Оскільки трикутники ABC і ACC_1 прямокутні, то

$$AC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha};\ CC_1 = AC\,\mathrm{tg}\beta = \frac{a}{\cos\alpha}\mathrm{tg}\beta.$$

Отже,

$$S = 2\pi\,\frac{a}{2\cos\alpha}\cdot\frac{a}{\cos\alpha}\,\mathrm{tg}\beta = \frac{\pi a^2}{\cos^2\alpha}\mathrm{tg}\beta.$$

Якщо $a = 6$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, то

$$S = \frac{\pi 6^2\cdot 4}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{144\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь. $S = \dfrac{\pi a^2}{\cos^2\alpha}\mathrm{tg}\beta = \dfrac{144\pi\sqrt{3}}{3}$ см^2.

Виконайте усно

1101. Знайдіть радіус кулі, вписаної в куб з ребром завдовжки a.

1102. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в куб з ребром завдовжки 2 см.

1103. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, у який вписано кулю радіуса R.

1104. Чи в будь-який циліндр можна вписати кулю?

1105. Чому дорівнює висота зрізаного конуса, в який вписано кулю радіуса R?

1106. Знайдіть діагональ куба, вписаного у сферу радіуса 8 см.

А

1107. Накресліть описану навколо кулі правильну призму: а) чотирикутну; б) трикутну.

1108. Накресліть описану навколо кулі правильну піраміду: а) чотирикутну; б) трикутну.

1109. Накресліть вписану в конус правильну піраміду:
а) трикутну; б) чотирикутну; в) шестикутну.

1110. Впишіть у правильну чотирикутну піраміду куб так, щоб одна його грань лежала на основі піраміди, а вершини протилежної грані: а) на бічних ребрах піраміди; б) на апофемах піраміди.

1111. В основі прямої призми – прямокутний трикутник. Опишіть навколо неї: а) циліндр; б) сферу.

1112. Знайдіть діаметр сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 дм, 4 дм і 5 дм.

1113. Знайдіть площу сфери, вписаної в куб, ребро якого – 10 см.

1114. Як відносяться площі сфер, вписаної в куб та описаної навколо того самого куба?

Б

1115. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди.

1116. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 10 м і 24 м, а всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть площу поверхні конуса, вписаного в цю піраміду.

1117. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного в призму.

1118. Знайдіть площу поверхні циліндра, описаного навколо трикутної призми, всі ребра якої дорівнюють a.

1119. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 27 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні вписаного в неї циліндра.

1120. У прямий паралелепіпед, діагоналі основи якого дорівнюють 6 см і 8 см, вписано кулю. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.

1121. Навколо правильної шестикутної призми, висота якої дорівнює 12 см, описано сферу радіуса 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1122. Знайдіть площу сфери, описаної навколо циліндра, діаметр основи і висота якого дорівнюють відповідно 4 см і 3 см.

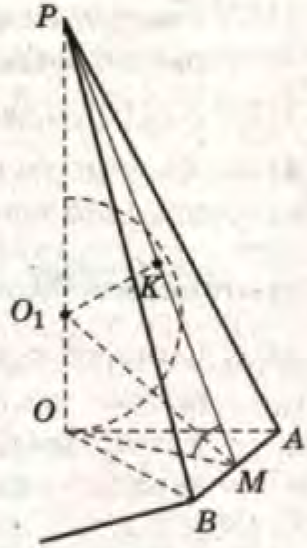
1123. Площа бічної поверхні конуса – Q, а радіус його основи – r. Знайдіть довжину бічного ребра вписаної в цей конус правильної піраміди: а) трикутної; б) чотирикутної; в) шестикутної.

1124. Навколо кулі радіуса r описано конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо $r = 2$ м, $\alpha = 50°$.

1125. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть радіус кулі: а) вписаної в цей октаедр; б) описаної навколо нього.

1126*. Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну n-кутну піраміду (мал. 208), сторона основи якої дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи – α, якщо: а) $n = 4$; б) $n = 6$; в) $n = 3$; г) $n = m$.

1127*. У сферу радіуса r вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту піраміди.



Мал. 208

Вправи для повторення

1128. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра, якщо площа основи відноситься до площі осьового перерізу як $\pi : 4$.

1129. Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, є квадратом і віддалений від осі на 2 см. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи дорівнює $\sqrt{6}$ см.

1130. Обчисліть діагональ куба, якщо діагональ його бічної грані дорівнює d.

§ 35. Об'єм призми та циліндра

Кожне тіло займає певну частину простору: цеглина – меншу, ніж будинок; куб з ребром 1 см – меншу, ніж куб з ребром 2 см. Щоб можна було порівнювати різні частини простору, вводять поняття *об'єму*.

Строгий виклад теорії об'ємів досить складний. Ми обмежимося розглядом лише простих тіл – многогранників, циліндра, конуса та кулі. Для цих тіл об'єм – це величина, яка задовольняє певні умови (властивості об'єму).

1. *Кожне тіло має об'єм, виражений додатним числом.*

2. *Якщо тіло поділене на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.*

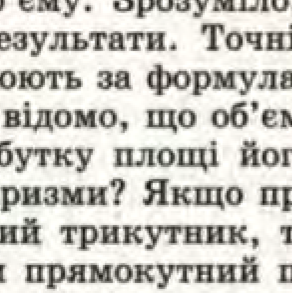
3. *Рівні тіла мають рівні об'єми.*

4. *Об'єм одиничного куба дорівнює одиниці об'єму.* Одиничним кубом називають куб, ребро якого дорівнює одиниці довжини.

Об'єм – одна з величин, як і довжина, міра кута, площа. Значення об'єму задається не тільки числом, а й найменуванням. Наприклад, об'єм 1 дм^3 можна записати і як 1000 см^3, і як 0,001 м^3. У теоретичних міркуваннях за одиницю довжини беруть довжину деякого (одиничного) відрізка. Площу квадрата, сторона якого дорівнює одиничному відрізку, беруть за одиницю площі, а об'єм куба, ребро якого дорівнює одиничному відрізку, – за одиницю об'єму.

Об'єми тіл вимірюють або обчислюють. Наприклад, об'єм відра можна виміряти, наливаючи в нього воду банкою відомого об'єму. Зрозуміло, що такі вимірювання дають наближені результати. Точні значення об'ємів геометричних тіл обчислюють за формулами. Розглянемо деякі з них.

Вам відомо, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту. А як знаходити об'єм призми? Якщо призма пряма і в її основі лежить прямокутний трикутник, то з двох таких рівних призм можна скласти прямокутний паралелепіпед (мал. 209). Якщо висота, площа основи та об'єм такої трикутної призми дорівнюють h, S і V, то висота, площа основи та об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнюють відповідно h, $2S$ і $2V$. Оскільки об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добуткові площі основи на висоту, то $2V = 2S \cdot h$, звідки $V = Sh$.



Мал. 209

Мал. 210

Отже, об'єм кожної прямої призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник, дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Розглянемо довільну пряму призму з площею основи S, висотою h і об'ємом V. Її основу можна поділити на n прямокутних трикутників (мал. 210), отже, дану призму – на n прямих призм, основами яких є прямокутні трикутники. Якщо їх площі основ та об'єми дорівнюють відповідно S_1 і V_1, S_2 і V_2, ..., S_n і V_n, то

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n = S_1h + S_2h + ... + S_nh =$$
$$= (S_1 + S_2 + ... + S_n)h = Sh.$$

Цим доведено, що *об'єм кожної прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту*.

Циліндр можна розглядати як правильну n-кутну призму при дуже великому n. Наприклад, якщо n дорівнює мільярду, то таку призму практично не можна відрізнити від циліндра. А, за доведеним, об'єм і такої призми дорівнює добуткові площі її основи на висоту. Тому *об'єм циліндра також дорівнює добуткові площі основи на висоту*. Оскільки площа круга радіуса r дорівнює πr^2, то об'єм циліндра, радіус основи якого – r, а висота – h, можна знаходити за формулою

$$V = \pi r^2 h.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Назвіть властивості об'єму.
2. У яких одиницях вимірюють об'єм?
3. Як можна вимірювати об'єми?
4. Чому дорівнює об'єм куба з ребром завдовжки a?
5. Чому дорівнює об'єм призми?
6. Чому дорівнює об'єм циліндра?

Виконаємо разом

1. Площі трьох нерівних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 дм^2, 10 дм^2 і 15 дм^2. Знайдіть його об'єм.

• **Розв'язання.** Якщо виміри даного паралелепіпеда – x, y, z, то $xy = 6$, $xz = 10$, $yz = 15$. Перемножимо ці рівності:

$$x^2y^2z^2 = 900.$$

Отже, шуканий об'єм $V = xyz = \sqrt{900} = 30$.

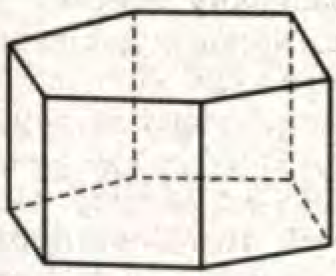
Відповідь. $V = 30$ дм^3.

2. Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, кожне ребро якої має довжину a.

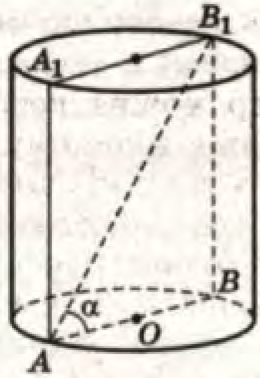
• **Розв'язання.** Висота даної призми (мал. 211) дорівнює a, а основу можна поділити на 6 правильних трикутників, площа кожного з яких дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Тому шуканий об'єм $V = Sh = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = 1{,}5\sqrt{3}a^3$.

3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм циліндра.



Мал. 211



Мал. 212

•Розв'язання. Нехай ABB_1A_1 – осьовий переріз циліндра, AB_1 – його діагональ і $\angle B_1AB = \alpha$ (мал. 212). Трикутник ABB_1 – прямокутний, тому висота циліндра $BB_1 = d\sin\alpha$, а діаметр основи $AB = d\cos\alpha$. Радіус основи $OA = 0{,}5d\cos\alpha$. Тому шуканий об'єм циліндра

$$V = \pi \cdot OA^2 \cdot AB = \pi \cdot 0{,}25d^2\cos^2\alpha \cdot d\sin\alpha = 0{,}25\pi\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Виконайте усно

1131. Ребро куба дорівнює 5 дм. Чому дорівнює його об'єм?

1132. Якою буде площа поверхні куба, якщо його об'єм дорівнює 27 см^3?

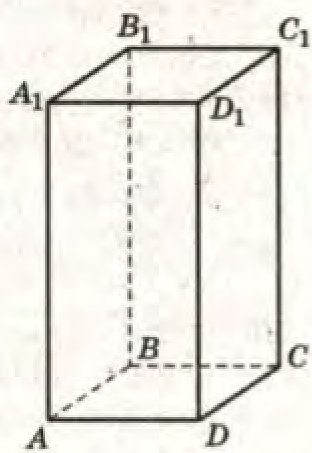
1133. На малюнку 213 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть його об'єм, якщо:

а) $AD = 2a$, $DD_1 = a$, $DC = 3a$;

б) $AD = 0{,}5$ м, $DC = 4$ дм, $CC_1 = 3$ дм;

в) $AB = m$, $A_1D_1 = 2m$, $CC_1 = 0{,}5m$;

г) $S_{ABCD} = Q$, $CC_1 = 3$.



Мал. 213

1134. Зі шматка пластиліну, який мав форму прямокутного паралелепіпеда розмірами 1×2×4, виліпили куб. Знайдіть довжину ребра цього куба.

1135. Скільки кубів з ребром завдовжки 1 дм можна вкласти в коробку розмірами 3×4×5?

1136. Як зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо всі його виміри збільшити в 3 рази?

1137. Об'єм правильної чотирикутної призми дорівнює 14 см^3. Знайдіть об'єми многогранників, на які ця призма поділяється двома перпендикулярними діагональними площинами.

A

1138. Знайдіть об'єм куба, якщо площа його грані дорівнює Q.

1139. Діагональ куба дорівнює d. Знайдіть його об'єм.

1140. Об'єм куба дорівнює V. Знайдіть площу його поверхні.

1141. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 6 см і 8 см, а діагональ утворює з площиною основи кут 45°.

1142. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 3 см і 4 см, а площа діагонального перерізу – 30 см^2.

1143. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо площа її основи дорівнює 49 см^2, а площа бічної грані – 56 см^2.

1144. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм призми.

1145. Три свинцеві куби з ребрами 1 см, 6 см і 8 см переплавили в один куб. Знайдіть довжину ребра утвореного куба.

1146. Виміри прямокутного паралелепіпеда – 15 м, 36 м і 50 м. Знайдіть довжину ребра куба такого самого об'єму.

1147. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює 39 см, а ребра пропорційні числам 3, 4 і 12.

1148. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 1, 2 і 4. Знайдіть його об'єм, якщо площа поверхні дорівнює 112 см^2.

1149. На кожного учня класу має припадати не менш як 6 м^3 повітря. На скільки учнів розрахована класна кімната розмірами $10 \times 6 \times 3{,}5$ м?

1150. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 2 см і 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 3 см.

1151. Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 2 см, а висота – 5 см.

1152. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, всі ребра якої дорівнюють a.

1153. Основа прямої призми – прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а більша бічна грань – квадрат. Знайдіть об'єм призми.

1154. Осьовий переріз циліндра – квадрат зі стороною a. Знайдіть об'єм циліндра.

1155. Знайдіть об'єм циліндра, у який вписано кулю радіуса R.

1156. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата зі стороною a навколо прямої, що містить сторону квадрата.

Б

1157. Діагональ грані правильної трикутної призми дорівнює d і нахилена до сторони основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми.

1158. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 16 см. Знайдіть об'єм призми, якщо периметр її більшої бічної грані дорівнює 48 см.

1159. Основою прямої призми є ромб зі стороною a і кутом 60°. Знайдіть об'єм призми, якщо її менша діагональ утворює з площиною основи кут 45°.

1160. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами 6 см і 10 см. Через більшу основу трапеції та середину протилежного бічного ребра проведено площину під кутом 30° до площини основи. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює 48 см^2.

1161. У пряму призму, сторони основи якої дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, вписано кулю. Знайдіть об'єм призми.

1162. Знайдіть об'єм прямого паралелепіпеда, сторона основи якого дорівнює a, а радіус вписаної кулі – r.

1163. Переріз залізничного насипу має вигляд трапеції з основами 18 м і 8 м та висотою 3 м. Знайдіть об'єм 1 км такого насипу.

1164. Довжини двох круглих колод рівні, а їх діаметри відносяться як 2 : 3. Як відносяться їх об'єми?

1165. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної 1 м^3 нафти, якщо товщина її плівки дорівнює 1 мм.

1166. У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої – 20 см, опущено деталь. Рівень рідини, яка була в посудині, піднявся на 12 см. Знайдіть об'єм деталі.

1167. Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, висота якого – 85 см, а радіуси – 45 см і 2 см? Товщина паперу – 0,1 мм.

Вправи для повторення

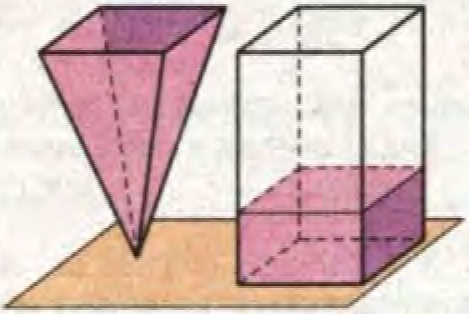
1168. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см навколо сторони завдовжки 14 см.

1169. Знайдіть висоту циліндра, якщо діаметр його основи d з центра другої основи видно під кутом α.

