пашенна (Полтавська обл.). Досліджував проблеми математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки, алгебри, теорії ймовірностей. Приятель Т. Шевченка.

Михайло Остроградський

Талантами багата Україна.
Хай навіть відбиваючись від орд,
Долаючи неволю і руїни,
Все ж геніїв народжує народ.
Один із них – Михайло Остроградський –
Великий тілом, духом і умом,
Найперший вчений у Краю Козацькім,
Властитель теорем і аксіом.
Нью-йоркський академік і туринський,
Паризький, римський – між усіх широт
Відомий математик український,
Славетний український патріот.
Ген-ген аж де від батьківської хати
Полтавець за морями побував,
Чужому научався плідно і багато,
А мови й земляків не забував.
Як брата, обіймав він Кобзаря Тараса,
З ним – українства молодий порив;
Науку вивів на найвищу трасу,
Потрібне, вічне і святе творив.
Чудовий дав інтегрування метод –
На всі часи, для всіх земель і рас;
Явився, наче ясно сяюча комета,
Що за віки являється лиш раз.
Його творіння в світі добре знані:
Десятки теорем, і формул, і думки...
Давно немає генія між нами,
Та в пам'яті він буде навіки!

Ось що писали про відкриття математичного аналізу люди різних переконань, національностей і епох.

«З усіх теоретичних успіхів знання навряд чи який-небудь вважається таким великим тріумфом людського духу, як винайдення числення нескінченно малих у другій половині XVII століття» (Ф. Енгельс).

«Аналіз нескінченно малих, безперечно, стоїть поряд з найвидатнішими завоюваннями людської культури» (О. Хінчин).

З українських учених найбільше зробили для розвитку математичного аналізу Михайло Васильович Остроградський (1801–1862) і Віктор Якович Буняковський (1804–1889). Обидва народилися в Україні, навчалися в Парижі, працювали в Петербурзі й були найвідомішими математиками Російської імперії XIX ст. Зокрема, Остроградський розробив загальний метод інтегрування раціональних функцій, обґрунтував відомі тепер математикам усього світу правило Остроградського та формулу Остроградського.

Буняковський, крім іншого, перший довів нерівність

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b \varphi^2(x)dx,$$

яку тепер називають *нерівністю Буняковського*.

У XX ст. в галузі математичного аналізу успішно працювали наші провідні математики С. Н. Бернштейн (1880–1963), М.П. Кравчук (1892–1942) та ін.

Головне в розділі 3

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку I, якщо для кожного значення x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функція x^2 є первісною для функції $2x$, бо $(x^2)' = 2x$.

Кожна первісна для функції $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з цих первісних, а C – довільне число.

Графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ такі, що їх можна сумістити паралельним перенесенням уздовж осі ординат.

Операцію знаходження первісних називають *інтегруванням* функції. Ця операція обернена до диференціювання.

Первісні функції $f(x)$ можна знаходити за формулами, наведеними в таблиці.

Дана функція	k (стала)	x^n $(n \ne -1)$	$\frac{1}{x}$	a^x
Її первісна	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
Дана функція	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Її первісна	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Якщо $F(x)$ і $G(x)$ – первісні для функції $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$,

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а $k \ne 0$, b – сталі, то:

$kF(x)$ – первісна для функції $kf(x)$;

$\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первісна для функції $f(kx + b)$.

Площа підграфіка функції (або криволінійної трапеції) $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на $[a; b]$.

Інтегральною сумою є $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$.

Границю інтегральної суми $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$ функції $f(x)$ на $[a; b]$, якщо $n \to \infty$, називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ від a до b і позначають символом $\int_a^b f(x)dx$.

Формулу Ньютона–Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ називають також *основною формулою математичного аналізу*.

За допомогою визначених інтегралів розв'язують багато важливих задач, які зводяться до визначення границь інтегральних сум.

Знаменна річ, що наука (теорія ймовірностей), яка почалася з вивчення ігор, піднеслася до найважливіших об'єктів людського пізнання.

П. Лаплас

4 Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

ТЕМИ РОЗДІЛУ

- Елементи комбінаторики.
- Комбінаторні правила суми та добутку.
- Перестановки, розміщення, комбінації.
- Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення.
- Графічне подання інформації про вибірку.
- Випадкова подія.
- Ймовірність події.
- Відносна частота події та випадкові величини.

§ 17. Множини та підмножини

Ви знаєте, що таке бригада, табун, рій, набір, комплект тощо. У математиці будь-які сукупності називають одним словом: *множина*. Можна говорити, наприклад, про множини планет, держав, пісень, партій, рівнянь, функцій, точок, чисел, фігур тощо. Об'єкти, які входять до множини, називаються її *елементами*. Якщо a – елемент множини M, то пишуть: $a \in M$. Запис $b \notin M$ означає, що b – не є елементом множини M. Множини часто записують за допомогою фігурних дужок. Наприклад:

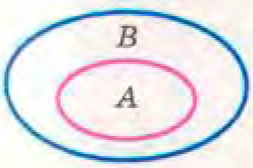
$\{\Delta, \square, \bigcirc\}$ – множина фігур Δ, $\square$, $\bigcirc$;

$\{0, 1, 2, 3\}$ – множина цифр 0, 1, 2, 3.

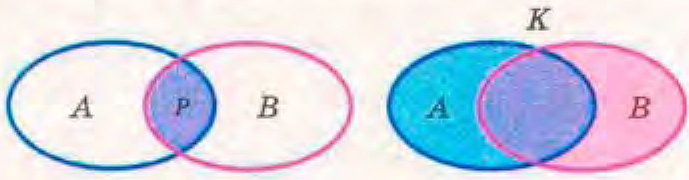
Це – приклади *скінченних множин*. Якщо множина має нескінченну кількість елементів, її називають *нескінченною множиною*. Нескінченними є, наприклад, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел. Їх позначають відповідно буквами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$. Нескінченними є також множини точок на прямій чи відрізку, множини дійсних чисел на проміжках $[2; 3]$, $(-6; \infty)$ та ін.

Вважають, що елементи множини – різні. Дві множини називають *рівними*, якщо вони складаються з тих самих елементів. $\{1; 3; 5\}$ і $\{3; 1; 5\}$ – різні записи однієї й тієї самої множини.

У математиці часто розглядаються множини, які мають тільки один елемент або й зовсім не мають елементів. Наприклад, можна говорити про множину коренів рівняння $3x + 5 = 17$ або множину розв'язків нерівності $x^2 + 3 < 0$. Якщо множина не містить жодного елемента, її називають *порожньою множиною* і позначають символом $\varnothing$.



Мал. 83



а) б)

Мал. 84

Якщо A – частина множини B, то її називають *підмножиною* множини B і записують: $A \subset B$. Наочно це зображають за допомогою діаграми Ейлера (мал. 83). Правильними є співвідношення:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}, \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}, \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}.$$

Трапляється, що множини A і B мають спільні елементи. Якщо множина P містить усі спільні елементи множин A і B і тільки їх, то множину P називають *перерізом множин* A і B. Записують це так: $A \cap B = P$; діаграмою Ейлера зображають, як показано на малюнку 84, *а*. Множина, яка містить кожен елемент кожної з множин A і B і тільки ці елементи, називається *об'єднанням множин* A і B. Якщо K – об'єднання множин A і B, то пишуть: $A \cup B = K$ (мал. 84, *б*).

Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B. Її позначають: $A \setminus B$. Наприклад, якщо $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 4; 5; 7; 8\}$, то $A \cap B = \{1; 4\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$, $A \setminus B = \{2; 3\}$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Наведіть приклад множини.
2. Як позначають множини та їх елементи?
3. Які бувають множини?
4. Які множини називають рівними?
5. Що таке підмножина?
6. Що таке об'єднання двох множин?
7. Що таке переріз двох множин?

Виконаємо разом

1. Запишіть усі підмножини множини $M = \{c, d, k\}$.

• **Розв'язання.** Підмножинами цієї множини будуть множини:

$$\{c\}, \{d\}, \{k\}, \{c, d\}, \{c, k\}, \{d, k\}, \{c, d, k\}, \varnothing.$$

2. Знайдіть переріз та об'єднання множин A і B, якщо $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

• **Розв'язання.** Оскільки $A \subset B$, то $A \cap B = A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. $A \cup B = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

3. A і B – множини розв'язків рівнянь $x^3 - x = 0$ та $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Знайдіть: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

• **Розв'язання.** Розв'яжемо кожне рівняння:

$x^3 - x = 0$, $x(x - 1)(x + 1) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$;

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, $x^2(x - 3) - (x - 3) = 0$, $(x^2 - 1)(x - 3) = 0$, звідки $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Отже, $A = \{0, -1, 1\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$.

Тоді: а) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 3\}$; б) $A \cap B = \{-1, 1\}$.

Виконайте усно

561. Скільки елементів має множина:
а) {7, 8, 9}; б) $\{a, b, c, d\}$?

562. Скільки елементів має множина двоцифрових чисел, кратних 10? Назвіть її елементи.

563. Скільки елементів має множина квадратів? А ромбів з кутами 60°?

564. Скільки елементів має множина коренів рівняння:
а) $x^2 = 2$; б) $x^2 + 27 = 8$; в) $|x| = 0$?

565. Чим є переріз та об'єднання множин: а) натуральних і цілих чисел; б) раціональних та ірраціональних чисел?

566. Як називається: а) множина коренів; б) множина людей, яких обслуговує банк; в) множина квітів у вазі; г) множина музикантів, які виступають разом?

А

567. Випишіть усі елементи кожної множини:
A – множина днів тижня; B – множина кольорів світлофора; C – множина материків; D – множина цифр; E – множина кольорів веселки.

568. Наведіть приклади множини, яка має: а) два елементи; б) п'ять елементів; в) один елемент.

569. Запишіть множину букв, якими записують ваше ім'я та прізвище.

570. Запишіть множину цифр, якими записують дату вашого народження.

571. Задайте переліком елементів множину одноцифрових чисел, які діляться: а) на 3; б) на 5; в) на 15.

572. Випишіть усі підмножини для кожної множини:
а) {•, ■}; б) {*, Δ, #}.

573. Запишіть множину голосних звуків українського алфавіту.

574. Напишіть множину цілих чисел, які:
а) більші за 3 та менші за 13;
б) не більші за 12 і не менші за −2.

575. Позначте на координатній прямій множину точок, яким відповідають числа: −3, −1, 2, 3, 4, 5.

576. Запишіть множину натуральних дільників числа: а) 60; б) 73.

577. Запишіть множину спільних дільників чисел 120 і 150.

578. Запишіть множину розв'язків рівняння:

а) $x(x^2 - 4) = 0$; б) $x^2 + 6 = 0$; в) $x^2 = \sqrt{x}$.

579. Запишіть множину розв'язків нерівності:

а) $2x - 1 < 7$; б) $x^2 - 2x \leqslant 0$; в) $|x - 3| < 2$.

580. Які висловлення правильні:

а) $7 \in Q$; б) $-5 \in R$; в) $\sqrt{3} \in Q$; г) $2\frac{1}{3} \in Z$?

581. Чи є множина голубів підмножиною множини птахів? Зобразіть це діаграмою Ейлера.

Б

582. Знайдіть множину значень функції:

а) $y = x^2$, заданої на проміжку $[-2; 7]$;

б) $y = 1^x$, якщо $x \in [1; 8]$.

583. Дано множини: $K = \{a, b, c, 2\}$, $P = \{1, 2, a, c, x\}$. Знайдіть їх переріз, об'єднання та різницю.

Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$ (584, 585).

584. а) $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$;

б) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, -3\}$;

в) $A = \{\blacklozenge, \blacktriangle, \bullet\}$, $B = \{\blacktriangle, \circ, \blacksquare\}$;

г) $A = \{\square, ☼, \blacktriangle\}$, $B = \{☼, \triangle, \square\}$.

585. а) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$;

б) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{б, в, \beta, \gamma, г\}$;

в) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{7, 6, 5, 4\}$;

г) $A = \{2, 3\}$, $B = \{22, 33\}$.

586. Серед названих нижче множин укажіть скінченні та нескінченні:

а) множина від'ємних чисел;

б) множина цифр у записі числа π;

в) множина чисел, які належать відрізку $[0; 1]$;

г) множина розв'язків рівняння $2x + 3y = 5$;

ґ) множина розв'язків нерівності $x^2 - 2y + 1 \leqslant 0$.

587. Запишіть переліком множину: а) спільних дільників чисел 60 і 126; б) простих чисел першої сотні; в) розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = 0$.

Знайдіть об'єднання та переріз числових проміжків (588, 589).

588. а) $(-\infty; 5)$ і $(1; \infty)$; б) $(1; 3)$ і $[1; \infty)$; в) $[0; 2]$ і $(-\infty; 0)$.

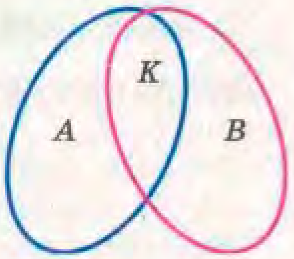
589. а) $(-7; 7)$ і $(-\infty; -1)$; б) $[0; 3)$ і $[-3; 0]$; в) $[4; \infty)$ і $[1; 2)$.

590. A і B – множини розв'язків рівнянь $2x + 3y = 5$ та $x - 5y = 9$. Запишіть множину $A \cap B$. Що є елементом цієї множини?

591. A – множина чисел, кратних 2; B – множина чисел, кратних 3. Якою є множина $A \cap B$? Скільки елементів вона має?

592. A – множина парних натуральних чисел; B – множина непарних натуральних чисел. Якими є множини $A \cap B$, $A \cup B$ та $A \setminus B$?

593. На малюнку 85 зображені: A – множина прямокутників, B – множина ромбів, $K = A \cap B$. Опишіть множину K. Чи правильно, що $K \cap A = K$, $K \cup A = A$? Опишіть множини $A \setminus B$ та $B \setminus A$.



Мал. 85

594. а) Нехай A – множина всіх квадратних рівнянь, а B – множина рівнянь, які мають два корені. Чи рівні ці множини? Зобразіть їх діаграмою Ейлера.
б) Дано множину {△, □, ○}. Складіть усі її двохелементні підмножини. Скільки їх?

595. Дано множину $A = \{a, b, c, d\}$. Складіть усі трьохелементні підмножини множини A. Скільки їх?

596. Скільки підмножин має множина, яка містить: а) один елемент; б) два елементи; в) три елементи; г) чотири елементи? Перевірте твердження: «Множина, що складається з n елементів, містить 2^n підмножин» для $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

597*. Покажіть, що кожна п'ятиелементна множина має стільки трьохелементних підмножин, скільки й двохелементних.

Вправи для повторення

598. Порівняйте числа:

а) $\frac{4}{9}$ і $\frac{5}{11}$; б) $\frac{5}{22}$ і $0{,}2(27)$.

599. Побудуйте графік функції:

а) $y = (x + 1)^2$; б) $y = x^2 + 1$.

600. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{(x-3)(x+5)}{(x-1)} \geqslant 0$; б) $\frac{x(x^2-2x+1)}{(4x+4)} < 0$.

§ 18. Комбінаторика та правило добутку

Говорячи «множина», «підмножина», на порядок розміщення їх елементів не зважають. Кажуть, що вони не впорядковані. Крім них, нерідко розглядають і *впорядковані множини*. Так називають множини з фіксованим порядком елементів. Їх позначають не фігурними, а круглими дужками. Наприклад, з елементів множини $\{a, b, c\}$ можна утворити 6 трьохелементних упорядкованих множин:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Як множини, всі вони рівні, як упорядковані множини – різні.

Існують задачі, в яких треба визначити, скільки різних підмножин або впорядкованих підмножин можна утворити з елементів даної множини. Їх називають *комбінаторними задачами*. А розділ математики про розв'язування комбінаторних задач називають *комбінаторикою*.

Розглянемо два основні правила, за допомогою яких розв'язується багато задач з комбінаторики.

Задача 1. У місті N є два університети – політехнічний та економічний. Абітурієнту подобаються три факультети в політехнічному університеті і два – в економічному. Скільки можливостей має студент для вступу до університету?

● **Розв'язання.** Позначимо буквою A множину факультетів, які обрав абітурієнт у політехнічному університеті, а буквою B – в економічному. Тоді $A = \{m, n, k\}$, $B = \{p, s\}$. Оскільки ці множини не мають спільних елементів, то загалом абітурієнт має $3 + 2 = 5$ можливостей вступати до університету. Описану ситуацію можна узагальнити у вигляді твердження, яке називається *правилом суми*.

Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B – n способами, то елемент з множини A або з множини B можна вибрати $m + n$ способами.

Правило суми поширюється й на більшу кількість множин.

Задача 2. Родина з чотирьох осіб планує літній відпочинок. Діти обрали 4 міста – Одесу, Євпаторію, Ялту, Феодосію. Батьки визначилися з базами відпочинку так: в Одесі – 1, у

Євпаторії – 3, в Ялті – 2, у Феодосії – 2. Скільки можливостей вибору літнього відпочинку має родина?

Розв'язання. Оскільки всі бази відпочинку різні, то для розв'язання задачі досить знайти суму елементів усіх множин, про які йдеться: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$. Отже, родина може обирати варіант відпочинку з 8 можливих.

Задача 3. Від пункту A до пункту B ведуть три стежки, а від B до C – дві. Скількома маршрутами можна пройти від A до C?

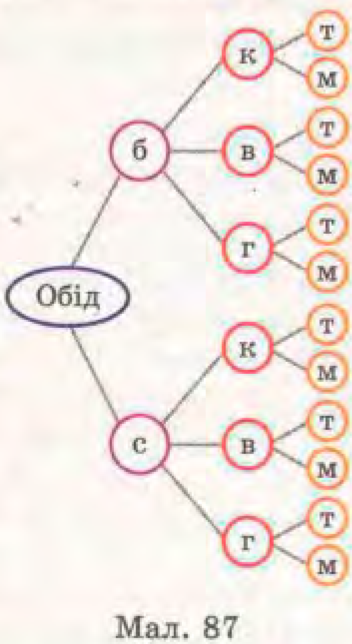
Розв'язання. Щоб пройти від A до B, треба вибрати одну з трьох стежок: 1, 2 або 3 (мал. 86). Після цього треба вибрати одну з двох інших стежок: 4 чи 5. Усього від A до C ведуть 6 маршрутів, бо $3 \cdot 2 = 6$. Усі ці маршрути можна позначити за допомогою пар:

$$(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5).$$

Мал. 86

Узагальнимо описану ситуацію. **Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий – n способами, то таку пару можна вибрати mn способами.** Це – *правило добутку*, яке часто називають основним правилом *комбінаторики*. Зверніть увагу: йдеться про впорядковані пари, складені з різних компонентів.

Правило добутку поширюється і на впорядковані трійки, четвірки та будь-які інші впорядковані скінченні множини. Зокрема, ***якщо перший компонент упорядкованої трійки можна вибрати m способами, другий – n способами, а третій – k способами, то таку впорядковану трійку можна вибрати mnk способами.*** Наприклад, якщо їдальня на обід приготувала 2 перші страви – борщ (б) і суп (с), 3 другі – котлети (к), вареники (в), голубці (г) і 2 десертні – тістечка (т) і морозиво (м), то всього з трьох страв



Мал. 87

їдальня може запропонувати 12 різних наборів, бо $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Описаній ситуації відповідає діаграма, зображена на малюнку 87. Такі діаграми називають *деревами*.

Задача 4. Скільки різних поїздів можна скласти з 6 вагонів, якщо кожен вагон можна поставити на будь-якому місці?

● Розв'язання. Першим можна поставити будь-який із 6 вагонів. Маємо 6 виборів. Другий вагон можна вибрати з решти 5 вагонів. Тому, згідно з правилом множення, два перші вагони можна вибрати $6 \cdot 5$ способами. Третій вагон можна вибрати з 4 вагонів, що залишилися. Тому три перші вагони можна вибрати $6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Продовжуючи подібні міркування, приходимо до відповіді: всього можна скласти $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ різних поїздів.

Зверніть увагу на розв'язання останньої задачі. Воно звелося до обчислення добутку всіх натуральних чисел від 1 до 6. У комбінаториці подібні добутки обчислюють часто. **Добуток усіх натуральних чисел від 1 до *n* називають *n-факторіалом* і позначають *n*!** Наприклад,

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Домовилися вважати, що $1! = 1$ і $0! = 1$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які задачі називають комбінаторними?
2. Що таке комбінаторика?
3. Сформулюйте правило суми.
4. Сформулюйте основне правило комбінаторики.
5. Наведіть приклад діаграми-дерева.
6. Що таке факторіал? Як його позначають?

Виконаємо разом

1. У розіграші на першість міста з баскетболу беруть участь команди з 12 шкіл. Скількома способами можуть бути розподілені перше та друге місця?

● Розв'язання. Перше місце може одержати одна з 12 команд. Після того як визначено володаря першого місця, друге місце може отримати одна з 11 команд. Отже, загальна кількість способів, якими можна розподілити перше та друге місця, дорівнює $12 \cdot 11 = 132$.

2. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо жодна цифра не повторюється?

Розв'язання. Першою цифрою числа може бути одна з п'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Якщо першу цифру обрано, то другу можна обрати 5 способами, третю – 4, четверту – 3. Згідно з правилом множення, загальна кількість способів дорівнює

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300.$$

3. Скільки можна скласти парних чотирицифрових чисел із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо жодна цифра не повторюється?

Розв'язання. Парні числа можуть закінчуватися цифрами 0, 2 або 4. Розділимо множину всіх парних чотирицифрових чисел, які можна скласти за умовою задачі, на дві групи: 1) числа, які закінчуються нулем, і 2) числа, які не закінчуються нулем.

У першій множині міститься $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел (усі цифри, крім останньої, вибираються з 5 можливих).

У другій множині міститься $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$ чисел. Останньою цифрою числа може бути одна з двох цифр: 2 або 4. Якщо останню цифру обрано, то першу можна обрати 4 способами (не нуль), другу – також 4 способами, а третю – 3. Згідно з правилом додавання, загальна кількість способів дорівнює $60 + 96 = 156$.

Виконайте усно

601. Обчисліть:

а) 2!; б) 3!; в) 4!; г)5!.

602. У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одного учня в шкільний комітет самоврядування?

603. У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати двох учнів у шкільний комітет самоврядування?

604. У класі 12 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одну дівчину та одного хлопця в шкільний комітет самоврядування?

А

605. Обчисліть:

а) 5!; б) 8!; в) 10!; г) 13!.

606. Спростіть вираз:

а) $n! \cdot (n+1)$; б) $n \cdot (n-1)!$; в) $(n+1)! : n!$; г) $n! : n$.

607. У магазині є три види печива і десять видів цукерок. Сергій хоче купити сестрі або печиво, або цукерки. Скількома способами він може це зробити?

608. Скількома способами можна посадити чотирьох дітей на лавці?

609. На вершину гори ведуть 4 стежки. Скількома маршрутами турист може піднятися на гору та спуститися з неї, обираючи для спуску й підйому різні стежки?

610. Їдальня приготувала на сніданок 3 другі страви (A, B, C) і два напої (M, K). Скільки різних наборів із двох страв можна вибрати на сніданок? Складіть відповідну діаграму-дерево.

611. Скількома способами 5 осіб можуть утворити чергу до каси?

612. Скільки різних речень можна написати словами «ми», «любимо», «грати»? А словами «ми», «дуже», «любимо», «грати»?

613. Скількома способами дівчинка може нанизати на нитку 8 різних намистин?

614. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Б

615. Обчисліть:

а) $10! : 5!$; б) $13! : 10!$; в) $20! : 25!$; г) $100! : 97!$.

616. Спростіть вираз:

а) $n! : (n - 1)$; б) $(n - 1)! : n!$; в) $(n + 1)! : (n - 1)!$.

617. Обчисліть $(2n)! : n!$, якщо: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 10$.

618. Знайдіть значення n, якщо:

а) $n! = (n - 1)! \cdot 8$; б) $(n + 2)! = 132 \cdot n!$.

619. Вісім друзів вирішили провести шашковий турнір так, щоб кожен зіграв з кожним одну партію. Скільки партій буде зіграно?

620. Їдальня приготувала на обід 3 перші страви (A, B, C), 3 другі (a, b, c) і 3 треті (x, p, y). Скільки різних наборів із трьох страв можна вибрати на обід? Складіть відповідну діаграму-дерево.

621. До моря ведуть 7 доріг. Скількома способами відпочивальник може дістатися моря і повернутися назад? Розгляньте

випадки, коли рух до моря та від моря відбувається: а) однією дорогою; б) різними шляхами; в) одним із двох попередніх способів.

622. Скільки різних «кортежів» може створити хлопчик із чотирьох іграшкових автомобілів – білого, жовтого, синього та червоного? Складіть відповідну діаграму-дерево.

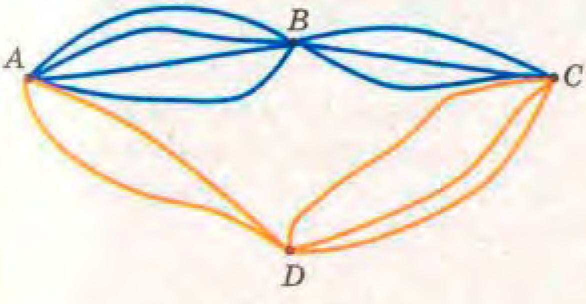
623. Скільки непарних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри не можуть повторюватись?

624. У середу за розкладом в 11-А класі 6 різних уроків, серед яких алгебра та геометрія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб алгебра й геометрія стояли поруч?

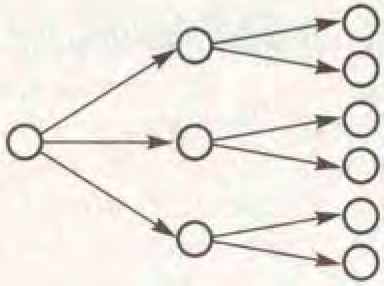
625. У вівторок за розкладом в 11-Б класі 7 різних уроків, серед яких фізика та астрономія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб фізика й астрономія не стояли поруч?

626. Скільки різних упорядкованих трійок можна утворити з чотирьох елементів – a, b, c, d?

627. Складіть дві комбінаторні задачі, що відповідають малюнкам 88 і 89, та розв'яжіть їх.



Мал. 88


Мал. 89

Вправи для повторення

628. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 2x^3 - 3$; б) $y = 2x(x - 3)$;
в) $y = 2\sin x - 3$; г) $y = 2 - 3e^x$.

629. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{2x - 3} = 5$; б) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

630. Спростіть вираз:

а) $1 - \sin^2 x$; б) $1 + \operatorname{tg}^2 x$; в) $1 + \cos 2x$.

§ 19. Розміщення, перестановки та комбінації

Щоб розв'язувати складніші задачі на визначення ймовірностей подій, корисно навчитись обчислювати раціональним способом кількість різних вибірок з даної множини елементів. Нехай дано множину з m елементів – a, b, c, ..., k. Вибираючи тим чи іншим способом елементи з цієї множини, можна утворити різні вибірки, тобто підмножини даної множини або впорядковані підмножини. Залежно від того, чим відрізняється одна вибірка від інших, їх називають по-різному.

Вибірки, які відрізняються одна від одної або елементами, або порядком їх розміщення, називають *розміщеннями*. Наприклад, з 3 елементів a, b, c можна утворити такі розміщення по 2 елементи:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Вважають, що існує 6 різних розміщень з 3 елементів по 2. Число розміщень з m елементів по n позначають A_m^n. Тому можна записати: $A_3^2 = 6$. У виразі A_m^n завжди $n \leqslant m$.

Як обчислити A_m^n при різних натуральних значеннях m і n? Нехай маємо множину з m елементів. Перший елемент можна вибрати m способами: взяти будь-який з m елементів. Другий елемент, щоб записати за першим, доведеться вибирати з решти $m - 1$ елементів, тобто $m - 1$ способами. Тому впорядковані пари двох перших елементів потрібної вибірки можна вибрати $m(m - 1)$ способами. Третій елемент, щоб записати його після другого, доведеться вибирати з решти $m - 2$ елементів. Якщо за кожною з $m(m - 1)$ різних пар даних елементів записати $m - 2$ способами третій елемент, то утвориться $m(m - 1)(m - 2)$ різних упорядкованих трійок елементів. Аналогічно можна вибрати $m(m - 1)(m - 2) \times$ $\times (m - 3)$ упорядкованих четвірок і т. д. Продовжуючи такі міркування, доходимо висновку, що для будь-яких натуральних чисел m і n $A_m^n = m(m - 1)(m - 2)(m - 3)...(m - (n - 1))$.

У правій частині рівності – n множників, тому результат можна сформулювати у вигляді такого правила.

Кількість розміщень з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних натуральних чисел, найбільше з яких m. Наприклад, $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Задача 1. Скількома способами збори з 20 осіб можуть обрати голову та секретаря?

• Розв'язання. Йдеться про впорядковані 2-елементні підмножини множини, що складається з 20 елементів. Таким розміщенням буде $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$.

Відповідь. 380 способами.

Якщо розглянути розміщення за умови, що $n = m$, то отримаємо множини, які відрізняються лише порядком.

Розміщення з m елементів по m називаються перестановками. Кількість перестановок з n елементів позначають символом P_n. Наприклад, з трьох елементів a, b, c можна утворити 6 різних перестановок:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Отже, $P_3 = 6$. А взагалі кількість перестановок з m елементів дорівнює кількості розміщень з m елементів по m, тобто завжди

$$P_m = m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Завжди $P_m = m!$. Наприклад,

$$P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720.$$

Задача 2. Скількома способами можна скласти список із 10 прізвищ?

Розв'язання. $P_{10} = 10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 3\,628\,800$.

Відповідь. 3 628 800 способами.

Вибірки, які відрізняються одна від одної принаймні одним елементом, а не порядком їх розміщення, називають *комбінаціями*. Кількість комбінацій з m елементів по n позначають C_m^n. Тут також $n \leqslant m$. Наприклад, із чотирьох елементів a, b, c, d по три можна скласти 4 комбінації:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Якщо з кожної комбінації з m елементів по n зробити P_n перестановок, то дістанемо A_m^n розміщень. Тому $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, звідки

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}.$$

Якщо помножимо чисельник і знаменник здобутого дробу на $(m-n)!$, то дістанемо формулу для обчислення кількості комбінацій з m елементів по n:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Наприклад, $C_6^4 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2} = 15.$

Зверніть увагу: $C_m^m = 1$, $C_m^1 = m$. Вважають також, що $C_m^0 = 1$ для будь-якого $m \in N$.

Задача 3. Скількома способами з 25 учнів можна вибрати на збори 2 делегати?

Розв'язання. Тут $m = 25$, $n = 2$ і порядок не має значення. Тому

$$C_{25}^{2} = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300.$$

Відповідь. 300 способами.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке комбінаторика?
2. Що таке перестановки? Як обчислюють P_n?
3. Сформулюйте означення факторіала.
4. Що таке розміщення? За якою формулою обчислюють кількість розміщень з m елементів по n?
5. Що таке комбінації? За якою формулою обчислюють кількість комбінацій з m елементів по n?

Виконаємо разом

1. Скількома способами можна скласти денний розклад із 5 різних уроків, якщо клас вивчає 10 різних предметів?

Розв'язання. Йдеться про впорядковані 5-елементні підмножини множини, що складається з 10 елементів. Це розміщення $A_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\ 240$.

Відповідь. 30 240 способами.

2. Скількома способами можна розмістити на полиці 5 дисків?

Розв'язання. Йдеться про впорядковані 5-елементні множини. Шукана кількість способів дорівнює

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Відповідь. 120 способами.

3. Обчисліть: а) C_7^3; б) C_{20}^{18}.

Розв'язання.

а) $C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$; б) $C_{20}^{18} = \dfrac{20!}{2! \cdot 18!} = \dfrac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2! \cdot 18!} = 190.$

4. На колі розміщено 9 точок. Скільки існує відрізків, які з'єднують кожну точку з іншою?

Розв'язання. Таких відрізків існує стільки, скільки різних комбінацій з 9 точок можна утворити по 2, бо відрізок з'єднує дві точки, а саме: $C_9^2 = \dfrac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$.

Виконайте усно

631. Складіть усі можливі перестановки з букв α, β, γ.

632. Обчисліть P_2, P_3, P_4.

633. Обчисліть C_5^1, C_5^5, C_5^0.

634. Скількома способами 4 учні можуть розміститися за двома двомісними партами?

635. Скількома способами з трьох різних цукерок можна вибрати дві?

А

636. Запишіть усі комбінації з елементів x, y, z, t по 2.

637. Запишіть усі розміщення з елементів x, y, z, t по 2.

638. Складіть усі можливі перестановки з елементів A, B, C.

639. Обчисліть: а) $5!$; б) $6!$; в) P_4; г) P_7.

640. Обчисліть P_n, якщо n дорівнює 6, 7, 8, 9.

641. Скількома способами 6 учнів можуть розміститися за трьома двомісними партами?

642. На тарілці є 7 груш. 5 дітей мають взяти з тарілки по одній груші. Скількома способами це можна зробити?

643. Скільки різних трицифрових чисел можна написати цифрами 6, 7 і 8 так, щоб усі цифри кожного числа були різні?

644. Скільки різних чотирицифрових чисел можна написати цифрами 0, 1, 2, 3 так, щоб усі цифри кожного числа були різні?

645. Випишіть усі розміщення з букв A, B, C, D по 2.

646. Скількома способами можна розсадити 5 учнів на 10 місцях?

