

**НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
НІЖИНСЬКИЙ АГРОТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

**В.С. Лукач, О.І. Литвинов, В.І. Василюк,
О.О. Сипливець**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

**СТАТИКА
КІНЕМАТИКА**

Схвалено Міністерством аграрної політики України для використання в навчально-виховному процесі як навчальний посібник у процесі підготовки бакалаврів напрямку 6.100102 «Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва» у вищих навчальних закладах II-IV рівнів акредитації Міністерства аграрної політики України

Ніжин - 2008

УДК 531.01
ББК 22.21я 73
Т 33

Схвалено Міністерством аграрної політики України для використання в навчально-виховному процесі як навчальний посібник у процесі підготовки бакалаврів напряму 6.100102 «Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва» у вищих навчальних закладах II-IV рівнів акредитації Міністерства аграрної політики України
(Лист №18-128-13/745 від 08.05.2008 р.)

Рекомендовано до друку Вченою радою
Ніжинського агротехнічного інституту
Національного аграрного університету
Протокол №6 від 31.05.2008 р.

Рецензенти:

Завідувач кафедри механіки і ТММ,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
І.В.Головач (*Національний аграрний університет*),

Доцент кафедри механіки і ТММ,
кандидат технічних наук
М.Г.Березовий (*Національний аграрний університет*)

Лукач В.С., Литвинов О.І., Василюк В.І., Сипливець О.О.

Т 33 Теоретична механіка. Статика. Кінематика: Навчальний посібник. –
Ніжин:ПП Лисенко М.М., 2008. – 331 с.
ISBN 978-966-96962-6-7

Навчальний посібник висвітлює основні поняття механіки, пов'язані зі статикою на площині, кінематикою точки та твердого тіла, містить методику і багато прикладів розв'язання різноманітних задач, надає методичні вказівки та містить індивідуальні завдання для розрахунково-графічної роботи.

Навчальний посібник призначений для студентів очної та заочної форм навчання механіко-технологічних факультетів аграрних закладів освіти II– IV рівнів акредитації.

Табл. 12. Іл. 127.

ISBN 978-966-96962-6-7

ББК 22.21я 73

© Лукач В.С., Литвинов О.І.,
Василюк В.І., Сипливець О.О., 2008
© Кафедра загально технічних дисциплін
НАГІ, оригінал-макет, 2008
© Ніжинський агротехнічний
інститут, 2008

ПЕРЕДМОВА

Статика є окремим розділом механіки, де розглядається рівновага тіл і зв'язаних систем тіл у стані спокою, основні висновки якого використовуються в програмах курсів теорія механізмів і машин, опір матеріалів, деталі машин тощо. У розділі “Кінематика матеріальної точки і твердого тіла” надається багато прикладів, пов’язаних з графо-аналітичним дослідженням кінематики плоских механізмів, як матеріальної системи. Тому, оволодіння цими розділами є дуже важливим для студентів інженерних спеціальностей.

В останні роки в навчальних планах спостерігається суттєве скорочення годин аудиторних занять з теоретичної механіки, що, безумовно, негативно впливає на якість підготовки майбутніх інженерів. Але в цих умовах набуває особливої актуальності інтенсивна самостійна робота студентів, де студенту прийдеться долати значні складності при розв’язуванні різноманітних задач.

Даний навчальний посібник у деякій мірі допоможе в питанні засвоєння навчального матеріалу і буде сприяти успішній самостійній роботі при виконанні розрахунково-графічних завдань і інших задач зі статички та кінематики.

Навчальний посібник створений на підставі багаторічного викладання теоретичної механіки в Національному аграрному університеті і Ніжинському агротехнічному інституті.

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ПО ВИВЧЕННЮ КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Мета курсу "Теоретична механіка" – оволодіти методами визначення закономірностей руху матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи, способами зведення системи діючих сил до найпростішого вигляду.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен знати:

- основні закони, теореми, принципи механіки;
- застосування теорії до розв'язання конкретних задач;
- методи визначення статичних та динамічних реакцій в'язей;
- способи складання рівнянь рівноваги механічної системи;
- кінематичні формули визначення швидкостей та прискорень точки і твердого тіла;

студент зобов'язаний уміти:

- складати розрахункові схеми та диференціальні рівняння руху;
- визначити закон руху тіла та схему сил, що діють на нього;
- обчислити статичні та динамічні реакції;
- раціонально обрати метод розв'язання конкретних механічних задач.