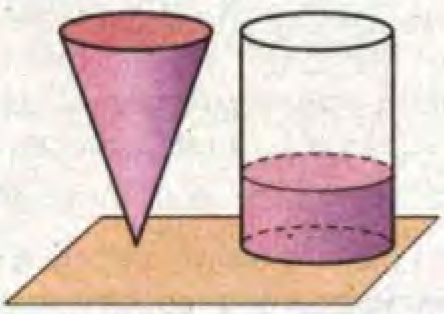
1170. Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, у якої апофема завдовжки l утворює з висотою кут α.

§ 36. Об'єм піраміди, конуса та кулі

Формули для визначення об'ємів піраміди, конуса та кулі можна встановити експериментально. Пересипаючи пісок з піраміди в призму (мал. 214) або з конуса в циліндр (мал. 215) з відповідно рівними основами й висотами, неважко переконатися, що об'єм піраміди втричі менший за об'єм призми, а об'єм конуса втричі менший за об'єм циліндра. Отже, *об'єм піраміди чи конуса дорівнює третині добутку площі основи на висоту*.



Мал. 214

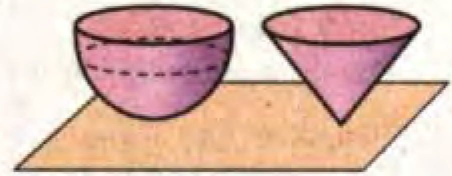


Мал. 215

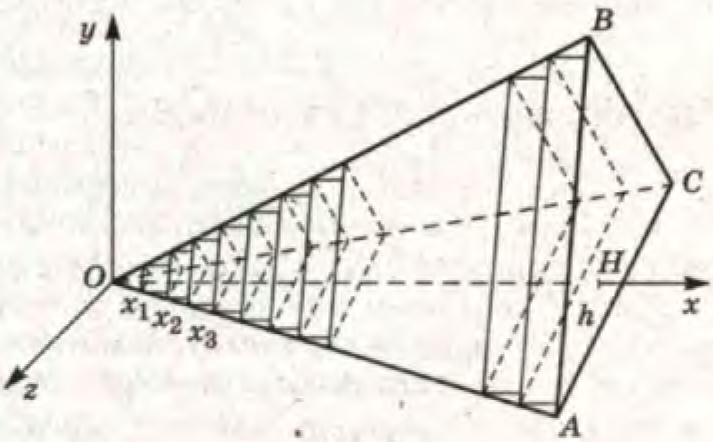
Зокрема, якщо радіус основи конуса – r, а висота – h, то його об'єм $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

У такий спосіб можна переконатися, що об'єм півкулі радіуса r удвічі більший за об'єм конуса, радіус основи якого і висота дорівнюють r (мал. 216). Оскільки об'єм такого конуса дорівнює $\frac{1}{3}\pi r^3$, то об'єм кулі радіуса r можна визначити за формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Зрозуміло, що такі міркування – не доведення. Строго математично вивести формули для визначення об'ємів зазначених тіл можна за допомогою інтегралів. Наведемо загальні схеми таких доведень.


Мал. 216

Нехай дано довільну піраміду $OABC$ (мал. 217). Розмістимо прямокутну систему координат так, щоб її початок збігався з вершиною O, а вісь x була напрямлена вздовж висоти піраміди OH.



Мал. 217

Поділимо цю висоту h точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n рівних відрізків. Якщо через кожну з цих точок провести площини, перпендикулярні до осі x, то вони поділять піраміду на n частин. Одна з цих частин – маленька піраміда, решта – зрізані піраміди. Замінимо уявно кожну з цих зрізаних пірамід прямою призмою з такою самою висотою та основою, що дорівнює меншій основі відповідної зрізаної піраміди. Внаслідок цього утвориться вписане в піраміду східчасте тіло, складене з $n - 1$ призм. Висота кожної з цих призм $\delta = \frac{h}{n}$, а площі основ – деякі функції від x: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, …, $f(x_{n-1})$. Об'єм V_n утвореного східчастого тіла дорівнює сумі об'ємів усіх цих $n - 1$ призм:

$$V_n = f(x_1)\delta + f(x_2)\delta + \ldots + f(x_{n-1})\delta.$$

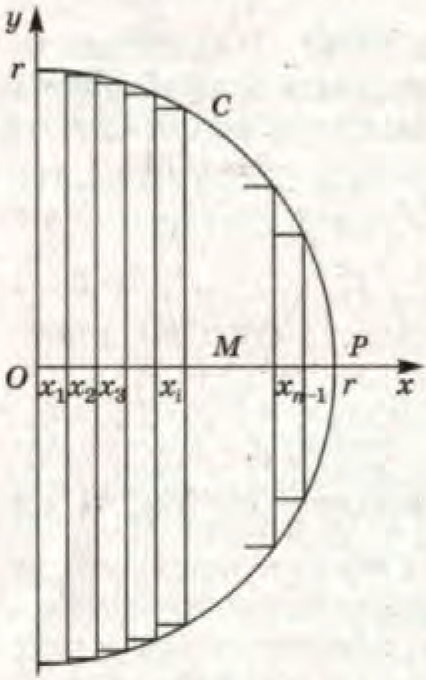
Це – інтегральна сума. Тут функція $f(x)$ – площа перерізу піраміди площиною, що перпендикулярна до осі x і віддалена від вершини O на x.

Як було показано на с. 226, $f(x) : S = x^2 : h^2$, звідки

$$f(x) = \frac{S}{h^2}x^2.$$

Отже, шуканий об'єм даної піраміди

$$V = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{Sh^3}{3h^2} = \frac{1}{3}Sh.$$



Мал. 218

Так само, але замінивши скрізь слово «піраміда» на «конус», можна довести, що й об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту. Аналогічно виводиться також формула об'єму кулі.

Нехай дано півкулю радіуса r (мал. 218). Її радіус OP, який лежить на осі x, точками x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1} поділимо на n рівних частин і через точки поділу проведемо площини, перпендикулярні до осі x. Дану півкулю вони поділять на n частин. Кожну з цих частин, крім останньої, замінимо циліндром так, щоб утворилося східчасте тіло, складене з $n - 1$ циліндрів. Висота кожного з цих циліндрів $\delta = \frac{r}{n}$, а площі основ – деякі функції від x_i: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_{n-1})$. Об'єм утвореного східчастого тіла, вписаного в цю півкулю, $f(x_1)\delta + f(x_2)\delta + f(x_3)\delta + ... + f(x_{n-1})\delta$.

Це – інтегральна сума. Функція $f(x_i)$ – площа перерізу, проведеного через точку x_i площиною, перпендикулярною до осі x. Якщо абсцису x_i має точка C на поверхні кулі, то $f(x_i)$ – площа круга радіуса CM. З прямокутного трикутника OCM маємо: $CM^2 = r^2 - x_i^2$. Тому $f(x_i) = \pi(r^2 - x_i^2)$. Отже, об'єм півкулі радіуса r

$$\int_0^r \pi(r^2 - x^2)dx = \left(\pi r^2x - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

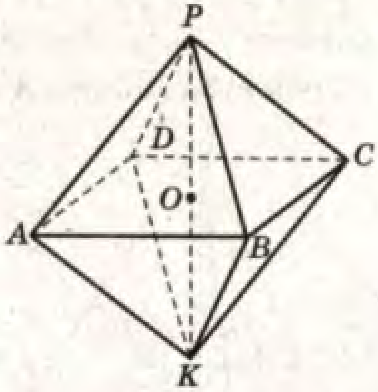
Об'єм усієї кулі радіуса r вдвічі більший, тобто $V_к = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Виконаємо разом

1. Знайдіть об'єм правильного октаедра, ребро якого дорівнює a.

● Розв'язання. Правильний октаедр $PABCDK$ – об'єднання двох рівних правильних пірамід: $PABCD$ і $KABCD$ (мал. 219). Їх спільна основа – квадрат $ABCD$, площа якого $S = a^2$; $PK = a\sqrt{2}$ як діагональ квадрата $APCK$ зі стороною a. Шуканий об'єм

$$V = \frac{1}{3}S \cdot PO + \frac{1}{3}S \cdot KO = \frac{1}{3}S \cdot PK =$$
$$= \frac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$



Мал. 219

2. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює a, а плоскі кути при вершині – 60°, 90° і 90°.

● Розв'язання. Візьмемо за основу піраміди її грань, яка є рівностороннім трикутником.

Його площа $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а висота піраміди – a. Тому об'єм піраміди $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

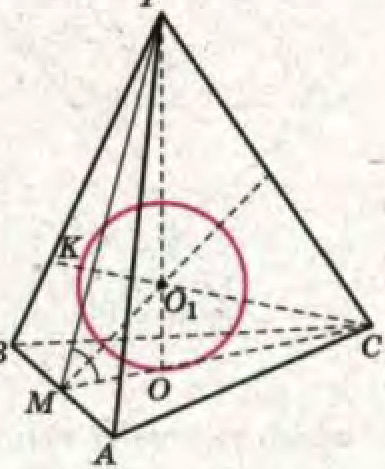
3. Доведіть, що коли многогранник, описаний навколо кулі радіуса r, має площу поверхні S, то його об'єм $V = \dfrac{1}{3}Sr$.

● Розв'язання. Сполучимо центр кулі з кожною вершиною описаного n-гранника, дістанемо n пірамід. Висота кожної з них дорівнює r, а площа основи – площі відповідної грані даного многогранника. Тому, якщо $S_1, S_2, ..., S_n$ – площі граней описаного многогранника, то його об'єм

$$V = \frac{1}{3}S_1r + \frac{1}{3}S_2r + ... + \frac{1}{3}S_nr = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + ... + S_n) = \frac{1}{3}Sr.$$

4. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в правильну трикутну піраміду, сторона основи якої – a, а двогранний кут при ребрі основи – α.

Розв'язання. Центр O_1 кулі, вписаної в правильну трикутну піраміду $PABC$, лежить на її висоті PO (мал. 220). Куля дотикається до бічної грані PAB у деякій точці K, яка лежить на апофемі піраміди PM.



Мал. 220

Якщо $AB = a$, то

$$OM = \frac{1}{3}MC = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Оскільки $\Delta O_1OM = \Delta O_1KM$, то

$$\angle O_1MO = \frac{1}{2}\angle PMO = \frac{\alpha}{2}.$$

З прямокутного трикутника MOO_1 знаходимо радіус кулі:

$$OO_1 = OM\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отже, об'єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot OO_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$

Виконайте усно

1171. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 5 см, а висота – 4 см.

1172. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а гіпотенуза дорівнює висоті піраміди.

1173. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 3 см, а радіус основи – 1 см.

А

1174. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 2 м, а твірна утворює з площиною основи кут 45°.

1175. Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює 5 см, а висота – 3 см.

1176. Чому дорівнює об'єм кулі радіуса 2 см?

1177. Як зміниться об'єм кулі, якщо її діаметр збільшити у 2 рази?

1178. Знайдіть радіус кулі, якщо її об'єм дорівнює 36π см^3.

1179. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює h, а діагональ основи – d.

1180. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, кожне ребро якої дорівнює 1 дм.

1181. Знайдіть об'єм піраміди Хеопса, якщо площа її основи дорівнює 5,3 га, а висота – 147 м.

1182. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює b, а плоский кут при вершині – 90°.

1183. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні, а їх довжини дорівнюють a, b, c. Знайдіть об'єм піраміди.

1184. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює b та утворює: а) з площиною основи кут α; б) з висотою піраміди кут β; в) зі стороною основи піраміди кут φ.

1185. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює a і: а) двогранний кут при ребрі основи дорівнює α; б) бічне ребро утворює з площиною основи кут β; в) плоский кут при вершині піраміди дорівнює φ.

1186. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро – 5 см.

1187. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює a і: а) двогранний кут при ребрі основи дорівнює α; б) бічне ребро утворює з площиною основи кут β; в) плоский кут при вершині піраміди дорівнює φ.

1188. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

1189. Свинцевий конус, висота якого дорівнює 18 см, переплавили в циліндр з такою самою основою. Знайдіть висоту циліндра.

1190. Купа щебеню має форму конуса, твірна якого – 4 м. Знайдіть її об'єм, якщо кут природного укосу для щебеню – 30°.

1191. Маємо два конуси однакового зерна одного сорту: один удвічі вищий за другий. У скільки разів у першому конусі більше зерна, ніж у другому?

1192. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник з катетом $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм конуса.

1193. Осьовий переріз конуса – рівносторонній трикутник. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його поверхні дорівнює 12π см^2.

1194. Чому дорівнює об'єм кулі, вписаної в куб, об'єм якого дорівнює 8 м^3?

1195. Знайдіть висоту циліндра, у який вписано кулю об'ємом $\frac{4}{3}\pi$ см^3.

1196. Знайдіть об'єм кулі, діаметр якої дорівнює 4 дм.

1197. Площа поверхні кулі дорівнює 16π см^2. Знайдіть об'єм цієї кулі.

1198. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть об'єми вписаної та описаної куль.

1199. Як відносяться об'єми двох куль, якщо їх радіуси відносяться як 2 : 3?

1200. Скільки кульок діаметра 0,6 см можна відлити зі шматка свинцю масою 1 кг? Густина свинцю – 11,4 кг/дм^3.

1201. Діаметр одного кавуна вдвічі більший за діаметр другого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?

1202. Пересипаючи пісок з порожнистої півкулі радіуса r у конус, радіус і висота якого дорівнюють r, учень дійшов висновку, що об'єм півкулі у 2 рази більший за об'єм конуса. Чи відповідає результат цього експерименту теорії?

Б

1203. За бічним ребром b і плоским кутом 2α при вершині піраміди знайдіть об'єм правильної піраміди: а) чотирикутної; б) трикутної; в) шестикутної.

1204. Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

1205. Основа піраміди – паралелограм зі сторонами a, b і кутом φ. Висота піраміди – h. Знайдіть об'єм піраміди.

1206. Основа піраміди – трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Двогранні кути при кожному ребрі основи дорівнюють по 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

1207. Через вершину конуса проведено площину під кутом 45° до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді a, яку видно з центра основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм конуса.

1208. Визначте об'єм конуса, якщо в його основі хорда m стягує дугу φ, а кут між твірною і висотою дорівнює α.

1209. З центра основи конуса до твірної проведено перпендикуляр завдовжки d. Знайдіть об'єм конуса, якщо цей перпендикуляр утворює з площиною основи кут α.

1210. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть об'єм вписаної в цей конус правильної піраміди: а) чотирикутної; б) трикутної.

1211. Доведіть теорему Архімеда: об'єм кулі в 1,5 разу менший за об'єм описаного навколо неї циліндра.

1212. З циліндра, осьовий переріз якого – квадрат зі стороною 10 см, коваль викував кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.

1213. Зі свинцевої кулі радіуса 10 см зробили циліндричний диск завтовшки 3 см. Знайдіть діаметр диска.

1214. Кут в осьовому перерізі кульового сектора дорівнює 60°. Знайдіть відношення об'єму кульового сектора до об'єму відповідного конуса.

1215. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо конуса, твірна якого дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

1216. Навколо кулі описано правильну чотирикутну піраміду, кожна з бічних граней якої утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм кулі, якщо висота піраміди дорівнює h. Обчисліть для $h = 9$ см, $\alpha = 60°$.

1217. З циліндра, висота якого дорівнює діаметру, виточили кулю найбільшого об'єму. Скільки відсотків матеріалу сточено?

1218. Маса порожнистої чавунної кулі – 1,57 кг, її зовнішній діаметр – 10 см. Знайдіть внутрішній діаметр, якщо густина чавуну 7,3 кг/дм^3.

1219. Якою має бути загальна маса космічного апарата, що має форму кулі радіуса 1 м, щоб він не тонув у воді?