647. Обчисліть: а) A_5^3; б) A_8^4; в) A_9^8; г) A_{50}^2.

648. Обчисліть: а) A_6^3; б) A_{10}^4; в) C_5^3; г) C_{10}^8.

649. Що більше: C_7^4 чи C_7^3?

650. Обчисліть: а) C_9^3; б) C_{10}^7; в) $C_{12}^{10} : P_3$; г) $A_{10}^2 - C_{10}^2$.

651. На полиці є 20 книжок. Скількома способами можна вибрати дві з них?

652. У класі 32 учні. Скількома способами можна вибрати з них двох чергових?

653. Скільки різних правильних дробів можна написати так, щоб одне з чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 було чисельником, а друге – знаменником?

654. Скільки існує відрізків, кінцями яких є n даних точок?

655. Скільки діагоналей має опуклий 10-кутник; n-кутник?

Б

656. На кожній із п'яти карток написано одну з цифр 1, 2, 3, 4, 5. Скільки з цих карток можна скласти різних чисел: а) двоцифрових; б) трицифрових; в) чотирицифрових?

657. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких різні? А чотирицифрових?

658. Скільки існує таких трицифрових чисел, у яких кожна цифра не менша за 5 і цифри в кожному числі не повторюються?

659. Скільки словників треба мати, щоб безпосередньо перекладати з п'яти різних мов на кожну з них?

660. Скількома способами можна пошити трикольоровий прапор з трьох горизонтальних смуг однакової ширини, якщо є тканини 5 різних кольорів?

661. Доведіть, що для кожного натурального n:

а) $P_{n+1} = nP_n$; б) $A_m^{m-1} = P_m$; в) $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$.

662. Знайдіть n, якщо: а) $P_n = 42 \cdot P_{n-2}$; б) $P_n = 720 \cdot P_{n-3}$.

663. Яке число менше і в скільки разів:

а) A_8^5 чи P_8; б) A_9^8 чи P_9; в) C_{20}^2 чи C_{20}^3; г) C_{30}^2 чи C_{30}^{28}?

664. Розв'яжіть рівняння:

а) $A_x^4 = 56 \cdot A_x^2$; б) $A_x^5 = 72 \cdot A_{x-2}^3$; в) $C_x^2 = 21$; г) $C_x^2 = 20 + x$.

665. Доведіть, що коли числа m, n натуральні та $m > n$, то:

а) $C_m^n = C_m^{m-n}$; б) $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$.

666*. Скількома способами можна роздати 28 пластинок доміно чотирьом гравцям, щоб кожному дісталося 7 пластинок?

667. Скількома способами можна заповнити картку «Спортлото» – закреслити 6 номерів із 49?

Вправи для повторення

668. Знайдіть первісну функції:
а) $y = 2x^2 - 5$; б) $y = 2^x$; в) $y = 2\sin x$; г) $y = \cos 3x$.

669. Розв'яжіть рівняння:
а) $5^{2x+3} = 5$; б) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.

670. Запишіть у вигляді логарифма вираз:
а) $1 + 2\ln x$; б) $3\lg x - \lg 2x$; в) $2 + \log_2 2x$.

§ 20. Елементи статистики

Статистика – це наука про збирання, обробку та вивчення різноманітних даних, пов'язаних з масовими явищами, процесами й подіями. Найчастіше вона використовується в економіці, політиці та експериментальних дослідженнях. Статистичну інформацію збирають за допомогою спостережень, зокрема перепису, опитувань, обліків тощо.

Статистичні відомості про велику сукупність об'єктів (генеральну сукупність) отримують внаслідок аналізу її незначної частини – *вибірки*. Щоб дізнатися, наприклад, про найпоширеніші розміри чоловічого взуття, досить опитати кілька десятків чоловіків. Припустимо, що, опитавши 60 чоловіків, здобули результати, подані в таблиці.

Розмір взуття	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Кількість чоловіків	1	2	3	7	10	9	8	8	6	4	1	1

Це – *частотна таблиця*, в якій числа другого рядка – *частоти*. Наприклад, частота взуття розміру 32 дорівнює 6. Відносна частота цього розміру – $6 : 60 = 0{,}1 = 10\ \%$.

Проаналізувавши таку вибірку, роблять загальний висновок: приблизно 10 % чоловічого взуття треба виготовляти 32-го розміру і вдвічі менше – 26-го розміру. Це – наближені відношення, але на практиці таких наближень достатньо.

Математичний аналіз різних вибірок – сфера *математичної статистики*. Її основне завдання – розробляти ефективні методи вивчення великих сукупностей об'єктів на основі порівняно невеликих вибірок. Кожен елемент вибірки називають її *варіантою*. Вибірка, отримана внаслідок спостережень, буває невпорядкованою. Упорядкувавши її, дістають *варіаційний ряд*. Різниця між крайніми членами варіаційного ряду – *розмах вибірки*. Нехай дано вибірку

4, 3, 7, 9, 6, 8, 2, 6, 1, 7, 7, 3, 2, 5.

Упорядкувавши її за зростанням варіант, маємо варіаційний ряд:

$$1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9.$$

Розмах даної вибірки $r = 9 - 1 = 8$.

Мода вибірки – її варіанта з найбільшою частотою. *Медіана вибірки* – число, яке поділяє відповідний варіаційний ряд навпіл. Розглядувана вибірка має моду 7, а медіану 5,5, бо $\frac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5$.

Середнім арифметичним n чисел називають n-ну частину їх суми. Якщо дано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то їх середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне усіх її варіант. Наприклад, для вибірки 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8 середнє

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 6 + 8) = 4.$$

Якщо варіанти вибірки повторюються, то суми рівних доданків можна замінити добутками.

Задача. 7 робітників бригади щомісяця одержують по 2300 грн., 8 – по 2450 грн., а 5 – по 2500 грн. Визначте середню місячну зарплату робітника цієї бригади.

● **Розв'язання.** Всього робітників у бригаді $7 + 8 + 5 = 20$. Тому шукана середня зарплата

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(2300 \cdot 7 + 2450 \cdot 8 + 2500 \cdot 5) = 2410.$$

Відповідь. 2410 грн.

У статистиці часто використовують також *середнє квадратичне*. Якщо дано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то їх середнє квадратичне σ_1 визначається за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

За допомогою середнього квадратичного найчастіше оцінюють сукупності похибок або відхилень від норми.

Приклад. Виточуючи циліндричну деталь радіуса R, токар практично виточує деталь радіуса $R + \alpha$, де α – деяке відхилення (додатне або від'ємне). Нехай два токарі, виточивши по 6 деталей, допустили такі похибки (у десятих частках міліметра):

перший: 2, –5, 4, –3, –3, 5;
другий: 3, –1, 4, 1, 1, 2.

Хто з них виконав завдання якісніше?

Щоб відповісти на це запитання, обчислюють середні квадратичні допущених відхилень:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{6}(4+25+16+9+9+25)} \approx 14{,}7;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(9+1+16+1+1+4)} \approx 5{,}3.$$

Отже, якісніше роботу виконав другий токар.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке статистика? А математична статистика?
2. Поясніть, що таке вибірка. Наведіть приклад.
3. Що таке варіанта вибірки? А варіаційний ряд?
4. Що таке розмах; мода; медіана; середнє значення вибірки?
5. Що таке середнє арифметичне; середнє геометричне; середнє квадратичне кількох чисел?

Виконаємо разом

1. Внаслідок вибіркового аналізу виручки (у тис. грн.) туристичної фірми за тиждень дістали вибірку обсягом $n = 40$:

87	94	99	90	90	87	85	87
90	94	87	87	82	90	94	90
85	85	87	94	81	82	87	97
90	94	85	91	87	85	90	82
94	90	94	82	97	81	85	87

За цими даними: а) знайдіть розмах вибірки; б) складіть частотну таблицю.

• **Розв'язання.** а) Випишемо різні значення варіант, які потрапили у вибірку: 87; 94; 99; 90; 85; 82; 81; 97.

Щоб знайти розмах вибірки, розмістимо варіанти в порядку зростання: 81; 82; 85; 87; 90; 94; 97; 99.

Тоді $r = 99 - 81 = 18$.

б) Обчислимо частоту кожної варіанти і складемо частотну таблицю:

x_i	81	82	85	87	90	94	97	99
n_i	3	4	6	9	8	7	2	1

2. За результатами аналізу виробництва м'яса (у тис. т) у січні–жовтні 2010 року в усіх областях України отримали таку сукупність даних:

166; 73; 90; 206; 115; 52; 50; 63; 73; 211; 47; 47; 129; 34; 50; 52; 55; 44; 41; 90; 55; 50; 363; 47; 47.

Знайдіть: моду, медіану та розмах вибірки.

• **Розв'язання.** Розмістимо варіанти вибірки в порядку зростання:

34; 41; 44; 47; 47; 47; 47; 50; 50; 50; 52; 52; 55; 55; 63; 73; 73; 90; 90; 115; 129; 166; 206; 211; 363.

Тоді мода вибірки дорівнює 47 (трапляється 4 рази), медіана – 55 (має 13-й порядковий номер з 25), а розмах – 329 (363–34).

Виконайте усно

671. Знайдіть моду та медіану вибірки з 20 варіант:

а) –1; –1; 0; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 8;

б) 3; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 11; 11; 11.

672. Знайдіть середнє значення вибірки:

а) –10; –9; –8; –7; 0; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

б) 0; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 1; 0.

673. У таблиці подано середні значення вологості (в %) у місті Києві. Знайдіть розмах даної вибірки.

Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень
82	80	76	67	63	69
Липень	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень
72	70	75	78	84	86

А

674. Знайдіть моду та медіану вибірки: 28, 29, 29, 30, 31, 32, 32, 32, 32, 33.

675. Дано вибірку 3, 1, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 1. Побудуйте відповідний їй варіаційний ряд, знайдіть розмах, моду та медіану вибірки.

676. Користуючись наведеною на с. 149 частотною таблицею, визначте:

а) частоту й відносну частоту варіанти, яка відповідає розміру 26;

б) у скільки разів взуття розміру 26 слід виробляти менше, ніж розміру 29.

677. Вибірка містить усі натуральні числа, менші за 10, а крім того, числа 6, 8, 8 і 13. Побудуйте її варіаційний ряд. Знайдіть розмах вибірки, її моду та медіану.

678. Варіанти 1, 2, 3, 4, 5 вибірки мають частоти 3, 4, 6, 2 і 3 відповідно, а всього вибірка має 18 варіант. Знайдіть її розмах, моду та медіану.

679. За екзаменаційну роботу з математики отримали 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 і 12 балів відповідно 2, 9, 8, 10, 20, 17, 4, 6 і 4 абітурієнти. Складіть частотну таблицю й обчисліть відносні частоти балів, які траплялися найрідше і найчастіше.

680. Під час медичного обстеження кров'яного тиску в курсантів (в умовах навчального навантаження) одержано такі результати:

x_i	112	114	116	118	120	122	124	126	128	130
n_i	5	20	30	40	40	30	20	10	3	2

Знайдіть центральні тенденції вибірки.

Б

681. Знайдіть середнє арифметичне: а) усіх натуральних чисел, не більших за 100; б) усіх цілих чисел x таких, що $-110 \leqslant x \leqslant 110$.

682. Вибірка містить 60 чисел; з них число 3 трапляється 10 разів, 4 – 20 разів і 5 – 30 разів. Знайдіть її середнє значення, моду та медіану.

683. Вибірка містить усі натуральні числа, більші за 20, але менші за 50, а крім того, числа 13, 31, 31 і 32. Знайдіть її моду, медіану й середнє значення.

684. Протягом 5 днів маси десяти бичків збільшилися відповідно на 2,5; 3,0; 2,8; 2,7; 2,7; 2,8; 2,0; 2,4; 2,6 і 2,9 кілограма. Знайдіть середній денний приріст маси одного бичка.

685. Під час випробувань літака «Антей» були зафіксовані, залежно від напряму та швидкості вітру, такі результати швидкості (км/год) відриву літака:

235	231	234	239	238	232	237	239	230	240
231	238	239	235	233	233	240	234	239	240
230	230	232	240	230	234	240	235	239	236

Побудуйте варіаційний ряд і частотну таблицю цієї вибірки.

686. Виберіть по уривку (1 сторінка) художнього твору двох різних авторів, прочитайте їх. Для букв «а», «б», «н», «о», «ч», «я» складіть частотні таблиці їх наявності в обраних уривках. Порівняйте їх.

687. Чи правильно, що сума різниць між усіма варіантами вибірки та її середнім значенням дорівнює нулю? Наведіть приклади. Обґрунтуйте.

688. Знайдіть середній відсоток бракованих виробів, користуючись такою таблицею.

Партія товару	Кількість виробів, шт.	Відсоток бракованих виробів	Кількість бракованих виробів, шт.
I	2000	3,4	68
II	1420	2,46	35
III	408	0,49	2
Разом	3828		105

689. Суму n чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ позначають символом $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (знак суми Σ – сигма велика). Запишіть за допомогою цього знака середнє арифметичне та середнє квадратичне даних n чисел.

690. Три фрезерувальники виготовили по 5 однакових деталей завдовжки 235 мм, допустивши відповідно такі похибки (у мм):
перший: 0,2, –0,2, –0,5, 0,3, 0,4;
другий: 0,1, 0,5, –0,2, –0,4, 0,5;
третій: 0,5, –0,1, –0,4, 0,3, 0,4.
Знайдіть середні квадратичні допущених ними похибок. Який фрезерувальник виконав завдання найкраще?

Вправи для повторення

691. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = 2x^3 + 1$ у точці $x_0 = 1$.

692. Ціна на автомобіль спочатку підвищилася на 10 %, а потім знизилася на 10 %. Як змінилася ціна після двох переоцінок?

693. Побудуйте графік функції:
а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 + 2$; в) $y = -x + 2$; г) $y = -x^2 + 2$.

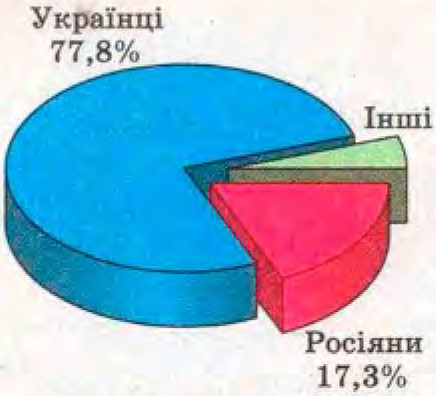
§ 21. Графічні подання інформації про вибірки

Статистичні дані зводять у таблиці. Статистична таблиця – це особлива форма раціонального й систематизованого викладу узагальнених характеристик статистичної сукупності. Як і граматичне речення, статистична таблиця має *підмет* і *присудок*. У підметі наводиться перелік елементів, явищ, ознак, про які йдеться в таблиці. У присудку подаються кількісні характеристики. Наприклад, у наведеній нижче таблиці збору зерна в деяких країнах у 1995 р. підметом є лівий стовпчик, а присудком – числові дані інших стовпчиків.

Країна	Пшениця	Жито	Ячмінь	Усього
Китай	101	0,6	–	400
США	67	0,3	9,9	353
Росія	46	13,9	25,5	103
Франція	33	–	10,5	60
Німеччина	16	2,4	12,2	35
Україна	19	1,2	10,1	34

Інформацію про ту чи іншу вибірку часто подають графічно, найчастіше – у формі діаграм. Слово «діаграма» з грецької мови означає малюнок, креслення. Щоправда, тепер цим словом називають не будь-який малюнок, а схематичне зображення відношень між множинами, різні структури, алгоритми дій тощо. Відношення (співвідношення) між множинами та обсягами понять найчастіше зображають у вигляді діаграм-дерев або діаграм Ейлера (див. мал. 83–85, 87).

Структури моделей, різні діаграми класів і станів зручно подавати у вигляді кругових (секторних) діаграм. На малюнках 90 та 91 на секторній і стовпчастій діаграмах зображено співвідношення між кількостями громадян України різних національностей (згідно з переписом 2001 р.).

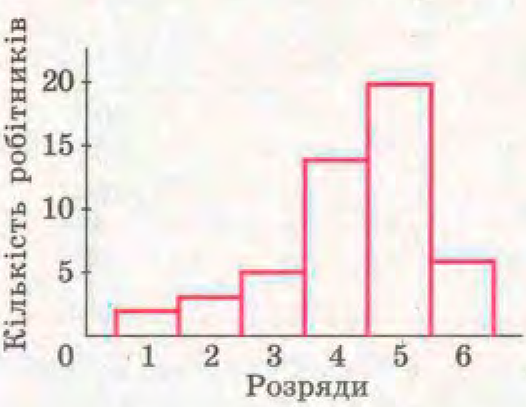


Мал. 90

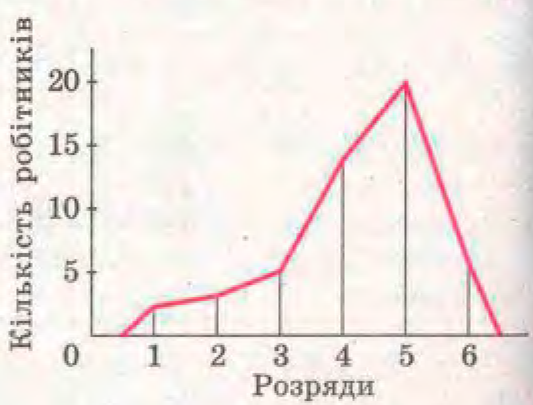
Мал. 91

Стовпчасту діаграму зі з'єднаних прямокутників називають *гістограмою*. На малюнку 92 зображено гістограму, яка відповідає наведеній нижче таблиці розподілу робітників цеху за тарифними розрядами. Іноді замість гістограми будують *полігон розподілу*, з'єднуючи відрізками середини верхніх основ послідовних прямокутників гістограми (мал. 93). Бувають також інші діаграми.

Тарифний розряд	1	2	3	4	5	6	Всього
Кількість робітників	2	3	5	14	20	6	50

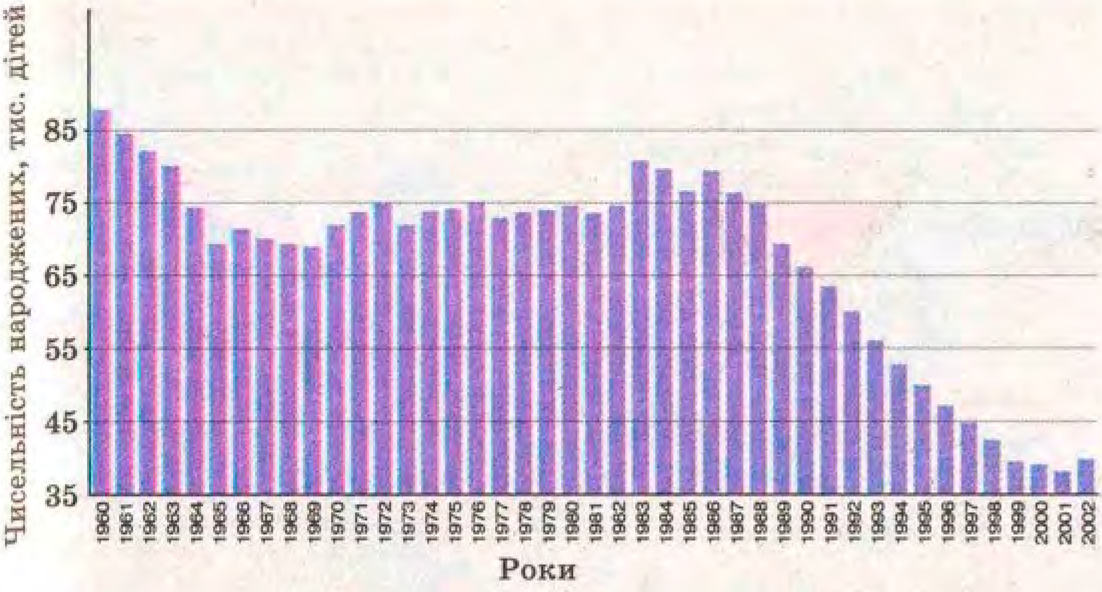


Мал. 92

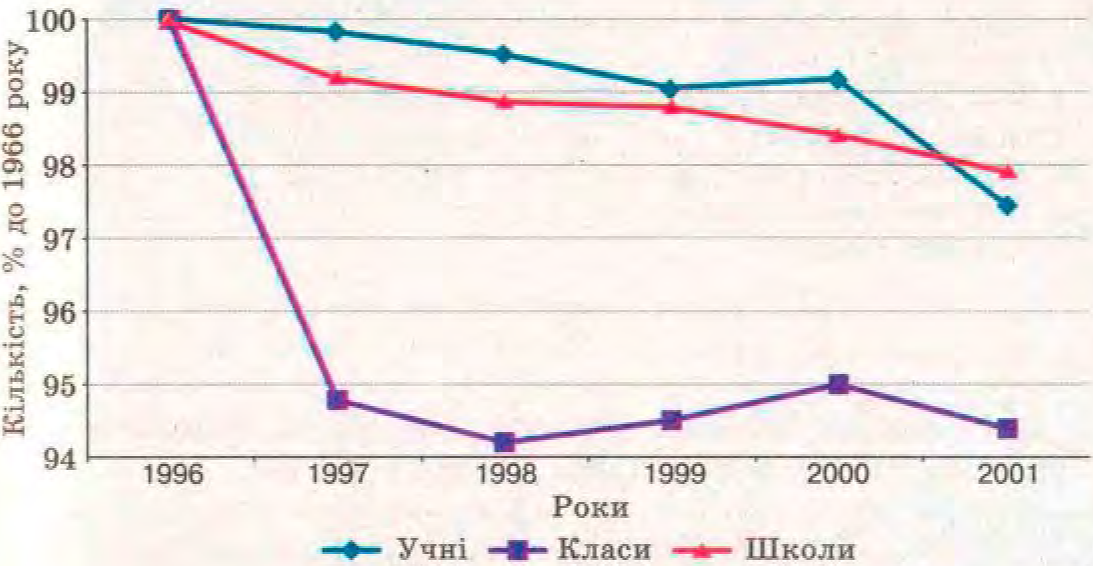


Мал. 93

Інформацію про динаміку того чи іншого явища зручно зображати за допомогою стовпчастих діаграм або графіків. Наприклад, на малюнку 94 наведено діаграму динаміки народжуваності дітей в Україні від 1960 до 2002 року, а на малюнку 95 – графік динаміки кількості учнів, класів і шкіл у селах України.



Мал. 94



Мал. 95

У соціології діаграми часто будують на основі полярної системи координат.

Накресліть на площині промінь OX. Положення довільної точки M цієї площини можна однозначно визначити, задавши два числа: відстань $r = OM$ і кут $\varphi = \angle XOM$. Таку систему координат називають *полярною*, а точку O – її *полюсом*.

На двох наведених нижче діаграмах (мал. 96 і 97) більшим відстаням від полюса 0 відповідають більші значення величин. Проаналізуйте ці діаграми.

Середня заробітна плата, грн., за 2006 р. в адміністративних одиницях України

Мал. 96

Рівні безробіття населення віком від 15 років за 2006 р. у деяких країнах світу

Мал. 97

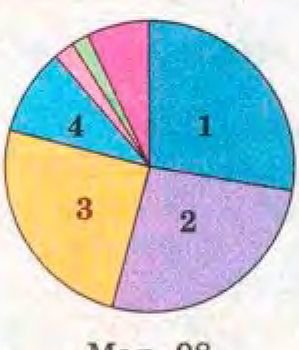
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які способи подання інформації ви знаєте?
2. Опишіть структуру статистичної таблиці.
3. Які види діаграм ви знаєте?
4. Що таке гістограма?
5. Що таке полігон?

Виконаємо разом

1. За даними таблиці «Структура валового збору зернових культур у світі (%)» побудуйте секторну діаграму.

Пшениця	Рис	Кукурудза	Ячмінь	Овес	Жито	Інші
28	26	25	10	2	2	7



Мал. 98

Розв'язання. 100 % відповідає 360°, а 1 % – 3,6°. Множачи 3,6 на дані таблиці, отримаємо відповідно:

100,8°; 93,6°; 90°; 36°; 7,2°; 7,2°; 25,2°.

Відклавши від центра круга відповідні центральні кути, дістанемо потрібну діаграму (мал. 98).

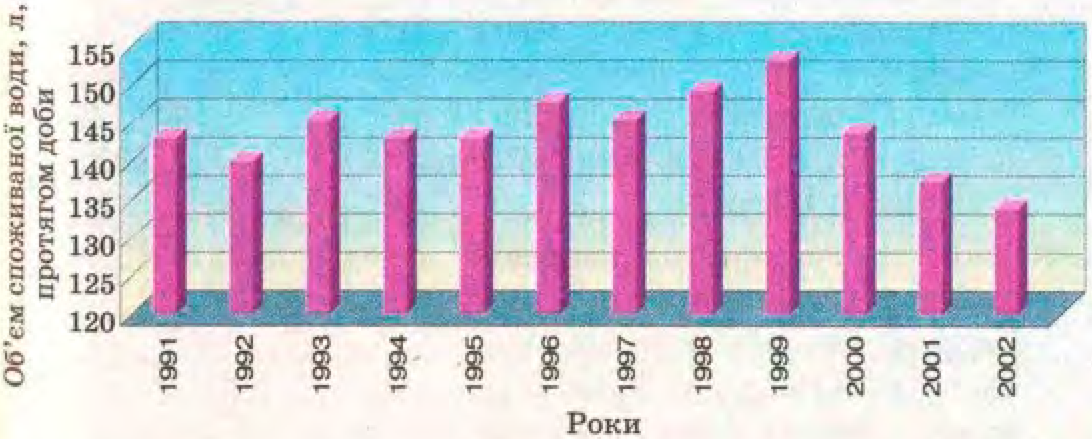
Досить просто стовпчасту та інші діаграми побудувати за допомогою програми Microsoft Graf (через команди Вставка/Об'єкт/Діаграма Microsoft Graf) або Excel.

Виконайте усно

694. Як називається вид діаграм, зображених на малюнку 99? Проаналізуйте подані на цих діаграмах дані, які відображають експорт та імпорт швейної продукції в Україні (у грошовому вираженні) за 2007 р. Який висновок можна зробити?

Мал. 99

695. Як називається вид діаграми, зображеної на малюнку 100, де показано динаміку споживання води на душу населення в Чернігівській області? Чому, на вашу думку, зменшується споживання питної води?



Мал. 100

696. Проаналізуйте таблицю, в якій подано результати переможців на літніх Параолімпійських іграх 2008 року. Дайте відповіді на запитання:

а) скільки медалей здобули спортсмени України;

б) спортсмени яких країн здобули однакову кількість срібних (бронзових) медалей;

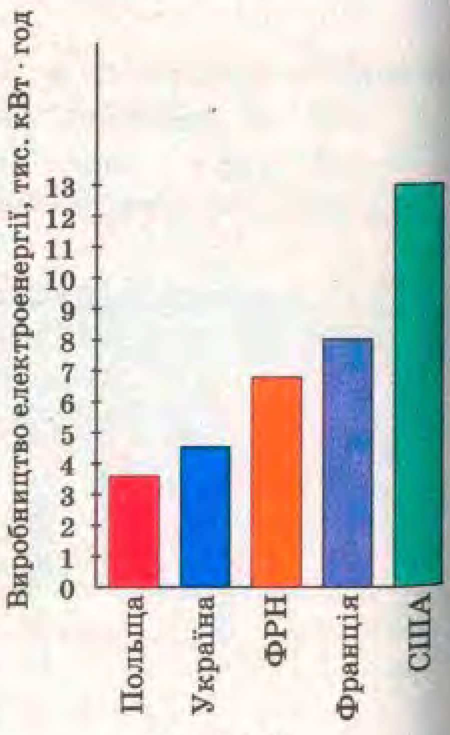
в) спортсмени яких країн здобули найменшу кількість срібних (бронзових) медалей?

Місце	Країна	Золото	Срібло	Бронза	Усього
1	КНР	89	70	52	211
2	Велика Британія	42	29	31	102
3	США	36	35	28	99
4	Україна	24	18	32	74
5	Австралія	23	29	27	79
6	ПАР	21	3	6	30
7	Канада	19	10	21	50
8	Росія	18	23	22	63
9	Бразилія	16	14	17	47
10	Іспанія	15	21	22	58

А

697. Прочитайте діаграму виробництва в 1992 році електроенергії на одну особу (в кВт · год) у деяких країнах світу (мал. 101). Складіть відповідну таблицю. З'ясуйте стан виробництва електроенергії в цих самих країнах у 1995, 2000, 2005 роках. Помістіть їх у таблицю і на основі цих даних побудуйте стовпчасту діаграму.

698. Укажіть підмет і присудок таблиці щодо зайнятих українською командою місць протягом кількох років на міжнародних математичних олімпіадах школярів.



Мал. 101

Рік	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Місце	21	17	23	18	6	8	12	13	8

699. В Україні дотримуються приблизно такої структури посівних площ: озима пшениця – 23 %; інші зернові культури – 22 %; кормові культури – 37 %; технічні культури – 12 %; картопля і овочі – 6 %. Побудуйте відповідну секторну діаграму.

700. Побудуйте стовпчасту діаграму за таблицею про кількість мешканців найбільших міст України (2001 р., грудень).

Місто	Київ	Харків	Дніпропетровськ	Донецьк	Одеса	Запоріжжя	Львів
Чисельність, тис. осіб	2611	1470	1065	1016	1029	815	733

Побудуйте аналогічну таблицю для найбільших міст вашої області.

701. Нижче в таблиці наведено результати виступів кращих команд на 42-й Міжнародній математичній олімпіаді (2001 р., США; усього – 83 країни). Укажіть підмет і присудок цієї таблиці. Проаналізуйте її. Установіть середнє значення балів для: а) перших 10 країн, наведених у таблиці; б) останніх 10 країн. Порівняйте їх із середнім значенням балів для всіх 15 країн.

Місце	Країна	Бали	Медалі		
			золоті	срібні	бронзові
1	Китай	225	6	–	–
2–3	Росія	196	5	1	–
2–3	США	196	4	2	–
4–5	Болгарія	185	3	3	–
4–5	Південна Корея	185	3	3	–
6	Казахстан	168	4	1	–
7	Індія	148	2	2	2
8	Україна	143	1	5	–
9	Тайвань	141	1	5	–
10	В'єтнам	139	1	4	–
11	Туреччина	136	1	3	2
12	Білорусь	135	2	2	2
13	Японія	134	1	3	2
14	ФРН	131	1	3	1
15	Румунія	129	1	2	2

702. У наступній таблиці наведено результати виступів кращих команд на 50-й Міжнародній математичній олімпіаді (2009 р., Німеччина; понад 100 країн світу). Проаналізуйте дані цієї таблиці. Порівняйте її з таблицею до задачі № 701. Для кожної олімпіадної задачі встановіть середнє значення результатів. За отриманими даними побудуйте графік.

Країна	Медалі			Результати за задачами						Σ	Місце
	З	С	Б	1	2	3	4	5	6		
Китай	6	–	–	42	42	42	42	42	11	221	1
Японія	5	–	1	42	42	34	33	42	19	212	2
Росія	5	1	–	42	39	31	42	42	7	203	3
Південна Корея	3	3	–	42	42	22	40	42	0	188	4
КНДР	3	2	1	42	35	24	39	36	7	183	5
США	2	4	–	42	42	20	33	42	3	182	6
Таїланд	1	5	–	42	42	17	40	40	0	181	7
Туреччина	2	4	–	42	42	23	32	38	0	177	8
Німеччина	1	4	1	42	33	11	38	37	10	171	9
Білорусь	1	4	1	37	34	15	39	42	0	167	10
Італія	2	2	2	42	38	18	29	38	0	165	11–12
Тайвань	1	5	–	42	38	4	35	42	4	165	11–12
Румунія	2	2	2	39	42	15	28	36	3	163	13
Україна	3	1	2	36	42	14	33	31	6	162	14
В'єтнам	2	2	2	36	38	16	37	30	4	161	15–16
Іран	1	4	1	42	42	10	30	34	3	161	15–16

703. Юнаки-старшокласники однієї школи за зростом розподілені так:

Зріст, см	150	155	160	165	170	175	180
Кількість юнаків	1	4	5	15	25	8	2

Побудуйте відповідну гістограму та полігон.

704. На малюнку 102 зображено кліматограму для Києва (*а*) та Ялти (*б*), на якій для кожного місяця (позначений початковою буквою його назви) подано інформацію про суму опадів (у мм, блакитний колір) і середню температуру (в °С, червоний колір). Охарактеризуйте ці діаграми. Укажіть якнайбільше спільних і відмінних ознак. Порівняйте їх за місяцями. Складіть кліматограму для вашого міста.

Мал. 102

Б

705. На основі відомостей, поданих у таблиці до задачі № 696, побудуйте кілька стовпчастих діаграм і дайте назву кожній з них.

706. Проаналізуйте діаграми, подані на малюнку 99.

а) Які країни є найбільшими імпортерами (експортерами) швейної продукції для України?

б) Для яких країн Україна одночасно є імпортером і експортером швейної продукції?

в) Побудуйте в одній системі координат полігон розподілу імпорту й експорту швейної продукції в Україні – для країн, визначених у п. б).

707. Проаналізуйте діаграму, подану на малюнку 96. Побудуйте частотну таблицю за цими даними. Знайдіть моду, медіану та розмах вибірки. Дайте відповіді на запитання:

а) у якій області була в цей час найменша заробітна плата;

б) скільки областей мали середню заробітну плату на рівні 1000 грн.?