1220. З краплини мильного розчину діаметра 6 мм хлопчик видув бульбашку діаметра 30 см. Знайдіть товщину плівки цієї бульбашки.

Самостійна робота № 9

Варіант 1

1. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а сторона основи – 5 см.

2. Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює 6 см і утворює кут 30° з його висотою.

3. Об'єм кулі дорівнює 36π см^3. Знайдіть її діаметр.

4. Намалюйте кулю, вписану у правильний тетраедр.

Варіант 2

1. Знайдіть об'єм циліндра, висота якого дорівнює 7 см, а радіус основи – 5 см.

2. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 6 см і утворює з її висотою кут 45°.

3. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайдіть її об'єм.

4. Намалюйте сферу, описану навколо правильного октаедра.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Сформулюйте властивості об'єму.
2. Якими одиницями вимірюють об'єм?
3. Як можна виміряти об'єм тіла? Наведіть приклади.
4. Чому дорівнює об'єм куба?
5. Як обчислюють об'єм прямокутного паралелепіпеда?
6. За якою формулою обчислюють об'єм призми?
7. Наведіть формулу, за якою обчислюють об'єм циліндра.
8. За якою формулою обчислюють об'єм піраміди?
9. Запишіть формулу для обчислення об'єму конуса.
10. Запишіть формулу для обчислення об'єму кулі.

Історичні відомості

Геометричні тіла були добре відомі давньогрецьким ученим, хоч їх означення формулювали тоді інакше. Для прикладу наведемо кілька означень з «Основ» Евкліда: «Тілом називається те, що має довжину, ширину і глибину. Межами тіла є поверхні... Призма – це тіло, обмежене площинами, дві протилежні яких рівні, подібні й паралельні, а решта є паралелограми... Куб – тіло, обмежене шістьма рівними квадратами...».

Знали давньогрецькі геометри також фігури обертання. Назви «циліндр», «конус», «сфера» – грецького походження. У «Основах» Евкліда їх зміст описано такими фразами: «Циліндр походить від обертання прямокутника навколо нерухомої сторони»; «Конус описано прямокутним трикутником, який обертається навколо нерухомої перпендикулярної сторони»; «Сферу описано півкругом, який обертається навколо нерухомого діаметра». Як бачимо, стародавні греки сферою називали не поверхню кулі, а всю кулю. Розрізняти ці два поняття стали пізніше.

Архімед (бл. 287–212 до н. е.) тілам обертання присвятив дві праці: «Про кулю і циліндр» та «Про коноїди і сфероїди». Він також розглядав властивості фігур, утворених обертанням еліпса, частини параболи тощо. Конічною поверхнею вважають поверхню, утворену обертанням однієї з двох прямих, які перетинаються, навколо другої. Аполлоній Пергський (бл. 262 – бл. 190 до н. е.) з'ясував властивості конічних поверхонь у праці «Конічні перерізи». Він дослідив, у яких випадках перерізом такої поверхні та площини є коло, еліпс, гіпербола чи парабола. Ці дослідження суттєво вплинули на розвиток математики, астрономії, механіки й оптики.

Об'єми простих многогранників уміли знаходити ще в Стародавньому Єгипті. В одному папірусі, який дійшов до наших днів, крім іншого, розв'язується задача на визначення об'єму зрізаної піраміди з висотою 6 і сторонами основ 4 і 2. Архімед умів знаходити об'єми навіть параболоїда, гіперболоїда й еліпсоїда обертання, а також площі поверхонь циліндра, конуса, кулі.

Нові методи визначення об'ємів геометричних тіл розробив італійський математик Б. Кавальєрі (1598–1647). Його міркування були нестрогими, інтуїтивними, бо посилався він на ще не доведені твердження, які вважав очевидними. Тільки згодом їх було доведено методами математичного аналізу.

Строгу сучасну теорію об'ємів, площ та інших величин розробив відомий французький математик А. Лебег (1875–1941). На основі загального поняття міри він запровадив нове, загальніше, поняття інтеграла, який тепер називають інтегралом Лебега.

З українських математиків найбільший внесок у розвиток геометрії зробили Г.Ф. Вороний, М.Є. Ващенко-Захарченко, О.С. Смогоржевський.

Вороний Георгій Феодосійович був професором Петербурзького і Варшавського університетів. Досліджував питання про заповнення площини та простору рівними фігурами. Є творцем геометричної теорії чисел.

Ващенко-Захарченко Михайло Єгорович (1825–1912) народився в с. Маліївці на Полтавщині. Навчався в Києві і Парижі, був професором Київського університету. Досліджував питання історії розвитку геометрії, надрукував кілька посібників з геометрії, переклав з грецької «Початки» Евкліда.

Смогоржевський Олександр Степанович (1896–1969) народився в с. Лісовому на Вінниччині. Навчався в Немирові, Києві, був професором Київського політехнічного інституту. Досліджував питання, пов'язані з геометричними побудовами, надрукував кілька посібників і підручників, зокрема підручник з основ геометрії для студентів університетів. Його праці перекладено англійською, болгарською, чеською, японською та деякими іншими мовами.

Розвивається геометрична наука і тепер, бо вона дуже потрібна людям. Ось що писав один з найвідоміших архітекторів XX ст. Ле Корбюзьє: «Ніколи ще до нашого часу ми не жили в такий геометричний період... Навколишній світ – це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганний у наших очах. Все навколо – геометрія». Тому ким би не став сучасний школяр, де б він не працював, йому потрібна геометрія.

ГЕОРГІЙ ФЕОДОСІЙОВИЧ ВОРОНИЙ

(1868–1908)

Український математик. Народився в с. Журавка (Чернігівська обл.), досліджував проблеми геометричної теорії чисел та геометрії многогранників. Математики всього світу дедалі частіше використовують поняття: алгоритм Вороного, клітини Вороного, метод Вороного, многокутники Вороного, діаграми Вороного, розбиття Вороного, мозаїка Вороного тощо.

Головне в розділі 6

Призми, піраміди, зрізані піраміди, правильні многогранники – найпростіші та найважливіші види многогранників.

Призмою називають многогранник, у якого дві грані – рівні n-кутники, а решта n граней – паралелограми. Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. Призма називається *правильною*, якщо вона пряма, а її основи – правильні многокутники. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту.

Паралелепіпедом називають призму, в основі якої лежить паралелограм. Якщо бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площин основ, його називають *прямим паралелепіпедом*. Якщо всі 6 граней паралелепіпеда прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом*. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів. Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

Пірамідою називають многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а всі інші грані – трикутники, що мають спільну вершину. Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, центр якого збігається з основою висоти. Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, – *апофема* піраміди. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему.

Многогранник називається *правильним*, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники, а всі вершини однаково віддалені від деякої точки. Існує всього 5 видів правильних многогранників: правильні тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр та ікосаедр.

Циліндр, конус, зрізаний конус, куля, кульовий сегмент, кульовий сектор – найважливіші тіла обертання.

Циліндр – тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони. Поверхня циліндра складається з двох основ і бічної поверхні. Основи циліндра – рівні круги, що лежать у паралельних площинах; бічну поверхню можна розгорнути у прямокутник. Тому якщо радіус і висота циліндра r і h, то площа його бічної поверхні $S = 2\pi rh$, площа поверхні $S = 2\pi r(r + h)$.

Конус – тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета. Якщо радіус конуса r, а твірна l, то площа бічної поверхні конуса $S = \pi rl$, а площа поверхні

$$S = \pi r(r + l).$$

Куля – тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра. *Сфера* – поверхня кулі; її можна утворити обертанням кола навколо його діаметра. Площину (пряму), яка має з кулею тільки одну спільну точку, називають дотичною площиною (прямою) до кулі. Якщо дві сфери мають лише одну спільну точку, то вони дотикаються в цій точці.

Об'єм – кількісна характеристика тіла.

Кожне тіло має певний об'єм, виражений додатним числом.

Рівні тіла мають рівні об'єми.

Якщо тіло поділене на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.

Об'єми тіл можна вимірювати або обчислювати.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добуткові трьох його вимірів: $V = abc$.

Об'єм призми (і циліндра) дорівнює добутку площі основи на висоту: $V = Sh$. Об'єм циліндра $V = \pi r^2 h$.

Об'єм піраміди (і конуса) дорівнює третині добутку площі основи на висоту: $V = \frac{1}{3}Sh$. Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Об'єм кулі радіуса r визначається за формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Додаткові завдання[1]

Числа і функції

1221. Спростіть вираз:

а) $\frac{6x^2-9x}{2x-3}$; б) $\frac{x^2-16}{x+4}+4$; в) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$;

г) $\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; ґ) $\frac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; д) $\frac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$.

1222. Знайдіть два числа, якщо:

а) їх сума дорівнює 98, а різниця – 14;

б) їх сума дорівнює 108, а різниця квадратів – 216;

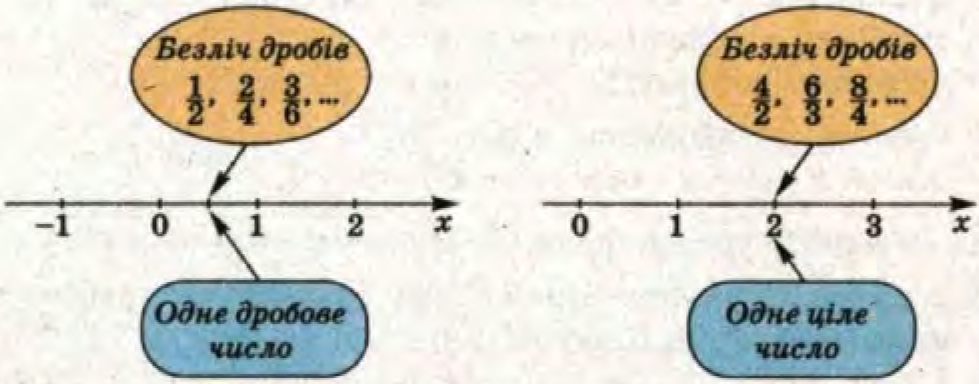
в) їх добуток дорівнює 105, а різниця – 8.

1223. Яке з чисел більше: а) 4^3 чи 3^4; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ чи $\left(\frac{4}{9}\right)^2$?

1224. Доведіть, що:

а) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$; б) $\frac{2}{6+\sqrt{34}}=6-\sqrt{34}$.

1225. Розглядаючи малюнок 221, поясніть, чим відрізняються поняття «дріб» і «дробове число».



Мал. 221

1226. На скільки добуток чисел $\frac{2}{5}$ і 2,1 більший чи менший за їх суму?

1227. Послідовність 3, 5, 7, 9, ... – арифметична прогресія. Знайдіть її різницю, 20-й член і суму перших 20 членів.

1228. Послідовність 3, 6, 12, 24, ... – геометрична прогресія. Знайдіть її знаменник, 10-й член і суму перших 10 членів.

1229. Знайдіть суму всіх двоцифрових натуральних чисел.

[1] Деякі завдання пропонуються для повторення матеріалу попередніх класів.

Додаткові завдання

1230. Знайдіть: а) 12 % від числа 350; б) 3,5 % від 34 га.

1231. Знайдіть число, 15 % якого становлять 8,7.

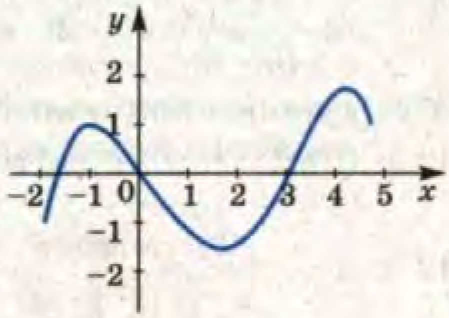
1232. Одна подія відбулась у IV ст. до н. е., а друга – у XVIII ст. Скільки століть минуло між подіями?

1233. Чи правильні схеми?

1234. Побудуйте графік функції:
а) $y = 0{,}5x$; б) $y = 0{,}5x + 2$; в) $y = 0{,}5x - 3$.

1235. Побудуйте графік рівняння:
а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 - y = 3$; в) $\sqrt{x} - y - 2 = 0$.

1236. Функцію $y = f(x)$ задано графічно (мал. 222). Укажіть її область визначення, проміжки зростання або спадання. На яких проміжках значення цієї функції додатні, на яких – від'ємні?



Мал. 222

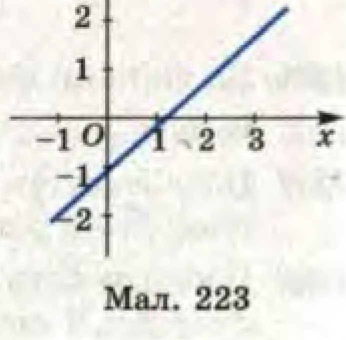
1237. Парною чи непарною є функція: а) $y = 2 + x^2$; б) $y = 3 - x^2$?

1238. Побудуйте графік функції: а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x+2}$.

1239. Задайте формулою пряму пропорційність, графік якої проходить через точку $A(1; 3)$.

1240. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої проходить через точки $A(4; 2)$ і $B(-4; -2)$.

1241. Задайте формулою функцію, графік якої зображено на малюнку 223.



Мал. 223

1242. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = \frac{2}{3}x$ і $y = 5 - x$.

1243. Чи є міра кута при основі рівнобедреного трикутника функцією міри його кута при вершині? Яка її область визначення?

1244. При яких значеннях аргументу x значення функції $y=(x+7)^2$ найменше? Знайдіть найменше значення даної функції.

1245. Знайдіть найменше значення виразу:
а) $(x-3)^2+5$; б) x^2-2x+1.

1246. Знайдіть найбільше значення функції $y=1-(x+3)^4$.

1247. Сформулюйте два речення, в яких слово «функція» має різні значення.

1248. Сформулюйте два речення з омонімами: а) «аргумент»; б) «куб»; в) «гіпербола»; г) «відношення».

1249. Назвіть синоніми до термінів: «відсоток», «півпряма», «правильний чотирикутник».

1250. Яким із зображених на малюнку 224 фігурам відповідають терміни: «правильний трикутник», «рівносторонній трикутник», «рівнобедрений трикутник»?

а) б)

Мал. 224

1251. Що більше: а) $\sin 1°$ чи $\sin 3°$; б) $\sin 1$ чи $\sin 3$?

1252. Які з чисел $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$: а) менші за 1; б) більші за 2?

1253. Які з чисел $\sin 2$, $\cos 2$, $\mathrm{tg}\,2$, $\sin 3$, $\cos 3$ від'ємні?

1254. Заповніть таблицю.

α	0	π	2π	3π	4π	5π
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\mathrm{tg}\,\alpha$						

1255. За якої умови: а) $\sin x=1$; б) $\cos x=0$; в) $\mathrm{tg}\,x=1$?

1256. За якої умови $\mathrm{tg}\,x$ не існує?

1257. Знайдіть найменші додатні розв'язки рівняння:
а) $\sin x=0{,}5$; б) $\cos x=0{,}5$; в) $\mathrm{tg}\,x=-1$.

1258. Знайдіть значення виразу:

а) $\sin x\cdot\cos x$, якщо $x=\frac{\pi}{6}$;

б) $\sin x+\cos x$, якщо $x=\frac{\pi}{4}$.

Додаткові завдання

1259. Спростіть вираз:

а) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; б) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

в) $\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha$; г) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1$.

1260. Доведіть тотожність:

а) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

б) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$;

в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin2\alpha$;

г) $\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin\alpha$.

1261. Доведіть формули:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$;

б) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

1262. Знаючи, що $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$, обчисліть $\cos\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}$.

1263. Обчисліть значення функцій:

а) $\cos x$ і $\mathrm{tg}x$, якщо $\sin x = 0{,}6$ і $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

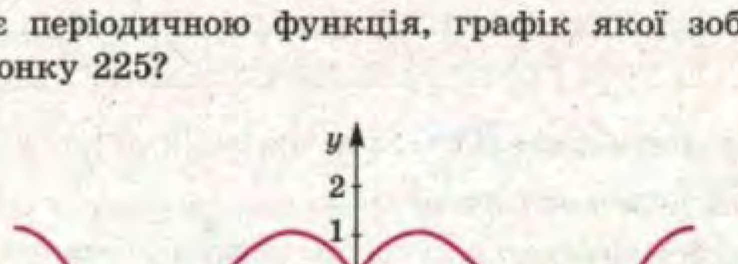
б) $\sin x$ і $\mathrm{tg}x$, якщо $\cos x = -0{,}8$ і $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

1264. Покажіть, що рівність $\sin2x = 2\sin x$ правильна не при всіх значеннях x. А рівність $\cos3x = 3\cos x$?

1265. Як, маючи графік функції $y = \sin x$, одержати графіки функцій $y = -\sin x$ і $y = 1 - \sin x$?

1266. Як, маючи графік функції $y = \cos x$, одержати графік функції $y = |\cos x|$?

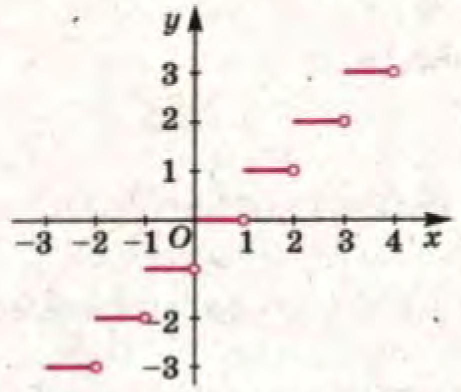
1267. Чи є періодичною функція, графік якої зображено на малюнку 225?



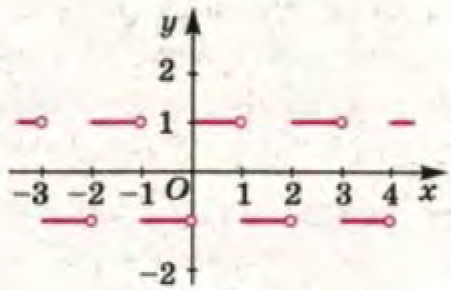
Мал. 225

1268. Чому функція $y = x + \sin x$ не періодична?

1269. Найбільше ціле число, яке не перевищує x, позначають символом $[x]$. Чи є періодичними функції $y = [x]$ і $y = (-1)^{[x]}$, графіки яких зображені на малюнках 226 і 227?



Мал. 226



Мал. 227

1270. Побудуйте графік функції $y = x - [x]$.

1271. Обчисліть вирази: 2^{-3}, 3^{-2}, $8 \cdot 2^{-4}$, $25 \cdot 5^{-3}$, $3^5 \cdot 3^{-5}$.

1272. Заповніть таблицю.

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
a^{-1}							
a^{-2}							
a^{-3}							

1273. Знайдіть значення виразу x^5x^{-2}, якщо $x = -3$.

1274. Спростіть вираз:

а) $(a^{-1} + 3)(a^{-1} - 3)$; б) $(x^{-2} - c^{-2})\, c^2x^2$.

1275. Обчисліть вирази: $8^{\frac{2}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $16^{0,5}$, 49^0, $27^{-\frac{1}{3}}$.

1276. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора:

а) $34^{0,3}$; б) $2,3 \cdot 3,8^{-2}$; в) $7,8^{-2} : 0,4^{2,3}$.

1277. Запишіть за допомогою коренів: $m^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, $(ab)^{0,5}$, $p^{0,2}$.

1278. Запишіть за допомогою степенів: $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[3]{xz}$, $\sqrt[5]{a^2}$.

1279. Обчисліть вирази:

а) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt{3}$.

1280. Спростіть вираз:

а) $(\sqrt{x} - c)(\sqrt{x} + c)$; б) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt[4]{a} - 1)$;

в) $(\sqrt[4]{2} + 1) : \dfrac{1}{\sqrt[4]{2} - 1}$; г) $1 : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Додаткові завдання

1281. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-2} = 3$; б) $\sqrt[3]{x-4} = 2$;

в) $(x + 1)^{0,5} = 1$; г) $(3 - x)^{\frac{1}{3}} = 1$.

1282. Чи є степеневою функція:

а) $y = x^3$; б) $y = x^{-2}$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \sqrt[4]{x}$?

1283. Побудуйте на проміжку [–2; 2] графік функції:

а) $y = x^{-1}$; б) $y = x^{0,5}$; в) $y = \sqrt[3]{x}$; г) $y = -\sqrt[3]{x}$.

1284. Чи правильно, що рівності $y = x^{0,5}$ і $y = \sqrt[4]{x}$ задають одну й ту саму функцію?

1285. Функція $y = f(x)$ степенева. Чи є степеневою функція $y = 1 + f(x)$?

1286. Чи проходить графік функції $y = \sqrt[3]{x}$ через точку $A(27; 3)$? А через точку $B(-8; -2)$?

1287. Графік функції $y = kx^3$ проходить через точку $M(2; 16)$. Чому дорівнює k?

1288. Графік функції $y = kx^{-2}$ проходить через точку $P(\frac{1}{2}; 12)$. Чи проходить він через точку $K(\frac{1}{3}; 27)$?

1289. Чи є показниковою функція:

а) $y = x^5$; б) $y = 3^x$; в) $y = (\sqrt{2})^x$; г) $y = \pi^x$?

1290. Зростаючою чи спадною є функція: а) $y = 0,5^x$; б) $y = 1,5^x$?

1291. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2^x$ на проміжку [–3; 3];

б) $y = 0,5^x$ на проміжку [–4; 2].

1292. Чи правильно, що рівності $y = 2^{-x}$ і $y = 0,5^x$ задають одну й ту саму функцію? Чому?

1293. Розв'яжіть рівняння:

а) $2^x = 32$; б) $3^x = 81^{-1}$; в) $8 \cdot 0,5^x = 0,25$.

Прямі та площини в просторі

1294. Наведіть приклади фігур, відмінних від геометричних.

1295. Чи становлять одну геометричну фігуру: а) дві пересічні площини; б) дві паралельні площини?

1296. На скільки частин ділять простір: а) дві паралельні площини; б) дві пересічні площини?

1297. На скільки частин можуть поділити простір три площини?

1298. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AA_1 = a$. Знайдіть відстань від точки A до: а) точок C і C_1; б) площин BCC_1 і B_1BD.

1299. Намалюйте зображення куба і побудуйте його переріз площиною, яка проходить через два його протилежні ребра. Як відноситься площа цього перерізу до площі грані куба?

1300. Знайдіть відстань між точками $A(2; 3; 0)$ і $B(3; -2; 4)$.

1301. Знайдіть координати середини відрізка, який сполучає точки $K(-3; 2; 6)$ і $P(5; 8; 0)$.

1302. Дано точки $A(0; 0; 2)$, $B(-3; 0; 5)$ і $C(5; 6; 0)$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

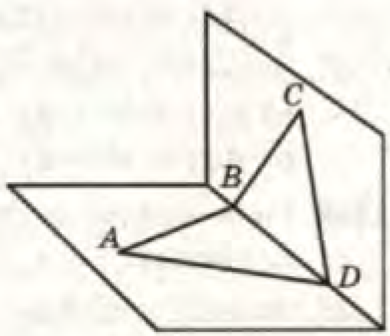
1303. Дано точки $A(3; 0; 6)$ і $C(2; -2; 5)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CA}$.

1304. Знайдіть суму і різницю векторів $\vec{a} = (0; 1; 2)$ і $\vec{c} = (-3; 0; 5)$.

1305. $ABCDA$ – неплоска замкнена ламана (мал. 228). Чи справджуються для неї векторні рівності:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$?



Мал. 228

1306. $A(3; -1; 0; 2)$ і $B(1; -3; -2; 0)$ – точки чотиривимірного простору. Знайдіть: а) довжину відрізка AB; б) координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

Похідна та інтеграл

1307. Знайдіть кутовий коефіцієнт графіка функції:

а) $y = 0{,}5x - 4$; б) $y = 3(2 - x)$; в) $y = \frac{1}{3}(2x - 5)$.

1308. Яка функція швидше зростає: $y = 0{,}8x - 1$ чи $y = 0{,}7x + 5$?

1309. Визначте тангенс кута, утвореного графіком функції $y = 1 - 2x$ з додатним напрямом осі x.

1310. Чи правильно, що похідна функції $y = 3x - 8$ у кожній точці області її визначення дорівнює 3?

1311. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 1{,}5x + 3$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = 0{,}5(2x - 3)$.

1312. Дано функцію $f(x) = x^2 - 5$. Обчисліть: $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(3)$.

1313. Дано функцію $f(x) = \sin x$. Обчисліть: $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'(-\pi)$.

Додаткові завдання

1314. Знайдіть похідну функції:

а) $f(x) = 2x^3$; б) $f(x) = x^5 - 3x^2$; в) $f(x) = (x^2 - 1)x^3$.

1315. Знайдіть критичні точки функції:

а) $f(x) = x^5 - 5x$; б) $f(x) = x^4 - 0{,}5x$.

1316. Визначте проміжки зростання та проміжки спадання функції:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$; б) $f(x) = 8 + 6x^2 - 3x^4$.

1317. Знайдіть точки максимуму або мінімуму функції:

а) $f(x) = 3 + x - x^2$; б) $f(x) = x^3 - 4x + 5$.

1318. Чи правильно, що функція $y = x^5 + 3x$ зростає на всій області визначення?

1319. Покажіть, що функція $y = 10 + x^3$ спадає, якщо $x > 1$.

1320. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

а) $f(x) = x^3 - 12x$; б) $f(x) = 2x^3 - 6x^2$.

1321. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

а) $f(x) = x^2 - 6x$ на проміжку $[-5; 0]$;

б) $f(x) = x^3 - 5x$ на проміжку $[-2; 3]$.

1322. Яке число в сумі з його квадратом має найменше значення?

1323. Знайдіть найменший діаметр кола, яке можна описати навколо прямокутника з периметром 20 см.

1324. З усіх правильних чотирикутних призм об'ємом 1 м^3 виберіть таку, площа поверхні якої найменша.

1325. Чи є первісною для функції x^3 функція: $3x^2$; $3x^2 - 8$?

1326. Знайдіть для функції x^2 таку первісну, графік якої проходить через точку $A(1; 9)$.

1327. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

а) $f(x) = x^3 + 2$; б) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

1328. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, щоб:

а) $f(x) = x^2 - 1$ і $F(1) = 3$;

б) $f(x) = 2 - x^3$ і $F(2) = 5$.

1329. Знайдіть площу підграфіка функції:

а) $y = x^2$ на проміжку $[0; 2]$;

б) $y = 4 - x^2$ на проміжку $[-1; 1]$.

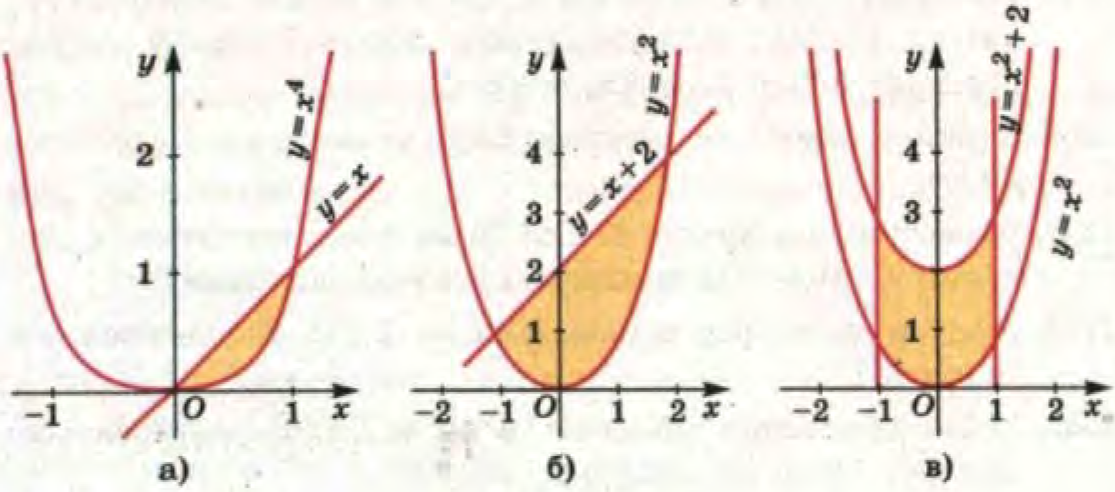
1330. Обчисліть інтеграл:

а) $\int_0^3 x^2 dx$; б) $\int_0^2 (x - 1)dx$; в) $\int_1^3 (x^2 + x - 1)dx$.

1331. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 9 - x^2$ і віссю x.

1332. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 + 1$ і $y = 2x + 1$.

1333. Знайдіть площі фігур, заштрихованих на малюнку 229.



Мал. 229

Геометричні тіла

1334. Скільки діагоналей має n-кутна призма?

1335. Кожне ребро правильної трикутної призми дорівнює 10 см. Знайдіть площу її бічної поверхні.

1336. Кожне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 2 дм. Знайдіть площу її поверхні.

1337. Чи може площа основи піраміди дорівнювати площі її бічної поверхні? Чому?

1338. Чи може перерізом куба бути прямокутний трикутник?

1339. Ребро правильного тетраедра дорівнює 4 см. Знайдіть площу його перерізу площиною, яка проходить через середину його ребра і паралельна одній грані.

1340. Осьовий переріз циліндра – квадрат зі стороною 12 см. Знайдіть площу поверхні цього циліндра.

1341. Циліндр утворено обертанням квадрата зі стороною a навколо його сторони. Знайдіть площу поверхні циліндра.

1342. Площа поверхні циліндра у 2 рази більша за площу бічної поверхні. Чи правильно, що висота цього циліндра дорівнює радіусу?

Додаткові завдання

1343. Осьовий переріз конуса – рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 35 см. Знайдіть радіус основи та висоту цього конуса.

1344. Чи існує конус, площа поверхні якого у 2 рази більша за площу бічної поверхні?

1345. Площина, паралельна основі конуса, поділяє його висоту навпіл. У якому відношенні вона ділить: а) твірну конуса; б) площу бічної поверхні конуса?

1346. Знайдіть довжину екватора кулі, діаметр якої дорівнює 40 см.

1347. Діаметри двох куль – 17 см і 10 см, а відстань між їх центрами – 14 см. Чи мають ці кулі спільні точки?

1348. Радіуси двох сфер відносяться як 1 : 2. Як відносяться їх площі?

1349. Ребра двох кубів відносяться як $m : n$. Як відносяться: а) площі їх поверхонь; б) їх об'єми?

1350. Знайдіть об'єм куба, площа поверхні якого дорівнює 120 см^2.

1351. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, кожне ребро якої дорівнює 6 дм.

1352. Знайдіть об'єм циліндричної бочки, діаметр основи якої – 8 дм, а висота – 9 дм.

1353. Висоти двох циліндрів рівні, а радіуси їх основ відносяться як 2 : 3. Як відносяться: а) площі поверхонь цих циліндрів; б) їх об'єми?

1354. Знайдіть площу поверхні та об'єм кулі: а) діаметр якої дорівнює 1 м; б) екватор якої має довжину 1 м.

1355. Діаметр Марса приблизно у 2 рази менший за діаметр Землі. У скільки разів площа поверхні Марса менша за площу поверхні Землі? У скільки разів об'єм Марса менший за об'єм Землі?

1356. Знайдіть площу поверхні й об'єм тіла, утвореного обертанням рівнобедреного прямокутного трикутника навколо гіпотенузи, довжина якої 4 дм.

Задачі для кмітливих

1357. Доведіть, що п'ятий степінь кожного натурального числа закінчується такою самою цифрою, як і перший степінь.