708. Проаналізуйте діаграму, подану на малюнку 97. Побудуйте частотну таблицю за цими даними. Знайдіть моду, медіану та розмах вибірки. Дайте відповіді на запитання:

а) у яких країнах рівень безробіття найнижчий, а в яких – найвищий;

б) чи є країни, в яких рівень безробіття вищий для чоловіків, ніж для жінок?

709. За допомогою програми Microsoft (Graf чи Excel) на основі даних таблиць до задач № 701 і 702 побудуйте графіки, які для кожної країни задають загальну кількість балів переможців.

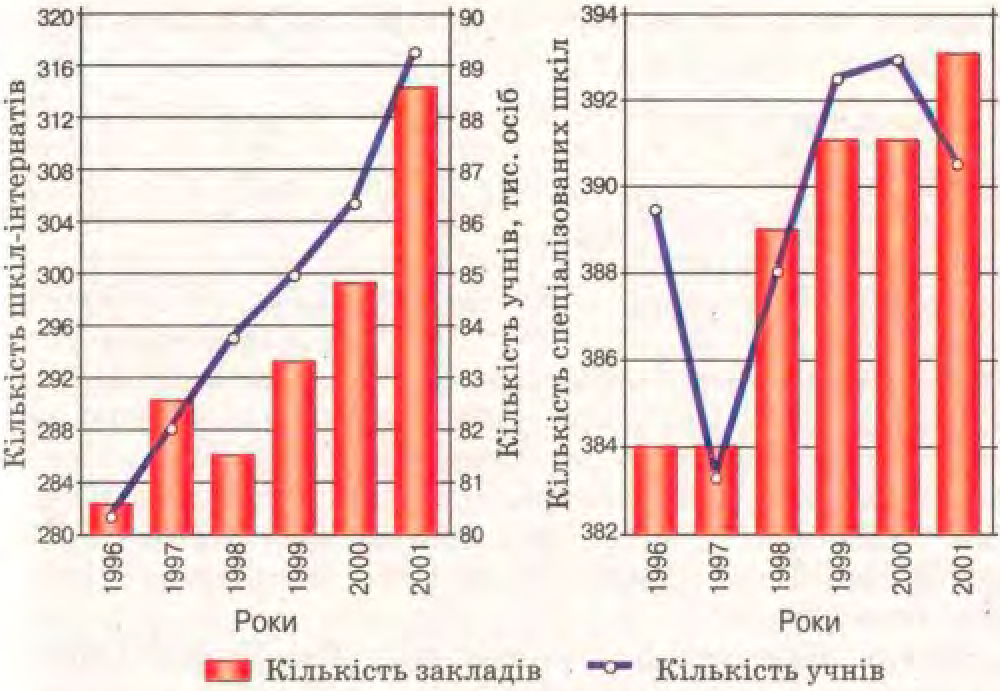
710. За допомогою програми Microsoft (Graf чи Excel) на основі даних таблиць до задач № 701 і 702 побудуйте в одній системі координат діаграми, які для кожної країни задають загальну кількість балів переможців.

711. Головними складниками повітря (недалеко від земної поверхні) є: азот – 78,08 % об'єму; кисень – 20,96 % об'єму; інертні гази – 0,94 % об'єму. Вміст цих газів у повітрі не змінюється, тому їх називають сталими складовими повітря. Побудуйте секторну діаграму складу повітря. Установіть, який відсоток об'єму займають інші гази.

712. У таблиці наведено склад молока деяких ссавців. Для кожного виду ссавців побудуйте секторну діаграму. Який вид графічного подання інформації найкраще покаже відмінності у складі молока? Виконайте таке зображення.

Складники, %	Вміст складників, %, у молоці				
	корови	вівці	кози	кобили	північного оленя
Вода	87,5	82,7	86,6	90,1	66,9
Вуглеводи	4,8	6,3	3,9	5,9	2,8
Жири	3,5–4,2	5,3	3,7	1,5	16,9
Білок	3,5	4,6	4,2	2,1	16,9
Мікроелементи	0,7	0,9	0,8	0,4	1,2

713. На малюнку 103 подано динаміку кількості загальноосвітніх шкіл-інтернатів і спеціальних загальноосвітніх шкіл в Україні та кількості учнів у них. Проаналізуйте ці діаграми та графіки. Як змінювалася від 1996 до 2001 року кількість: а) загальноосвітніх шкіл-інтернатів; б) учнів загальноосвітніх шкіл-інтернатів? На скільки? У скільки разів?



Мал. 103

Вправи для повторення

714. Яке двоцифрове число в 4 рази більше за суму своїх цифр та у 2 рази більше за їх добуток?

715. Обчисліть: а) P_5; б) A_7^5; в) C_6^3.

716. Знайдіть похідну функції:

а) $y = e^{2x}$; б) $y = 2^x$; в) $y = \ln x$; г) $y = \log_5 x$.

§ 22. Випадкові події та їх імовірності

Побудова та дослідження моделей різних процесів, пов'язаних з поняттям випадковості, – сфера математичної статистики й теорії ймовірностей. До таких процесів, наприклад, належать ризики (ризиковані операції) на виробництві та в банківській справі, масові захворювання серед рослин, тварин чи людей, азартні ігри.

Попередні параграфи дали вам певні уявлення про математичну статистику, а тепер дещо розширимо відомості про теорію ймовірностей.

З 9-го класу ви знаєте, що найважливішими поняттями теорії ймовірностей є: *ймовірнісний експеримент* (випробування, спостереження), *подія* (наслідок випробування) та *ймовірність події.* Наведемо приклади випробувань та їх окремих наслідків – деяких подій.

Випробування		Подія
1	Падає монета	Упала догори гербом
2	Грають команди A і C	Виграла команда C
3	Людина чекає ранку	Настав ранок
4	Падає гральний кубик	Випало 0 очок

Остання подія неможлива, бо на гранях грального кубика немає нуля. Подія 3 достовірна (вірогідна), бо після ночі завжди наступає ранок. Події 1 і 2 випадкові.

Взагалі подія називається *неможливою*, якщо вона ніколи не може відбутися, *достовірною* – якщо вона завжди відбувається. Якщо подія може відбутися або не відбутися, її називають *випадковою.*

Прийнято вважати, що неможлива й вірогідна події – окремі випадки випадкової події.

Події позначають великими латинськими буквами A, B, C,… або однією латинською буквою з індексом: A_1, A_2, A_3, …, A_n. Зміст події подають у фігурних дужках. Наприклад, третю подію з таблиці можна записати так:

$$A_3 = \{\text{настав ранок}\}.$$

Сказати наперед про випадкову подію, що вона відбудеться чи не відбудеться, неможливо. Якщо ця подія масова, тобто виконується багато разів і за однакових умов, то ймовірність її наставання можна охарактеризувати деяким числом.

Мал. 104

Це можна зробити тоді, коли наслідки випробувань становлять скінченну множину і є рівноможливими. Тобто в умовах проведеного випробування немає підстав вважати появу одного з наслідків більш чи менш можливим за інші.

Приклад. Кидають один раз правильний однорідний гральний кубик (мал. 104) і фіксують суму очок на грані, що випала догори. Результатом такого випробування можуть бути 6 різних подій:

$E_1 = \{\text{випаде одне очко}\}$;
$E_2 = \{\text{випаде два очки}\}$;
$E_3 = \{\text{випаде три очки}\}$;
$E_4 = \{\text{випаде чотири очки}\}$;
$E_5 = \{\text{випаде п'ять очок}\}$;
$E_6 = \{\text{випаде шість очок}\}$.

Ці шість подій охоплюють і вичерпують усі можливі наслідки експерименту. Вони *попарно несумісні*, бо щоразу випадає тільки одна кількість очок. Усі шість подій *однаково можливі*, бо йдеться про однорідний кубик правильної форми, і спритність гравця виключається. У такому разі вважають, що для здійснення кожної події існує один шанс із шести.

Кожну з подій $E_1 - E_6$ для наведеного вище випробування називають елементарною, а всю їх множину – простором елементарних подій.

Елементарною подією називають кожен можливий наслідок імовірнісного експерименту. Множину всіх можливих наслідків експерименту називають *простором елементарних подій* і позначають грецькою буквою Ω (омега).

Якщо простір елементарних подій для деякого випробування складається з n рівноможливих несумісних подій, то ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{n}$.

Наприклад, імовірність того, що на підкинутому гральному кубику випаде 5 очок, дорівнює $\frac{1}{6}$. А ймовірність того, що підкинута монета впаде догори гербом, дорівнює $\frac{1}{2}$. Ймовірність події A позначають $P(A)$. Якщо першу подію позначити буквою A, а другу – B, то $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$.

Існують події неелементарні.

Приклад. Розглянемо подію C = {поява пластинки доміно з 10 очками}.

Оскільки пластинок доміно всього 28, то випробування, пов'язане з вибором однієї пластинки, вичерпується 28 рівноможливими й незалежними наслідками. Отже, простір елементарних подій для даного випробування з 28 елементарних подій становить E_i, де $i = 1, 2, \ldots, 28$. Подія C може відбутися, якщо відбудеться одна з двох елементарних подій (мал. 105):

1) E_1 = {поява пластинки $\frac{4}{6}$};

2) E_2 = {поява пластинки $\frac{5}{5}$}.

Мал. 105

Оскільки події C сприяють дві елементарні події (E_1, E_2) з можливих 28, то $P(C) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай випробування має скінченну кількість (n) рівноможливих та несумісних наслідків і A – деяка випадкова подія, пов'язана з даним випробуванням.

Назвемо елементарну подію E_n *сприятливою для випадкової події A*, якщо настання події E_n внаслідок випробування приводить до настання події A.

Якщо кількість наслідків (елементарних подій), сприятливих події A, позначити через $n(A)$, то ймовірність випадкової події A визначиться формулою

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Ймовірністю випадкової події A називають відношення кількості елементарних подій $n(A)$, сприятливих для події A, до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних елементарних подій, які утворюють простір елементарних подій для певного випробування.

Таке означення ймовірності називають **класичним**.

Назвемо важливі властивості ймовірності випадкової події:

1) якщо C – подія неможлива, то $P(C) = 0$;

2) якщо B – подія достовірна, то $P(B) = 1$;

3) якщо X – подія випадкова, то $0 \leqslant P(X) \leqslant 1$;

4) якщо $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ – елементарні події, що вичерпують деяке випробування, то

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1.$$

Задача 1. Під час тестування пральної машини з'ясувалося, що одна з п'яти деталей a, b, c, d, e має дефект. Є можливість за один раз перевірити три деталі, які механік довільно обирає з визначених. Чому дорівнює ймовірність того, що:

а) буде перевірена деталь a (подія M);

б) будуть перевірені деталі a і b (подія N);

в) буде перевірена хоча б одна з деталей a і b (подія K)?

Розв'язання. Побудуємо простір елементарних подій для цього випробування (з 5 деталей обрано 3). Маємо:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade,\ bcd,\ bce,\ bde,\ cde.$$

а) Події M сприяють 6 елементарних подій з 10: abc, abd, abe, acd, ace, ade. Можемо знайти ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

б) Події N сприяють 3 елементарні події з 10 (abc, abd, abe), тому ймовірність події N дорівнює $\frac{3}{10}$.

в) Події K сприяють 9 елементарних подій з 10 (усі, крім cde), тому ймовірність події K дорівнює $\frac{9}{10}$.

Обчислювати ймовірності подій часто допомагають правила та формули комбінаторики.

Задача 2. На вершину гори ведуть 4 однаково зручні стежки. Яка ймовірність того, що ви підніметеся на гору та спуститеся з неї тим самим маршрутом, яким проходив тут колись ваш товариш?

● **Розв'язання.** Усього існує $4 \cdot 4 = 16$ різних маршрутів. Оскільки всі вони однаково зручні, то ймовірність пройти по одному з них дорівнює $\frac{1}{16}$.

Задача 3. Учень цифрами 1, 2, 3, 4, 5 написав невідоме вам п'ятицифрове число. Яка ймовірність того, що ви одразу відгадаєте це число?

● **Розв'язання.** Усього таких чисел є $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Ймовірність вгадати одне з них дорівнює $\frac{1}{120}$.

Задача 4. У кошику є 20 яблук, однакових на вигляд: 15 – солодких, а 5 – кислих. Яка ймовірність того, що взяті навмання два яблука виявляться кислими?

● **Розв'язання.** Вибрати пару з усіх 20 яблук можна C_{20}^2 способами, а з 5 яблук – C_5^2 способами:

$$C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190; \quad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Отже, шукана ймовірність $P = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які події називають випадковими?
2. Наведіть приклади випадкових подій.
3. Які події називають неможливими; достовірними?
4. Наведіть приклад простору елементарних подій.
5. Які події називають елементарними? Наведіть приклади.
6. Чому дорівнює ймовірність достовірної події? А неможливої?
7. Сформулюйте класичне означення ймовірності.
8. Як обчислюють імовірності, використовуючи формули комбінаторики?

Виконаємо разом

1. З перевернутих 28 пластинок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на одній з її частин виявиться одне очко (подія A)?

Розв'язання. Підрахуємо, скільки існує пластинок доміно, які містять одне очко: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{6}{1}$. Усього – 7. Можливостей вибору маємо 28, бо взяти можна будь-яку з 28 пластинок. Отже, $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Відповідь. 0,25.

2. На кожній із чотирьох карток написано одну букву: А, Й, Р, К. Картки перемішують і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що утвориться слово КРАЙ?

Розв'язання. З чотирьох написаних букв можна утворити $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ перестановки, але умову задачі задовольняє тільки одна. Отже, шукана ймовірність $P = \frac{1}{24}$.

3. На 1000 білетів лотереї припадає 1 виграш 5000 грн., 10 виграшів – по 1000 грн., 50 – по 200 грн., 100 – по 50 грн. Решта білетів – невиграшні. Знайдіть імовірність виграшу на один білет, не меншого за 200 грн.

Розв'язання. Білетів, на які припадають виграші, не менші за 200 грн., всього $1 + 10 + 50 = 61$. Загальна кількість білетів – 1000. Тому шукана ймовірність дорівнює $61 : 1000 = 0{,}061$.

4. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді лише на 20 з 25 запитань програми. Знайдіть імовірність того, що він із трьох запропонованих запитань знатиме відповіді принаймні на два.

Розв'язання. Усього варіантів трійок запитань C_{25}^3. З них C_{20}^3 таких, на які студент може відповісти повністю. Він може відповісти також на C_{20}^2 пар запитань.

Якщо до кожної такої пари запитань приєднати одне з 5 запитань, яких він не знає, дістанемо ще $5 \cdot C_{20}^2$ трійок.

Отже, шукана ймовірність

$$P = (C_{20}^3 + 5 \cdot C_{20}^2) : C_{25}^3 = (1140 + 950) : 2300 = \frac{209}{230}.$$

Виконайте усно

717. Якою, з погляду теорії ймовірностей, є подія:
а) під час падіння грального кубика випадуть шість очок;
б) лампочка перегорить у кухні;
в) побудований графік непарної функції виявиться симетричним відносно початку координат;
г) вибране навмання двоцифрове число виявиться парним;
ґ) температура на Сонці нижча за температуру на Землі?

718. Опишіть простір елементарних подій для експерименту:
а) встановлення дня народження довільно обраного мешканця України;
б) визначення кількості різних коренів квадратного рівняння;
в) встановлення кількості спільних точок кола та параболи, побудованих в одній системі координат;
г) визначення одного додаткового вихідного дня за умови 6-денного робочого тижня.

719. Яка ймовірність того, що під час падіння грального кубика випаде парне число очок?

720. Яка ймовірність того, що під час падіння монети випаде цифра; герб?

721. Візьміть навмання пластинку доміно. Яка ймовірність того, що вона: а) дубль; б) не дубль?

722. У класі навчається 10 хлопців і 20 дівчат. Яка ймовірність того, що до дошки першим викличуть: а) дівчину; б) хлопця; в) вас; г) дівчину або хлопця?

723. Знайдіть імовірність того, що ваш товариш народився: а) в неділю; б) восени; в) у вересні; г) 1 січня.

А

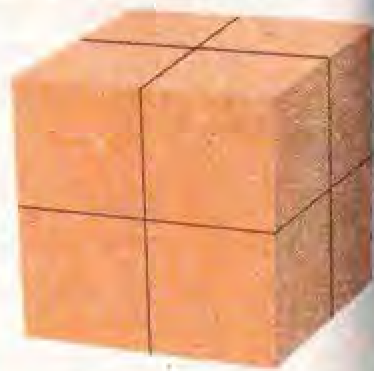
724. Яка ймовірність того, що під час падіння грального кубика випаде: а) два очки; б) парна кількість очок; в) кількість очок, кратна 3?

725. З перевернутих 28 пластинок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього: а) 2 очки (подія A); б) 5 очок (подія B); в) 12 очок (подія C)?

726. З перевернутих 28 пластинок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на одній з її частин виявиться 6 очок (подія A)?

727. Знайдіть імовірність того, що навмання вибране натуральне одноцифрове число: а) є число 7; б) ділиться на 3.

728. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 8 рівних кубиків (мал. 106) і зсипали їх у коробку. Яка ймовірність того, що вийнятий навмання з коробки кубик матиме зафарбовану: а) тільки одну грань; б) дві грані; в) не менше трьох граней?



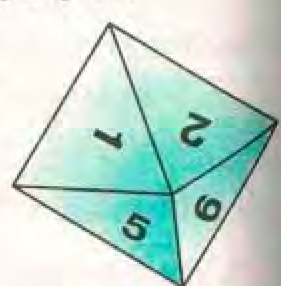
Мал. 106

729. Пофарбований з усіх боків дерев'яний кубик розпиляли на 64 рівні кубики і зсипали їх у коробку. Яка ймовірність того, що вийнятий навмання з коробки кубик матиме зафарбовану: а) тільки одну грань; б) дві грані; в) не менше трьох граней?

730. Пофарбований дерев'яний кубик розпиляли на 125 рівних кубиків і зсипали їх у торбину. Яка ймовірність того, що беручи з торбини навмання один кубик, ви візьмете такий, що має: а) тільки одну пофарбовану грань; б) тільки дві пофарбовані грані?

731. З букв, написаних на окремих квадратних картках, склали слово МАТЕМАТИКА. Потім ці картки перевернули, перемішали і навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на ній написано: а) букву А; б) букву М?

732. Уявіть, що на кожній грані правильного октаедра написано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (мал. 107). Яка ймовірність того, що під час падіння такого грального октаедра випаде: а) цифра 7; б) цифра 8; в) цифра 9?



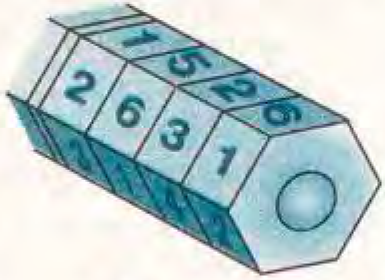
Мал. 107

733. У торбині міститься 5 білих і 7 чорних кульок. Яка ймовірність того, що, беручи навмання, ви виймете: а) білу кульку; б) чорну кульку?

734. Їдальня на обід приготувала: 3 перші страви – борщ, суп, капусняк; 4 другі – вареники, голубці, котлети, рагу;

2 десертні – морозиво й тістечка. Яка ймовірність того, що хтось, не знаючи смаків товариша, замовить для нього борщ, котлети й морозиво?

735. Замок із «секретом» містить 4 шестикутні призми, які можуть повертатися незалежно одна від одної навколо спільної осі (мал. 108). На кожній бічній грані призми написано цифру від 1 до 6. Повертаючи призми, у прорізі замка можна встановити будь-яке чотирицифрове число, записане такими цифрами. Замок відмикається тільки тоді, коли буде набрано число, яке становить «секрет» замка. Яка ймовірність того, що людина, яка не знає цього «секрету», відкриє замок за один набір числа навмання?



Мал. 108

736. На полицю навмання поставили чотиритомний словник. Яка ймовірність того, що книжки поставлено в належній послідовності?

737. Дівчинка хотіла нанизати на нитку 7 різних намистин. Це зробив її братик. Яка ймовірність того, що він зробив саме так, як хотіла дівчинка?

738. На столі лежать 5 перевернутих і перетасованих карток, на кожній з яких написано одну з букв – *А*, *Е*, *О*, *Р*, *Т*. Яка ймовірність того, що:

а) першою візьмуть картку з буквою *О*, другою – з буквою *Р*, третьою – з буквою *Т*;

б) з трьох узятих навмання карток буде складено слово ОРТ?

739. З 32 карток із буквами українського алфавіту беруть навмання 4 картки. Яка ймовірність того, що з них можна скласти слово РОМБ?

Б

740. З 10 металевих конструкцій дві – високої якості. Знайдіть імовірність того, що серед взятих навмання п'яти конструкцій тільки одна високої якості.

741. У класі 10 учнів вивчають англійську мову, 8 – німецьку, 6 – французьку. Навмання складено групу з 3 учнів. Знайдіть імовірність того, що: а) всі 3 учні групи вивчають різні іноземні мови; б) всі 3 учні вивчають англійську мову; в) всі 3 учні вивчають одну з названих мов.

742. Зі 100 деталей, серед яких виявлено 2 браковані, навмання вибрали 6 деталей. Знайдіть імовірність того, що серед вибраних 6 деталей бракованими виявляться 2 деталі.

743. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді на 45 запитань із 60. Кожен білет містить 2 запитання з 60. Студент узяв білет навмання. Знайдіть імовірність того, що він знає відповідь: а) на обидва запитання; б) тільки на одне запитання.

744. У магазин надходять лампи з двох заводів: 30 % – з одного і 70 % – з другого. Серед ламп першого заводу стандартних 85 %, а другого – 75 %. Яка ймовірність того, що куплена в цьому магазині лампа виявиться стандартною?

745. Знайдіть імовірність того, що вибраний навмання член послідовності $a_n = 3n + 2$, де $n \leqslant 100$, ділиться на 5. А якщо $n \leqslant 1000$?

746. Серед 10 лотерейних білетів виграшних 2. Знайдіть імовірність того, що серед узятих навмання 5 білетів виграшним виявиться: а) тільки 1; б) принаймні 1.

747. Учасник «Спортлото» має назвати 6 чисел із запропонованих 49. Він ви́грає, якщо вгадає 3, 4, 5 або 6 чисел. Знайдіть імовірності вгадування цієї кількості чисел.

748. Що ймовірніше вгадати:

а) 3 числа з 49 чи 4 числа з 36;

б) 7 чисел з 15 чи 8 чисел з 15;

в) 3 числа з 15 чи 13 чисел з 15?

Вправи для повторення

749. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 6 - x$ і віссю абсцис.

750. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 2x^3 + 6x^2 - 5x$; б) $y = 2x^3(x^2 - 5)$;

в) $y = (x^2 - 5) : (2x^3)$.

751. Стрілець у незмінних умовах робить 5 серій пострілів по мішені. У кожній серії – 100 пострілів. Результати стрільби занесено в таблицю. Знайдіть відносну частоту попадання в мішень у кожній серії. Побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість попадань у мішень	69	64	72	78	65

§ 23. Відносна частота події та випадкові величини

Досі ми обчислювали ймовірності здійснення елементарних подій, не дуже замислюючись над поняттям «однаково можливі події». А це поняття не таке просте, як здається. Розглянемо приклад про ймовірність народження дитини певної статі. Народження хлопчика чи дівчинки – події, здається, однаково можливі (як і падіння монети – гербом догори чи донизу). Але це суперечить істині. Багаторічні спостереження переконливо свідчать, що хлопчики народжуються частіше. На 1000 новонароджених у середньому припадає 517 хлопчиків і 483 дівчинки. Тому вважати, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5 – означає суперечити реальності. У таких випадках користуються поняттям *статистичної ймовірності*. Вважають, що статистична ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,517, а дівчинки – 0,483.

Уявіть: гральний кубик зроблено так, що його грань з 6 очками розміщена далі від центра мас, ніж протилежна грань. Такий кубик падає догори гранню з 6 очками частіше. Тут простежується цікава й дуже важлива закономірність. Якби хтось підкинув такий кубик 1000 разів і він упав, наприклад, 300 разів догори гранню з 6 очками, то й інші експериментатори мали б приблизно такі самі результати.

Багато масових випадкових подій мають властивість стійкості. За досить великої кількості незалежних випробувань частота появи спостережуваної події коливається близько одного й того самого числа. У справедливості цього багато спеціалістів переконалися експериментально. А математики Я. Бернуллі, П. Чебишов та ін. обґрунтували це твердження і теоретично (закон великих чисел). Тому для таких (статистично стійких) подій раціонально ввести поняття ймовірності.

Якщо в n випробуваннях подія A відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає *відносну частоту* події A. У багатьох реальних випадках зі збільшенням n відносна частота події стабілізується й дедалі менше відрізняється від деякого числа p (коли $n \to \infty$, то $\frac{m}{n} \to p$). Це число p називають *імовірністю події A*.

Таким є *статистичне означення* ймовірності. Обсяг означуваного ним поняття набагато ширший від того, що відповідає класичному означенню (див. с. 168). Класичну ймовірність обчислюють математичними методами, а статистичну – здебільшого визначають експериментально.

Якщо йдеться про ймовірність, то спеціалісти найчастіше мають на увазі статистичну ймовірність. Тому сучасна теорія ймовірностей тісно пов'язується з математичною статистикою. Об'єднання математичної статистики та теорії ймовірностей називають *стохастикою*. Стохастичний – означає випадковий, імовірний.

Одне з найважливіших понять стохастики – *випадкова величина*. Величину називають випадковою, якщо вона може набувати наперед невідомих числових значень, що залежать від випадкових обставин. Наприклад:

1) виграш на лотерейний квиток;

2) відстань від точки влучання кулі до центра мішені.

Значення першої випадкової величини – деякі цілі числа. Такі величини називають *дискретними*. Множина значень другої величини – деякий неперервний відрізок числової прямої. Такі величини називають *неперервними*.

Задача. Випущено 100 лотерейних білетів, з яких 5 мають виграти по 10 грн., 10 – по 5 грн., 40 – по 1 грн., решта – безвиграшні. Який середній виграш припадає на один білет?

Розв'язати цю задачу можна арифметичним способом:

$$(5 \cdot 10 \text{ грн.} + 10 \cdot 5 \text{ грн.} + 40 \cdot 1 \text{ грн.}) : 100 = 1{,}4 \text{ грн.}$$

Проілюструємо на цій задачі поняття випадкової величини. Тут виграш – випадкова величина, яка може набувати значень 0, 1, 5, 10 (грн.) відповідно з імовірностями 0,45, 0,4, 0,1 і 0,05. Це – дискретна випадкова величина ξ. Описаній ситуації відповідає така таблиця:

ξ	0	1	5	10
p	0,45	0,4	0,1	0,05

Зверніть увагу: сума ймовірностей, наявних у другому рядку таблиці, дорівнює 1. Вважають, що таку випадкову величину ξ *розподілено за ймовірностями*.

Якщо випадкова величина ξ набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з імовірностями відповідно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то це означає, що величину ξ розподілено за таким законом:

ξ_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Середнє значення такої величини називають *математичним сподіванням* і позначають $M(\xi)$:

$$M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n.$$

Наприклад, для попередньої задачі

$$M(\xi) = 0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05 = 1{,}4.$$

Міру розсіювань випадкової величини навколо її математичного сподівання називають *дисперсією*. Дисперсію випадкової величини x позначають символом $D(x)$ і обчислюють за формулою $D(x) = M(x - Mx)^2$, де Mx – математичне сподівання величини x; $(x - Mx)^2$ – квадрати відхилень значень x від Mx. Величина $(x - Mx)^2$ також випадкова. Її математичне сподівання $M(x - Mx)^2$ – дисперсія випадкової величини x.

Щоб знайти дисперсію розглянутої вище випадкової величини ξ, спочатку знайдемо відхилення всіх її значень від математичного сподівання:

$$0 - 1{,}4 = -1{,}4;\ 1 - 1{,}4 = -0{,}4;\ 5 - 1{,}4 = 3{,}6;\ 10 - 1{,}4 = 8{,}6.$$

Квадрати цих відхилень: 1,96; 0,16; 12,96; 73,96. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини:

$(x - Mx)^2$	1,96	0,16	12,96	73,96
p	0,45	0,4	0,1	0,05

$$1{,}96 \cdot 0{,}45 + 0{,}16 \cdot 0{,}4 + 12{,}96 \cdot 0{,}1 + 73{,}96 \cdot 0{,}05 = 5{,}94.$$

Це і є дисперсія розглядуваної випадкової величини: $D(\xi) = 5{,}94$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке відносна частота події?
2. Дайте статистичне означення ймовірності.
3. Що таке стохастика?
4. Що означає розподілити випадкову величину за ймовірностями?
5. Що таке математичне сподівання?
6. Що називається дисперсією?

Виконаємо разом

1. Що таке екзит-пол? На яких підставах йому довіряють?

Відповідь. Екзит-пол – це опитування виборців соціологічними службами на виході з виборчих дільниць з метою передбачити результати виборів перед отриманням їх від виборчих комісій. Йому довіряють на основі стійкості відносної частоти події. Якщо за якусь партію чи кандидата з вибраних 100 виборців проголосували, наприклад, 20 %, то можна сподіватися (з похибкою близько 5 %), що так проголосували і всі виборці дільниці.

2. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини x, закон розподілу якої подано в таблиці.

x	1	5	10	15
p	0,2	0,3	0,4	0,1

● **Розв'язання.** $M(x) = 1 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}1 = 7{,}2.$

Виконайте усно

752. Яка з таблиць задає закон розподілу випадкової величини?

x	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,4

x	1	2	3	4
p	0,5	0,2	0,2	0,1

x	0	1	3	4
p	0,2	0,3	0,3	0,3

x	10	20	30	40
p	0,4	0,4	0,2	0,1

753. Відомо, що серед 1000 новонароджених зазвичай буває 517 хлопчиків і 483 дівчаток. Знайдіть імовірність народження хлопчика.

754. Учень вирізав з дерева гральний кубик – такий, що, підкинувши його 100 разів, одержав результати:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1

Які результати можна очікувати, якщо цей самий гральний кубик хто-небудь інший підкине 1000 разів?

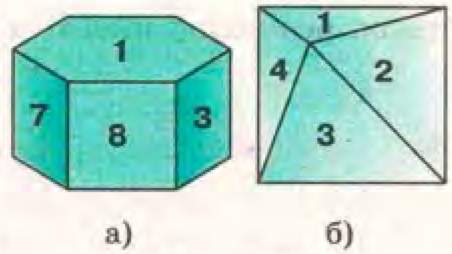
755. Уявіть гральну кісточку у формі правильної шестикутної призми, усі ребра якої рівні і на основах якої написано цифри 1 і 2, а на решті граней – 3, 4, 5, 6, 7 і 8 (мал. 109, *а*). Як, на ваш погляд, могли б розподілитися ймовірності випадання тих чи інших очок за багаторазового підкидання такої гральної кісточки?

А

756. Розподіліть за ймовірностями випадкову величину кількості очок, які випадають під час підкидання правильного грального кубика. Знайдіть математичне сподівання цієї випадкової величини.

757. Тільки одну грань правильного однорідного кубика пофарбовано жовтим кольором. З якою відносною частотою падатиме цей кубик догори жовтою гранню, якщо його кидати багато разів?

758. На гранях правильного октаедра нанесено очки від 1 до 8 (мал. 109, *б*). Задайте таблицею випадкову кількість очок, які випадають під час кидання такого октаедра. Знайдіть середнє значення цієї величини.



Мал. 109

759. Випадкову кількість очок, які випадають під час підкидання неправильного грального кубика, розподілено за таким законом:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Заповніть останню клітинку таблиці. Визначте математичне сподівання величини ξ.

760. Випущено 1000 лотерейних білетів, на один з яких має випасти виграш 100 грн., на 10 – по 20 грн., на 50 – по 1 грн. Задайте таблицею випадковий виграш. Знайдіть математичне сподівання цієї величини.

Б

761. Знайдіть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленої за таким законом:

φ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ψ	1	2	3	4	5	6	7	8
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Придумайте реальні ситуації, математичними моделями яких були б випадкові величини φ і ψ.

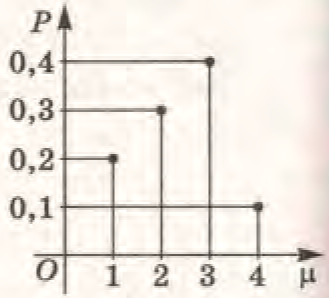
762. Підкидають одразу два гральні кубики й підраховують суму очок на їх верхніх гранях. Задайте випадкову величину цієї суми та знайдіть її математичне сподівання.

763. З повного набору пластинок доміно, перевернутих донизу очками, взяли навмання одну й підрахували суму очок на обох її половинках. Задайте таблично випадкову величину цієї суми та накресліть відповідну діаграму.

764. Побудуйте графік функції $y = C_9^x$. Перелічіть її найважливіші властивості. Проведіть через точки графіка плавну лінію, подібну до кривої Гаусса.

765. Побудуйте графік функції $y = C_6^x$. Укажіть її область визначення та область значень.

766. На малюнку 110 показано розподіл випадкової величини μ. Запишіть закон її розподілу у вигляді таблиці. Знайдіть її математичне сподівання та дисперсію.