1358. Замініть зірочки цифрами, щоб виконувалася рівність:
а) ** · ** = 1*1; б) ** · 92 = ***;
в) ** + ** = *97; г) ** · 45 = *3*.

1359. Замініть різні букви різними цифрами, щоб виконувалася рівність:
а) $КУТ = БА^{К}$; б) $ЦИФРА = ДВ^{А}$;
в) ВОДА + ВОДА + ВОДА = ОКЕАН.

1360. Уявіть, що біолог вивів таких амеб, кожна з яких щохвилини ділиться на дві. Помістивши в пробірку одну амебу, він виявив, що через годину вся пробірка заповнилась амебами. Через скільки хвилин така сама пробірка наповнилася б амебами, якби він поклав у неї не одну, а дві амеби?

1361. У вас двоє батьків, старших за вас років на 30. У кожного з них теж двоє батьків, старших років на 30, і т. д. Скільки ваших пращурів мало бути в кінці X ст.? Чому їх було набагато менше?

1362. Задача Ейлера. Нехай кількість людей щороку збільшується на 0,01 частини. Через скільки років кількість людей збільшиться в 10 разів?

1363. Задача Ньютона. Один комерсант кожного року збільшує на третину свій капітал, зменшений на 100 фунтів, які щороку він витрачає на сім'ю. Через три роки його капітал подвоївся. Скільки грошей він мав спочатку?

1364. Задача Авіценни. Якщо число при діленні на 9 дає в остачі 1, 4 або 7, то куб цього числа при діленні на 9 дає остачу 1. Доведіть.

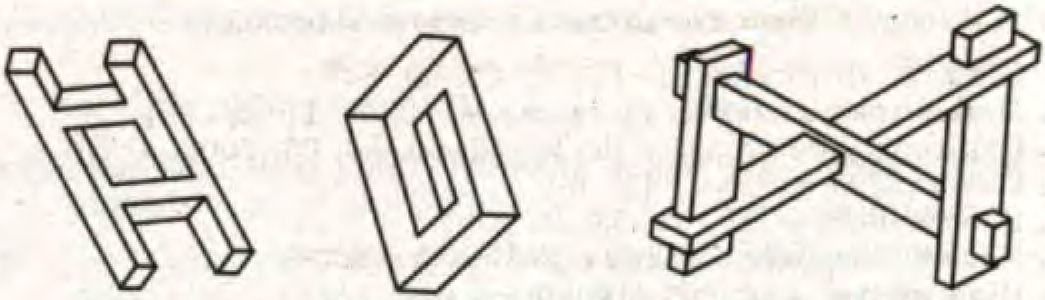
1365. Задача Архімеда. Об'єм і площа поверхні циліндра, описаного навколо кулі, в 1,5 разу більші за об'єм і площу поверхні кулі. Доведіть.

1366. Задача Леонардо да Вінчі. Площа основи якого циліндра дорівнює площі його бічної поверхні?

1367. Ви витрачаєте мило рівномірно. Через сім днів усі розміри шматка мила зменшились удвічі. На скільки днів вам ще вистачить цього шматка мила?

1368. Чи існують многогранники, зображені на малюнку 230?

Додаткові завдання

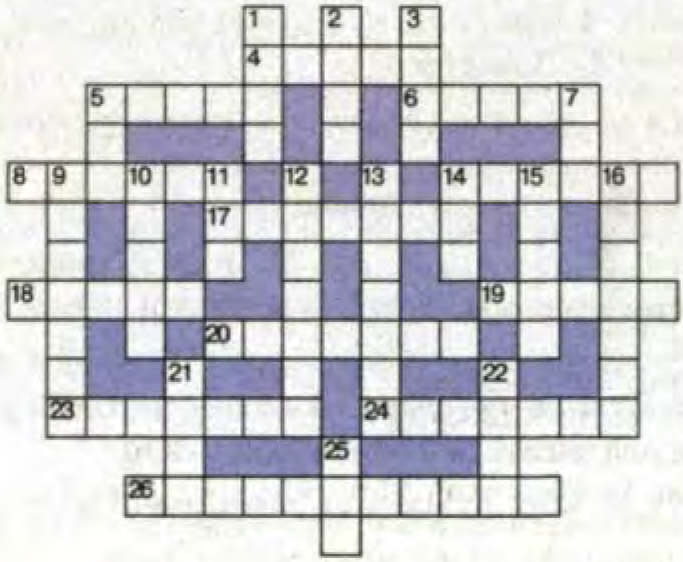


Мал. 230

1369. Розв'яжіть кросворд (мал. 231).

По горизонталі. 4. Геометрична величина. 5. Геометрична фігура. 6. Елемент многогранника. 8. Елемент кулі. 14. Напрямлений відрізок. 17. Твердження, яке доводять. 18. Місто, в якому жив давньогрецький математик Фалес. 19. Запис, складений із цифр, букв і знаків дій. 20. Компонент дії додавання. 23. Математична наука. 24. Тіло обертання. 26. Число, яке характеризує ступінь можливості виконання події.

По вертикалі. 1. Зменшення чого-небудь. 2. Геометрична фігура. 3. Двійка. 5. Давня одиниця маси. 7. Одиничний вектор. 9. Твердження, яке приймають без доведення. 10. Латинська буква. 11. Число. 12. Основне поняття диференціального числення. 13. Німецький математик XVII ст. 14. Одиниця потужності. 15. Малий куб. 16. Восьмигранник. 21. Певне число очок гри в теніс. 22. Відомий французький математик. 25. Просте число.



Мал. 231

Теми для завдань творчого характеру

1. Що таке математика? – [2, 17, 28, 32, 34]
2. Математика в системі інших наук – [2, 7, 17, 28, 34]
3. Піфагор і його школа – [5, 18, 32, 33, 34, 23 (2009, 4–5)]
4. Геометрія тетраедра – [4, 36]
5. Прості числа – [16, 32, 33, 29 (18)]
6. Магічні квадрати – [33, 24 (2010, 10), 29 (9)]
7. Що є число? – [2, 16, 28]
8. Що таке алгебра? – [2, 11, 16, 28]
9. Число π – [11, 16, 28, 33]
10. Математика і календар – [33, 29 (9)]
11. Ейлер і геометрія – [11, 33, 34]
12. Діофантові рівняння – [10, 11, 16, 18, 33]
13. Перспектива в геометрії та мистецтві – [27, 33]
14. Неевклідові геометрії – [2, 5, 16, 22, 34]
15. Що таке топологія? – [12, 33]
16. Задачі Наполеона – [4, 33]
17. Математика в Стародавній Греції – [2, 11, 12, 16]
18. Математика в Європі до епохи Відродження – [3, 11, 16]
19. Омар Хайям – математик і поет – [5, 11, 18, 22]
20. Декарт – математик і філософ – [5, 11, 16, 18, 34]
21. Ферма – математик і юрист – [5, 11, 18, 33, 34]
22. Паскаль і психологія моралі – [5, 18, 34]
23. Галуа – математик і політик – [5, 12, 16, 33, 34]
24. Геометрія і Марсельєза – [13, 34]
25. Бібліотекар та історіограф Лейбніц – [5, 12, 18, 33, 34]
26. Ковалевська – математик і літератор – [5, 33, 34]
27. Математика і шахи – [33, 10]
28. Що таке математична логіка? – [16, 32, 33, 29 (10)]
29. Як творилась кібернетика? – [16, 20, 33, 29 (16)]
30. Розвиток математики в Україні – [1, 2, 3, 19, 34]
31. Остроградський – математик і патріот – [2, 3, 19, 34, 29 (16)]
32. Ймовірності – [2, 32, 33]
33. Клітини Вороного – [5, 20]
34. Комбінаторні задачі та комбінаторика – [2, 12, 16, 32, 33]
35. Множини в сучасній математиці – [16, 33, 23 (2010, 6)]
36. Математика і романтика – [7, 9, 15, 16]
37. Геометрія паркетів і орнаментів – [33, 24 (2009, 27)]
38. Доля академіка М. Кравчука – [1, 5, 26, 34]
39. Омоніми і синоніми в математиці – [35, 23 (2008, 7–8)]
40. Математичні простори – [35, 25 (2010, 3)]
41. Фрактали – [2]
42. Тілесні кути й стерадіани – [4, 24]
43. Конічні перерізи – [33, 36]
44. Статево-вікові піраміди – [3, 24 (2008, 30)]
45. Українська математична мова – [3, 24 (2008, 7)]
46. Учнівські математичні олімпіади – [22, 23 (2010, 5)]
47. З історії шкільних підручників математики – [3, 24 (2010, 4), 23 (2010, 7)]

Рекомендована література

1. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці / Упоряд. О.К. Романчук. – Львів, 1992.
2. Бевз В.Г. Історія математики. – Харків, 2006.
3. Бевз Г.П. Математика в школах України. – К., 2009.
4. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К., 2009.
5. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К., 1973.
6. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Статистика, ймовірність, комбінаторика у старшій школі. – Харків, 2008.
7. Василенко О. Серенада математиці. – Харків, 2003, 2009, 2010, 2011.
8. Василенко О.О. Жінки й математика. – Харків, 2008.
9. Вірченко Н.О. Математика в афоризмах і висловлюваннях. – К., 1974.
10. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. – Харків, 2008. – Кн. 1, 2.
11. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII–VIII классы. – М., 1982.
12. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX–X классы. – М., 1983.
13. Демянов В. Геометрия и Марсельеза. – М., 1979.
14. Игнатьев Е.И. Хрестоматия по математике. – Ростов, 1995.
15. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К., 1980.
16. Кованцов М.І. (редактор). Математична хрестоматія. – К., 1977.
17. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М., 1991.
18. Конфорович А.Г. Колумби математики. – К., 1982.
19. Конфорович А., Сорока М. Остроградський.. – К., 1980.
20. Конфорович А.Г. У пошуках інтеграла. – К., 1990.
21. Ліо Кі. Ломиголовки. – К., 1996.
22. Маркова І.С. (упорядник). Математика після уроків. – Харків, 2004.
23. Математика в школі : Журнал.
24. Математика в школах України : Журнал.
25. Математична газета.
26. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К., 1991.
27. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. – К., 1988.
28. Тадеєв В.О. Математика. Тлумачний словник-довідник. – Тернопіль, 1999.
29. У світі математики. – 1968–1991. – Вип. 1–20.
30. У світі математики : Журнал.
31. Шафаревич И. Есть ли у России будущее? – М., 1991.
32. Шляхами математики / Упоряд. Т.М. Хмара. – К., 1999.
33. Энциклопедический словарь юного математика. – М., 1985.
34. Шмигевський М.В. Видатні математики. – Харків, 2004.
35. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика, 10–11 класи. – К., 2005.
36. Тадеєв В.О. Геометрія, 11 клас. – Тернопіль, 2004.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аналіз математичний 128
Апофема піраміди 224
Аргумент функції 6

Бічна поверхня конуса 245
– – піраміди 225
– – призми 218
– – циліндра 239
Бічні грані піраміди 224
– – призми 217
– ребра піраміди 224

Варіанта 149
Варіаційний ряд 149
Вектори 194
Великий круг кулі 251
Величина випадкова 176
Вершина конуса 244
– многогранника 212
– піраміди 224
Вибірка 149
Висота конуса 244
– піраміди 224
– призми 217
– циліндра 238
Вісь конуса 244
Властивості логарифмів 30
– логарифмічної функції 32
– об'ємів 262
– показникової функції 16
– степенів 14
Вписані тіла 257

Геометричне тіло 211
Геометричний зміст похідної 59
Геометрія 3
Гістограма 156
Границя функції 50
Грань многогранника 212
Графік функції 6

Дисперсія 177
Диференціал 98
Диференціювання 65
Діагональ призми 218
Діагональний переріз піраміди 224
– – призми 218
Діаграма 155
Діаметр кулі 251
Додекаедр правильний 231
Дослідження функції 78
Дотична 58
– до графіка функції 58

Експонента 17
Екстремум функції 79
Елемент множини 133

Загальний вигляд первісних 101
Застосування векторів 200
– інтегралів 121
– похідної 78
Змінна інтегрування 113
Знаходження первісних 101
Значення функції 50
– – екстремальні 79
– – найбільші 86
– – найменші 86
Зрізана піраміда 226
Зрізаний конус 245

Імовірність класична 168
– статистична 175
Інтеграл 112
– визначений 115
– невизначений 115
Інтегральна сума 113
Інтегрування 101

Комбінаторика 138
Комбінаторні задачі 138
Комбінації 145
– тіл 257
Конічна поверхня 245
Конус 244
Координати вектора 194
– точки 189
Координатні осі 189
Криволінійна трапеція 107
Критичні точки функції 78
Куб 218
Куля 251
Кут між векторами 200
Кутовий коефіцієнт 58

Логарифм 30
– десятковий 32
– натуральний 32

Максимум функції 79
Математичне сподівання 177
Медіана вибірки 150
Межі інтегрування 113
Миттєва швидкість 91
Мінімум функції 79
Многогранник 212
– описаний 258
– опуклий 212
– правильний 230
Множина 133
– впорядкована 138
– нескінченна 133
– порожня 133
– скінченна 133
Мода вибірки 150
Модуль вектора 195

Неперервність функції 52
Нерівність логарифмічна 39
– показникова 24

Об'єднання множин 134
Об'єм конуса 268
– куба 262
– кулі 270
– паралелепіпеда 263
– піраміди 268
– призми 263
– циліндра 264
Область визначення функції 6
– значень функції 6
Ознака зростання функції 78
– максимуму функції 79
– мінімуму функції 79
– спадання функції 78
Октаедр правильний 231
Описані тіла 258
Основа логарифма 30
– конуса 244
– піраміди 224
– призми 217
– циліндра 238
Основна логарифмічна тотожність 30

Паралелепіпед 218
– прямий 218
Первісна 101
Переріз множин 134
– многогранника 213
Перестановки 145
Період функції 7
Півкуля 251
Підграфік функції 107
Підмножина 133
Піраміда 224
– правильна 224
Площа поверхні конуса 245
– – многогранника 212
– – піраміди 225
– – призми 218
– – сфери 253
– – циліндра 239
Подія випадкова 165
– достовірна 166
– елементарна 167
– неможлива 166
Полігон 156
Похідна 59
– добутку 66
– логарифмічної функції 67
– одночлена 66
– показникової функції 67
– складеної функції 72
– сталої 61
– степеневої функції 67
– суми 66
– тригонометричної функції 67
– функції в точці 59
– частки 67
– як швидкість 91
Правило добутку 139
– знаходження первісних 102
– суми 138
Призма похила 217
– пряма 217
Приріст аргументу 52
– функції 52
Проміжки зростання функції 78
– спадання функції 78

Радіус конуса 244
– кулі 251
– циліндра 239
Рівняння логарифмічне 37
– площини 201
– показникове 23
– сфери 202
Різниця множин 134
Робота змінної сили 122

Розгортка конуса 244
– многогранника 212
– циліндра 239
Розмах вибірки 149
Розміщення 144
Розподіл імовірностей 176
– нормальний 184

Середнє значення вибірки 150
– квадратичне 150
Система координат 189
Статистика 149
– математична 149
Січна площина 212
Скалярний добуток векторів 200
Степінь числа 14
– – з дійсним показником 14
Сума векторів 195
Сфера 252

Твірна конуса 244
– циліндра 238
Теорема про похідну добутку 66
– – – одночлена 66
– – – суми 66
– – – частки 67
Тетраедр 212
– правильний 212
Тіло геометричне 211
– обертання 237
Точка екстремуму 79
– максимуму 79
– мінімуму 79

Умови існування екстремумів 79

Факторіал 140
Фігура обертання 238
Формула Ньютона–Лейбніца 114
Формули диференціювання 67
Функція 6
– диференційовна в точці 65
– зростаюча 7
– логарифмічна 31
– непарна 7
– неперервна в точці 52
– обернена 32
– парна 7
– періодична 7
– підінтегральна 113
– показникова 15
– складена 72
– спадна 7
– степенева 15

Центр кулі 251
– правильного многогранника 230
Циліндр 238

Частота відносна 175
Частотна таблиця 149
Число *e* 17

Довідковий матеріал[1]

Закони дій

$a + b = b + a;$

$(a + b) + c = a + (b + c);$

$ab = ba;$

$(ab)c = a(bc);$

$a(b + c) = ab + ac.$

Властивості дробів

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},\ \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m},\ \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn},\ \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

Формули скороченого множення

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Степені та корені

$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$ $\quad (ab)^n = a^n b^n;$ $\quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$ $\quad \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k;$

$a^m : a^n = a^{m-n};$ $\quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k};$

$(a^m)^n = a^{mn};$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$ $\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$

Логарифми

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$ $\quad a^{\log_a x} = x,$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$ $\quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$

$\log_a x^p = p\log_a x,$

$\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0,$ $\quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a}.$

---

[1] Формули подані без зазначення умов, за яких вони істинні.