Мал. 110

767. Уявіть, що гральний кубик зроблено з однорідного матеріалу у формі правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює 2 см, а висота – 1,9 см. Нехай на його основи нанесено цифри 1 і 6, а на інші грані – 2, 3, 4 і 5. Яким, на ваш погляд, може бути розподіл імовірностей під час багаторазового підкидання такого кубика? Спробуйте перевірити свою здогадку експериментально.

Вправи для повторення

768. Розв'яжіть методом інтервалів нерівність:
а) $(x - 4)(x + 7) < 0$; б) $(x + 5)(x - 0,5) > 0$.

769. Чи проходить графік функції $y = 2^x$ через точку A, якщо:
а) $A(4; 16)$; б) $A(4; 256)$;
в) $A(-2; -0,5)$; г) $A(-2; 0,0625)$?

770. Дано $f(x) = \dfrac{x^2+1}{5x}$. Обчисліть $f'(1)$ та $f'(-2)$.

Самостійна робота № 5

Варіант 1

1. Вибірка містить усі натуральні числа від 1 до 10 і, крім них, числа 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8. Запишіть відповідний варіаційний ряд; знайдіть розмах, моду, медіану та середнє значення вибірки; побудуйте відповідну гістограму.

2. Яка ймовірність того, що підкинутий гральний кубик упаде догори гранню: а) з непарним числом очок; б) з числом очок, більшим за 3?

3. Що ймовірніше: вгадати 2 числа з 9 чи 3 з 8?

4. В урні є картки з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що вийнята навмання картка не міститиме цифри 5?

5. Обчисліть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленої за законом:

j	1	2	3	4	5
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Варіант 2

1. Вибірка містить усі цілі числа від 0 до 9 і, крім них, числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7. Запишіть відповідний варіаційний ряд; знайдіть розмах, моду, медіану та середнє значення вибірки; побудуйте відповідну гістограму.

2. Яка ймовірність того, що підкинутий гральний кубик упаде догори гранню з числом очок: а) більшим за 4; б) меншим за 4?

3. Що ймовірніше: вгадати 3 числа з 9 чи 4 з 8?

4. В урні є картки з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що вийнята навмання картка матиме число, сума цифр якого дорівнює 7?

5. Обчисліть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, розподіленої за законом:

j	0	1	2	3	4
p	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке статистика?
2. Що таке вибірка? Наведіть приклад.

3. Що таке варіанта вибірки; варіаційний ряд?
4. Що таке мода; медіана; середнє значення вибірки?
5. Що таке гістограма; полігон частот?
6. Як обчислюють середнє квадратичне n чисел?
7. Що таке дисперсія? Як її обчислюють?
8. Наведіть приклади випадкових подій.
9. Які події називають неможливими; достовірними?
10. Наведіть приклад повної групи подій.
11. Що таке ймовірність випадкової події?
12. Чому дорівнює ймовірність достовірної події? А неможливої?

Історичні відомості

Збирати й аналізувати статистичні дані люди почали віддавна. У Китаї населення переписували ще понад 4 тисячі років тому. У Київській Русі перепис здійснювався, починаючи з 1245 р.

У Європі в XVII ст. виникла окрема наука – «Політична арифметика», яку започаткувала надрукована в 1662 р. книжка Дж. Граунта «Природні й політичні спостереження, зроблені за бюлетнями смертності... відносно управління, релігії, торгівлі, росту, повітря, хвороб і різних змін...». У цій праці вперше введено поняття частоти події, виявлено, що хлопчики народжуються частіше, ніж дівчатка (у відношенні 14 : 13). Автор книжки дослідив, що в той час у Лондоні з кожних 100 новонароджених жили до:

6 років – 64,	36 років – 16,	66 років – 3,
16 років – 40,	46 років – 10,	76 років – 1,
26 років – 25,	56 років – 6,	86 років – 0.

Згодом суттєвий внесок у розвиток математичної статистики зробили В. Петті, А. Муавр, Л. Ейлер, Я. Бернуллі, П. Лаплас, С. Пуассон та ін. У Російській імперії в XIX ст. проблеми статистики найбільше досліджували українські математики М. Остроградський і В. Буняковський. Зокрема, Остроградський розробив статистичні методи бракування товарів, склав «Таблиці для полегшення обчислення траєкторії тіла в середовищі з опором». Буняковський досліджував статистичні характеристики народонаселення, ймовірних контингентів російської армії, пенсій, правдоподібності показів у судочинстві, похибок у спостереженнях тощо.

Сучасна держава не може функціонувати без статистики. В Україні існує Комітет статистики, тисячі спеціалістів якого збирають, аналізують і використовують різні статистичні відомості.

Деякі властивості випадкових подій виявили італійські математики Л. Пачіолі (1445–1514), Д. Кардано (1501–1576) у зв'язку з дослідженнями азартних ігор. Теорію ймовірностей, як галузь математики, започаткували французькі математики Б. Паскаль (1623–1662) і П. Ферма (1601–1665). Згодом значний внесок у її розвиток зробив Я. Бернуллі (1654–1705). Проте доки теорія ймовірностей пов'язувалась майже виключно з азартними іграми, вона розвивалася повільно. А згодом, ввівши поняття статистичної ймовірності, вчені переконалися, що ця нова галузь математики досить перспективна, особливо в дослідженнях проблем статистики, демографії, теорії стрільби, фізики, біології, соціології. Теорія ймовірностей мов би набула другого дихання.

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

(1623–1662)

Видатний французький математик, фізик, філософ. Перший трактат з геометрії написав у 16 років. У ньому сформулював основну теорему проективної геометрії. Як один з творців теорії ймовірностей, розробив нові методи в комбінаториці та численні нескінченно малих. Як філософ, на перше місце ставив науку, на друге – людину, на третє – віру.

«Ми осягаємо істину не лише розумом, але й серцем».

Б. Паскаль

«Паскаль – людина великого розуму та великого серця ... один із тих, кого називають пророками».

Л. Толстой

ЯКОБ БЕРНУЛЛІ

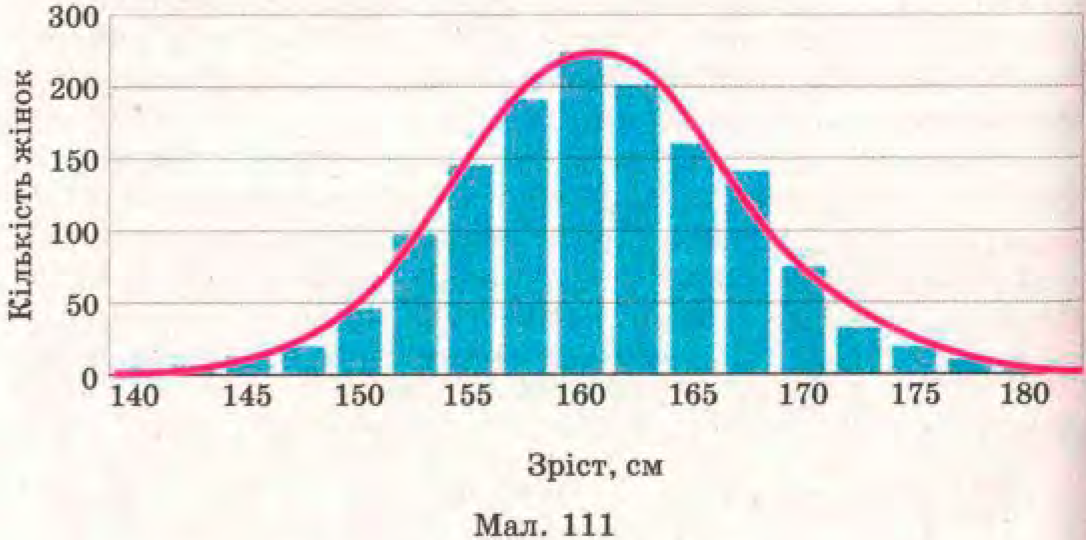
(1654–1705)

Швейцарський математик – перший з відомої родини математиків. Вивчав теологію, читав лекції з експериментальної фізики, досліджував проблеми диференціального числення, теорії ймовірностей, заклав основи варіаційного числення – розділу математики про знаходження екстремумів різних величин. Найважливіших результатів досяг у теорії ймовірностей (теорема

Бернуллі, схема Бернуллі та ін.). Досліджуючи суми $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$, відкрив важливі для математики числа Бернуллі. Досліджував також проблеми арифметики, алгебри, геометрії, фізики, астрономії. Ввів термін «інтеграл». Крім Якоба I, родина Бернуллі мала ще сім відомих математиків: Йоганн I, Микола I, Микола II, Данило, Йоганн II, Йоганн III, Якоб II.

Поняття статистичної ймовірності тісно пов'язане з теорією ймовірностей і математичною статистикою. У цьому підручнику немає можливості заглиблюватись у ці науки. Зазначимо тільки одну досить важливу закономірність, яка в них досліджується, – *закон нормального розподілу*. Ще на початку XVIII ст. проведено таке дослідження: виміряли зріст 1375 жінок і підрахували, скільки з них мають зріст 140 см, 145 см, 150 см і т. д. За отриманими результатами побудували гістограму (стовпчасту діаграму) та виявили, що їй відповідає графік функції, схожий на контур капелюха (мал. 111). Згодом з'ясувалося, що так само розподіляються швидкості руху газових молекул, маси новонароджених дітей і багато інших величин у природі. Функція, яка відповідає закону нормального розподілу, задається формулою

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Мал. 111

ВІКТОР ЯКОВИЧ БУНЯКОВСЬКИЙ

(1804–1889)

Український математик (народився в м. Бар на Вінниччині). Написав 168 наукових праць, з яких найбільшу роль відіграли «Основи математичної теорії ймовірностей», «Лексикон чистої та прикладної математики», «Арифметика». Головний експерт Росії з питань статистики й страхування, почесний член усіх російських університетів, віце-президент Академії наук.

МИХАЙЛО ПИЛИПОВИЧ КРАВЧУК

(1892–1942)

Український математик, академік. Народився в с. Човниці на Волині. Працював у галузях алгебри, теорії чисел, теорії функцій, теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Брав активну участь у створенні сучасної української математичної термінології. Безпідставно репресований, загинув на Колимі.

Поняття статистичної ймовірності, закон нормального розподілу та інші поняття теорії ймовірностей використовуються в багатьох теоретичних і прикладних дослідженнях. А починалось усе це з гри в кості.

З математиків, які народилися в Україні, найрезультативніше працювали в галузі теорії ймовірностей і математичної статистики: В.Я. Буняковський (1804–1889), С.Н. Бернштейн (1880–1968), М.П. Кравчук (1892–1942), В.І. Гливенко (1897–1940), В.Ю. Лінник (1915–1972), Й. Гіхман (1918–1985), М.Й. Ядренко (1932–2004) та ін.

Головне в розділі 4

Задачі, в яких треба визначити, скільки різних підмножин або упорядкованих підмножин можна утворити з елементів даної множини, називають *комбінаторними задачами*.

Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B – n способами, то елемент з множини A або з множини B можна вибрати $m + n$ способами. Це – *правило суми*.

Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий – n способами, то таку пару можна вибрати mn способами. Це – *правило добутку*.

Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n називають n-факторіалом і позначають $n!$.

Упорядковану k-елементну підмножину n-елементної множини називають *розміщенням з k елементів по n*. Їх кількість позначають A_n^k.

Для будь-яких натуральних n і k ($n \geqslant k$)

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Число розміщень з n елементів по k дорівнює добутку k послідовних натуральних чисел, найбільше з яких n.

Розміщення з n елементів по n називають *перестановками з n елементів*. Їх кількість позначають P_n.

Кількість перестановок з n елементів дорівнює $n!$: $P_n = n!$.

Комбінацією з n елементів по k називають будь-яку k-елементну підмножину n-елементної множини. Кількість комбінацій з n елементів по k позначають C_n^k:

$$C_n^k = \frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

Статистика – це наука про збирання, обробку та вивчення різних даних, пов'язаних з масовими явищами, процесами та подіями.

Мода вибірки – її варіанта з найбільшою частотою.

Медіана вибірки – число, яке «поділяє» відповідний варіаційний ряд навпіл.

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне всіх її варіант.

Елементарною подією називають кожен можливий наслідок імовірнісного експерименту. Множину всіх можливих наслідків експерименту називають *простором елементарних подій* і позначають грецькою буквою Ω (омега).

Ймовірністю випадкової події A називають відношення кількості $n(A)$ сприятливих для події A елементарних по-

дій до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних елементарних подій, які утворюють простір елементарних подій для даного випробування:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Таке означення ймовірності називають класичним.

Найважливіші властивості ймовірності випадкової події:

1) якщо C – подія неможлива, то $P(C) = 0$;

2) якщо B – подія достовірна, то $P(B) = 1$;

3) якщо X – подія випадкова, то $0 \leqslant P(X) \leqslant 1$;

4) якщо $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ – елементарні події, що вичерпують деяке випробування, то

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1.$$

Якщо в n випробуваннях подія A відбувається m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ *визначає відносну частоту події А*. У багатьох реальних випадках зі збільшенням n відносна частота події стабілізується і дедалі менше відрізняється від деякого числа p (коли $n \to \infty$, то $\frac{m}{n} \to p$). Таке число p називають *імовірністю події А*. Це – статистичне означення ймовірності.

Геометрія

Серед рівних розумом –
за однакових інших умов –
переважає той, хто знає геометрію.

Б. Паскаль

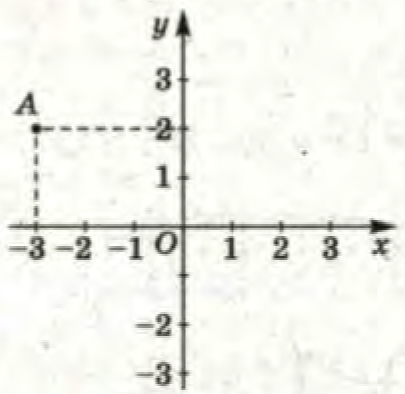
5 Координати і вектори у просторі

ТЕМИ РОЗДІЛУ

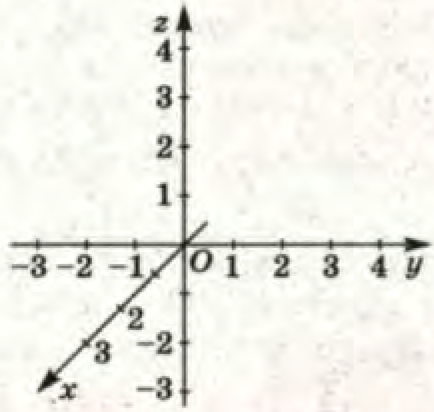
- Прямокутна система координат у просторі.
- Відстань між точками та координати середини відрізка.
- Вектори в просторі.
- Операції над векторами та їх властивості.
- Скалярний добуток векторів.
- Застосування векторів.
- Рівняння площини та сфери.

§ 24. Координати в просторі

Як відомо з планіметрії, задавши на площині декартову систему координат, можна кожній точці площини поставити у відповідність пару дійсних чисел – її координати. Наприклад, точці A (мал. 112) відповідає пара чисел -3 і 2; записують $A(-3;\ 2)$.



Мал. 112



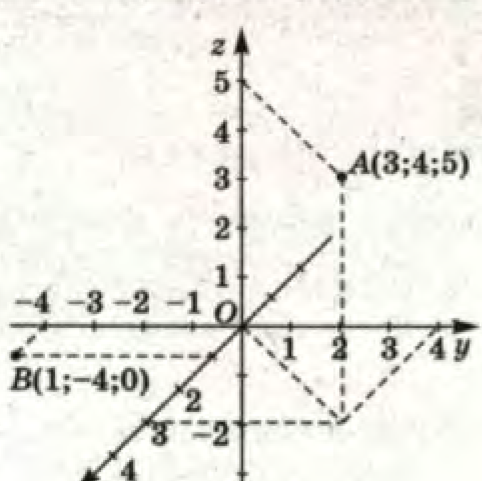
Мал. 113

Аналогічну систему координат можна задати і в просторі.

Нехай x, y, z – три попарно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються в точці O – початку координат (мал. 113). Їх називають *координатними осями* – вісь x, вісь y і вісь z (або осі абсцис, ординат і аплікат).

Сукупність так розміщених трьох координатних прямих називають *прямокутною системою координат* у просторі.

Якщо дано таку систему координат, то кожній точці простору можна поставити у відповідність єдину впорядковану трійку дійсних чисел, а кожній такій трійці чисел – єдину точку простору. Наприклад, щоб позначити в просторі точку $A(3;\ 4;\ 5)$, треба від точки O «пройти» 3 одиниці вздовж осі x, потім 4 одиниці паралельно осі y і, нарешті, 5 одиниць паралельно осі z (мал. 114). А щоб знайти точку $B(1;\ -4;\ 0)$, треба від точки O «пройти» 1 одиницю довжини по осі x, потім 4 одиниці паралельно осі y, але в протилежному напрямі, оскільки число -4 – від'ємне.



Мал. 114

Маючи таку систему координат, можна розв'язувати багато стереометричних задач, подібних до тих, які розв'язують за допомогою координат на площині. Зокрема, можна довести такі твердження:

Якщо дано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ *і* $B(x_2; y_2; z_2)$, *то:*

а) *середина відрізка AB – точка* $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$;

б) *квадрат відстані між точками A і B*

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Знайдемо, наприклад, довжину відрізка AB та координати його середини C, якщо відомі координати його кінців – $A(3; 4; 5)$ і $B(1; -4; 0)$ (мал. 114):

$$AB^2 = (3-1)^2 + (4+4)^2 + (5-0)^2 = 93,\ AB = \sqrt{93};$$

$$\frac{1+3}{2} = 2,\ \frac{4-4}{2} = 0,\ \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2},\ \text{отже, } C\left(2; 0; \frac{5}{2}\right).$$

РЕНЕ ДЕКАРТ

(1596–1650)

Видатний французький філософ, математик, фізіолог, фізик. Декарт увів метод координат, поняття змінної, заклав основи аналітичної геометрії, ввів сучасні позначення степенів, знаки «+» і «–» для позначення додатних і від'ємних чисел. Більше відомий як філософ, засновник картезіанства. Проти його поглядів різко виступали католики й протестанти. Його праці, зокрема «Міркування про метод», «Початки філософії», «Пристрасті душі», були внесені до «Індексу заборонених книг».

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке прямокутна система координат у просторі?
2. Що таке координатні осі; початок координат?
3. Назвіть абсцису, ординату й аплікату точки $A(m; n; k)$.
4. Чому дорівнює квадрат відстані між двома точками?

Виконаємо разом

1. Чому дорівнюють координати середини відрізка, кінці якого $A(4; 0; 2)$ і $B(6; 8; 6)$?

Розв'язання.

Знайдемо координати точки $C(c_1; c_2; c_3)$ – середини відрізка AB.

$$c_1 = \frac{4+6}{2} = 5;\ c_2 = \frac{0+8}{2} = 4;\ c_3 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Відповідь. $C(5; 4; 4)$.

2. Точка C – середина відрізка AB. Знайдіть координату точки B, якщо $A(-1; 3; 4)$, $C(2; -1; 0)$.

Розв'язання. Нехай $B(x; y; z)$. Тоді

$$\frac{x-1}{2} = 2;\ \frac{y+3}{2} = -1;\ \frac{z+4}{2} = 0.$$

Звідси $x = 5$, $y = -5$, $z = -4$.

Відповідь: $B(5; -5; -4)$.

3. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(5; -1; 6)$, $B(4; 2; -2)$, $C(-3; 7; -2)$, $D(-2; 4; 6)$ – паралелограм.

Розв'язання. Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD.

Для діагоналі AC:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1;\ y_1 = \frac{-1+7}{2} = 3;\ z_1 = \frac{6-2}{2} = 2.$$

Отже, середина діагоналі AC має координати $O_1(1; 3; 2)$.

Аналогічно для діагоналі BD:

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = 1;\ y_2 = \frac{2+4}{2} = 3;\ z_2 = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Тобто середина діагоналі BD має координати $O_2(1; 3; 2)$.

Оскільки координати середин діагоналей збігаються, то це означає, що його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Отже, $ABCD$ – паралелограм.

Виконайте усно

771. Дано точки: $A(0; 5; 1)$, $B(-2; 0; 0)$, $K(0; 0; 1)$, $P(0; -8; 0)$. Які з них лежать на осі x, на осі z, у площині xy, у площині yz?

772. Знайдіть відстані від точок $A(3; 4; 5)$ і $B(1; -4; 0)$ до координатних площин (мал. 114).

773. Дано точку $K(2; 3; 4)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини.

774. Дано точки $A(1; 2; 3)$ і $B(3; -6; 7)$. Знайдіть координати середини відрізка AB.

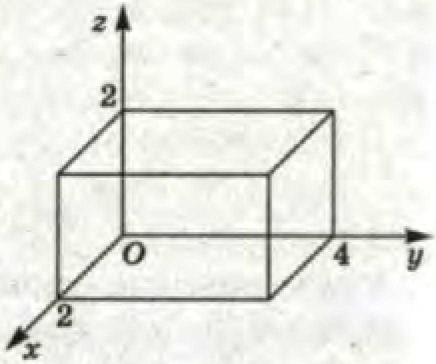
775. Чим є геометричне місце точок простору, для яких дорівнює нулю: а) перша координата; б) друга координата; в) третя координата; г) перші дві координати: ґ) другі дві координати; д) перша і третя координати; е) всі три координати.

А

776. Побудуйте в прямокутній системі координат точки: $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 3)$, $C(0; 5; -4)$, $D(4; -3; 0)$, $E(2; 6; 4)$, $F(6; -2; -6)$.

777. Тетраедр $ABCD$ задано координатами вершин: $A(2; 0; 5)$, $B(-4; 0; 2)$, $C(4; 0; -2)$, $D(1; 3; 1)$. У якій координатній площині лежить основа ABC тетраедра?

778. Прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розташований у системі координат, як показано на малюнку 115. Визначте координати: а) його вершин; б) середин його ребер.



Мал. 115

779. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
а) $A(-1; 0; 6)$, $B(1; 2; 10)$;
б) $A(0; 4; -6)$, $B(2; 2; 2)$;
в) $A(-2; 4; 2)$, $B(-2; -4; 2)$.

780. Чи є початок координат серединою відрізка CD, якщо:
а) $C(-4; 0; 2)$, $D(4; 0; -2)$;
б) $C(-4; 2; -8)$, $D(4; -2; -8)$?

781. На якій координатній осі лежить середина відрізка MN, якщо:
а) $M(2; 4; -6)$, $N(-2; 7; 6)$; б) $M(-3; 0; 7)$, $N(-3; 0; -7)$?

782. Якій координатній площині належить середина відрізка KP, якщо:
а) $K(1; 1; 4)$, $P(4; 0; -4)$; б) $K(-6; 2; 4)$, $P(5; -2; 3)$?

783. Дано точки $A(8; -5; -4)$ і $C(2; 1; 10)$. Знайдіть координати такої точки B, щоб точка C була серединою відрізка AB.

784. Точки M і N – середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть координати вершин A і C, якщо $B(-2; 0; 4)$, $M(3; 9; -2)$, $N(-1; -4; 0)$.

Б

785. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
а) $A(-1; -3; 18)$, $B(-2; 2; 12)$, $C(3; 3; -10)$, $D(4; -2; -4)$;
б) $A(4; -2; -6)$, $B(-6; 2; 8)$, $C(2; -3; 9)$, $D(12; -7; -4)$?

786. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
а) $A(2; 4; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$;
б) $A(-7; 5; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$.

787. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершин C і D, якщо $A(-1; 8; -2)$, $B(-4; 6; 5)$, $O(1; 0; 2)$.

788. Знайдіть відстань між точками $B(-2; 6; 3)$ і $K(3; 4; -2)$.

789. Яка з точок – $A(2; -1; -5)$ чи $B(-2; 1; 6)$ лежить ближче до початку координат?

790. Чи є точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$ і $C(3; 4; 5)$ вершинами трикутника?

791. Дано точки $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 3; 1)$ і $C(3; 1; -2)$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

792. Дано точки $M(0; 1; 1)$, $N(2; -1; 3)$ і $P(-1; k; 0)$. При якому значенні k $MP = NP$?

793. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі y і рівновіддалена від точок $A(4; -1; 3)$ і $B(1; 3; 0)$.

794. Знайдіть довжину медіани BM трикутника ABC, якщо $A(-2; 3; 6)$, $B(2; 3; -1)$, $C(4; 1; 0)$.

795. AM – медіана ΔABC. Знайдіть довжину медіани BN, якщо $A(2; -4; 2)$, $C(0; 0; 6)$, $M(1; 2; 4)$.

796. Установіть вид ΔABC та знайдіть його периметр і площу, якщо:
а) $A(5; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 5)$;
б) $A(-2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(-2; 4; 0)$;
в) $A(2; 4; -1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(5; 1; 2)$.

797. Установіть вид чотирикутника $MNPK$ та знайдіть його площу, якщо:
а) $M(0; -2; 0)$, $N(4; 1; 0)$, $P(4; 1; 5)$, $K(0; -2; 5)$;
б) $M(6; 8; 2)$, $N(2; 4; 3)$, $P(4; 2; 8)$, $K(8; 6; 7)$.

Вправи для повторення

798. Дано вектори: $\overrightarrow{AB} = (5;\ 3)$, $\overrightarrow{CD} = (-4;\ 6)$, $\overrightarrow{MN} = (3;\ -2)$. Знайдіть координати векторів: а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NM}$.

799. Дано точки: $M(1;\ 3)$, $N(7;\ 5)$, $K(5;\ -1)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ та їх модулі. Установіть вид ΔMNK.

800. Знайдіть найбільший кут трикутника зі сторонами 9, 15 і 21 см.

§ 25. Вектори в просторі

Майже все, про що йшлося щодо векторів на площині, поширюється і на вектори в просторі. Тут їх також зображують напрямленими відрізками та позначають символами $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ тощо. Вони так само означають поняття модуля вектора, нульового вектора, колінеарних векторів, суми векторів, різниці векторів, добутку вектора на число. І в просторі вектори можна додавати за правилами трикутника або паралелограма. Завжди

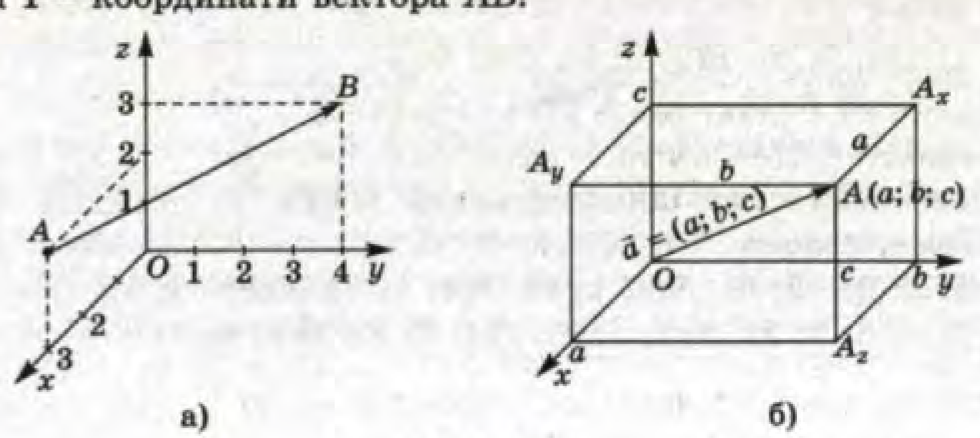
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC};\quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Але якщо на площині вектор задається двома координатами, то в просторі – трьома.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$, *початок якого –* $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, *а кінець –* $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, ***називають числа*** $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

Записують: $\overrightarrow{AB} = (x;\ y;\ z)$ або $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$.

Наприклад, якщо точки $A(3;\ 0;\ 2)$ і $B(0;\ 4;\ 3)$ – початок і кінець напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ (мал. 116, *а*), то $x = 0 - 3 = -3$, $y = 4 - 0 = 4$, $z = 3 - 2 = 1$. Отже, $\overrightarrow{AB} = (-3;\ 4;\ 1)$. Числа -3, 4 та 1 – координати вектора $\overrightarrow{AB}$.



а) б)

Мал. 116

Якщо O – початок координат, а числа a, b, c – координати точки A, то ці самі числа є й координатами вектора $\overline{OA}$ (мал. 116, *б*).

Сумою векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ називають вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

Різниця цих векторів

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Як би не були розміщені в просторі точки A, B, C, D, завжди

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

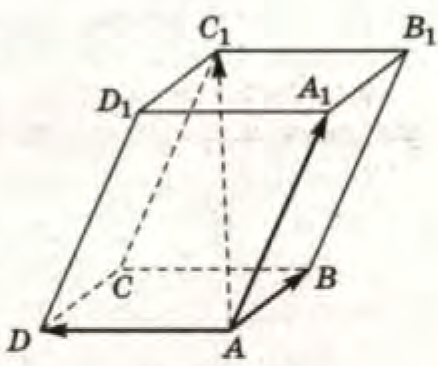
Зокрема, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед (мал. 117), то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$ (правило паралелепіпеда). Адже в цьому разі $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}$, тому

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}.$$

Модуль (довжину) вектора $\vec{a}$ позначають символом $|\vec{a}|$. Завжди, якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то

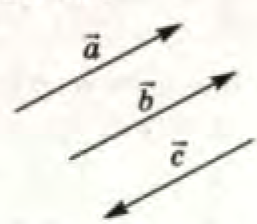
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Модуль будь-якого ненульового вектора – число додатне. Тільки модуль нульового вектора дорівнює нулю: $\vec{0} = (0; 0; 0)$, $|\vec{0}| = 0$.



Мал. 117

Два вектори називаються рівними, якщо вони співнапрямлені та мають однакову довжину. Якщо вектори мають однакові довжини й протилежно напрямлені, то їх називають протилежними. Наприклад, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні (мал. 118), а вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ протилежні. Два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні.



Мал. 118

Два ненульові вектори називаються *колінеарними*, якщо вони співнапрямлені або протилежно напрямлені. Нульовий вектор колінеарний з будь-яким вектором.

Щоб помножити вектор на число, треба на це число помножити кожну координату вектора: якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то $m\vec{a} = (mx; my; mz)$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і чисел m, n завжди

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b};\ (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a};\ |m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|.$$

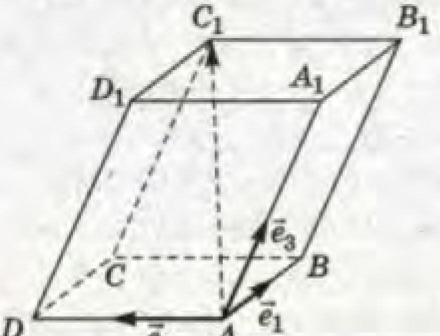
Ці властивості безпосередньо випливають з правила множення вектора на число.

Якщо помножити вектор на число, то отримаємо вектор, колінеарний даному, тобто якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні. І навпаки, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то, позначивши відношення їх довжин через λ, отримаємо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, якщо вектори співнапрямлені, і $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$, якщо вектори протилежно напрямлені. Тому сформулюємо **ознаку колінеарності двох векторів**: ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує число λ таке, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Можна довести, що вектори $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Три ненульові вектори називаються *компланарними*, якщо напрямлені відрізки, які їх зображають, лежать в одній площині або в паралельних площинах.

З 9-го класу відомо, що будь-який вектор $\vec{c}$ площини можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто що існує єдина впорядкована пара чисел k_1, k_2 таких, що $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$. Подібно до цього будь-який вектор простору можна розкласти за трьома даними некомпланарними векторами.



Мал. 119

Нехай дано три некомпланарні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (мал. 119). Якщо ці три одиничні вектори та довільний вектор AC_1 відкласти від однієї точки A, то за трьома напрямами одиничних векторів і напрямленим відрізком AC_1 можна побудувати паралелепіпед з діагоналлю AC_1. Завжди можна однозначно визначити таку трійку дійсних чисел k_1, k_2, k_3, що $\vec{e}_1k_1 = \overline{AB}$, $\vec{e}_2k_2 = \overline{AD}$, $\vec{e}_3k_3 = \overline{AA_1}$. Тоді $\overline{AC_1} = \vec{e}_1k_1 + \vec{e}_2k_2 + \vec{e}_3k_3$.

Вважають, що даний вектор $\overline{AC_1}$ *розкладено за трьома некомпланарними векторами*.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Як зображають вектори?
2. Що таке координати вектора?

3. Які вектори називають нульовими? Як їх позначають?
4. Які дії можна виконувати над векторами в просторі?
5. Що таке сума векторів?
6. Як знаходять суму векторів за правилом трикутника; паралелограма; паралелепіпеда?
7. Чому дорівнює різниця векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$?
8. Що таке модуль вектора?
9. Які вектори називають колінеарними? А компланарними?

Виконаємо разом

1. Знайдіть довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо

$$\vec{a} = (2; -1; 5),\ \vec{b} = (-3; 0; -2).$$

• **Розв'язання.** Знайдемо координати векторів $2\vec{a}$ і $5\vec{b}$:

$$2\vec{a} = (4; -2; 10),\ 5\vec{b} = (-15; 0; -10).$$

Тоді $\vec{c} = (4 - 15; -2 + 0; 10 - 10) = (-11; -2; 0)$.

А довжина вектора $|\vec{c}| = \sqrt{(-11)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Відповідь. $|\vec{c}| = 5\sqrt{5}$.

2. При яких значеннях a і b вектори $\vec{m} = (2; a; -5)$ і $\vec{n} = (3; 9; b)$ колінеарні?