Стандартний вигляд числа

$x = a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$,
n – порядок числа x.

Рівняння

Рівняння $ax = b$ має:
1 корінь, якщо $a \neq 0$;
0 коренів, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$;
безліч коренів, якщо $a = 0$ і $b = 0$.

Квадратні рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ – рівняння;}$$

$$D = b^2 - 4ac \text{ – дискримінант;}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x^2 + px + q = 0 \text{ – зведене рівняння,}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ – його корені;}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \text{ – теорема Вієта.}$$

Трансцендентні рівняння

$a^x = b;$	$x = \log_a b;$
$\log_a x = b;$	$x = a^b;$
$\sin x = a;$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;$
$\cos x = a;$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n;$
$\operatorname{tg} x = a;$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n.$

Нерівності

$a > b$, якщо число $a - b$ додатне.
$a < b$, якщо число $a - b$ від'ємне.

Властивості числових нерівностей

Якщо $a < b$, то $b > a$.
Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.
Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$.
Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$.
Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$.
Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.
Якщо $0 < a < b$ і $0 < c < d$, то $ac < bd$.

Прогресії

Арифметична прогресія: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрична прогресія: $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \ldots$

$$b_n = b_1q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$S_n = \frac{b_1}{q-1}, \text{ якщо } |q| < 1.$$

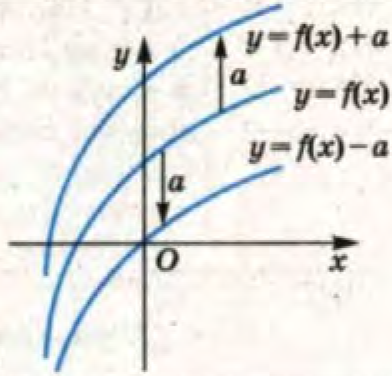
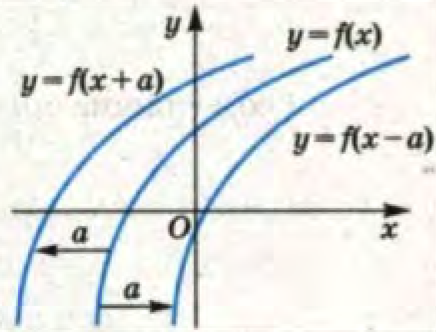
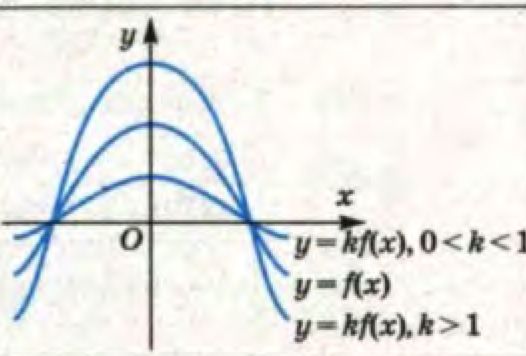
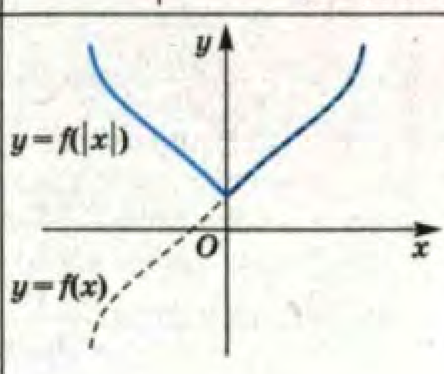
Функції

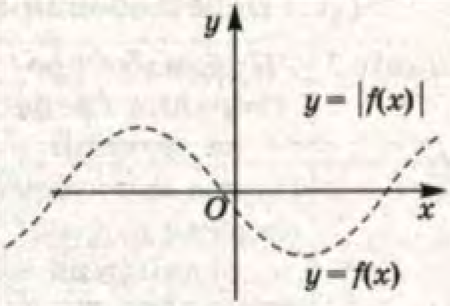
$y = kx + b$ – лінійна; графік – пряма.

$y = ax^2 + bx + c$ – квадратична; графік – парабола з вершиною в точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

$y = x^2$ – степенева.
$y = a^x$ – показникова.
$y = \log_a x$ – логарифмічна.
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ – тригонометричні.

Перетворення графіків функцій

Функція	Правило перетворення графіка функції	Графічна ілюстрація
$y = f(x) + a$	Паралельне перенесення вздовж осі ординат на $\lvert a\rvert$: вгору, якщо $a > 0$; вниз, якщо $a < 0$	 $a > 0$
$y = f(x + a)$	Паралельне перенесення вздовж осі абсцис на $\lvert a\rvert$: праворуч, якщо $a < 0$; ліворуч, якщо $a > 0$	 $a > 0$
$y = kf(x)$	Розтяг від осі абсцис у k разів, якщо $k > 1$. Стиск до осі абсцис у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $k > 1$.	
$y = f(\lvert x\rvert)$	Частину графіка, який лежить у півплощині $x \geqslant 0$, залишаємо без змін і симетрично відображаємо його відносно осі ординат. Графіком функції буде об'єднання цих двох кривих: $y = f(x)$, $x \geqslant 0$ і $y = f(-x)$, $x < 0$	

$y = \|f(x)\|$	Частину графіка, який лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Частину графіка, який лежить під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис	

Тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),\ \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Похідна

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

$C' = 0$	$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(Cu)' = Cu'$	$(\sin x)' = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$(u+v)' = u' + v'$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Якщо $y = f(u)$, де $u = h(x)$, то $y' = y'_u u'$.

Первісна та інтеграл

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а $k \neq 0$, b – сталі, то:

$kF(x)$ – первісна для функції $kf(x)$,

$\dfrac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для функції $f(kx+b)$.

Функція	0	k	x^n, $n \neq -1$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$
Одна з її первісних	C	kx	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$2\sqrt{x}$	$-\cos x$

Функція	$\cos x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	e^x	a^x
Одна з її первісних	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	e^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона–Лейбніца.

Комбінаторика

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$,

$P_n = n!$,

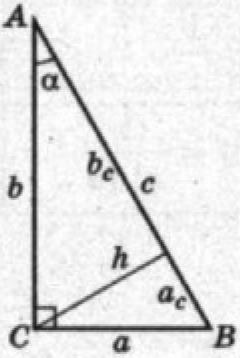
$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Прямокутний трикутник



$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad a^2 + b^2 = c^2;$$

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad a^2 = a_c \cdot c;$$

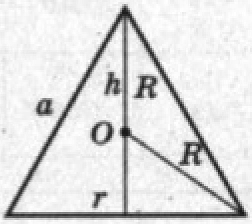
$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha; \quad b^2 = b_c \cdot c;$$

$$\frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\,\alpha; \quad h^2 = a_c \cdot b_c;$$

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch; \quad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha; \quad h = \frac{ab}{c};$$

$$R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Рівносторонній трикутник

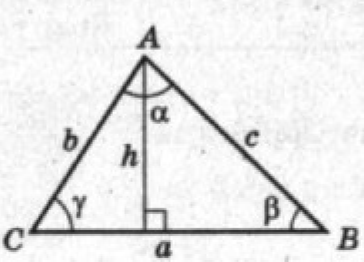


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{1}{3}h; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = \frac{2}{3}h; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$R = 2r; \quad h = R + r.$$

Довільний трикутник



$$S = \frac{1}{2}ah; \; S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

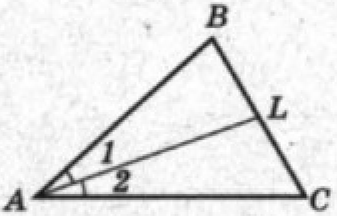
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$ (формула Герона);

$$R = \frac{abc}{4S}; \; r = \frac{S}{p}; \; R = \frac{a}{2\sin\alpha};$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (теорема косинусів);

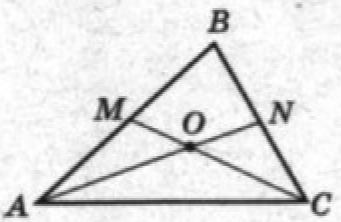
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ (теорема синусів).



AL – бісектриса

1) $\angle 1 = \angle 2$;

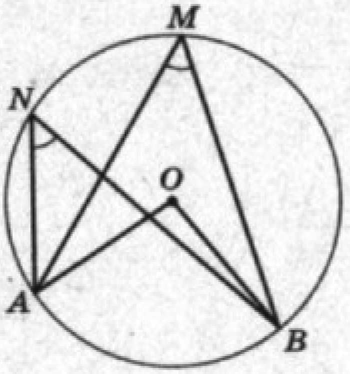
2) $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.



AN, CM – медіани

$AO : ON = 2 : 1$.

Коло



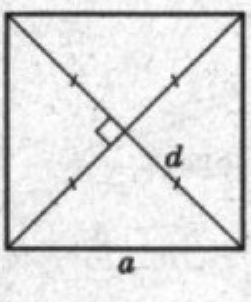
$C = 2\pi r$;

$S = \pi r^2$;

$\angle AMB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$;

$\angle AMB = \angle ANB$.

Квадрат

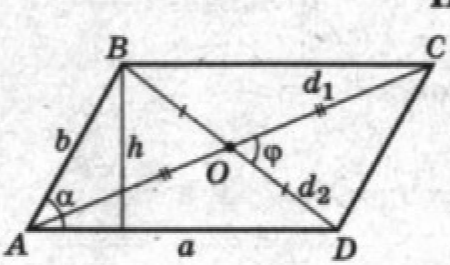


$d = a\sqrt{2}$; $\quad r = \frac{a}{2}$;

$P = 4a$; $\quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$S = a^2$; $\quad S = \frac{1}{2}d^2$.

Паралелограм



$\angle A + \angle B = 180°$;

$P = 2(a+b)$;

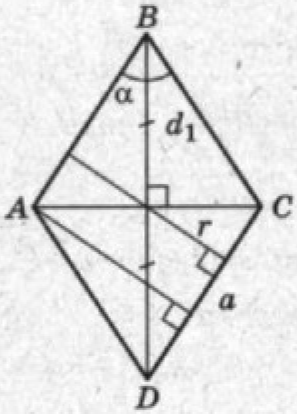
$S = ah$;

$S = ab\sin\alpha$;

$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$;

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Ромб



$P = 4a;$

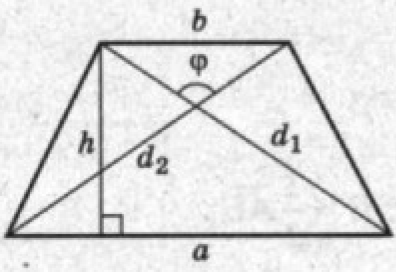
$S = ah;$

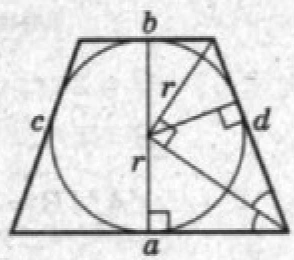
$S = a^2 \sin\alpha;$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2;$

$r = \frac{1}{2} h.$

Трапеція

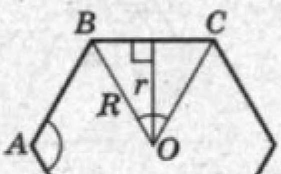




$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$ $\quad a + b = c + d;$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi;$ $\quad h = 2r.$

Правильний многокутник



Сума кутів: $180(n-2)$; $\quad P = na;$

$\angle A = \frac{180(n-2)}{n};$ $\quad S = \frac{1}{2} arn;$

$\angle BOC = \frac{360^\circ}{n};$ $\quad S = \frac{1}{2} R^2 n \sin\frac{360^\circ}{n};$

$a_n = 2r \,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n};$ $\quad a_n = 2R \sin\frac{180^\circ}{n}.$

Координати на площині

$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$ $\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – рівняння кола з центром $O(a;\, b)$ радіуса R.

Координати в просторі

Нехай дано точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

$C\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; \dfrac{y_1+y_2}{2}; \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ – координати точки C – середини відрізка AB.

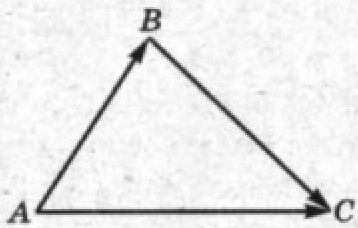
$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ – довжина відрізка AB.

$ax+by+cz+d=0$ – загальне рівняння площини.

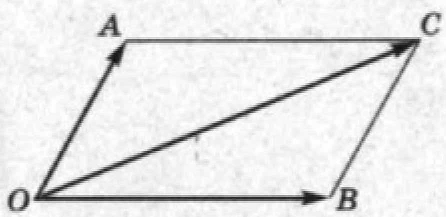
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ – рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(a;b;c)$.

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ – рівняння сфери радіуса R з центром у точці $(a;b;c)$.

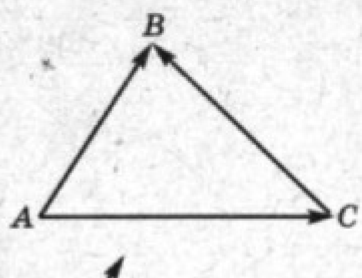
Вектори



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ – додавання векторів за правилом трикутника.



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ – додавання векторів за правилом паралелограма.



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ – різниця векторів.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$\vec{a} = \lambda\vec{b}$ – умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Вектори, задані координатами

$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – координати вектора $\overline{AB}$, де $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

Нехай $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Тоді

$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$;

$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$ – умова колінеарності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

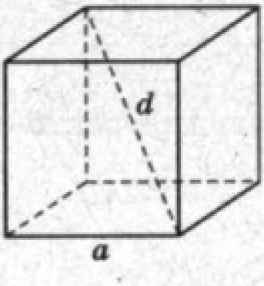
$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ – умова перпендикулярності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – довжина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$.

$$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Многогранники

Куб

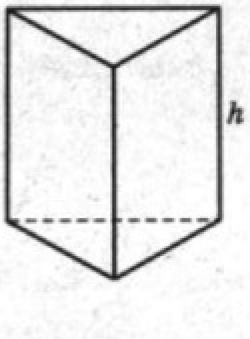


$d = a\sqrt{3}$;

$S_п = 6a^2$;

$V = a^3$.

Пряма призма

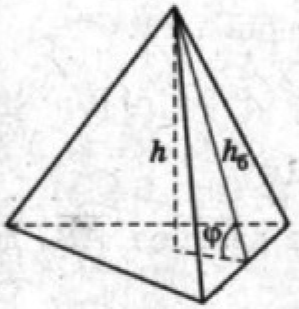


$S_п = S_б + 2S_о$;

$S_б = P_о \cdot h$;

$V = S_о \cdot h$.

Піраміда



$$S_п = S_б + S_о;$$

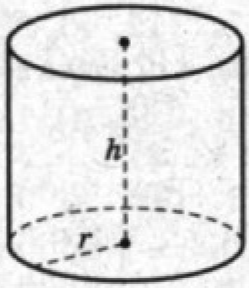
$$V = \frac{1}{3}S_о \cdot h.$$

Для правильної піраміди $S_б = \frac{1}{2}P_о \cdot h_б$, де $h_б$ – апофема.

$$S_б = \frac{S_о}{\cos\varphi}.$$

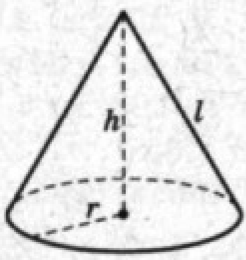
Тіла обертання

Циліндр



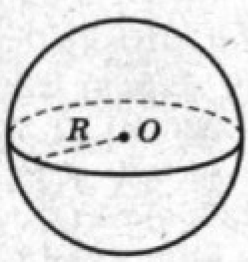
$$S_б = 2\pi rh;$$
$$S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2;$$
$$V = \pi r^2 h.$$

Конус



$$S_б = \pi rl;$$
$$S_п = \pi rl + \pi r^2;$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Куля і сфера



$$S_{сф} = 4\pi R^2;$$

$$V_{кулі} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ВІДПОВІДІ

11. б) 5215 грн. **15.** а) $x \geqslant 0$; г) R. **23.** г) $[2; \infty)$. **24.** б) $[0; \infty)$; в) R. **27.** б) $a^2 + 4a + 3$. **33.** 10 хв. **35.** а) 3; б) 1. **48.** а) 2^3; г) 2^{-2}. **50.** а) 4. **53.** а) $x - 1$. **62.** а) Ні. **63.** а) Так. **64.** а) 3. **65.** б) Найбільше 3, найменше $\frac{1}{27}$. **66.** а) $3^{\frac{3}{4}}$. **67.** в) $3^{\frac{5}{3}}$. **68.** в) 0,5. **69.** а) 2. **73.** а) $x = 4$; $x > 4$; $x \leqslant 4$. **75.** а) 1000 м^2. **76.** а) 24 А. **77.** а) 2,6 г. **86.** а) 2; в) 0. **87.** б) 1,5. **88.** а) −2. **89.** а) 2. **90.** а) $x = 3$; $x \geqslant 3$. **91.** в) $x = 4$; $x > 4$. **92.** б) $x \leqslant -0{,}5$. **95.** а) $x \geqslant 2$; в) розв'язків немає. **96.** а) 3. **97.** а) 0. **98.** а) 1. **100.** а) 0 і 1. **102.** а) $x > 2$. **104.** а) $x > 2$. **106.** а) 2,5. **107.** а) 0,75. **108.** а) 3. **109.** б) 1. **110.** а) −1. **111.** а) 2. **113.** 1) а) 0 і 1; 2) а) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$. **115.** а) $(-\infty; 0)$. **117.** 20 хв. **130.** 1; 2; 3; 1; 3. **133.** а) $3^4 = 81$. **134.** а) Так. **135.** а) 4. **136.** а) 2. **140.** а) Ні. **141.** а) 2. **142.** а) $(0; \infty)$. **143.** а) $x > 3$. **144.** а) −3. **146.** а) 81. **147.** а) 9. **148.** а) 35. **149.** а) 9. **152.** а) $\log_{0,5}5 < 0$. **153.** а) $\log_{49}3 < 1$. **154.** а) $\log_2 0{,}4 < \log_2 0{,}6$. **155.** а) $\log_2 0{,}4 < \log_{0,2} 0{,}4$. **168.** а) 19. **169.** а) 5000. **170.** а) 26. **171.** а) −3; б) 1 і −2. **172.** а) − 4; б) −1 і 4. **173.** а) 9. **174.** а) 2. **175.** а) 7. **176.** а) 6. **177.** а) $(-5; 1{,}5)$. **178.** а) $(-4; 4)$. **179.** а) $(7; 34)$; в) $(7; 16)$. **180.** а) $x > -2$. **181.** а) 169. **182.** б) 5^{10}. **183.** а) 5. **184.** а) 100; в) 4 і 8; г) 100 і 0,01. **185.** в) 1000 і 0,01; г) 4. **186.** а) 9 і 1,25. **187.** а) 9. **188.** а) − 1. **189.** а) $(6; \infty)$. **190.** а) $(7; \infty)$. **191.** а) $(5{,}5; 7]$. **192.** а) $(1; 3\frac{2}{3})$. **193.** б) $(\frac{1}{3}; 27)$. **206.** а) 0; г) 12. **207.** а) −3; б) 3. **208.** а) 22; в) −7. **209.** а) 90; в) 10,5. **210.** а) 45; в) 0. **211.** а) 2. **212.** а) −0,2. **213.** а) 0,3. **214.** а) 0,9. **215.** а) 1,2; 0,1. **216.** а) 0,2; 2. **217.** а) 0. **218.** а) 1. **219.** а) 0. **220.** а) −1,5. **221.** а) −8. **222.** а) $2x$. **224.** а) ≈ 50 мишей за тиждень; б) ≈ 30 мишей за тиждень. **225.** а) ≈ 11 км/год. **227.** а) $\Delta K(x) =$ = 600 грн.; б) $\Delta R(x) = 1552$ грн. **245.** а) −4. **247.** а) 0; 8; −12. **248.** а) 3. **249.** а) 5. **250.** а) $y = 3x - 2$. **253.** а) 0,5. **254.** а) −1. **257.** а) $y = -6x - 12$. **267.** в) $2x^5$; г) −1. **268.** а) $2x$; в) $4x^3 + 18x$. **269.** а) $6x^2$; в) $\frac{2}{3}x$. **271.** −3; −5; −9. **272.** −94; 2; $24\sqrt{2} + 2$. **274.** а) $2\cos x$. **275.** а) $2x - \sin x$. **276.** б) 8. **277.** а) −1. **278.** а) $7e^x$. **279.** г) $\frac{2}{x\ln 10}$. **280.** а) $2{,}5x^{1,5}$. **281.** а) $5x^4 - 10x$; в) $2x + 1$. **283.** а) $7x^6 - 6x^2$; б) $5x^4$; в) $3x^2 - 2x - 7$; г) $3x^2 - 6x + 2$. **286.** $y = 4x - 9$. **287.** $y = 1$. **288.** $y = -94x - 144$. **289.** а) $3x^2\cos x -$

298. а) $-\dfrac{2}{(x+1)^2}$. **300.** а) $2e$. **301.** а) $2e$. **302.** а) 1. **303.** б) $y = x + 1$. **304.** а) $y = 2e^{-1}x$. **305.** б) 0. **307.** а) $y = -x + \pi - 1$. **314.** а) $f(g(x)) = (2x + 7)^2$. **315.** в) $f(g(x)) = \sin(3x + 4)$. **316.** а) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x + 10$. **318.** а) $20(x + 3)^{19}$. **320.** а) $4\cos 4x$. **321.** а) $3\cos 3x$. **322.** а) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. **323.** б) $e^{\sin x}\cdot\cos x$. **325.** а) $\sin 2x+2x\cos 2x$. **326.** а) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}$; в) $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{(x-1)(x+2)}}$. **327.** а) $4\sin^3x\cos x$. **328.** а) $\sqrt{3}$. **329.** а) 2. **330.** б) 40. **333.** а) $y = -3x + 0{,}75\pi$. **334.** а) $-2\sin 2x$. **336.** а) $\dfrac{9}{3x-4}$. **346.** а) 0 і 1. **347.** б) 0,5. **348.** а) 0. **354.** а) Зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; \infty)$. **355.** а) Зростає на $[-1; 0]$ і $[1; \infty)$. **356.** а) Спадає на $[-1; 3]$. **357.** а) $x = -0{,}5$ – точка мінімуму. **358.** а) $x = 0$ – точка максимуму. **359.** а) $x = 0$ – точка мінімуму, $x = -1$ – точка максимуму. **360.** а) $x = \dfrac{1}{7}$ – точка мінімуму. **361.** а) $x = 1$ – точка мінімуму, $x = -1$ – точка максимуму. **362.** а) Точок екстремуму немає. **367.** а) $x = -\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ – точки мінімуму, $x = \dfrac{7\pi}{6}+2\pi n$ – точки максимуму (при кожному $n \in Z$). **369.** а) $y_{\max} = y(0) = 2$. **374.** а) $y_{\min} = y(0) = 0$. **388.** 21; –4. **389.** 56; –56. **390.** а) 6; –19. **391.** –0,5. **392.** 1024. **396.** 200×200 (м). **397.** 1200 м. **399.** а) 1) $\sqrt{20}$, 0; б) 1) 5; 2. **400.** а) Ні; б) ні. **401.** а) $[-2; \infty)$. **402.** б) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. **403.** $XM = \sqrt{3}$. **404.** Квадрат. Другий спосіб геометричний. Доведіть, що площа прямокутного трикутника, вписаного в коло, найбільша тоді, коли він рівнобедрений. **405.** Квадрат. **406.** 4 м, 4 м і 2 м. **407.** Якщо діаметр основи циліндра x, а висота y, то його об'єм $\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\cdot y = 1$, звідки $y = \dfrac{4}{\pi x^2}$. Площа поверхні $S = 2\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 2\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)y$. Її значення найменше, коли $x = \dfrac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$. У цьому разі $r = \dfrac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$; $h = \dfrac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$. **416.** а) 10 м/с. **417.** а) $v(t) = 8t + 3$; б) $a(t) = 8$; в) $v(5) = 43$ м/с; $a(5) = 8$ м/с^2. **418.** а) $v(t) = (6t + 4)$ рад/с. **419.** а) 16 м/с; 42 м/с^2. **420.** Через $6\dfrac{2}{3}$ с.

421. 4 град/с. **422.** $\frac{13}{12}$ г/год. **424.** $t = 1$ с. **428.** 1А. **429.** $t = 9$ с. **430.** а) 4м/с і 2 м/с. **431.** а) 36 м/с^2. **433.** а) 20 м/с; б) 4с; в) 80 м. **443.** $(x^4)' = 4x^3$; так. **448.** а) $3x + C$; в) $x^3 + C$. **449.** а) $C - x^5$. **450.** а) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + C$. **454.** а) $5x + x^3 + C$. **455.** а) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{10}{3}$. **462.** а) $x + 0{,}1x^{10} + C$. **463.** а) $-2\cos x + C$. **464.** б) $-e^{-x} + C$. **465.** а) $15x^4$. **466.** б) $0{,}5x^2 + \mathrm{tg}x - 3$. **467.** в) $-\cos x + 1{,}5$. **468.** а) $v(t) = 4t^2 + 20$. **469.** а) $s(t) = t^3 + 4$. **471.** а) Так. **472.** в) $0{,}4e^{5x-1}$. **475.** а) $-0{,}1\sin 10x$. **477.** б) $x + 0{,}5\sin 2x$. **488.** а) 4 кв. од. **489.** а) $6\frac{2}{3}$ кв. од. **490.** а) 27 кв. од. **493.** а) $8\frac{2}{3}$ кв. од. **494.** а) 1 кв. од. **495.** а) 6 кв. од. **496.** а) $\pi + 4$ кв. од. **497.** а) 6,4. **498.** Один із способів – за формулою площі трапеції; її основи 4 і 6, а висота 4. **499.** а) 0,25. **503.** $10\frac{2}{3}$ кв. од. **504.** а) 36. **505.** а) $\frac{3}{8}$. **506.** а) 4,5 кв. од. **507.** а) $10\frac{2}{3}$. **513.** а) 0,5. **516.** b, c, a. **517.** а) 1. **518.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **519.** а) $\frac{2}{3}$. **520.** а) $e - 1$. **521.** б) 1 кв. од. **522.** а) $3\frac{3}{4}$ кв. од. **523.** в) $(12 + \ln 81)$ кв. од. **524.** б) 1,75. **525.** в) 2. **526.** б) 8. **527.** а) π. **529.** а) $\frac{4}{3}$ кв. од. **531.** а) $\left(\frac{3}{\ln 2} - 2\right)$ кв. од. **532.** Так. **536.** 6 кв. од. **537.** 12 кв. од. **541.** 117π куб. од. **542.** $0{,}2\pi$ куб. од. **545.** 198 м. **546.** 80 м. **547.** 10 м. **548.** 4,5. **549.** $2\frac{2}{3}$. **550.** 12 π. **551.** 24 π. **552.** 0,125 Дж. **553.** 0,784 Дж. **554.** ≈ 1177 м. **556.** 9,5 м. **557.** 48 Кл. **578.** а) $\{-2; 0; 2\}$. **579.** а) $(-\infty; 4)$. **582.** а) $[0; 49]$. **583.** $K \cap P = \{a; c; 2\}$, $K \setminus P = \{b\}$. **590.** Пара $(4; -1)$. **591.** $A \cap B$ – множина чисел, кратних 6. **592.** $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = N$, $A \setminus B = A$. **605.** а) 3 628 800; б) 6 227 020 800. **606.** а) $(n + 1)!$; б) $n!$; в) $n + 1$; г) $(n - 1)!$. **608.** 24. **611.** 120. **612.** 6; 24. **613.** 20 160. **615.** а) 30 240; б) 1716. **618.** а) 8; б) 10. **622.** 24. **624.** 240. **625.** 3600. **626.** 24. **636.** xy, xz, xt, yz, yt, zt. **639.** а) 120; г) 5040. **641.** 720. **642.** 2520. **643.** 6. **644.** 18. **646.** 30 240. **647.** а) 60. **651.** 190. **652.** 496. **653.** 28. **654.** $0{,}5n(n - 1)$. **655.** 35; $0{,}5n(n - 3)$. **657.** 648. **658.** 60. **659.** 20. **660.** 60. **662.** а) 7. **664.** а) 10. **666.** $C_{28}^{7} \cdot C_{27}^{7} \cdot C_{14}^{7}$. **667.** C_{49}^{6}. **674.** Мода 32, медіана 31,5. **675.** Розмах 3, медіана 2, мода 1. **676.** б) У 3 рази. **678.** Розмах 4, мода 3, медіана 3. **681.** 50,5. **682.** $4\frac{1}{3}$; 5 і 4,5. **684.** 528 г. **687.** Так. **688.** 2,7 %. **689.** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$; $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$. **690.** Середні квадратичні $\sqrt{0{,}116}$; $\sqrt{0{,}142}$; $\sqrt{0{,}134}$. Найкраще завдання виконав перший фрезерувальник. **724.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$. **725.** а) $\frac{1}{14}$; в) $\frac{1}{28}$. **728.** а) 0; б) 0; в) 1. **730.** $\frac{54}{125}$; $\frac{36}{125}$; $\frac{8}{125}$. **731.** а) 0,3; б) 0,2. **733.** а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{12}$. **734.** $\frac{1}{24}$. **735.** $\frac{1}{1296}$. **736.** $\frac{1}{24}$. **737.** $\frac{1}{2520}$. **738.** а) $\frac{1}{60}$; б) $\frac{1}{10}$. **740.** $\frac{5}{9}$. **741.** а) $\frac{60}{253}$; б) $\frac{15}{253}$. **742.** а) $\frac{1}{330}$; б) $\frac{33}{236}$. **743.** а) $\frac{33}{59}$; б) $\frac{45}{118}$. **746.** а) $\frac{5}{9}$. **748.** а) 3 числа з 49; б) ймовірності рівні, бо $C_{15}^{7} = C_{15}^{8}$. **758.** $M(\varsigma) = 4{,}5$. **759.** В останній клітинці має бути $\frac{1}{4}$; $M(\varsigma) = 3\frac{5}{6}$. **760.** $M(\varsigma) = 350$ грн. **761.** $M(\varphi) = 2{,}5$; $D(\varphi) \approx 2{,}92$. Така випадкова величина відповідає, наприклад, випаданню очок під час підкидання правильного грального кубика. **764.** $D(y) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $E(y) = \{1; 6; 15; 20\}$. **774.** $M(2; -2; 5)$. **779.** а) (0; 1; 8). **780.** а) Так. **783.** $B(-4; 7; 24)$. **784.** $A(8; 18; -8)$. **785.** а) Так. **786.** а) $D(-5; 9; 2)$. **787.** $C(3; -8; 6)$. **788.** $3\sqrt{6}$. **790.** Ні. **791.** $3\sqrt{38}$. **792.** -4. **793.** $M(0; -2; 0)$. **794.** $3\sqrt{2}$. **796.** а) $P = 15\sqrt{2}$; $S = 12{,}5\sqrt{3}$. **811.** $\overline{AB} = (2; 5; 3)$, $\overline{BA} = (-2; -5; -3)$. **814.** а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{41}$. **815.** 3 або -3. **816.** $\vec{a} = (3; 6; -3)$ або $\vec{a} = (-3; -6; 3)$. **819.** а) $\overline{CP}$; б) $\overline{AT}$; в) $\overline{AE}$; г) $\overline{O}$. **820.** а) $3\vec{a} = (9; -12; 6)$. **822.** $|3\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{123}$. **824.** а) $m = -5$. **825.** $\overline{AB} + \overline{CD} = (2; -1; -6)$. **834.** а) -6. **835.** б) 130°. **837.** б) -18. **839.** а) 0. **843.** а) $x = -9$. **844.** $D(0; 0; 1)$. **845.** $\cos x = \frac{4}{9}$. **852.** $5x - 3z + 2 = 0$. **853.** $ax + by + cz = 0$. **854.** а) $3x - 4y + 7z + 26 = 0$. **856.** $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 18$. **871.** Так. **872.** $4\sqrt{3}$ см². **874.** а) a; б) $a\sqrt{2}$. **876.** 18 м². **878.** $\sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$. **885.** $5(2\sqrt{3} + 1)$. **898.** 4 см. **899.** в) $4ab$. **900.** $2{,}25\sqrt{3}$ см. **903.** а) 1464 см². **904.** $6a^2 \sin\alpha$. **905.** 13 см.