• **Розв'язання.** Вектори колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{2}{3} = \frac{a}{9} = \frac{-5}{b}$. З рівності $\frac{2}{3} = \frac{a}{9}$ дістаємо $a = 6$, а з рівності $\frac{2}{3} = \frac{-5}{b}$ маємо $b = -7{,}5$.

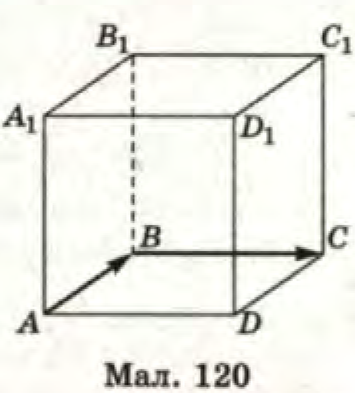
Відповідь. $a = 6$, $b = -7{,}5$.

Виконайте усно

801. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 120). Назвіть вектори:

а) рівні вектору BC; б) протилежні вектору AB;

в) колінеарні вектору AB; г) компланарні з вектором AA_1.



Мал. 120

802. Знайдіть суму та різницю векторів:

а) $\vec{a} = (-3; 0; 6)$, $\vec{b} = (2; -2; 4)$;

б) $\vec{c} = (7; -1; 2)$, $\vec{d} = (-2; 6; 4)$.

803. Дано вектор $\overline{AB} = (a; b; c)$. Знайдіть координати вектора $\overline{BA}$.

804. Знайдіть модуль вектора $\vec{a} = (-3; 0; 4)$.

805. Помножте вектор $\vec{m} = (-8; 4; 0)$ на: $2; -3; 0{,}5; -\frac{1}{4}$.

806. Чи колінеарні вектори:

а) $\vec{a} = (1; 1; 2)$, $\vec{b} = (2; 2; 4)$;
б) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$;
в) $\vec{a} = (2; 4; 7)$, $\vec{b} = (1; 2; 3{,}5)$?

807. Знайдіть суму векторів: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PK}$.

808. Знайдіть різницю векторів: $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PT}$; $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$.

809. Відгадайте ребус (мал. 121).

Мал. 121

А

810. Точка B – середина відрізка AC, а C – середина відрізка BD. Чи рівні вектори:

а) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$?

811. Дано точки $A(1; 2; 3)$ і $B(3; 7; 6)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

812. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $A(1; 2; 5)$ і $B(-3; 2; 4)$;
б) $A(-3; 2; 0)$ і $B(-1; 5; 2)$.

813. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо $M(3; 2; -1)$, $N(1; -2; -1)$.

814. Знайдіть модуль вектора: а) $\vec{a} = (2; 3; -1)$; б) $\vec{c} = (1; 2; 6)$.

815. Модулі векторів $\vec{a} = (2; 1; 3)$ і $\vec{b} = (-1; x; 2)$ рівні. Знайдіть x.

816. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = (a; 2a; -a)$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{54}$.

817. Знайдіть суму та різницю векторів:

а) $\vec{a} = (3; 1; -2)$, $\vec{b} = (3; -2; 5)$;
б) $\vec{a} = (-2; 4; 11)$, $\vec{b} = (2; 6; 21)$;
в) $\vec{a} = (-3{,}2; 4{,}6; 3)$, $\vec{b} = (-0{,}2; 2; 3{,}5)$;
г) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}; 0{,}3; \frac{2}{5}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{3}{4}\right)$.

818. Знайдіть суму векторів та її модуль

$\vec{x} = \left(0; 3; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{y} = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, $\vec{z} = \left(-1; \frac{1}{2}; 2\right)$.

819. Знайдіть суму векторів:

а) $\overrightarrow{CX}$ і $\overrightarrow{XP}$; б) $\overrightarrow{BT}$ і $\overrightarrow{AB}$;

в) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DE}$; г) $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{CK}$.

820. Дано вектор $\vec{a} = (3; -4; 2)$. Знайдіть координати вектора:

а) $3\vec{a}$; б) $\frac{3}{4}\vec{a}$; в) $-0{,}5\vec{a}$.

Б

821. Дано вектори $\vec{p} = (-1; 3; 7)$ і $\vec{q} = (6; 2; -8)$. Знайдіть координати вектора:

а) $2\vec{p} + 3\vec{q}$; б) $\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q}$; в) $2\vec{q} - 3\vec{p}$.

822. Знайдіть модулі векторів $3\vec{a} - \vec{b}$ і $2\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2; 0; -3)$ і $\vec{b} = (5; -1; 2)$.

823. Чи колінеарні вектори $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (2; -2; 4)$, $\vec{b} = (-1; 3; 2)$, $\vec{c} = (-8; 16; 0)$?

824. При яких значеннях m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні:

а) $\vec{a} = (1; m; -3)$, $\vec{b} = (-2; 10; 6)$;

б) $\vec{a} = (m; -2; 4)$, $\vec{b} = (-3; 6; m)$?

825. Дано точки: $A(-1; 4; 6)$, $B(2; -3; 1)$, $C(-1; 0; 2)$, $D(-2; 6; 1)$. Знайдіть координати векторів: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

826. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо $\overrightarrow{OA} = (-1; 2; -6)$, $\overrightarrow{OB} = (2; -4; 3)$, $\overrightarrow{OC} = (2; -4; 6)$?

827. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Виразіть через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$.

Вправи для повторення

828. Намалюйте прямокутну систему координат у просторі та позначте точки: $A(0; 0; 4)$, $B(0; 5; 0)$, $C(3; 0; 0)$, $D(3; 4; 0)$, $E(3; 4; 2)$.

829. Скориставшись умовою попередньої задачі, знайдіть:

а) довжину відрізка AB;

б) координати середини відрізка CD;

в) координати вектора $\overrightarrow{DE}$.

830. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a} = (1; -3)$ і $\vec{b} = (2; 5)$.

§ 26. Застосування векторів

За допомогою координат і векторів можна розв'язувати багато цікавих і важливих задач з фізики, астрономії, геодезії та інших прикладних наук. Частина математики, в якій розглядаються методи розв'язування геометричних задач за допомогою координат і векторів, називається *аналітичною геометрією.* Її вивчають на математичних факультетах і в технічних навчальних закладах.

Коли геометричну задачу розв'язують векторним методом, її спочатку немовби перекладають «мовою векторів», враховуючи такі особливості:

$\overline{OA} = \overline{OB}$ означає, що точки A і B збігаються;

$\overline{AB} = k\overline{CD}$ – прямі AB і CD паралельні або збігаються;

$\overline{AB} = k\overline{AC}$ – точки A, B, C лежать на одній прямій;

$\overline{OA} = k\overline{OB} + p\overline{OC}$ – точки O, A, B, C розміщені в одній площині;

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ – прямі AB і CD перпендикулярні;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ.

Одержані векторні рівності перетворюють за відомими правилами дій над векторами, після чого їх знову перекладають звичайною мовою геометрії.

Останні дві рівності ви вивчали в курсі планіметрії, коли розглядали вектори на площині. Введемо поняття скалярного добутку для простору. Щоб увести це поняття, пояснимо, що розуміють під кутом між двома ненульовими векторами.

Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими – 0°. Наприклад, якщо ABC – рівносторонній трикутник, то кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ дорівнює 60°, а між $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ – 120° (мал. 122).

***Скалярним добутком** двох ненульових векторів називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.*

Якщо хоч один з двох векторів нульовий, їх добуток дорівнює нулю.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їх скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Мал. 122

Можна довести таку властивість. **Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ дорівнює $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.**

Із цієї властивості випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ завжди $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ і $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Враховуючи ці векторні рівності, а також властивості додавання векторів і множення вектора на число, можна зробити висновок, що векторні вирази перетворюються майже так само, як і многочлени. Обчислювати скалярні добутки неважко. А знаючи скалярний добуток векторів та їх модулі, можна обчислити косинус кута між даними векторами.

Задача. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = (1; 2; 2)$ і $\vec{c} = (2; 3; 6)$.

Розв'язання. За означенням, $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$. Тому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{20}{21}.$$

Відповідь. $\cos\varphi = \frac{20}{21}$.

Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює 90°, то їх скалярний добуток дорівнює 0, бо $\cos 90° = 0$. І навпаки, якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює 0, то косинус кута між ними дорівнює 0. А це означає, що кут між ними дорівнює 90°, тобто вектори перпендикулярні. Тому маємо *умову перпендикулярності двох векторів*: два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$. За означенням скалярного добутку,

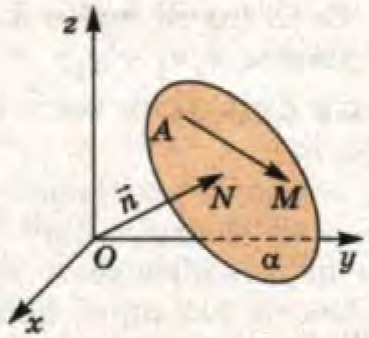
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = \vec{a}^2, \text{ звідки випливає, що } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Отже, векторним методом можна розв'язувати не тільки ті задачі, які містять вектори в умові, але й набагато ширший клас задач. Тут потрібно пам'ятати, що, розв'язуючи такі задачі, треба спочатку ввести вектори та сформулювати умову задачі мовою векторів.

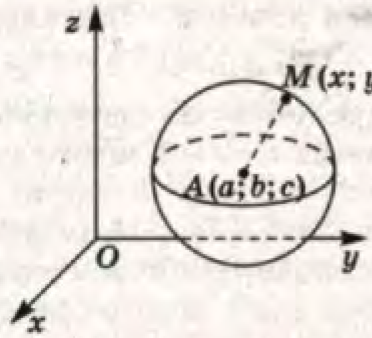
Задача. Доведіть, що рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$, має вигляд $ax + by + cz + d = 0$.

Розв'язання. Нехай площина α проходить через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$, а $M(x; y; z)$ – довільна точка площини α (мал. 123). Вектори $\vec{n} = (a; b; c)$ і $\overline{AM} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ перпендикулярні. Отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



Мал. 123



Мал. 124

Це й буде шуканим рівнянням площини α. Якщо розкрити дужки та позначити число $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, то дістанемо рівняння $ax + by + cz + d = 0$.

Сфера радіуса r із центром у точці $A(a; b; c)$ – це множина точок простору, віддалених від A на відстань r (мал. 124). Тому координати кожної точки $M(x; y; z)$ даної сфери задовольняють рівняння

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Це – рівняння сфери радіуса r із центром у точці $A(a; b; c)$. Якщо $a = b = c = 0$, то маємо рівняння сфери радіуса r із центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Поняття вектора в математику ввів В.Р. Гамільтон.

ВІЛЬЯМ РОВАН ГАМІЛЬТОН

(1805–1865)

Ірландський математик. Читати навчився в 3 роки, в 10 – став студентом, у 12 – знав 10 мов. З 22 років – професор астрономії, директор астрономічної обсерваторії. Його основні праці стосуються механіки, диференціальних рівнянь і функціонального аналізу. Досліджував числові множини, створив систему кватерніонів, увів термін «вектор». У геометрії досліджував хвильові поверхні, в алгебрі – групи, одну з яких називають групою Гамільтона.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке векторний метод розв'язування задач?
2. Які векторні формули вам відомі?

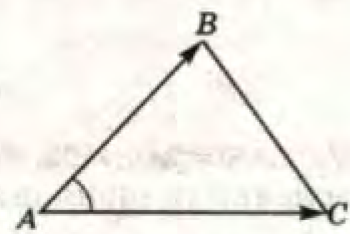
3. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
4. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$?
5. Назвіть умову перпендикулярності двох векторів.
6. Як знайти довжину вектора $\vec{a}$?

Виконаємо разом

1. Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(3;\ -1;\ 5)$, $B(-1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 3)$.

● **Розв'язання.** Введемо вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ (мал. 125) і знайдемо їх координати:

$$\overrightarrow{AB} = (-4;\ 0;\ -3),\ \overrightarrow{AC} = (0;\ 2;\ -2).$$



Мал. 125

За означенням скалярного добутку,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos A.$$

Тому $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + 0 + 6 = 6$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16 + 0 + 9} = 5$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0 + 4 + 4} = 2\sqrt{2}$, то

$$\cos A = \frac{6}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

Відповідь. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

2. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (4;\ 2m;\ 5)$ і $\vec{b} = (m;\ 3;\ 4)$ перпендикулярні?

● **Розв'язання.** Вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 6m + 20 = 10m + 20$, то, розв'язавши рівняння $10m + 20 = 0$, знайдемо, що $m = -2$.

Відповідь. $m = -2$.

3. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;\ -3;\ 5)$ і паралельна площині, рівняння якої $2x - 3y + z + 10 = 0$.

● **Розв'язання.** Дана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (2;\ -3;\ 1)$. Тому паралельна їй площина, рівняння якої треба скласти, перпендикулярна до цього вектора, тобто її рівняння має вигляд $2x - 3y + z + d = 0$. Залишається знайти d. Оскільки точка $A(1; -3; 5)$ належить цій площині, то $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) + 5 + d = 0$, звідки $d = -16$.

Відповідь. $2x - 3y + z - 16 = 0$.

Виконайте усно

831. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 126).

а) Знайдіть кут між векторами:

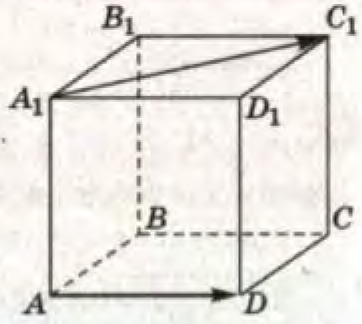
$\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{CC_1}$;

$\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$.

б) Знайдіть:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DD_1}$;

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{D_1D}$.



Мал. 126

832. Накресліть тетраедр $ABCD$, у якого кожне ребро дорівнює a. Обчисліть скалярний добуток:

а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$.

833. Укажіть координати центра і радіус сфери, заданої рівнянням $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$.

834. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (0; -5; 6)$ і $\vec{b} = (3; 0; -1)$;

б) $\vec{a} = (1; 1; 1)$ і $\vec{b} = (-2; 3; 2)$.

А

835. У ΔABC $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. Знайдіть кути між векторами:

а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

836. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх довжини та кут між ними дорівнюють:

а) 5; 12; 60°; б) 3; $\sqrt{2}$; 45°;

в) 5; 6; 120°; г) 4; 7; 180°.

837. Трикутник ABC – рівносторонній; $AB = 6$. Знайдіть скалярні добутки: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

838. Знайдіть скалярні добутки векторів:

а) $\vec{a} = (1; 2; -3)$ і $\vec{b} = (-8; 2; 4)$;

б) $\vec{m} = (-2; -3; 2)$ і $\vec{n} = (2; 3; 0{,}5)$;

в) $\vec{p} = (-3; -7; 1)$ і $\vec{k} = (-2; 10; -6)$;

г) $\vec{c} = (4\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{5})$ і $\vec{d} = (2; 3; -10)$.

839. Дано вектори $\vec{p} = (-1; 3; 2)$ і $\vec{q} = (-3; -1; 2)$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{p} - \vec{q}$; б) $\vec{p} + 2\vec{q}$ і $3\vec{p} - \vec{q}$; в) $2\vec{p} + \vec{q}$ і $3\vec{p} - 2\vec{q}$.

840. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (3; 1; 1)$;

б) $\vec{a} = (2; 6; 4)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$;

в) $\vec{a} = (-4; -8; 1)$, $\vec{b} = (-3; 3; 0)$;

г) $\vec{a} = (-3; -4; 0)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$.

841. Знайдіть кут між векторами:

а) $\vec{a} = (-2; 0; 2)$ і $\vec{b} = (0; 0; 4)$;

б) $\vec{x} = (1; 1; 0)$ і $\vec{y} = (0; -1; 1)$;

в) $\vec{c} = (0; 0; 2)$ і $\vec{d} = (1; 0; -1)$;

г) $\vec{p} = (0; 2; 2)$ і $\vec{k} = (3; 0; 3)$.

842. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(2; 1; 3)$, $B(7; 4; 5)$, $C(4; 2; 1)$ – прямокутний.

843. При яких значеннях x вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні:

а) $\vec{m} = (1; 2; 3)$, $\vec{n} = (x; 3; 1)$;

б) $\vec{m} = (-3; x; 2)$, $\vec{n} = (9; x; 1)$;

в) $\vec{m} = (x + 2; x; 3)$, $\vec{n} = (1; 3; -2)$;

г) $\vec{m} = (x - 3; x; 1)$, $\vec{n} = (4; x; -3x)$?

Б

844. Дано три точки: $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$ і $C(-1; 1; 2)$. Знайдіть координати такої точки D осі z, щоб виконувалась умова $AD \perp BC$.

845. Дано точки $A(1; 4; 8)$ і $B(-4; 0; 3)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

846. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$; б) $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.

847. Установіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

а) $\overline{AD} = \overline{BC}$; б) $\overline{BC} = 0,5\overline{AD}$.

848. Визначте вид трикутника ABC, якщо $\overline{CA} = (1; 4; 2)$, $\overline{CB} = (-4; 1; 0)$.

849. Які точки належать площині $x + y + z + 3 = 0$: $A(0; 0; 1)$, $B(-1; 1; -3)$, $C(2; 0; -5)$, $D(0; -3; 3)$?

850. Яка з площин $2x - 4y + 6z - 2 = 0$, $2x + 4y + 6z + 3 = 0$, $-4x + 8y - 12z = 0$ паралельна площині $x - 2y + 3z - 5 = 0$?

851. Дано сферу $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 9$. На якій відстані від її центра має знаходитися площина, щоб вона: а) перетинала сферу; б) дотикалася до сфери; в) не мала зі сферою спільних точок?

852. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (5; 0; -3)$ і проходить через точку $A(2; -1; 4)$.

853. Дано точку $A(a; b; c)$. Напишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат O перпендикулярно до прямої OA.

854. Дано точки $A(1; 2; -3)$ і $B(4; -2; 4)$. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить: а) через точку A; б) через точку B; в) через середину відрізка AB.

855. Складіть рівняння сфери радіуса $r = 4$ з центром у точці $M(1; -3; 5)$.

856. Складіть рівняння сфери з центром у точці $M(-1; 0; 2)$, коли відомо, що цій сфері належить точка $A(3; 1; 1)$.

857. Напишіть рівняння сфери діаметром AB, якщо $A(2; -3; 5)$, $B(4; 1; -3)$.

Вправи для повторення

858. Вектор, довжина якого дорівнює 10, має три однакові координати. Знайдіть їх.

859. Від точки $A(2; -5; 4)$ відкладено вектор $\overline{AB} = \vec{a}$. Знайдіть координати точки B, якщо $\vec{a} = (1; 3; -2)$.

860. Запишіть рівняння кола радіуса 5 із центром:
а) у початку координат; б) у точці $O(1; -2; 3)$.

Самостійна робота № 6

Варіант 1

1. Дано точки $M(2; -1; 3)$ і $N(2; 5; 11)$. Знайдіть: а) довжину відрізка MN; б) координати середини відрізка MN; в) координати вектора $\overline{MN}$.

2. Дано вектори $\vec{a} = (3; 0; 7)$ і $\vec{b} = (1; 2; 0)$. Знайдіть:
а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $2\vec{a}$; в) $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, якщо $A(2; 0; -1)$, $B(1; 3; 0)$ і $C(0; -1; 2)$.

Варіант 2

1. Дано точки $M(3; -5; 3)$ і $N(3; 1; 11)$. Знайдіть: а) довжину відрізка MN; б) координати середини відрізка MN; в) координати вектора $\overline{MN}$.

2. Дано вектори $\vec{a} = (0; 4; 5)$ і $\vec{b} = (3; 2; 0)$. Знайдіть:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $3\vec{a}$; в) $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, якщо $A(1; 0; 3)$, $B(0; -1; 2)$ і $C(3; 4; 0)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке прямокутна система координат у просторі?
2. Що таке координати точки в просторі?
3. Як у даній системі координат побудувати точку за даними координатами?
4. Які координати мають точки, що лежать на осі абсцис (ординат, аплікат)?
5. Запишіть формулу для обчислення координат середини відрізка.
6. За якою формулою знаходять відстань між точками?
7. Як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початку і кінця?
8. Запишіть формули для обчислення: а) суми векторів; б) різниці векторів.
9. За якими формулами знаходять скалярний добуток векторів?
10. Сформулюйте умову перпендикулярності двох векторів.
11. Запишіть рівняння сфери радіуса r з центром у точці $B(a; b; c)$.

Історичні відомості

Метод координат на площині вперше розробили Р. Декарт і П. Ферма в XVII ст. На тривимірний простір його поширили лише у XVIII ст. Й. Бернуллі, А. Клеро та ін.

Поняття «вектор» увів у 1846 р. ірландський математик В. Гамільтон. Позначення $\vec{r}$ запропонував у 1887 р. О. Коші. Першу працю «Теорія векторного числення» надрукував у 1853 р. професор Київського університету В.П. Єрмаков.

Спочатку вектори використовували переважно у фізиці для зображення сили, швидкості та інших векторних величин, тому вектори ототожнювали з напрямленими відрізками. У сучасній математиці поняття вектора набагато змістовніше. Вектор – це елемент векторного простору. А векторним простором називається будь-яка множина, для елементів якої визначені операції додавання і множення на число (у цьому разі мають виконуватися 4 закони додавання та 4 закони множення). Приклади векторних просторів: множина всіх пар точок простору; множина всіх трійок дійсних чисел; множина всіх паралельних перенесень площини чи простору тощо.

У двовимірному просторі (на площині) точка чи вектор задається двома координатами, у тривимірному – трьома. За аналогією можна розглядати простір, точки та вектори якого визначаються чотирма координатами. Такий простір називають чотиривимірним. Чудовий матеріал для фантастів! Але математики, які створили й добре знають багатовимірні простори, сприймають їх практичніше й реальніше.

Геометрію чотирьох вимірів одним з перших опрацював український учений і громадський діяч М.І. Гулак.

МИКОЛА ІВАНОВИЧ ГУЛАК

(1822–1899)

Народився на Полтавщині, працював у канцелярії Київського генерал-губернатора. Був одним із засновників Кирило-Мефодіївського братства. За це 1847 р. його заарештували. Тільки через 12 років він повернувся в Україну, працював учителем математики, географії та російської мови в Одесі, Керчі, Ставрополі, у Грузії.

У 1877 р. в Тифлісі опублікував монографію «Спроба геометрії чотирьох вимірів». Ще одну працю – «Етюди про трансцендентні рівняння» (французькою мовою) він надрукував у Одесі. Р. Іваничук написав про М. Гулака роман «Четвертий вимір».

Головне в розділі 5

Прямокутна система координат дає можливість встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору і трійками дійсних чисел: $A(x; y; z)$ – точка з абсцисою x, ординатою y і аплікатою z.

Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їх відповідних координат.

Якщо точка $C(x; y; z)$ – середина відрізка з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Рівняння площини: $ax + by + cz + d = 0$.
Рівняння сфери радіуса r:
з центром у початку координат –

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

з центром у точці $A\ (a;\ b;\ c)$ –

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Вектор – елемент векторного простору. Зображати ненульові вектори можна напрямленими відрізками. Будь-які вектори зручно зображати в координатній формі. Координатами вектора з початком у точці $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1;\ y = y_2 - y_1;\ z = z_2 - z_1$. Записують так: $\overline{AB} = (x;\ y;\ z)$.

Модулем вектора називають довжину напрямленого відрізка, що його зображає. Позначають його символом $\left|\overline{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Якщо $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Сумою двох векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$.

Для додавання будь-яких векторів правильними є переставний і сполучний закони. Геометрично додавати вектори можна за правилом трикутника, паралелограма або паралелепіпеда.

Як би не розміщувалися в просторі точки A, B, C, D, завжди $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$.

Різницю двох векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ можна знаходити, користуючись рівністю

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

Будь-який вектор $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ можна множити на довільне дійсне число k так:

$$k\vec{a} = (kx;\ ky;\ kz).$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і чисел m, n завжди

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b};\ \ (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a};\ \ m\vec{a} = m \cdot |\vec{a}|.$$

Скалярним добутком двох векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Математик втілює ідеї у визначені форми... Краса і серйозність є критерієм досконалості цих форм.

Г. Харді

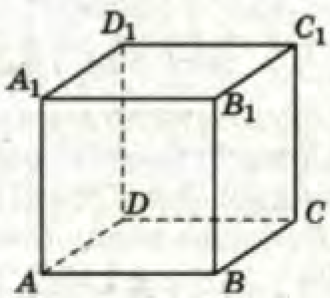
6 Геометричні тіла. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл

ТЕМИ РОЗДІЛУ

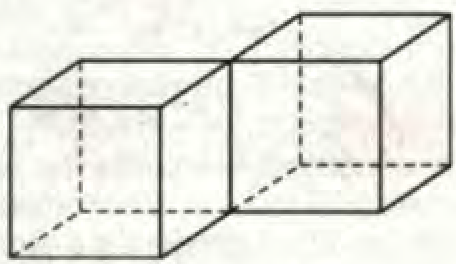
- Геометричні тіла та многогранники.
- Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед.
- Піраміда. Правильна піраміда.
- Площа поверхні призми, піраміди.
- Правильні многогранники.
- Тіла обертання. Циліндри. Конуси.
- Куля і сфера. Площина, дотична до сфери.
- Комбінації геометричних тіл.
- Площа поверхні циліндра, конуса, сфери.
- Об'єм призми та циліндра.
- Об'єм тіла обертання. Об'єм піраміди, конуса та кулі.

§ 27. Геометричні тіла та многогранники

Розглянемо фігури, які називають *геометричними тілами*. Прикладом геометричного тіла є *куб* (мал. 127). Його поверхня складається з шести рівних квадратів. Поверхня куба поділяє весь простір на дві просторові області: внутрішню (обмежену) та зовнішню (необмежену). Куб є об'єднанням його поверхні й обмежуваної нею внутрішньої просторової області. Кожне геометричне тіло має деяку поверхню та обмежену нею внутрішню просторову область. Вважається, що просторова область геометричного тіла складається з одного «шматка», а кожна точка геометричного тіла належить його просторовій області або поверхні.



Мал. 127



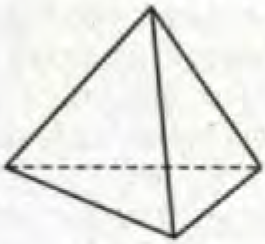
Мал. 128

Кожна призма, піраміда, циліндр, конус, куля – це геометричні тіла. А плоска фігура, лінія, поверхня – не тіла, бо вони не мають просторових областей. Не вважають геометричним тілом також об'єднання двох кубів зі спільним ребром (мал. 128), бо ця фігура містить дві роз'єднані просторові області, а не одну.

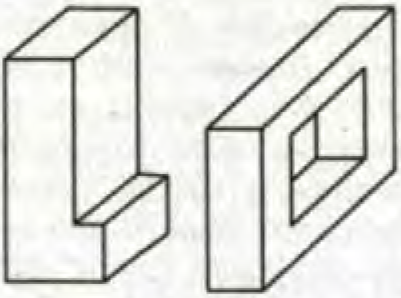
Оскільки в геометрії не розглядають інших тіл, крім геометричних, то їх часто називають просто *тілами*. Усі геометричні фігури можна класифікувати так:

Геометричне тіло, поверхня якого складається з многокутників, називається *многогранником*. Ці многокутники, їх сторони та вершини називаються відповідно *гранями*, *ребрами* та *вершинами многогранника*.

Найменше число граней многогранника – чотири. Многогранник, який має лише чотири грані, називається *тетраедром* (грец. τετρας – чотири, εδρα – грань). Якщо всі ребра тетраедра рівні, його називають *правильним тетраедром* (мал. 129).



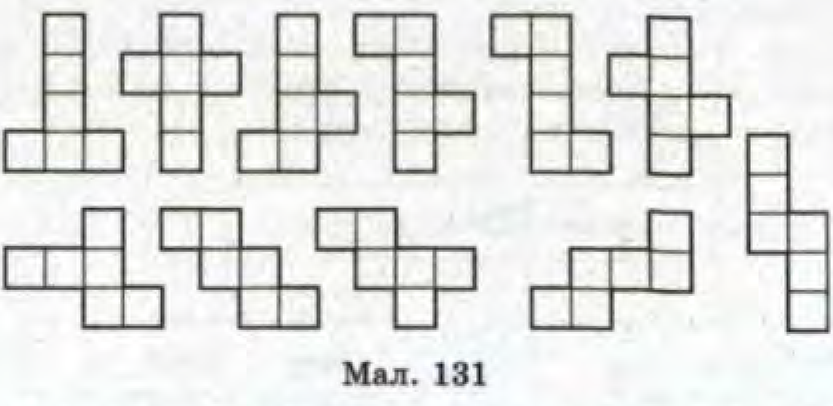
Мал. 129



Мал. 130

Як і багато інших геометричних фігур, многогранники бувають *опуклі* та *неопуклі*. Опуклий многогранник розміщений з одного боку від площини будь-якої його грані. Куб і тетраедр – опуклі многогранники. Приклади неопуклих многогранників наведені на малюнку 130.

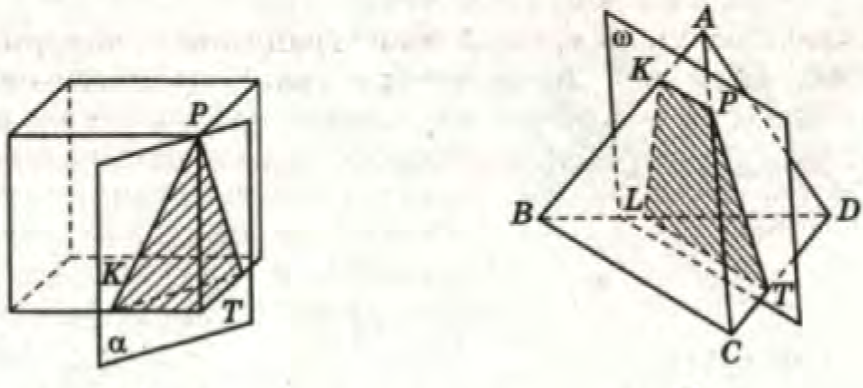
Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розгорнути на площині, то матимемо *розгортку* многогранника. Поверхню одного й того самого многогранника можна розгорнути по-різному. Наприклад, існує 11 різних розгорток куба (мал. 131). *Площею поверхні* многогранника називається сума площ усіх його граней; вона дорівнює площі розгортки даного многогранника.



Мал. 131

Якщо принаймні дві точки многогранника розміщені по різні боки від деякої площини, то ця площина перетинає цей многогранник. Її називають *січною площиною*, а множину точок, спільних для многогранника та січної площини, –

перерізом многогранника цією площиною. На малюнку 132, *а* зображено січну площину α, яка перетинає куб по трикутнику KPT.



а) б)

Мал. 132

На малюнку 132, *б* зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω; їх переріз – чотирикутник $KPTL$.

Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: трьома точками, що не лежать на одній прямій; прямою і точкою тощо.

Цікаву теорему про співвідношення між числом граней **Г**, ребер **Р** і вершин **В** довів Л. Ейлер:

для будь-якого опуклого многогранника **В + Г – Р** = 2.

Перевірте це твердження для куба й тетраедра.

З різними, іноді дуже складними, матеріальними моделями многогранників мають справу каменярі, теслі, шліфувальники, стругальники, гранувальники, мінералоги, кристалографи та інші спеціалісти.

На малюнку 133 зображено природні форми кристалів гранату.

Мал. 133

Мал. 134

Відомий чеський письменник Карел Чапек, ознайомившись із кристалами та зрозумівши їх роль у житті людей, проспівав їм великий гімн – словом і малюнком (мал. 134): «І в людині захована сила кристалізації... Число і фантазія, закон і достаток – ось живі, творчі сили природи: не сидіти під землею деревом, а створювати кристали й ідеї, ось що означає бути разом з природою!»

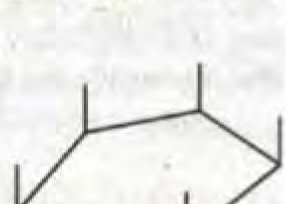
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке многогранник? Назвіть його елементи.
2. Як пов'язані поняття: геометричні фігури, тіла й многогранники? Покажіть на діаграмі.
3. Які многогранники називають опуклими, а які – неопуклими?
4. Що таке площа поверхні многогранника?
5. Сформулюйте теорему Ейлера про многогранники.

Виконаємо разом

1. Многогранник має 9 ребер. Доведіть, що його гранню не може бути п'ятикутник.

• **Розв'язання.** Припустимо, що многогранник має п'ятикутну грань, тоді з кожної вершини цієї грані виходить принаймні по одному ребру (мал. 135). Такий многогранник має не менше 10 ребер. Тобто, якщо многогранник має тільки 9 ребер, то його гранню не може бути п'ятикутник.

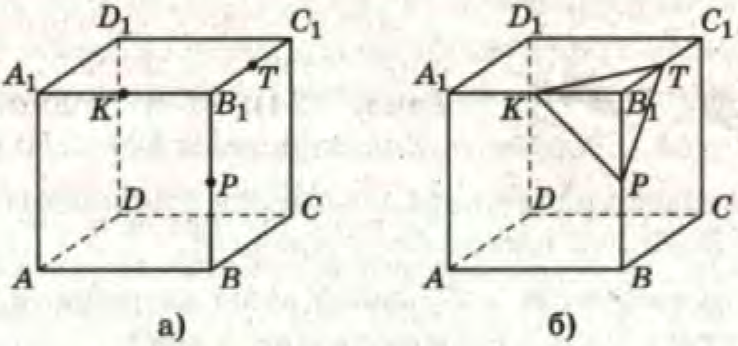


Мал. 135

2. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T – середини ребер A_1B_1, BB_1 і B_1C_1 (мал. 136, *а*).