906. 192 см^2. **907.** 5 см, 10 см і 15 см. **908.** $\approx$ 285 мм. **909.** 6 см, 7 см і 12 см. **912.** 4 см. **914.** Ні. **916.** $2\sqrt{2}S$. **919.** 45°. **920.** а) $2a(a + 2h)$. **921.** $l\sin\alpha$. **922.** а) $d^2\sin\varphi\cos\varphi$. **926.** $5\sqrt{13}$ см. Розгляньте розгортку призми. **932.** Ребер $2n$, вершин і граней по $n + 1$. **933.** Ні. **938.** 5 см. **939.** 100 см^2. **940.** a. **941.** а) $b\sin\alpha$; б) $2b\cos\alpha$. **942.** б) $3l\cos\alpha$; г) $3\sqrt{3}l^2(\cos\alpha + \cos^2\alpha)$. **943.** $\approx$ 42°. **944.** 24 см. **945.** 125. **946.** а) $128\sqrt{3}$. **947.** а) $\dfrac{a^2}{\cos\alpha} + a^2$. **949.** $5\sqrt{3}$ см. **950.** $\dfrac{25\sqrt{2}}{8}$ см. **953.** 30°. **954.** $0{,}25Q$. **955.** 16 см^2. **959.** $2(3+\sqrt{3})$. **960.** 36 дм^2; $\approx$ 35 дм^2. **961.** a^2. **974.** $2 : \sqrt{2}$. **975.** а) Так. **976.** а) Ні; б) так; в) ні. **978.** а) 864 см^2. **979.** б) 0,5 м. **980.** б) У 4 рази. **984.** $2\sqrt{3}a^2$. **985.** $b\sqrt{2}$. **987.** 16 см^2; $8\sqrt{2}$ см^2. **991.** У 9 разів. **992.** Можна. **995.** $\arccos\dfrac{1}{3}$; 90°. **1005.** Одна; безліч. Так. **1006.** Безліч. Так. **1008.** 4 см^2. **1009.** 40π см^2. **1011.** $H : r = 2 : 1$. **1012.** а) 24 м; г) 290π. **1013.** б) 3 см. **1016.** πS. **1018.** $2\pi r^2\mathrm{tg}\alpha$. **1019.** $\dfrac{\pi}{2}d^2\left(1 + \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **1020.** $2 : \sqrt{3}$. **1023.** rh. **1024.** $\sqrt{\dfrac{10}{\pi}}$; $\dfrac{15}{\sqrt{10\pi}}$. **1025.** $Q : 4\pi$. **1029.** $\approx$ 3,3 м^2. **1030.** Ні. **1038.** Конус. **1039.** 10 м. **1040.** 5 см; $5\sqrt{3}$ см. **1041.** 90°. **1042.** 24π см^2. **1045.** а) $l\sin\alpha$; в) $l^2\sin\alpha\cos\alpha$. **1046.** $\sqrt{2}\pi R^2$. **1047.** $8\sqrt{3}\pi$ см^2. **1050.** 90π см^2. **1052.** $\sqrt{3}$ см. **1054.** Ні, якщо висота конуса менша від радіуса основи. **1056.** а) $0{,}5R$. **1057.** π см^2. **1058.** $0{,}5h\sqrt{2}$. **1059.** 60°. **1060.** б) 24π см^2. **1061.** б) $\sqrt{2}\pi a^2$. **1070.** $0{,}75\pi r^2$. **1071.** 64π см^2. **1072.** 30 см. **1073.** $R + r$ або $|R - r|$. **1074.** Дві площини, паралельні даній площині і віддалені від неї на r; б) сфера радіуса r з центром у даній точці. **1077.** $\approx$ 0,5 дм. **1078.** 20 г. **1079.** 200π см^2. **1085.** а) 20 см. **1087.** 1 дм. **1088.** $\pi r^2\cos^2\alpha$. **1089.** 10 см і 24 см. **1090.** 10 см або 70 см. **1091.** 24 см. **1097.** Ці відстані рівні. **1119.** $3\pi\sqrt{3}$ см. **1123.** а) $Q : \pi r$. **1124.** $r^2\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; $\approx$ 22 м^2. **1125.** а) $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$; б) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **1126.** г) $\dfrac{a}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{180°}{m}\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **1127.** $2r\sin^2\alpha$. **1138.** $Q\sqrt{Q}$. **1139.** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}d^3$. **1140.** $6\sqrt[3]{V^2}$. **1145.** 9 см. **1146.** 30 дм.

1157. $\frac{\sqrt{3}}{4}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **1162.** $4ar^2$. **1166.** $\approx$ 3,8 дм³. **1167.** $\approx$ 5,4 тис. м². **1179.** $\frac{1}{6}d^2h$. **1180.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ дм³. **1182.** Прийміть за основу бічну грань піраміди. **1183.** $\frac{1}{6}abc$. **1184.** а) $\frac{1}{3}b^3\sin2\alpha\cos\alpha$. **1189.** 6 см. **1191.** У 8 разів. **1196.** $10\frac{2}{3}\pi$ см³. **1198.** $\frac{\pi}{6}a^3$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **1199.** 8 : 27. **1201.** У 8 разів. **1202.** Так. **1204.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **1205.** $\frac{1}{3}abh\sin\varphi$. **1206.** 112 см³. **1212.** $\approx$ 5,7 см. **1213.** $\approx$ 42 см. **1218.** $\approx$ 8,4 см. **1219.** Менша від 4,18 т. **1220.** 0,0004 мм. **1221.** а) $3x$. **1222.** а) 56; 42. **1223.** а) $4^3 < 3^4$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 < \left(\frac{4}{9}\right)^2$. **1226.** Менший на $1\frac{33}{50}$. **1227.** $d = 2$, $a_{20} = 41$, $S_{20} = 440$. **1228.** $q = 2$, $b_{10} = 1536$, $S_{10} = 3069$. **1229.** 4905. **1230.** а) 42. **1231.** 58. **1232.** 21. **1233.** Друга схема неправильна, бо 1 – ні просте, ні складене. **1237.** а) Парна; б) парна. **1239.** $y = 3x$. **1240.** $y = 0,5x$. **1242.** (3; 2). **1243.** Так, усі дійсні числа $x \in (0; 180°)$, де x – кут при вершині. **1244.** $x = -7$, $y = 0$. **1245.** а) 5; б) 0. **1246.** $y = 0$. **1251.** а) $\sin1° < \sin3°$; б) $\sin1 > \sin3$. **1252.** а) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{2}$. **1253.** cos2, tg2, cos3. **1255.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **1256.** $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **1257.** а) $\frac{\pi}{6}$. **1258.** а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **1259.** а) 0; в) $\cos^2\alpha$. **1263.** а) 0,8; б) $\frac{3}{4}$. **1271.** $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; 1. **1273.** –27. **1274.** а) $a^{-2} - 9$. **1275.** 4; 27; 4; 1; $\frac{1}{3}$. **1277.** $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[10]{p^2}$. **1278.** $x^{\frac{1}{2}}$, $c^{\frac{1}{3}}$, $(xz)^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{5}}$. **1279.** а) 2; б) 10. **1280.** $x - c^2$. **1281.** а) 11. **1284.** Ні. **1286.** Так; так. **1287.** $k = 2$. **1288.** Так. **1289.** б)–г) Так. **1290.** а) Спадна; б) зростаюча. **1293.** а) $x = 5$. **1296.** а) Три; б) чотири. **1298.** а) $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{3}$. **1299.** $\sqrt{2}$. **1300.** $\sqrt{42}$. **1301.** (1; 5; 3). **1303.** (–1; –2; –1); (1; 2; 1). **1304.** (–3; 1; 7); (3; 1; –3). **1306.** а) 4; б) (–2; –2; 2; –2); (2; 2; 2; 2). **1307.** а) 0,5; б) –3; в) $\frac{1}{2}$. **1309.** –2. **1310.** Так. **1311.** а) 1,5;

в) 1. **1312.** –4; 0; 6. **1313.** 1; –1; –1. **1314.** а) $6x^2$; б) $5x^4 - 6x$. **1315.** а) –1; 1. **1316.** а) $x \in (1; +\infty)$ – зростає, $x \in (-\infty; 1)$ – спадає. **1317.** а) $x_{\max} = \frac{1}{2}$. **1318.** Так. **1321.** а) $\max\limits_{[-5;\,0]} f(x) = f(-5) = 55$, $\min\limits_{[-5;\,0]} f(x) = f(3) = -9$. **1322.** $-\frac{1}{2}$. **1323.** $5\sqrt{2}$. **1324.** Куб з ребром 1 м. **1326.** $y = \frac{x^3}{3} + 8\frac{2}{3}$. **1327.** а) $\frac{x^4}{4} + 2x + C$. **1328.** $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + 3\frac{2}{3}$. **1329.** а) $2\frac{2}{3}$ кв. од. **1330.** а) 9; б) 0. **1331.** 36 кв. од. **1332.** $1\frac{1}{3}$ кв. од. **1335.** 300 см². **1336.** $4\sqrt{3}$ дм². **1339.** $\sqrt{3}$ см². **1340.** 216π см². **1341.** $4\pi a^2$. **1342.** Так. **1343.** 17,5 см, 17,5 см. **1344.** Ні. **1345.** а) Навпіл; б) 1:4. **1346.** 40π см. **1347.** Ні. **1348.** 1 : 4. **1349.** а) $m^2 : n^2$; б) $m^3 : n^3$. **1350.** $40\sqrt{5}$ см³. **1351.** $54\sqrt{3}$ дм³. **1352.** 144π дм³. **1353.** б) 4 : 9. **1354.** а) π м². **1355.** У 4 рази; у 8 разів. **1356.** $8\pi\sqrt{2}$ дм², $\frac{16}{3}\pi$ дм³. **1357.** Розгляньте усно 10 випадків. **1358.** г) Число *3* ділиться на 5 і 9, тому остання цифра – 5 або 0, а сума цифр ділиться на 9. **1359.** а) КУТ = 289; б) розв'язку немає. **1360.** Через 59 хв. **1361.** Понад 2^{33}, що більше 8 млрд. Такої кількості людей не існувало. **1362.** ≈ 232 р. Рівняння $1{,}01^x = 10$ розв'яжіть методом випробувань, користуючись калькулятором. **1363.** 1480. **1364.** Таке число має вигляд $3n + 1$, де n – число натуральне. А число $(3n + 1)^3 = 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1$ при діленні на 9 дає в остачі 1. **1366.** Висота циліндра дорівнює половині радіуса його основи. **1367.** На 1 день. **1368.** Не існують.

ЗМІСТ

Передмова 3

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1. **Показникові та логарифмічні функції** 5

§ 1. Функції та їх основні властивості 6
§ 2. Степеневі та показникові функції 14
§ 3. Показникові рівняння та нерівності 23
§ 4. Логарифми та логарифмічні функції 30
§ 5. Логарифмічні рівняння та нерівності 37
Самостійна робота № 1 44
Історичні відомості 45
Головне в розділі 1 46

Розділ 2. **Похідна та її застосування** 49

§ 6. Границя функції 50
§ 7. Дотична до графіка функції. Похідна 58
§ 8. Диференціювання функцій 65
§ 9. Похідна складеної функції 72
Самостійна робота № 2 77
§ 10. Застосування похідної для дослідження функцій 78
§ 11. Найбільші та найменші значення функції 86
§ 12. Похідна як швидкість 91
Самостійна робота № 3 97
Історичні відомості 97
Головне в розділі 2 98

Розділ 3. **Інтеграл та його застосування** 100

§ 13. Первісна 101
§ 14. Площа підграфіка 107
§ 15. Інтеграл 112
§ 16. Застосування інтегралів 121
Самостійна робота № 4 127
Історичні відомості 127
Головне в розділі 3 130

Розділ 4. **Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики** 132

§ 17. Множини та підмножини 133
§ 18. Комбінаторика та правило добутку 138
§ 19. Розміщення, перестановки та комбінації 144
§ 20. Елементи статистики 149
§ 21. Графічні подання інформації про вибірки 155

§ 22. Випадкові події та їх імовірності 165
§ 23. Відносна частота події та випадкові величини 175
Самостійна робота № 5 181
Історичні відомості 182
Головне в розділі 4 185

ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 5. **Координати і вектори у просторі** 188
§ 24. Координати в просторі 189
§ 25. Вектори в просторі 194
§ 26. Застосування векторів 200
Самостійна робота № 6 206
Історичні відомості 207
Головне в розділі 5 208

Розділ 6. **Геометричні тіла. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл** 210
§ 27. Геометричні тіла та многогранники 211
§ 28. Призми 217
§ 29. Піраміди 224
§ 30. Правильні многогранники 230
Самостійна робота № 7 236
§ 31. Тіла обертання 237
§ 32. Конуси 244
§ 33. Куля і сфера 251
Самостійна робота № 8 257
§ 34. Комбінації геометричних фігур 257
§ 35. Об'єм призми та циліндра 262
§ 36. Об'єм піраміди, конуса та кулі 268
Самостійна робота № 9 276
Історичні відомості 276
Головне в розділі 6 278

ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ

Числа і функції 281
Прямі та площини в просторі 286
Похідна та інтеграл 287
Геометричні тіла 289
Задачі для кмітливих 290
Теми для завдань творчого характеру 293
Рекомендована література 294
Предметний покажчик 295
Довідковий матеріал 298
Відповіді 310

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна

МАТЕМАТИКА

Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Редактори *Олександр Гриценко, Наталія Дашко*
Обкладинка, макет, ілюстрації *Василя Марущинця*
Технічний редактор *Цесаріна Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректори *Інна Іванюсь, Любов Федоренко*