• **Розв'язання.** Точки K і P лежать у площині грані ABB_1A_1 куба і в січній площині (мал. 136, *б*). Отже, ці площини перетинаються по прямій KP. Січна площина перетинає квадрат ABB_1A_1 по відрізку KP. Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP.

Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT. Це і є шуканий переріз.



Мал. 136

Виконайте усно

861. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища.

862. Наведіть приклади фігур, які не є тілами.

863. Наведіть приклади многогранників з навколишнього середовища. Які з них опуклі, а які – неопуклі?

864. Назвіть многогранник, який має найменшу кількість граней. Скільки у нього вершин; ребер?

865. Скільки вершин, ребер і граней має куб?

866. Ребро куба дорівнює a. Чому дорівнює площа його поверхні?

867. Площа поверхні куба дорівнює 6 дм^2. Знайдіть довжину його ребра.

А

868. Намалюйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і вершин він має? Як називається такий многогранник?

869. Намалюйте многогранник, який має 5 граней і 5 вершин. Скільки ребер він має?

870. Намалюйте многогранник, який має 5 граней і 6 вершин. Скільки ребер він має?

871. Чи існує многогранник, відмінний від тетраедра, всі грані якого – трикутники?

872. Намалюйте розгортку правильного тетраедра, довжина ребра якого дорівнює 2 см. Знайдіть площу розгортки.

873. Площа поверхні правильного тетраедра – 36 см^2. Знайдіть довжину його ребра.

874. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань між його: а) протилежними гранями; б) протилежними ребрами; в) найближчими вершинами; г) найвіддаленішими вершинами.

875. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть довжину його діагоналі.

876. Площі трьох граней паралелепіпеда дорівнюють 2 м^2, 3 м^2 і 4 м^2. Знайдіть площу його поверхні.

877. Ребро одного куба в 3 рази більше за ребро другого. Як відносяться площі поверхонь цих кубів?

878. Як відносяться довжини ребер двох правильних тетраедрів, якщо площі їх поверхонь дорівнюють S_1 і S_2?

Б

879. Зобразіть дві фігури та розмістіть їх так, щоб: а) їх об'єднання було тілом; б) їх переріз був тілом; в) їх об'єднання не було тілом; г) їх переріз не був тілом.

880. Точка K – середина ребра AD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точки B, C і K.

881. Довжина ребра правильного тетраедра дорівнює a. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

882. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його периметр.

883. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: точки A, B_1 і D_1; точки A, C та середину ребра DD_1.

884. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз його площиною, яка проходить через точки A, B_1 і C. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 5$ дм.

885. $ABCD$ – правильний тетраедр; точки K і P – середини його ребер AB і BC. Знайдіть периметр перерізу даного тетраедра площиною, яка проходить через точки K, P і D, якщо $AB = 10$ см.

886. Перевірте на конкретних прикладах, що коли опуклий многогранник має В вершин, Г граней і Р ребер, то В + + Г − Р = 2.

887. Практичне завдання. Виріжте з цупкого паперу розгортку: а) куба; б) тетраедра.

Вправи для повторення

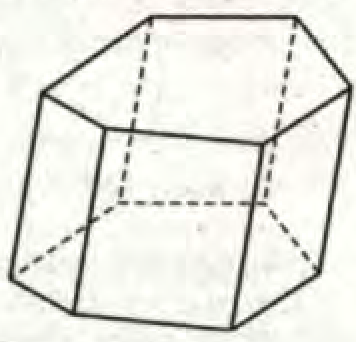
888. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
а) $\vec{a} = (3; 4; 5)$, $\vec{b} = (-3; 4; 5)$; б) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 5)$.

889. Знайдіть середину відрізка MN, якщо $M(2; 4; -8)$, а $N(-2; 6; 0)$.

890. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо його вершини лежать у точках $A(0; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$ і $C(0; 0; 4)$.

§ 28. Призми

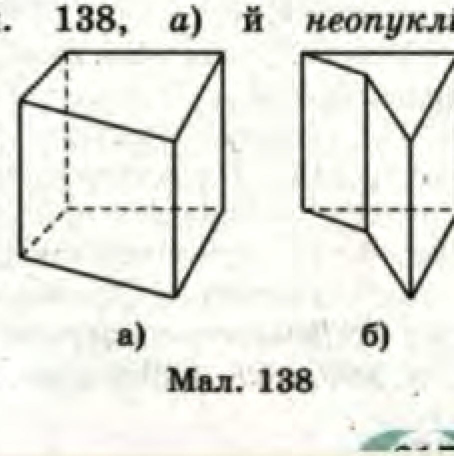
Многогранник, у якого дві грані − рівні n-кутники, а решта n граней − паралелограми, називається *n-кутною призмою* (мал. 137). Два рівні n-кутники, про які йдеться в означенні, називають *основами призми*. Їх відповідні сторони попарно паралельні, тому основи призми лежать у паралельних площинах. Усі грані призми, які не є основами, та ребра, які не є сторонами основ, називають відповідно *бічними гранями* та *бічними ребрами* призми.



Мал. 137

Призму називають *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ. Усі інші призми називають *похилими*. *Висота призми* − відстань між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра.

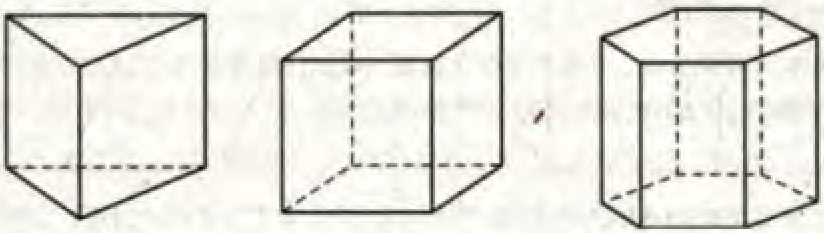
Призми бувають *опуклі* (мал. 138, *а*) й *неопуклі* (мал. 138, *б*). Призму називають *правильною*, якщо вона пряма і її основою є правильний многокутник.



а) б)

Мал. 138

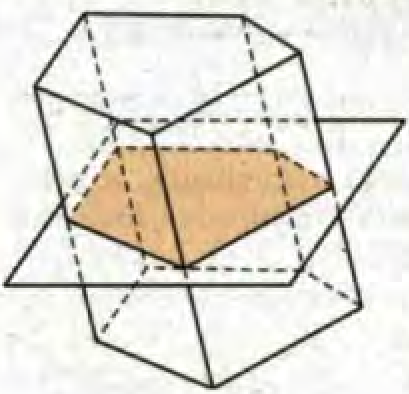
Усі бічні грані прямої призми − прямокутники. На малюнку 139 зображено правильні трикутну, чотирикутну й шестикутну призми. Кожна правильна призма опукла. Усі бічні грані правильної призми – рівні прямокутники.



а) б) в)

Мал. 139

Переріз призми площиною, яка проходить через її бічне ребро та діагональ основи, називають *діагональним перерізом*. Діагональний переріз кожної призми – паралелограм, а прямої призми – прямокутник. Діагоналлю призми називають діагональ її діагонального перерізу. Січна площина, паралельна основам призми, перетинає її по многокутнику, який дорівнює основі (мал. 140).



Мал. 140

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту:

$$S_б = P \cdot h.$$

(Спробуйте довести це твердження самостійно).

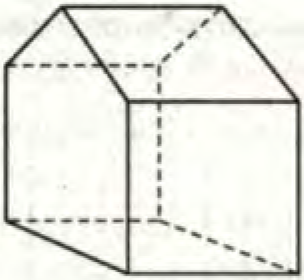
Площа поверхні призми дорівнює сумі площ її бічної поверхні та двох основ:

$$S = S_б + 2S_о.$$

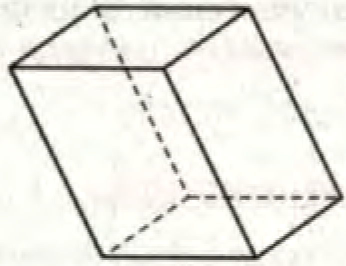
Чи можна вважати призмою зображений на малюнку 141 многогранник? Так, це призма, але поставлена на бічну грань. Назва фігури не залежить від того, як вона розміщена в просторі.

Призма, основою якої є паралелограм, називається *паралелепіпедом*.

Усі шість граней паралелепіпеда – паралелограми (мал. 142). Паралелепіпед, чотири грані якого є прямокутниками, називають *прямим*. Якщо всі шість граней паралелепіпеда – прямокутники, то його називають *прямокутним паралелепіпедом*. Правильна чотирикутна призма – окремий вид прямокутного паралелепіпеда. Прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні, називають *кубом*.



Мал. 141



Мал. 142

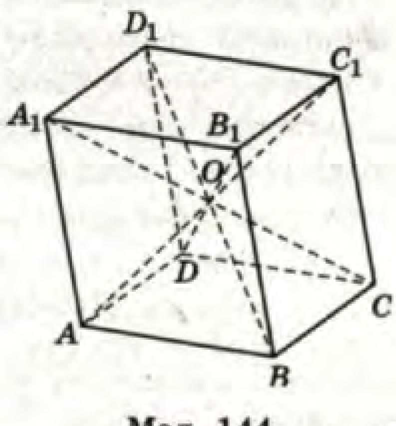
Співвідношення між різними видами паралелепіпедів подані на схемі (мал. 143).

Мал. 143

Теорема 6. ***Діагоналі кожного паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться цією точкою навпіл.***

•Доведення.

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – довільний паралелепіпед (мал. 144). Доведемо, що серединами діагоналей AC_1, BD_1, CA_1 і DB_1 є одна й та сама точка. Ребра AB, DC, D_1C_1 і A_1B_1 рівні й паралельні, тому чотирикутники ABC_1D_1 і DCB_1A_1 – паралелограми. Діагоналі кожного паралелограма точкою перетину діляться навпіл. Нехай діагоналі AC_1 і BD_1 першого паралелограма перетинаються в точці O, а діагоналі DB_1 і CA_1 другого – в точці O_1.



Мал. 144

Точки O і O_1 – середини відрізків AC_1 і DB_1, які є діагоналями паралелограма ADC_1B_1, тому вони збігаються. Отже, всі чотири діагоналі паралелепіпеда проходять через одну й ту саму точку O і діляться нею навпіл. А це й треба було довести.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке призма? Назвіть елементи призми.
2. Якими бувають призми?
3. Які призми називають прямими? А правильними?
4. Що таке діагональ призми? А діагональна площина; діагональний переріз призми?
5. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми? А непрямої?
6. Чому дорівнює площа поверхні довільної призми?
7. Сформулюйте означення паралелепіпеда. Назвіть його елементи.
8. Які бувають паралелепіпеди? Покажіть на діаграмі.
9. Який паралелепіпед називається прямим?
10. Сформулюйте і доведіть властивості діагоналей паралелепіпеда.

Виконаємо разом

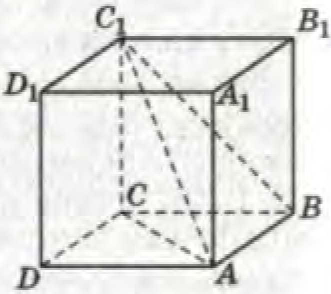
1. Площа поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 40 см^2, а площа бічної поверхні – 32 см^2. Знайдіть висоту призми.

● **Розв'язання.** Площі двох основ призми дорівнюють $40 - 32 = 8$ (см^2), а однієї – 4 см^2. Тому сторона основи дорівнює 2 см. Площа однієї бічної грані $32 : 4 = 8$ (см^2). Якщо висота призми дорівнює h, то $2h = 8$, звідки $h = 4$ (см).

2. Доведіть, що **квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.**

● **Розв'язання.** Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – довільний прямокутний паралелепіпед (мал. 145). Трикутники ACC_1 і ABC прямокутні. Тому

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2.$$



Мал. 145

Виконайте усно

891. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму призми.

892. Дано правильну трикутну призму. Чому дорівнює двогранний кут при: а) ребрі основи; б) бічному ребрі?

893. Чому дорівнює площа поверхні куба з ребром завдовжки 2 см?

894. Три попарно непаралельні ребра паралелепіпеда мають довжини 1 дм, 2 дм і 3 дм. Знайдіть суму довжин усіх ребер паралелепіпеда.

895. Площі трьох граней паралелепіпеда дорівнюють 2 см^2, 3 см^2 і 4 см^2. Чому дорівнює площа поверхні паралелепіпеда? А площа бічної поверхні?

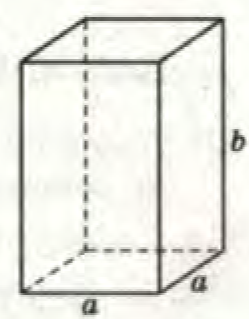
896. Скільки граней, ребер і вершин має п'ятикутна призма? Зобразіть її.

897. Чи рівні діагональні перерізи правильної чотирикутної призми? А правильної п'ятикутної?

А

898. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 48 см^2. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо довжина сторони основи дорівнює 4 см.

899. На малюнку 146 зображено правильну чотирикутну призму, сторона основи якої дорівнює a, а бічне ребро – b. Знайдіть:
а) площу бічної грані;
б) площу основи;
в) площу бічної поверхні;
г) площу поверхні призми;
ґ) діагональ основи;
д) діагональ бічної грані.



Мал. 146

900. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні – 27 см^2. Знайдіть площу основи призми.

901. Побудуйте переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через вершини A, B і середину ребра A_1C_1.

902. Три грані призми – рівні квадрати зі стороною 2 см, а дві інші – трикутники. Накресліть цю призму та її розгортку.

903. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами: а) 10 см, 16 см і 22 см; б) a, b, c.

904. Дано паралелепіпед, кожна грань якого – ромб зі стороною a і кутом α. Знайдіть площу його поверхні.

905. Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда, виміри якого – 3 см, 4 см і 12 см.

906. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого – 4 см, 4 см і 10 см.

907. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайдіть їх довжини, якщо площа його поверхні дорівнює 550 см^2.

908. Розміри цеглини – 250×120×65 мм. Знайдіть відстань між її найвіддаленішими точками.

909. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 42 см^2, 72 см^2 і 84 см^2. Знайдіть довжини його ребер.

910. Знайдіть довжину діагоналі куба, ребро якого дорівнює a.

911. Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а площа основи – 144 см^2.

912. Площа поверхні правильної чотирикутної призми – 40 см^2, а бічної поверхні – 32 см^2. Знайдіть висоту призми.

Б

913. Доведіть, що n-кутна призма має $n + 2$ грані, $3n$ ребер і $2n$ вершин.

914. Чи існує призма, яка має 100 ребер?

915. Чи можуть площі бічних граней правильної трикутної призми дорівнювати 20 см^2, 30 см^2 і 50 см^2?

916. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює S. Знайдіть площу її бічної поверхні.

917. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямий паралелепіпед, K, L, M – середини ребер AB, A_1B_1, B_1C_1. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки K, L, N. Знайдіть площу перерізу, якщо $AA_1 = 6$ см, $LM = 10$ см.

918. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 6 см і 8 см, а бічне ребро – 12 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через точки B, C_1, D.

919. Виміри прямокутного паралелепіпеда – 3, 4 і 5. Знайдіть кут між діагоналлю паралелепіпеда та його найменшою гранню.

920. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h, а сторона основи – a. Знайдіть: а) площу її поверхні; б) довжину діагоналі призми; в) площу діагонального перерізу призми.

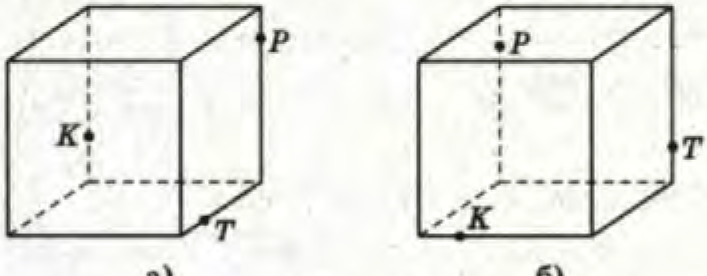
921. Бічне ребро призми дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту призми.

922. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть площу: а) діагонального перерізу; 2) бічної поверхні призми.

923. У кімнаті, що має форму прямокутного паралелепіпеда, є два вікна та одні двері. Скільки рулонів шпалер (без малюнка) потрібно придбати, щоб обклеїти стіни цієї кімнати, якщо відомі розміри (у м): кімнати – $4{\times}5{\times}2{,}8$; вікон – $1{,}2{\times}1{,}8$; дерей – $0{,}9{\times}2{,}1$; рулона – $0{,}5{\times}10$. Врахуйте, що відходи становлять 5 %.

924. Намалюйте прямокутний паралелепіпед. Позначте на його ребрах точки M, K, H так, щоб перерізом паралелепіпеда площиною MKH був п'ятикутник.

925. Перенесіть малюнки 147 у зошит і на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною KPT.



Мал. 147

926. Задача для кмітливих. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна призма, у якої $AA_1 = 15$ см, $AB = BC = 5$ см. Знайдіть найкоротшу відстань по поверхні призми між серединами ребер AB і C_1D_1.

927. Практичне завдання. Виготовте з цупкого паперу розгортку похилого паралелепіпеда.

Вправи для повторення

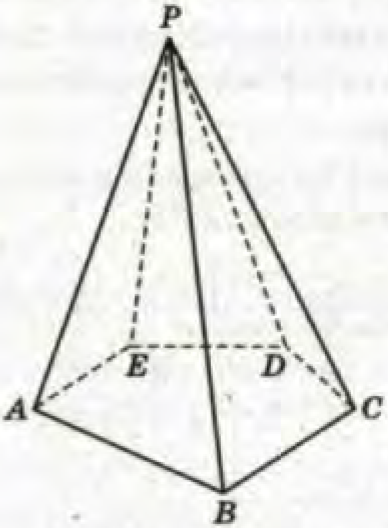
928. Площина BC_1D поділяє куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на два многогранники. Укажіть кількість вершин, ребер і граней у кожному з них.

929. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (1; 2; -3)$ і $\vec{b} = (-5; 1; -1)$.

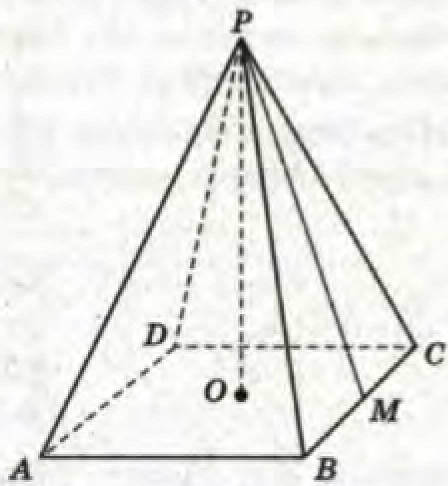
930. Намалюйте многогранник, який має 7 граней. Скільки вершин і ребер він може мати?

§ 29. Піраміди

Пірамідою називається многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а решта – трикутники, що мають спільну вершину (мал. 148). Ці трикутники зі спільною вершиною називають *бічними гранями*, а їх спільну вершину – *вершиною піраміди*. Грань, яка не є бічною, – *основа* піраміди. Залежно від кількості сторін основи розрізняють трикутні, чотирикутні, ..., *n*-кутні піраміди. Трикутну піраміду називають також *тетраедром*.



Мал. 148



Мал. 149

Ребро, яке не є стороною основи, називається *бічним ребром піраміди*. Січна площина, яка проходить через два несуміжні бічні ребра піраміди, перетинає її по трикутнику, який називають *діагональним перерізом* піраміди. *Висотою піраміди* називають перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи. Довжину цього перпендикуляра також називають висотою піраміди. Це – омоніми.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основа – правильний многокутник, центр якого збігається з основою висоти піраміди. Усі бічні ребра правильної піраміди – рівні, усі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники. (Доведіть самостійно). Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають *апофемою піраміди*. Неправильна піраміда апофем не має. На малюнку 149 зображено правильну чотирикутну піраміду. Відрізок PO – її висота, а PM – апофема.

Бічна поверхня піраміди складається з поверхонь усіх її бічних граней.

Теорема 7. ***Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди.***

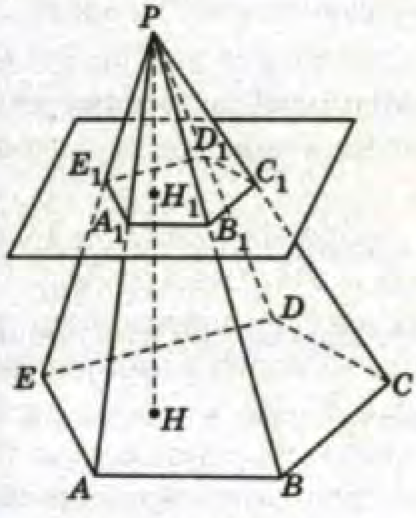
● **Доведення.** Якщо сторона основи правильної n-кутної піраміди дорівнює a, а апофема – l, то площа однієї бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}al$. Бічна поверхня піраміди складається з n таких граней. Тому, якщо периметр основи піраміди дорівнює P, то площа її бічної поверхні

$$S_б = \frac{1}{2}al \cdot n = \frac{1}{2}an \cdot l = \frac{1}{2}P \cdot l.$$

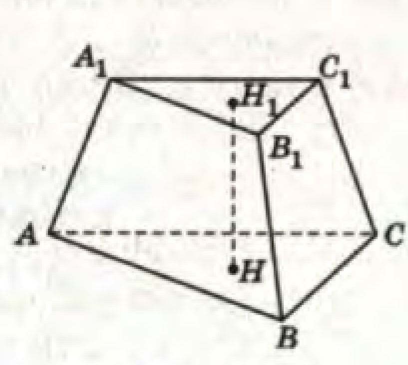
Щоб знайти всю площу поверхні піраміди, треба до площі бічної поверхні додати площу основи:

$$S_п = S_б + S_о.$$

Нехай $PABCD$ – довільна піраміда. Якщо через точку H_1 її висоти PH провести площину, паралельну площині основи, то вона перетне піраміду по многокутнику $A_1B_1C_1D_1$, подібному до многокутника $ABCD$ (мал. 150). Якщо площа основи піраміди дорівнює $S_о$, а площа перерізу – $S_п$, то $S_о : S_п = PH^2 : PH_1^2$.



Мал. 150



Мал. 151

Тобто *площі основи піраміди та паралельного їй перерізу відносяться як квадрати відстаней від їх площин до вершини піраміди.*

Доведення цих тверджень елементарні, але досить громіздкі, тому опускаємо їх. Наведемо лише приклад. Якщо січну площину, паралельну площині основи піраміди, провести через середину висоти, то площа перерізу буде в 4 рази менша за площу основи. Бо якщо $PH : PH_1 = 2 : 1$, то $S_о : S_п = PH^2 : PH_1^2 = 4 : 1$.

Частину піраміди, що міститься між її основою та січною площиною, паралельною основі, називають *зрізаною пірамідою* (мал. 151). Паралельні грані зрізаної піраміди називають її *основами*, а всі інші – *бічними гранями*. *Висота зрізаної піраміди* – відстань між площинами її основ. Зрізану піраміду називають *правильною*, якщо вона є частиною правильної піраміди. Основи кожної зрізаної піраміди – подібні многокутники, а бічні грані – трапеції.

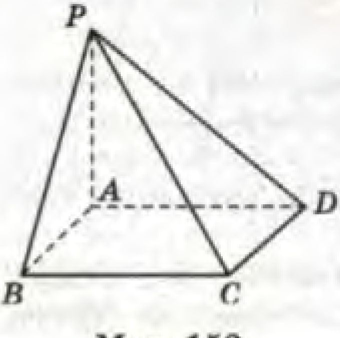
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте означення піраміди. Назвіть її елементи.
2. Які бувають піраміди? Покажіть на діаграмі.
3. Що таке діагональна площина піраміди? А діагональний переріз?
4. Які піраміди називають правильними?
5. Що таке апофема правильної піраміди?
6. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?
7. Що таке зрізана піраміда? Назвіть її елементи.
8. Чи є зрізана піраміда пірамідою?
9. Які бувають зрізані піраміди?

Виконаємо разом

1. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої – квадрат зі стороною a, а висота проходить через одну з вершин основи і дорівнює h.

Розв'язання. Нехай $PABCD$ – піраміда, яка задовольняє умову задачі (мал. 152). Оскільки $PA \perp AB$ і $PA \perp AD$, то грані PAB і PAD – прямокутні трикутники. Площа кожного з них дорівнює $\frac{1}{2}ah$. $PB = PD = \sqrt{a^2 + h^2}$.



Мал. 152

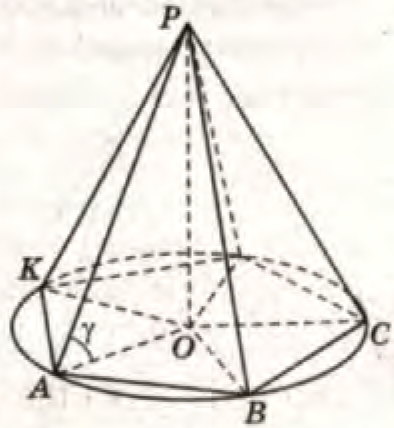
За теоремою про три перпендикуляри, $PB \perp BC$ і $PD \perp DC$, тому грані PBC і PDC – прямокутні трикутники. Площа кожного з них дорівнює $\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + h^2}$.

Тому площа всієї бічної поверхні піраміди

$$S_б = 2 \cdot \frac{1}{2}ah + 2\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + h^2} = a(h + \sqrt{a^2 + h^2}).$$

2. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під рівними кутами, то основа її висоти – центр кола, описаного навколо основи піраміди.

•Розв'язання. Якщо всі бічні ребра піраміди $PABC...K$ нахилені до площини основи під кутом γ (мал. 153), то прямокутні трикутники POA, POB, ..., POK рівні (за катетом PO і протилежним кутом). Тоді рівні й відрізки OA, OB, ..., OK. Отже, всі вершини основи піраміди лежать на колі радіуса OA з центром у точці O.



Мал. 153

Виконайте усно

931. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму піраміди.

932. Скільки граней, вершин і ребер має n-кутна піраміда?

933. Чи існує піраміда, яка має 125 ребер?

934. Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, якщо сторона його основи дорівнює a.

935. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту навпіл. Знайдіть площу основи піраміди, якщо площа перерізу дорівнює 40 см^2.

936. Чи можуть основами зрізаної піраміди бути прямокутники, у яких сторони одного дорівнюють 3 см і 5 см, а другого – 6 см і 8 см?

А

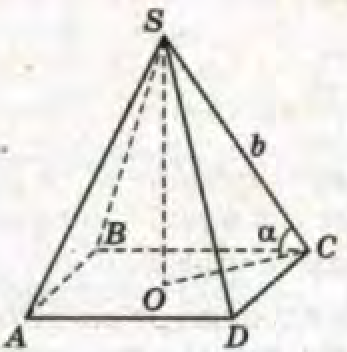
937. Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 10 см, а апофема – 6 см.

938. Знайдіть апофему правильної чотирикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см, а сторона основи – 6 см.

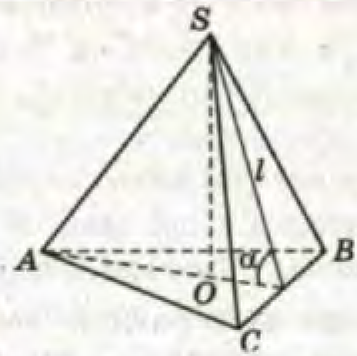
939. Двогранний кут при ребрі основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60°, а апофема дорівнює 10 см. Знайдіть площу основи.

940. Кут між висотою та апофемою правильної чотирикутної піраміди дорівнює 30°, сторона основи – a. Чому дорівнює апофема піраміди?

941. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α (мал. 154). Знайдіть: а) висоту піраміди; б) діагональ основи; в) сторону основи.



Мал. 154



Мал. 155

942. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α (мал. 155). Знайдіть: а) висоту піраміди; б) медіану основи; в) сторону основи; г) площу поверхні піраміди.

943. Відома піраміда Хеопса в Єгипті має форму правильної чотирикутної піраміди. Її висота – 147 м, а площа основи – 5,3 га. Знайдіть кут нахилу її бічного ребра до площини основи.

944. Основа піраміди – прямокутник зі сторонами 12 см і 16 см. Кожне бічне ребро дорівнює 26 см. Знайдіть висоту піраміди.

945. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої – квадрат зі стороною 5 см, а висота проходить через одну з вершин основи і дорівнює 12 см.

946. Висота чотирикутної піраміди дорівнює 4 см і проходить через точку перетину діагоналей основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо в основі лежить: а) квадрат зі стороною $8\sqrt{3}$ см; б) прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см; в) ромб із діагоналями 12 см і 16 см.

947. Знайдіть площу поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо: а) сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи – α; б) бічне ребро дорівнює b і утворює з площиною основи кут 45°; в) відстань від основи висоти до бічної грані дорівнює d, а двогранний кут при ребрі основи – α.

948. Дах має форму правильної чотирикутної піраміди, ребро основи якої дорівнює 5 м, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45°. Скільки фарби потрібно, щоб пофарбувати цей дах двічі, якщо на одноразове покриття цією фарбою 1 м² витрачається 150 г?

Б

949. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

950. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть відстань від основи висоти піраміди до її бічного ребра.

951. Доведіть, що коли всі двогранні кути при ребрах основи рівні, то основа її висоти – центр кола, вписаного в основу піраміди.

952. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Кожен із двогранних кутів при ребрах основи дорівнює 60°. Знайдіть висоту піраміди та площу бічної поверхні.

953. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 11 см, 24 см і 31 см. Висота піраміди дорівнює 2 см. Усі двогранні кути при ребрах основи рівні. Знайдіть ці кути.

954. Через середину висоти піраміди паралельно основі проведено переріз. Знайдіть площу перерізу, якщо площа основи піраміди дорівнює Q.

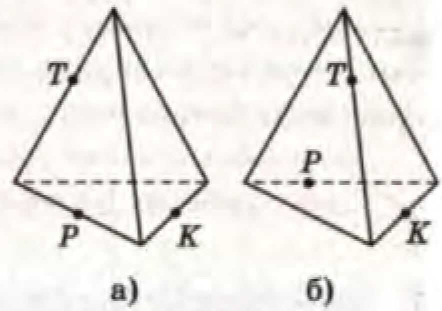
955. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту у відношенні 2 : 3 (від вершини до основи). Знайдіть площу перерізу, знаючи, що вона на 84 см² менша за площу основи піраміди.

956. Через точки, які ділять висоту піраміди на чотири рівні частини, проведено площини, паралельні основі піраміди. Знайдіть площі перерізів, якщо площа основи піраміди дорівнює 16 см².

957. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди вдвічі менша за площу основи. Доведіть, що її протилежні бічні ребра перпендикулярні.

958. Побудуйте перерізи пірамід площиною, що проходить через точки K, P, T (мал. 156).

959. Знайдіть площу поверхні тетраедра, вершинами якого є точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$ і $C(0;\ 0;\ 2)$.



Мал. 156

960. Знайдіть площі діагональних перерізів правильної шестикутної піраміди, якщо її висота і сторона основи дорівнюють по 6 дм.

961. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом 30°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

962. Практичне завдання. Виріжте з цупкого паперу розгортку правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 4 см, а бічне ребро – 8 см.

Вправи для повторення

963. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між AC і DC_1.

964. В основі прямої призми з висотою 4 см лежить квадрат зі стороною 3 см. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через вершину основи перпендикулярно до діагоналі бічної грані.

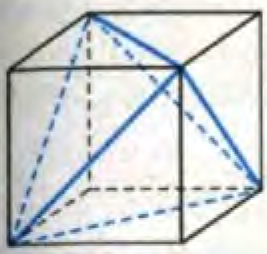
965. Знайдіть відстань від точки $A(-1;\ -3;\ 4)$ до осі абсцис.

§ 30. Правильні многогранники

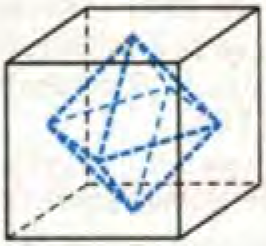
Многогранник називається *правильним*, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники, а всі вершини рівновіддалені від деякої точки. Цю точку називають *центром правильного многогранника*.

Куб – правильний многогранник, бо всі його грані – рівні квадрати, а всі вершини куба рівновіддалені від точки перетину його діагоналей.

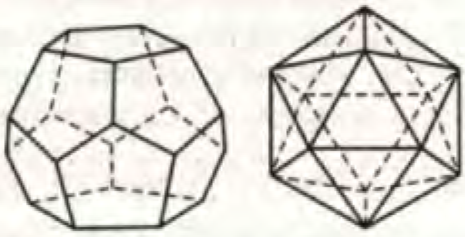
Якщо сполучити відрізками кінці двох мимобіжних діагоналей протилежних граней куба, то утвориться каркас *правильного тетраедра* (мал. 157). Адже кожна його грань – рівносторонній трикутник, а кожна вершина однаково віддалена від центра куба. Сполучивши відрізками центри суміжних граней куба, дістанемо каркас *правильного октаедра* (мал. 158).



Мал. 157



Мал. 158

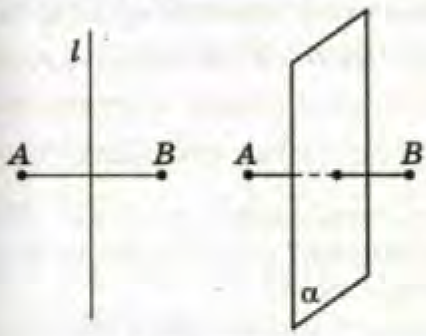


а) б)

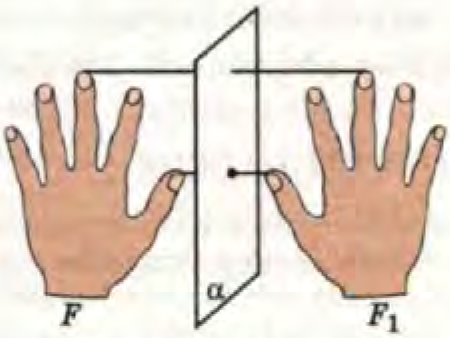
Мал. 159

Існує п'ять видів правильних многогранників. Крім трьох названих, є ще правильний *додекаедр* (мал. 159, *а*) і правильний *ікосаедр* (мал. 159, *б*). Назви тетраедр, октаедр, додекаедр, ікосаедр у перекладі з грецької означають відповідно: чотиригранник, восьмигранник, дванадцятигранник і двадцятигранник. Куб називають ще правильним *гексаедром*.

Властивості правильних многогранників добре знали і часто використовували античні математики та філософи. Для сучасної геометрії правильні многогранники цікаві насамперед як носії багатьох видів симетрії.



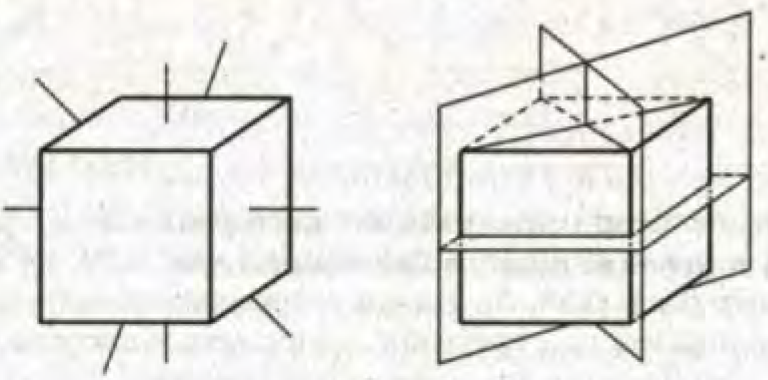
Мал. 160



Мал. 161

У просторі розрізняють симетрії відносно: точки, прямої та площини. Точки A і B називають *симетричними відносно точки O*, якщо O – середина відрізка AB. Точки A і B називаються *симетричними відносно прямої* (площини), якщо ця пряма (площина) перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину (мал. 160). Якщо кожна точка фігури F симетрична відносно деякої точки (прямої чи площини) точці фігури F_1 і навпаки, то фігури F і F_1 називають *симетричними одна одній* відносно точки (прямої чи площини) (мал. 161). Фігуру F називають симетричною відносно точки (прямої чи площини), якщо кожна її точка симетрична відносно точки (прямої чи площини) деякій точці цієї самої фігури. У цьому разі вважають також, що фігура F має центр симетрії (вісь симетрії чи площину симетрії).

Кожен правильний многогранник, крім тетраедра, має центр симетрії, а також кілька осей і кілька площин симетрії. Правильний тетраедр має 3 осі симетрії та 6 площин симетрії. Куб має 9 осей симетрії та 9 площин симетрії. Деякі з них зображені на малюнку 162.



Мал. 162

Форму куба мають кристали кухонної солі та деякі алмази. Інші алмази кристалізуються у формі правильних октаедрів. Кристали піриту (залізного колчедану) мають форму правильного додекаедра. Властивості правильних (і похідних від них) многогранників використовують також архітектори й будівельники, які створюють просторові конструкції.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які многогранники називаються правильними?
2. Якими бувають правильні многогранники?
3. Що таке центр правильного многогранника?
4. Сформулюйте найважливіші властивості правильних многогранників.

Виконаємо разом

1. Учень пояснює: «Кожна призма – це многогранник, тому кожна правильна призма – це правильний многогранник. Так само і кожна правильна піраміда є правильним многогранником». Чи правильно це?

•**Розв'язання.** Ні. Якщо призма не чотирикутна, то її основа не дорівнює бічній грані. Такий многогранник не може бути правильним, бо не всі його грані рівні. З усіх призм тільки куб є правильним многогранником, а з усіх пірамід – тільки правильний тетраедр.

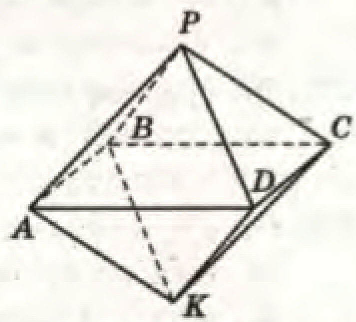
2. Чи може бути дев'ятикутник перерізом правильного октаедра?

•**Розв'язання.** Октаедр має 8 граней. Якщо січна площина перетинає навіть усі його грані, то в перерізі буде восьмикутник, а не дев'ятикутник.

Відповідь. Не може.

3. Доведіть, що протилежні грані правильного октаедра лежать у паралельних площинах.

•**Розв'язання.** Нехай $PABCDK$ – правильний октаедр (мал. 163). Усі його ребра і всі діагоналі рівні, тому чотирикутники $PBKD$ і $PAKC$ – квадрати. $PD \parallel BK$ і $PC \parallel AK$. Отже, дві пересічні прямі площини PDC відповідно паралельні двом прямим площини ABK, тому грані октаедра PDC і ABK лежать у паралельних площинах.



Мал. 163

Так само можна довести, що $PAD \parallel KCB$, $PAB \parallel KCD$ і $PBC \parallel KDA$.

Виконайте усно

966. Чи є правильним многогранником правильна піраміда?

967. Чи існує піраміда, яка є правильним многогранником? А призма?

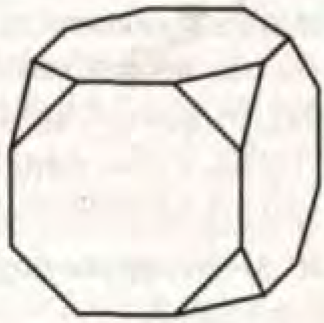
968. Чи є правильним многогранник, що об'єднує два правильні тетраедри, які мають спільну основу?

969. Чому дорівнює плоский кут при вершині правильного гексаедра?

970. Площа грані правильного додекаедра дорівнює 10 см^2. Чому дорівнює його площа поверхні?

971. Площа поверхні правильного гексаедра – 54 см^2. Чому дорівнює довжина його ребра?

972. Від куба при його вершинах відрізали 8 рівних тетраедрів так, що утворився многогранник, грані якого – правильні трикутники й восьмикутники (мал. 164). Чи є утворена фігура правильним многогранником? Чому?



Мал. 164

973. З двох правильних тетраедрів склали шестигранник, усі грані якого – рівні правильні трикутники. Чи є цей многогранник правильним?

А

974. З яких двох чотирикутних пірамід можна скласти правильний октаедр? Як відносяться сторона основи та висота такої піраміди?

975. Чи є правильним многогранник, вершини якого – центри всіх граней: а) куба; б) правильного тетраедра; в) правильного октаедра?

976. Чи є правильним многогранник, вершини якого – середини всіх ребер: а) куба; б) правильного тетраедра; в) правильного октаедра?

977. Знайдіть суму плоских кутів при вершині кожного правильного многогранника.

978. Знайдіть площу поверхні правильного гексаедра, ребро якого дорівнює: а) 12 см; б) 0,1 м.

979. Знайдіть довжину ребра правильного гексаедра, якщо площа його поверхні дорівнює: а) 726 см^2; б) 1,5 м^2.

980. Як зміниться площа поверхні правильного гексаедра, якщо його ребро, що дорівнює 5 см, збільшити: а) на 2 см; б) у 2 рази?

981. Чи може бути перерізом правильного гексаедра правильний: а) трикутник; б) чотирикутник? Виконайте відповідний малюнок.

982. Заповніть таблицю і за її даними перевірте твердження, сформульоване в теоремі Ейлера:

	Правильний тетраедр	Гексаедр (куб)	Октаедр	Додекаедр	Ікосаедр
Вершини					
Ребра					
Грані					

983. Намалюйте розгортку правильного октаедра з ребром завдовжки 2 см.

984. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть площу його поверхні.

Б

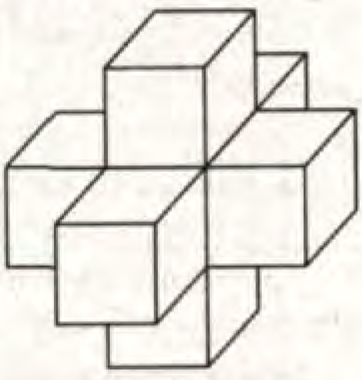
985. Відстань від центра правильного октаедра до його вершини дорівнює b. Знайдіть довжину його ребра.

986. Скільки осей симетрії та площин симетрії має правильний октаедр?

987. Ребро правильного октаедра дорівнює 4 см. Знайдіть площу його перерізу площиною симетрії. Скільки розв'язків має задача?

988. Знайдіть площу поверхні правильного ікосаедра, ребро якого дорівнює 2 см.

989. Учень отримав завдання виготовити на виставку геометричних фігур многогранник, який складається із семи кубів (мал. 165). Як можна виготовити таку модель? Чому дорівнює площа її поверхні?



Мал. 165

990. Знайдіть ребро правильного октаедра, якщо площа його поверхні дорівнює $8\sqrt{3}$.

991. У скільки разів збільшиться площа поверхні правильного ікосаедра, якщо кожне його ребро збільшити в 3 рази?

992. Чи можна правильний тетраедр перерізати площиною так, щоб переріз був квадратом?

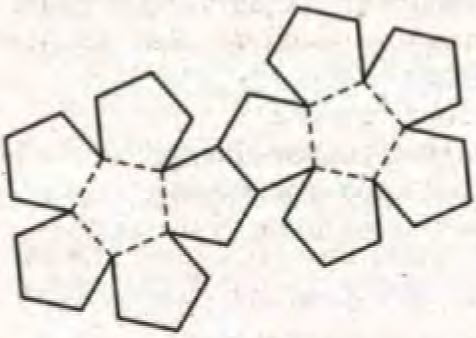
993. Чи можна куб перерізати площиною так, щоб перерізом був правильний: а) трикутник; б) чотирикутник; в) п'ятикутник; г) шестикутник?

994. Доведіть, що гранню правильного многогранника не може бути шестикутник. А семикутник?

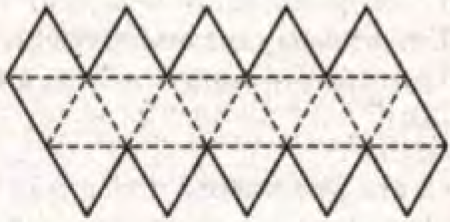
995. Під яким кутом із центра куба видно його ребро? А з центра правильного октаедра?

996. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки куба до всіх його граней є сталою для даного куба.

997. **Практичне завдання.** Використовуючи малюнки 166 і 167, побудуйте на цупкому папері розгортки правильних додекаедра та ікосаедра. Додайте припуски для склеювання і виготовте відповідні моделі.



Мал. 166



Мал. 167

Вправи для повторення

998. Знайдіть координати точок, у яких площина, задана рівнянням $x - 2y + 4z - 12 = 0$, перетинає координатні осі.

999. Установіть вид $\triangle ABC$, якщо $A(1; -1; 2)$, $B(0; 2; -1)$, $C(2; 1; -1)$.

1000. Висота піраміди дорівнює 12 см, а площа основи – 288 см^2. На якій відстані від основи потрібно провести переріз, паралельний основі, щоб його площа дорівнювала 32 см^2?

Самостійна робота № 7

Варіант 1

1. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а сторона основи – 4 см. Знайдіть: а) площу поверхні призми; б) довжину її діагоналі.

2. Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

Варіант 2

1. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 8 см. Знайдіть: а) площу поверхні піраміди; б) її висоту.

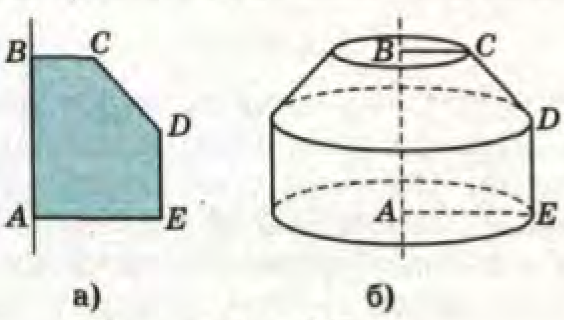
2. Знайдіть площу поверхні правильного гексаедра, ребро якого дорівнює a.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Як можна класифікувати геометричні фігури?
2. Сформулюйте означення многогранника. Назвіть його елементи.
3. Які многогранники називають опуклими? Наведіть приклади.
4. Дайте означення призми. Назвіть її елементи. Які бувають призми?
5. Як знайти площу поверхні правильної призми?
6. Що таке паралелепіпед? Які бувають паралелепіпеди?
7. Сформулюйте властивість діагоналей паралелепіпеда.
8. Дайте означення піраміди. Назвіть її елементи. Які бувають піраміди?
9. Як знайти площу поверхні правильної піраміди?
10. Сформулюйте означення правильного многогранника.
11. Назвіть усі види правильних многогранників.

§ 31. Тіла обертання

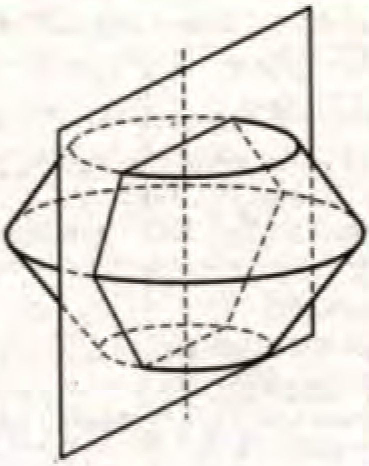
Уявіть, що плоский многокутник $ABCDE$ обертається навколо нерухомої прямої AB (мал. 168, *а*). Якщо він зробить повний оберт, то кожна його точка, яка не лежить на AB, опише коло з центром на цій прямій. А весь даний многокутник, обертаючись навколо прямої AB, опише деяке *тіло обертання*. Пряма AB – *вісь* цього тіла обертання (мал. 168, *б*).



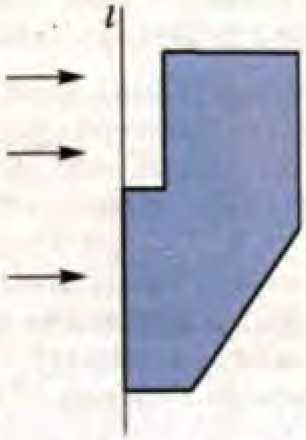
Мал. 168

Площина, яка проходить через вісь тіла обертання, поділяє його на дві рівні частини. Утворений переріз називають *осьовим перерізом* (мал. 169). Січна площина, перпендикулярна до осі тіла обертання, перетинає його по кругу, або по кільцю, або по кількох кільцях, які мають спільний центр (мал. 170).

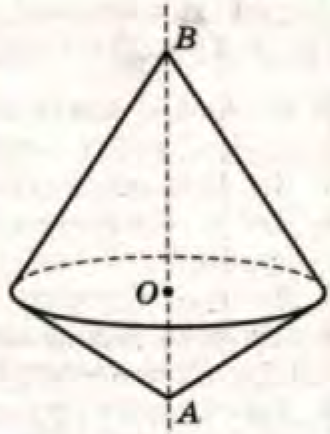
Щоб задати тіло обертання, досить указати його вісь і фігуру, обертанням якої утворене це тіло. Замість осі часто вказують відрізок, що їй належить. Наприклад, можна сказати так: тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи (мал. 171).



Мал. 169

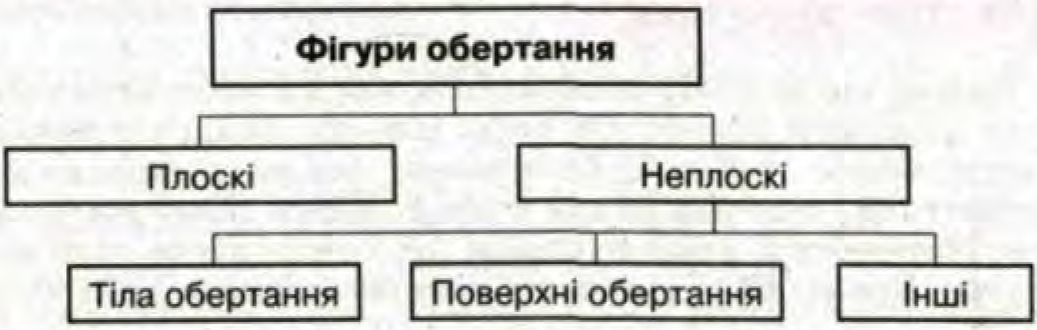


Мал. 170



Мал. 171

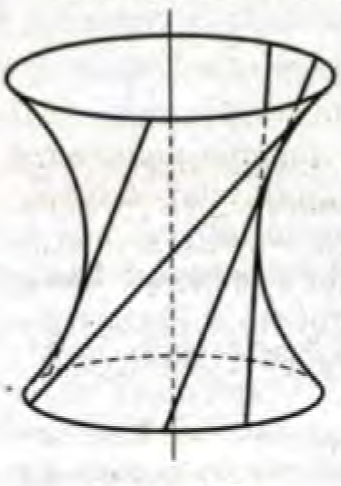
Приклади матеріальних моделей тіл обертання: лінза, котушка, хокейна шайба, колба, пробірка, макітра, снаряд. А от болт, гайка, свердло – не є тілами обертання.



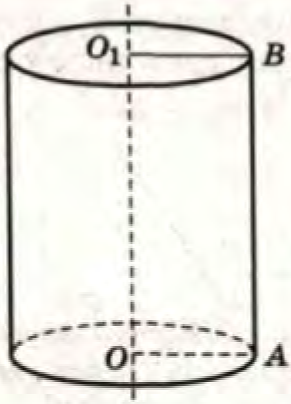
Мал. 172

Слід розрізняти тіла обертання та *фігури обертання*. Останнє поняття – загальніше (мал. 172). Приклади фігур обертання, які не є тілами: коло, круг, поверхня, утворена обертанням прямої навколо мимобіжної їй осі (мал. 173), тощо.

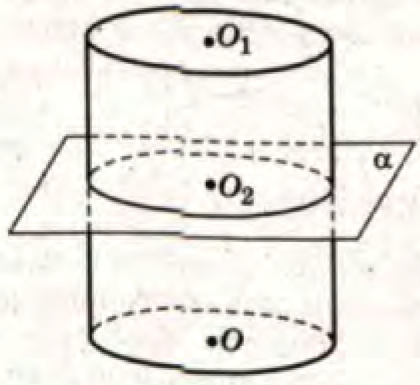
Найпростішим тілом обертання є циліндр. *Циліндром* називають тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони. Якщо прямокутник $OABO_1$ обертати навколо сторони OO_1, то його сторони OA і O_1B опишуть рівні круги, які називають *основами* циліндра (мал. 174). Сторона AB опише *бічну поверхню* циліндра. Кожен відрізок цієї поверхні, який дорівнює AB, – *твірна* циліндра. Усі твірні циліндра рівні та паралельні одна одній, бо кожна з них дорівнює AB і паралельна осі обертання. Довжина твірної є *висотою* циліндра.



Мал. 173

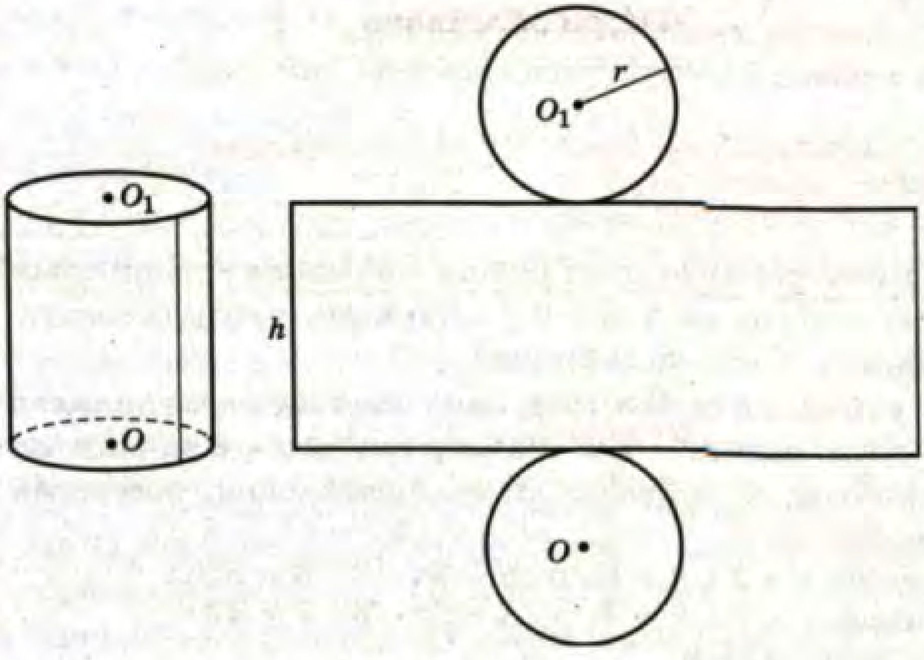


Мал. 174



Мал. 175

Усі осьові перерізи циліндра – рівні прямокутники. Кожна січна площина, паралельна осі циліндра, перетинає його по прямокутнику. Кожна січна площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його по кругу, що дорівнює основі циліндра (мал. 175).



Мал. 176

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і по одній з твірних, а потім розгорнути на площині, то дістанемо *розгортку циліндра* (мал. 176). Вона складається з прямокутника – розгортки бічної поверхні – та двох рівних кругів. Якщо радіус основи циліндра дорівнює r (його називають радіусом циліндра), а висота – h, то його бічна поверхня розгортається в прямокутник зі сторонами $2\pi r$ і h. Площа цієї розгортки є площею бічної поверхні циліндра:

$$S_б = 2\pi rh.$$

Щоб знайти всю площу поверхні циліндра $S_ц$, досить до площі його бічної поверхні додати площі двох його основ:

$$S_ц = 2\pi rh + 2\pi r^2, \text{ або } S_ц = 2\pi r(r + h).$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Як можна утворити тіло обертання?
2. Що таке вісь обертання; осьовий переріз тіла обертання?
3. Якою фігурою може бути осьовий переріз тіла обертання? А переріз площиною, перпендикулярною до осі обертання?
4. Як пов'язані між собою фігури обертання і тілá обертання? Покажіть на діаграмі.
5. Що таке циліндр? Назвіть його елементи.
6. Якою фігурою є осьовий переріз циліндра?
7. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, перпендикулярною до його осі?
8. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною його осі?
9. Що таке розгортка поверхні циліндра?
10. Як можна визначати площу поверхні циліндра?

Виконаємо разом

1. Осьові перерізи двох різних циліндрів – рівні прямокутники зі сторонами 4 м і 6 м. Знайдіть площу поверхні того циліндра, у якого вона більша.

● **Розв'язання.** Йдеться про два циліндри: діаметр першого – 4 м, висота – 6 м; діаметр другого – 6 м, висота – 4 м. За формулою $S_ц = 2\pi r(r + h)$ знайдемо площі поверхонь обох циліндрів:

1) якщо $r = 2$ і $h = 6$, то $S = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$;

2) якщо $r = 3$ і $h = 4$, то $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi$.

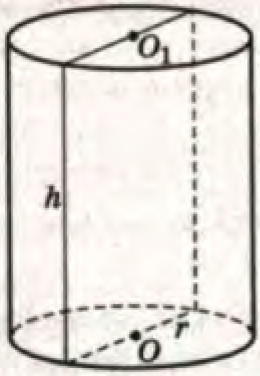
Відповідь. 42π м^2.

2. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

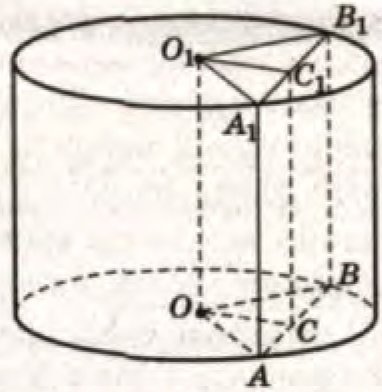
● **Розв'язання.** Нехай радіус основи циліндра дорівнює r, а висота – h (мал. 177). Тоді площа осьового перерізу циліндра $Q = 2rh$, а площа його бічної поверхні $S_б = 2\pi rh = \pi \cdot 2rh = \pi Q$.

Відповідь. πQ.

3. Циліндр радіусом 10 і висотою 5 перетинається площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від неї на 1. Знайдіть площу і периметр перерізу.



Мал. 177



Мал. 178

Розв'язання. Нехай переріз ABB_1A_1 циліндра віддалений від осі OO_1 на $OC = 1$ (мал. 178).

Тоді $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{10 - 1} = 3$.

Шукана площа перерізу $S = AA_1 \cdot AC \cdot 2 = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$, а периметр перерізу $P = 2(AA_1 + AB) = 2(5 + 6) = 22$.

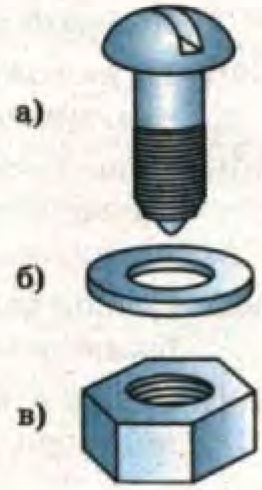
Виконайте усно

1001. Назвіть приклади фігур обертання з навколишнього середовища.

1002. Які з наведених на малюнку 179 фігур є тілами обертання.

1003. Що за фігура утвориться під час обертання точки навколо прямої, яка: а) не проходить через дану точку; б) проходить через дану точку?

1004. Що за фігура утвориться під час обертання відрізка AB навколо прямої, яка перпендикулярна до AB і: а) проходить через одну з точок A чи B; б) не перетинає відрізок AB; в) перетинає відрізок AB у точці C?



Мал. 179

1005. Скільки існує площин, які розтинають циліндр: а) на два рівні циліндри; б) на дві рівні фігури? Чи є ці площини площинами симетрії циліндра?

1006. Скільки осей симетрії має циліндр? Чи має циліндр центр симетрії?

1007. Яка фігура буде осьовим перерізом тіла, утвореного під час обертання правильної чотирикутної піраміди навколо висоти?

А

1008. Рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 2 см обертається навколо одного з катетів. Намалюйте утворене тіло і знайдіть площу його осьового перерізу.

1009. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, висота якого дорівнює 10 см, а радіус основи – 2 см.

1010. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

1011. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут 45°. Як відноситься висота циліндра до радіуса основи?

1012. Радіус циліндра – 5 м, а діагональ осьового перерізу – 26 м. Знайдіть: а) висоту циліндра; б) площу осьового перерізу; в) площу бічної поверхні; г) площу поверхні циліндра.

1013. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 м і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть: а) висоту циліндра; б) радіус циліндра; в) площу бічної поверхні циліндра.

1014. Намалюйте тіло, утворене обертанням рівностороннього трикутника навколо його сторони.

1015. Дано прямокутник з нерівними сторонами. Доведіть, що площі бічних поверхонь циліндрів, утворених обертанням цього прямокутника навколо нерівних сторін, рівні.

1016. Площа осьового перерізу циліндра – S. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

1017. Радіус основи циліндра – r, а висота – h. Знайдіть довжину діагоналі осьового перерізу циліндра.

Б

1018. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його радіус – r, а твірну з центра основи видно під кутом α.

1019. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо діаметр його основи d з центра другої основи видно під кутом α.

1020. Як відносяться площі перерізів циліндра площинами, які проходять через твірну, якщо кут між цими площинами дорівнює 30°, а одна з них проходить через вісь циліндра?

1021. Доведіть, що площина, яка проходить через твірну циліндра, але не дотикається до нього, перетинає циліндр по прямокутнику.

1022. Висота циліндра дорівнює 16 см, радіус – 10 см. Знайдіть площу його перерізу площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від осі на 60 мм.

1023. Радіус циліндра – r, а висота – h. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка перпендикулярна до основи і відтинає від кола основи дугу 60°.

1024. Площа поверхні та площа бічної поверхні циліндра дорівнюють відповідно 50 см^2 і 30 см^2. Знайдіть висоту циліндра.

1025. З квадрата, площа якого – Q, згорнули бічну поверхню циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.

1026. Тор – це тіло, утворене обертанням круга навколо прямої, яка лежить у площині цього круга, але не перетинає його. Намалюйте тор.

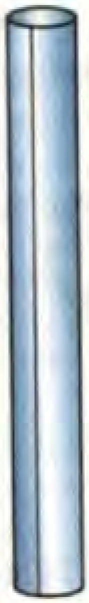
1027. Висота консервної банки циліндричної форми дорівнює 4 см, а радіус основи – 6 см. Скільки таких банок можна виготовити з 15 000 м^2, якщо 10 % матеріалу йде на відходи?

1028. Діаметр циліндричного парового котла завдовжки 3,8 м дорівнює 0,8 м. Знайдіть тиск пари на повну поверхню котла, якщо на 1 см^2 пара давить із силою 10 кГ.

1029. Скільки квадратних метрів жерсті піде на виготовлення ринви (мал. 180) завдовжки 5 м і діаметром 20 см, якщо на шви додають 3 % її площі?

1030. Чи вистачить 8500 м^2 ізоляційної стрічки для дворазового покриття нею кілометра газопроводу діаметром 1420 мм?

1031. П р а к т и ч н е з а в д а н н я. Зробіть із цупкого паперу розгортку циліндра, осьовий переріз якого – квадрат зі стороною 16 см.



Мал. 180

Вправи для повторення

1032. Основа прямої призми – ромб з гострим кутом 60°. Менший діагональний переріз призми має площу S. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

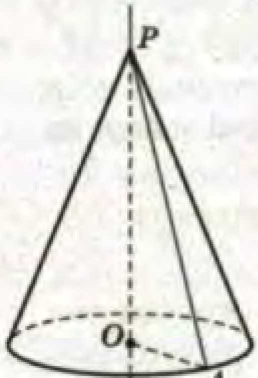
1033. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема – 13 см. Обчисліть площу поверхні піраміди.

1034. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ.

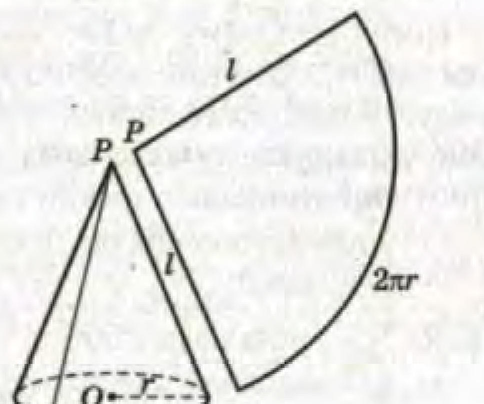
§ 32. Конуси

Конусом **називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.**

Якщо прямокутний трикутник OPA обертати навколо катета PO, то його гіпотенуза PA опише бічну поверхню, а катет OA – основу конуса (мал. 181). Точку P, відрізок PO та пряму PO називають відповідно *вершиною*, *висотою* і *віссю конуса*. Усі осьові перерізи конуса – рівні рівнобедрені трикутники. Кожна площина, яка проходить через вісь конуса, є площиною його симетрії. Центра симетрії конус не має.



Мал. 181



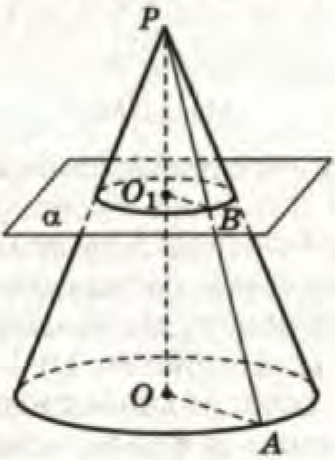
Мал. 182

Відрізок, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола його основи, називають *твірною конуса*. Усі твірні конуса рівні. Якщо бічну поверхню конуса розрізати по якій-небудь твірній і розгорнути на площині, то дістанемо її *розгортку*. Розгортка бічної поверхні конуса, радіус основи якого дорівнює r, а твірна – l, є сектором круга радіуса l (мал. 182). Довжина його дуги – $2\pi r$. Площу такої розгортки приймають за *площу бічної поверхні конуса*. Вона в стільки разів менша за площу круга радіуса l, у скільки разів $2\pi r$ менше за $2\pi l$. Тому $S_{б.к} : \pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l$, звідки $S_{б.к} = \pi rl$.

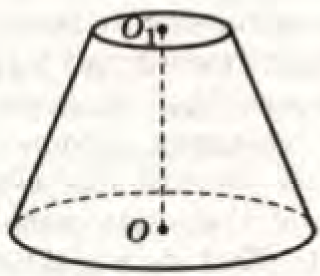
Щоб знайти всю площу поверхні конуса, треба до площі його бічної поверхні додати площу основи: $S_к = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l)$. Отже,

$$S_к = \pi r(r + l).$$

Січна площина, паралельна основі конуса, перетинає його по кругу (мал. 183). Оскільки $\Delta POA \sim \Delta PO_1B$, то $OA : O_1B = PO : PO_1$, звідки $\pi OA^2 : \pi O_1B^2 = PO^2 : PO_1^2$, тобто *площі основи конуса і паралельного їй перерізу відносяться як квадрати їх відстаней від вершини конуса.*



Мал. 183



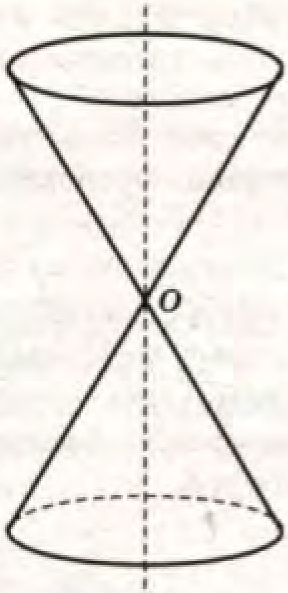
Мал. 184

Січна площина, паралельна основі конуса, поділяє його на два тіла обертання: менший конус і *зрізаний конус*. Зрізаний конус обмежений двома кругами – його основами – та бічною поверхнею (мал. 184). Відстань між основами – висота зрізаного конуса.

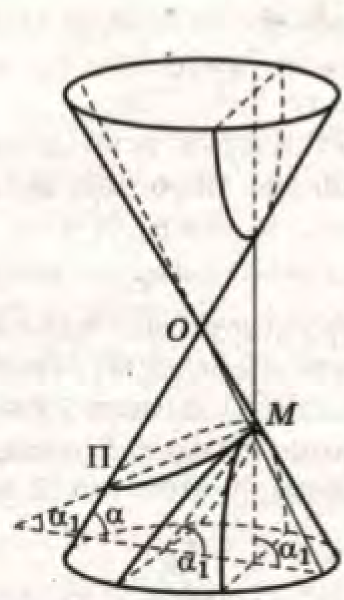
Примітка. Зрізаний конус – не конус, бо не відповідає означенню конуса. Те саме стосується і зрізаної піраміди. Тому неправильно говорити, що конуси (або піраміди) бувають повні і зрізані.

Форму конусів мають насипані на горизонтальну поверхню купи піску, зерна, вугілля, щебеню тощо. Кожному такому матеріалу відповідає певний *кут природного укосу* – кут нахилу твірної до площини основ конуса. Для піску він дорівнює приблизно 30°, для вугілля – 42°.

Варте уваги питання про перерізи конічної поверхні. *Конічною поверхнею* вважають фігуру (не тіло!), утворену обертанням однієї з пересічних прямих навколо другої. Конічна поверхня вважається необмеженою і складається з двох рівних частин, які мають одну спільну точку – вершину O



Мал. 185



Мал. 186

(мал. 185). Уявімо, що через деяку точку M конічної поверхні проведено січну площину ω. Її можна провести так, щоб позначений на малюнку 186 кут α_1: а) дорівнював α; б) був меншим за α; в) був більшим за α. У першому випадку площина ω перетинає конічну поверхню по параболі, в другому – по еліпсу, в третьому – по гіперболі. Ці три математичні терміни ввів ще в II ст. до н. е. давньогрецький математик Аполлоній. Грецькою мовою ці слова означали: парабола – зіставлення (бо з першим випадком зіставлялися два інші), еліпс – недостача (бо кут α_1 менший за α), гіпербола – перебільшення (бо кут α_1 більший за α). Хоч Аполлоній зіставляв не кути α_1 і α, а деякі інші величини, але суть справи зводилася до порівнювання цих кутів.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте означення конуса.
2. Що таке вершина; основа; твірна; вісь; висота конуса?
3. Якою фігурою є осьовий переріз конуса? А переріз конуса площиною, перпендикулярною до його осі?
4. Як можна утворити розгортку конуса?
5. Як можна обчислити площу бічної поверхні конуса? А площу поверхні конуса?
6. Що таке зрізаний конус? Чи є зрізаний конус конусом?
7. Назвіть елементи зрізаного конуса.
8. Якою фігурою є осьовий переріз зрізаного конуса? А переріз зрізаного конуса площиною, перпендикулярною до його осі?

Виконаємо разом

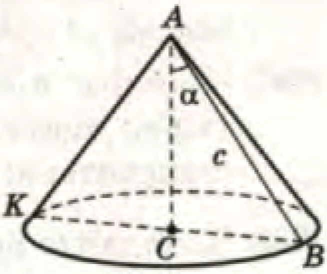
1. Конус утворено обертанням прямокутного трикутника навколо меншого катета, який з гіпотенузою c утворює кут α. Знайдіть: а) площу круга, описаного більшим катетом; б) площу осьового перерізу конуса.

● **Розв'язання.** Нехай у трикутнику ABC (мал. 187) $AC \perp BC$, $AB = c$ і $\angle CAB = \alpha$. Осьовий переріз даного тіла – рівнобедрений $\triangle ABK$, у якого висота $AC = c\cos\alpha$, половина основи $CB = c\sin\alpha$. Площа осьового перерізу

$$S_{ABK} = CB \cdot AC = c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha = c^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Площа круга радіуса CB

$$S_{CB} = \pi CB^2 = \pi c^2\sin^2\alpha.$$

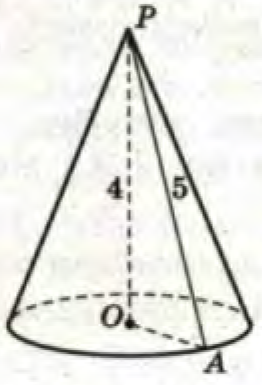


Мал. 187

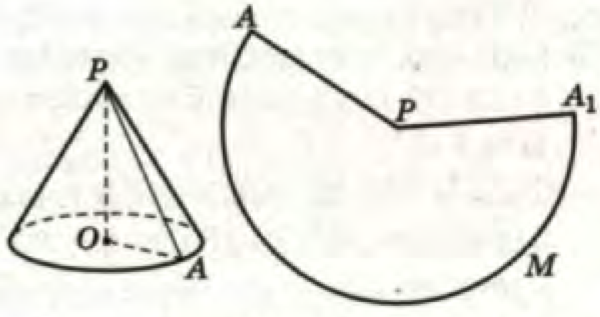
2. Твірна конуса – 5 см, висота – 4 см. Знайдіть відношення площі поверхні цього конуса до площі його основи.

● **Розв'язання.** Трикутник POA прямокутний (мал. 188). Тому радіус основи конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Площа основи $S_о = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$;
площа поверхні $S_к = \pi \cdot 3(3 + 5) = 24\pi$.
Отже, $S_к : S_о = 24\pi : 9\pi = 8 : 3$.



Мал. 188



Мал. 189

3. Висота конуса – 4, твірна – 5. Знайдіть кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса.

● **Розв'язання.** Радіус основи конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (мал. 189). Тому довжина кола його основи $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Така сама довжина дуги сектора AMA_1. Ця довжина в стільки разів менша за довжину кола радіуса $PA = 5$, у скільки разів шуканий кут φ сектора менший за $360°$. Отже, $\varphi : 360° = 6\pi : 10\pi$, звідки $\varphi = 216°$.

Відповідь. 216°.

Виконайте усно

1035. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму конуса або зрізаного конуса.

1036. Що є перерізом конуса площиною, яка: а) паралельна основі; б) проходить через вершину під кутом до основи.

1037. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо його твірна дорівнює 8 м, а кут при вершині осьового перерізу становить: а) 90°; б) 30°.

1038. Відгадайте ребус:

СЦ
COS

.

А

1039. Висота конуса – 8 м, радіус основи – 6 м. Знайдіть довжину твірної.

1040. Осьовий переріз конуса – правильний трикутник зі стороною 10 см. Знайдіть радіус основи та висоту конуса.

1041. Висота конуса дорівнює радіусу основи. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.

1042. Твірна конуса – 5 см, висота – 4 см. Знайдіть площу його поверхні.

1043. Скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб пошити конусоподібну палатку заввишки 3 м і діаметром 4 м?

1044. Твірна конуса дорівнює 8 і нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту конуса та площу осьового перерізу.

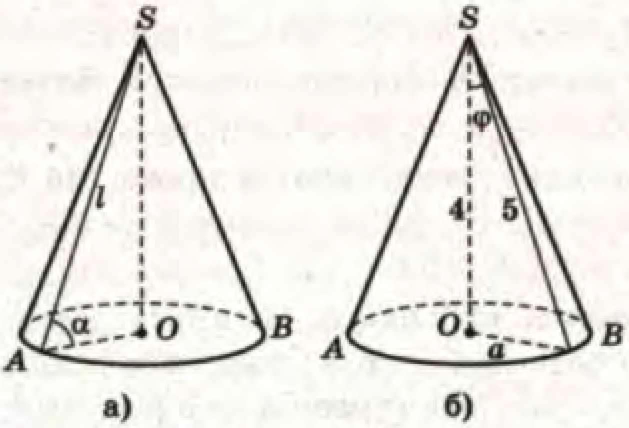
1045. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть: а) висоту конуса; б) радіус основи; в) площу осьового перерізу; г) площу поверхні конуса.

1046. Знайдіть площу бічної поверхні конуса радіуса R, осьовим перерізом якого є прямокутний трикутник.

1047. Різниця між довжиною твірної та висотою конуса дорівнює 2 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

1048. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 15π см^2, а площа поверхні – 24π см^2.

1049. Користуючись малюнком 190, сформулюйте і розв'яжіть якомога більше задач.



Мал. 190

Б

1050. Знайдіть площу поверхні конуса, висота якого дорівнює 12 см, а відстань від основи висоти до середини твірної – 6,5 см.

1051. Висота конуса дорівнює 2 см, а радіус основи – 4 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, що стягує дугу 60°.

1052. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює 60°, проведено площину, що утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть висоту конуса, якщо площа перерізу дорівнює $4\sqrt{3}$ см^2.

1053. Доведіть, що з усіх перерізів конуса площинами, які проходять через його вершину, найбільший периметр має осьовий переріз.

1054. Задача для кмітливих. Чи правильно, що з усіх перерізів конуса, які проходять через його вершину, найбільшу площу має осьовий переріз?

1055. За даними в таблиці елементами знайдіть інші елементи конуса, де C – довжина кола, d – діаметр основи, H – висота, l – твірна конуса, α – кут нахилу твірної до основи, S – площа основи, Q – площа осьового перерізу. Перед розв'язанням задачі зробіть на дошці малюнок, повторіть і запишіть формули.

№	C	d	H	l	α	S	Q
1	C		H				
2	C			l			
3		d			α		
4					α	S	
5					α		Q

1056. Півкруг радіуса R згорнули в конус. Визначте: а) радіус основи конуса; б) кут α при вершині осьового перерізу.

1057. Через середину висоти конуса проведено площину паралельно основі. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса $R = 2$ см.

1058. Висота конуса дорівнює h. На якій відстані від його вершини проведено січну площину, паралельну основі, якщо площа перерізу вдвічі менша за площу основи?

1059. Площа основи конуса – Q, а площа бічної поверхні – $2Q$. Під яким кутом його твірна нахилена до площини основи?

1060. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см навколо: а) меншого катета; б) більшого катета; в) гіпотенузи.

1061. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a навколо: а) катета; б) гіпотенузи; в) прямої, проведеної через вершину прямого кута паралельно гіпотенузі.

1062. П р а к т и ч н е з а в д а н н я. Виготовте з цупкого паперу розгортки конуса і зрізаного конуса.

Вправи для повторення

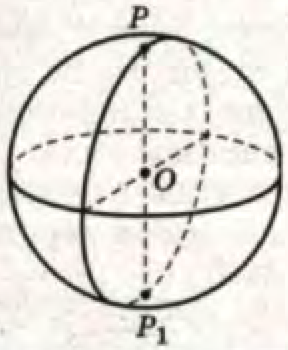
1063. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а двогранний кут при ребрі основи – 60°. Знайдіть:
а) сторону основи піраміди; б) площу поверхні.

1064. Осьовий переріз циліндра – прямокутник, площа якого становить 48 см^2. Площа основи циліндра дорівнює 36π см^2. Обчисліть висоту циліндра.

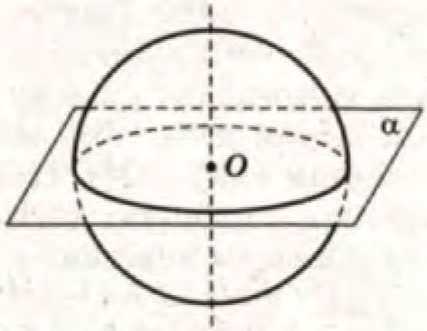
1065. Знайдіть довжини медіан трикутника з вершинами в точках $A(2; 4; 6)$, $B(-2; 4; 6)$ і $C(2; 4; -6)$.

§ 33. Куля і сфера

Кулею називають тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра (мал. 191). Центр круга, обертанням якого утворено кулю, називають *центром* цієї кулі. Відрізок, який сполучає дві точки поверхні кулі та проходить через її центр, – *діаметр* кулі. Він дорівнює двом радіусам.



Мал. 191



Мал. 192

Кожна площина, яка проходить через центр кулі, поділяє її на дві рівні *півкулі* і є площиною симетрії кулі. Вона перетинає кулю по *великому кругу*, а поверхню кулі – по *колу великого круга* (мал. 192).

Як можуть розміщуватись у просторі куля і площина? Нехай відстань від центра кулі до площини дорівнює d, а радіус кулі – r. Можливі такі три випадки (мал. 193).

1. Якщо $r < d$, то площина і куля не мають спільних точок (мал. 193, *а*).

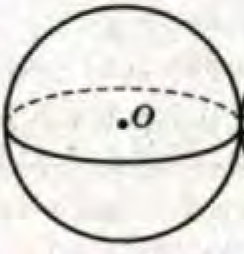
а) б) в)

Мал. 193

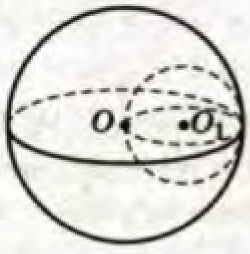
2. Якщо $r > d$, то площина перетинає кулю по кругу радіуса $O_1M = \sqrt{r^2 - d^2}$. З цієї формули випливає, що переріз кулі тим більший, чим менше d (мал. 193, *б*).

3. Якщо $r = d$, то площина і куля мають тільки одну спільну точку (мал. 193, *в*). У цьому разі говорять, що площина *дотикається* до кулі, а їх спільну точку називають *точкою дотику*. Пряму, яка має з кулею тільки одну спільну точку, називають *дотичною до кулі*. Пряма і площина, дотичні до кулі, перпендикулярні до радіуса, проведеного в точку дотику.

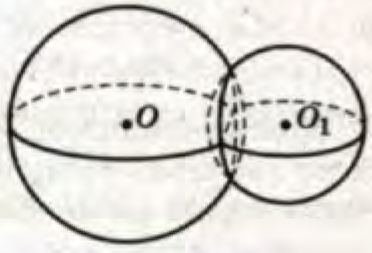
Поверхню кулі називають *сферою*. Січна площина перетинає сферу по колу. Центр, радіус і діаметр кулі є також центром, радіусом і діаметром відповідної сфери. Якщо дві сфери мають тільки одну спільну точку, то вони *дотикаються* в цій точці. Дотик двох сфер може бути зовнішнім (мал. 194) або внутрішнім (мал. 195). Ці випадки аналогічні взаємному розміщенню на площині двох кіл. Якщо дві сфери перетинаються, то лінією їх перетину є коло (мал. 196).



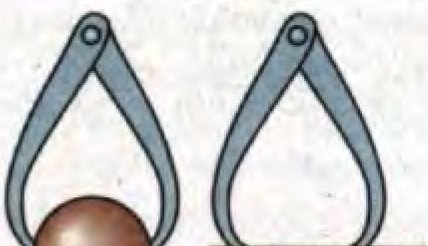
Мал. 194



Мал. 195

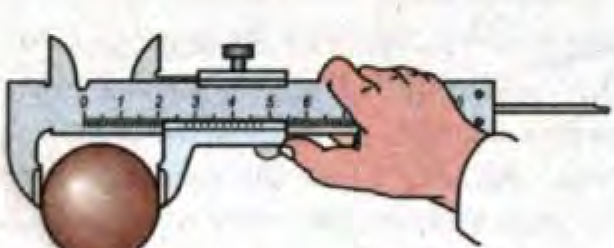


Мал. 196

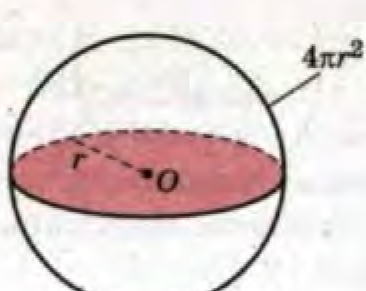


Мал. 197

Приклади матеріальних куль: кульки підшипника, спортивні ядра, цукерки-драже тощо. Форму, наближену до кулі, мають Земля, Місяць, Сонце, інші небесні тіла. Діаметри невеликих матеріальних куль вимірюють *кронциркулем* (мал. 197) або *штангенциркулем* (мал. 198).



Мал. 198



Мал. 199

Можна довести, що площа поверхні кулі в 4 рази більша за площу її великого круга (мал. 199). Оскільки площа круга радіуса r дорівнює πr^2, то площу сфери радіуса r можна знаходити за формулою $S_{сф} = 4\pi r^2$.

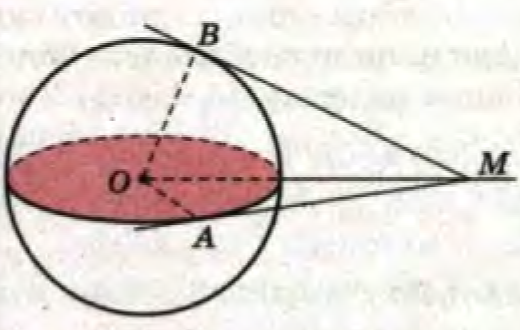
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке куля? Що таке сфера? Назвіть їх елементи.
2. Що таке діаметральна площина кулі? А екватор; полюс?
3. Якою фігурою є переріз кулі площиною?
4. Яку площину називають дотичною до кулі? Які її властивості?
5. Яку пряму називають дотичною до кулі? Які її властивості?
6. За якої умови одна сфера дотикається до другої?
7. Як можна знайти площу поверхні кулі?

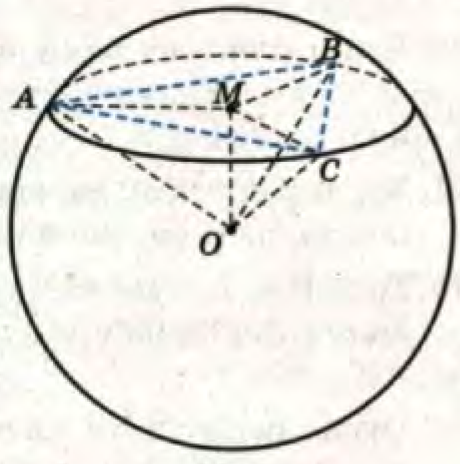
Виконаємо разом

1. З однієї точки до кулі проведено дві дотичні прямі. Доведіть, що відстані від даної точки до точок дотику рівні.

● **Розв'язання.** Нехай MA і MB – відрізки дотичних, проведених до кулі з точки M, а O – центр даної кулі (мал. 200). Трикутники AMO і BMO рівні за спільною гіпотенузою MO і катетами OA і OB. Тому $MA = MB$.



Мал. 200



Мал. 201

2. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 10 см лежать на сфері радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

● **Розв'язання.** Нехай точки A, B, C лежать на сфері з центром O; $AB = BC = CA = OA = OB = OC$ і OM – шукана відстань (мал. 201). Тоді трикутники OMA, OMB і OMC рівні за спільним катетом OM і гіпотенузами. Отже,

$$MA = MB = MC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

За теоремою Піфагора,

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}.$$

Відповідь. $OM = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ см.

Виконайте усно

1066. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму кулі або сфери.

1067. Знайдіть площу великого круга кулі та довжину екватора, якщо її радіус дорівнює 2 м.

1068. Діаметр кулі – 38 дм, а площина віддалена від її центра на 20 дм. Чи має ця площина з кулею спільні точки?

1069. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 12 см. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо з центра кулі його видно під кутом 60°.

А

1070. Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярну до нього площину. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус кулі дорівнює r.

1071. Кулю радіуса 10 см перетинає площина, віддалена від її центра на 6 см. Знайдіть площу перерізу.

1072. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань від центра кулі до відрізка AB, якщо $AB = 80$ см.

1073. Сфери радіусів R і r дотикаються. Знайдіть відстань між їх центрами. Розгляньте два випадки.

1074. Знайдіть геометричне місце центрів сфер радіуса r, які: а) дотикаються до даної площини; б) проходять через дану точку.

1075. Знайдіть площу поверхні кулі, радіус якої 2 см.

1076. Знайдіть площу сфери, діаметр якої дорівнює 20 см.

1077. Площа сфери дорівнює 3,14 дм^2. Знайдіть радіус сфери.

1078. Для фарбування круга радіуса 1 м потрібно 20 г фарби. Скільки такої фарби потрібно, щоб пофарбувати кулю діаметром 1 м?

1079. Знайдіть площу поверхні півкулі, радіус якої дорівнює 10 см.

1080. Переріз кулі площиною, віддаленою від її центра на 12 см, має площу 25π см^2. Визначте площу поверхні кулі.

1081. Площа поверхні кулі – 400π см^2. Знайдіть площу перерізу кулі площиною, віддаленою від центра на 6 см.

1082. Для фарбування кулі діаметром 2 дм потрібно 30 г фарби. Скільки фарби потрібно для фарбування кулі діаметром 6 дм?

1083. Приміщення виставки має вигляд півкулі, площа сферичної поверхні якої – 392π м^2. Визначте діаметр підлоги.

1084. Крива поверхня півкулі на 20 см^2 більша за площу її основи. Знайдіть площу основи півкулі.

Б

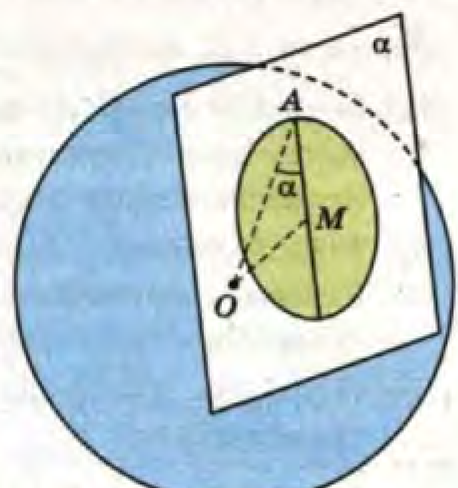
1085. Куля з центром у точці O дотикається до площини. Відстань від точки M, що лежить у цій площині, до центра кулі – 25 см, а до точки дотику кулі – 15 см. Знайдіть: а) радіус кулі; б) площу перерізу цієї кулі площиною, що проходить через середину радіуса.

1086. Куля дотикається до всіх сторін прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кулі, якщо відстань від центра кулі до площини трикутника – 7 см.

1087. Усі сторони правильного трикутника дотикаються до сфери радіуса 2 дм. Знайдіть відстань від центра цієї сфери до площини трикутника, якщо довжина його сторони дорівнює 6 дм.

1088. Радіус кулі дорівнює r. Через кінець радіуса проведено площину під кутом α до нього. Знайдіть площу перерізу (мал. 202).

1089. Точка A лежить на поверхні кулі радіуса 13 см і віддалена від кінців діаметра MN на відстані, пропорційні числам 5 і 12. Знайдіть ці відстані.



Мал. 202

1090. Два кола радіусів 30 см і 40 см лежать у паралельних площинах і на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань між площинами.

1091. На сфері радіуса 26 см дано три точки. Прямолінійні відстані між ними 12 см, 16 см і 20 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини, яка проходить через ці точки.

1092. Радіус Землі 6,4 тис. км. Який шлях проходять за добу внаслідок обертання Землі міста Одеса, Львів і Київ, широти яких становлять $46°29'$, $49°49'$ і $50°27'$?

1093. Радіус Землі дорівнює 6400 км. На яку висоту над горизонтом слід піднятися, щоб лінія горизонту проходила на відстані 100 км від спостерігача?

1094. Куля радіуса r дотикається до граней двогранного кута. Знайдіть відстань від центра кулі до ребра кута, якщо цей кут дорівнює: а) $60°$; б) $90°$; в) $120°$; г) α.

1095. Доведіть, що площі двох сфер відносяться як квадрати їх радіусів.

1096. Радіуси двох сфер відносяться як $4 : 9$. Знайдіть площу більшої з них, якщо площа меншої дорівнює 32 дм^2.

1097. Задача з несподіваною відповіддю. Уявіть, що дві кулі – одна велика, як Земля, а друга, як м'яч, – по екваторах обтягнуті обручами. Якщо кожний із цих обручів подовжити на 1 м, вони відійдуть від поверхонь куль на деякі відстані. Де ця відстань буде більшою – у більшої чи меншої кулі?

Вправи для повторення

1098. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений прямокутний трикутник. Довжина кола основи конуса дорівнює 8π см. Знайдіть площу осьового перерізу.

1099. Рівнобедрений прямокутний трикутник обертається навколо гіпотенузи, довжина якої дорівнює 8 м. Обчисліть поверхню отриманого тіла.

1100. Обчисліть діагональ куба, якщо діагональ його бічної грані дорівнює d.

Самостійна робота №8

Варіант 1

1. Обчисліть площу поверхні конуса, твірна якого дорівнює 8 см, а радіус основи – 5 см.

2. Діаметр кулі дорівнює 10 см. Знайдіть площу її поверхні.

3*. Рівнобедрена трапеція, бічні сторони та менша основа якої дорівнюють по 5 см, обертається навколо більшої основи. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла, якщо висота трапеції дорівнює 4 см.

Варіант 2

1. Обчисліть площу поверхні циліндра, твірна якого дорівнює 5 см, а радіус основи – 9 см.

2. Площа сфери дорівнює 100π см^2. Знайдіть її діаметр.

3*. Прямокутна трапеція, бічні сторони та менша основа якої відповідно дорівнюють 3 см, 5 см і 4 см, обертається навколо більшої основи. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Як можна класифікувати фігури обертання? Наведіть приклади різних фігур обертання.
2. Сформулюйте означення циліндра. Назвіть його елементи.
3. Як обчислюють площу поверхні циліндра?
4. Сформулюйте означення конуса. Назвіть його елементи.
5. Як обчислюють площу поверхні конуса?
6. Як відносяться площі основи конуса і паралельного їй перерізу?
7. Що таке конічна поверхня?
8. Якими можуть бути перерізи конічних поверхонь?
9. Дайте означення кулі; сфери. Назвіть їх елементи.
10. Як можуть бути розміщені дві сфери? А сфера і площина?

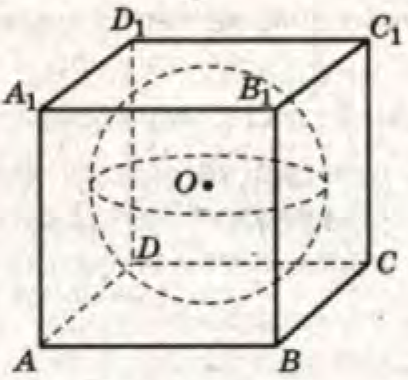
§ 34. Комбінації геометричних фігур

Досі ми розглядали властивості простих геометричних тіл – призм, пірамід, циліндрів, конусів, куль. Але багатьом спеціалістам часто доводиться мати справу із складнішими тілами, які є *комбінаціями* (об'єднаннями) названих тіл.

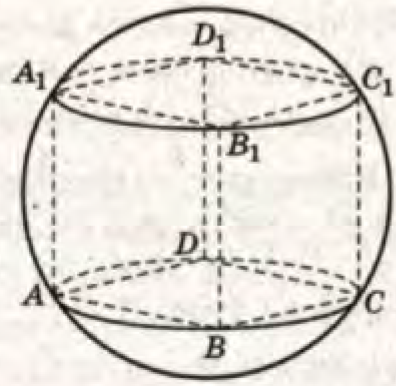
З різноманітних комбінацій геометричних фігур особливої уваги варті *вписані* й *описані тіла*.

Наприклад, куля називається *вписаною в многогранник*, якщо вона дотикається до кожної грані многогранника.

Многогранник називається *вписаним у сферу*, якщо всі його вершини лежать на сфері. На малюнку 203 зображено кулю, вписану в куб, а на малюнку 204 – куб, вписаний у сферу.

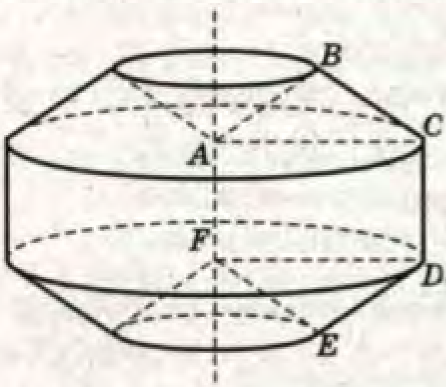


Мал. 203



Мал. 204

Призма називається *вписаною* в циліндр, якщо її основи вписані в основи циліндра. Циліндр буде *вписаним* у призму, якщо кола його основ вписані в основи призми. Піраміда називається *вписаною* в конус, якщо їх вершини збігаються, а основа піраміди вписана в коло основи конуса. Конус *вписаний* у піраміду, якщо їх вершини збігаються, а коло основи конуса дотикається до всіх сторін основи піраміди.



Мал. 205

Якщо одне тіло вписане в інше, то друге тіло називають *описаним* навколо першого.

Як комбінації циліндрів, конусів і зрізаних конусів можна розглядати тіла, утворені обертанням многокутників. Наприклад, тіло, утворене обертанням правильного шестикутника навколо його сторони, є об'єднанням циліндра і двох зрізаних конусів, з якого вилучено два конуси (мал. 205).

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Яка куля називається вписаною в многогранник?
2. Який многогранник називається вписаним у кулю?
3. Дайте означення призми, вписаної в циліндр.
4. Дайте означення піраміди, вписаної в конус.
5. Чи навколо кожного правильного многогранника можна описати сферу?

Виконаємо разом

Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть довжину ребра куба, вписаного в конус так, що чотири його вершини лежать на основі конуса, а інші чотири – на його бічній поверхні.

● **Розв'язання.** Нехай PM – твірна конуса, яка проходить через вершину A_1 вписаного куба (мал. 206). Вершина A куба лежить на радіусі OM. За умовою задачі, $PM = l$, $\angle PMO = \alpha$. Якщо ребро куба дорівнює x, то $OA = \frac{x}{\sqrt{2}}$. З прямокутного ΔPOM маємо:

$$OM = PM \cdot \cos\alpha = l\cos\alpha,$$

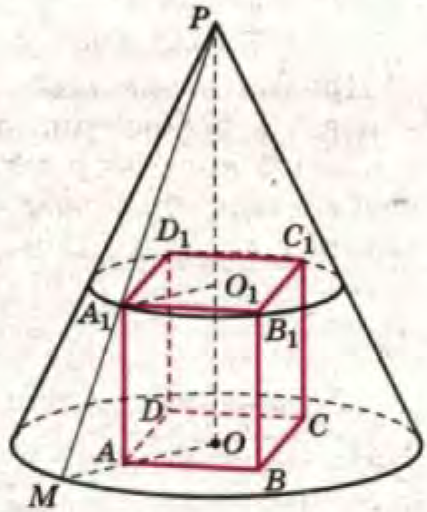
$$MA = MO - OA = l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки $\frac{A_1A}{MA} = \mathrm{tg}\alpha$, то

$$\frac{x}{l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}} = \mathrm{tg}\alpha,$$

звідки $x = \frac{\sqrt{2}\, l\sin\alpha}{\sqrt{2} + \mathrm{tg}\,\alpha}$.

Відповідь. $x = \frac{\sqrt{2}\, l\sin\alpha}{\sqrt{2} + \mathrm{tg}\,\alpha}$.



Мал. 206

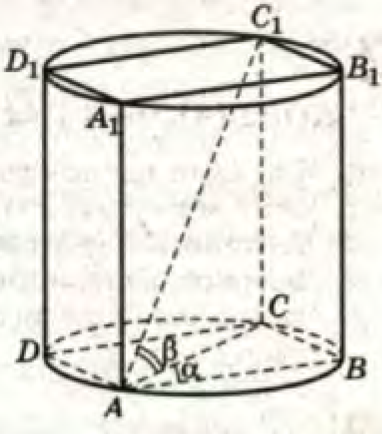
2. Основою прямої призми є прямокутник зі стороною a та кутом α, який утворює ця сторона з діагоналлю основи. Діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо призми, якщо $a = 6$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

● **Розв'язання.** Дана призма – прямокутний паралелепіпед (мал. 207). Тому, якщо $AB = a$, то $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAC_1 = \beta$, CC_1 – висота описаного циліндра, а AC – діаметр його основи.

Площу бічної поверхні циліндра визначатимемо за формулою

$$S = 2\pi rh,$$

де $r = \frac{AC}{2}$, $h = CC_1$.



Мал. 207