Завдання для виконання індивідуального завдання із статички в повному обсязі розраховано на програму курсу теоретичної механіки для студентів факультетів МСГ спеціальності 6.091902 "Механізація сільського господарства" і ЕАСГВ для спеціальності 6.091901 "Енергетика сільського господарства".

Перший з трьох основних розділів курсу теоретичної механіки – **СТАТИКА** вивчає рівновагу тіл під дією сил, умови їх спільної дії на тіло або на систему тіл, властивості сил та умови їх перетворення з метою спрощення систем сил.

Для вивчення цього розділу необхідно є певна сума знань з таких розділів математики:

- елементи векторної алгебри;
- розв'язання трикутників прямокутного та загального вигляду;
- перетворення тригонометричних функцій та деякі теореми геометрії.

Взагалі, при розв'язуванні задач статички основною метою є визначення реакцій в'язей, які утримують у рівновазі тіло або систему тіл, що розглядається. У зв'язку з цим існує певний порядок розв'язування задач статички, алгоритм якого такий:

1. Побудувати схему активних сил, що діють на дане тіло або систему тіл, показати реакції відповідних в'язей.
2. Раціонально вибрати систему координат, щоб рівняння рівноваги були якомога простішими.
3. Скласти рівняння рівноваги даного тіла або системи тіл.
4. Розв'язати рівняння рівноваги з метою знаходження опорних реакцій або інших невідомих сил.
5. Провести перевірку і аналіз отриманих результатів.

У другому розділі – «Кінематика точки і твердого тіла» розглядаються закони руху тіл з геометричної точки зору без урахування їхніх мас і діючих сил. Кінематика вивчає рух моделей матеріальних тіл: точка, тверде тіло, матеріальна система як геометричних образів, без викладення причин, які викликають цей рух. Саме такий підхід не потребує врахування інерційних і силових характеристик. Книга є зручним посібником студентам усіх форм навчання для самостійної роботи: вона містить багато задач з детальними методичними вказівками.

1. РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Розділ "Статика"

1. Вступ. Механічний рух як одна з форм руху матерії. Теоретична механіка та її місце серед природничих наук. Механіка як теоретична база ряду областей сучасної техніки. Об'єктивний характер законів механіки. Основні історичні етапи розвитку механіки.

Основні поняття та аксіоми статички.

Вступ до статички. Предмет статички. Основні поняття статички: абсолютно тверде тіло, матеріальна точка, сила, еквівалентні та зрівноважені системи сил, рівнодійна, сили зовнішні та внутрішні. Аксіоми статички. В'язі та реакції в'язей. Основні типи в'язей та їх реакції.

2. Система збіжних сил.

Геометричний спосіб додавання збіжних сил. Многокутник сил. Умова рівноваги збіжних сил в геометричній формі. Теорема про рівновагу трьох сил, що розміщені в одній площині. Проекція сили на вісь та на площину. Визначення сили за її проекціями. Теорема про проекції рівнодійної сили на вісь. Аналітичний спосіб додавання збіжних сил.

3. Теорія моментів і пар сил.

Додавання двох паралельних сил, напрямлених в один бік. Додавання двох паралельних сил, напрямлених протилежно. Момент сили відносно точки (центра). Момент сили як вектор. Властивості пар на площині. Умова рівноваги системи пар у площині.

4. Система сил, що довільно розміщені на площині.

Зведення системи довільних сил до даного центра.

Теорема про паралельне перенесення сили. Зведення системи довільних сил до даного центра. Головний вектор, головний момент системи сил. Окремі випадки зведення плоскої системи сил. Теорема Варіньона про момент рівнодійної. Умови та рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил. Три форми рівнянь рівноваги. Рівновага плоскої системи паралельних сил.

5. Зосереджені сили та розподілені навантаження, приклади розподілення навантажень, реакція жорсткого закріплення. Рівновага системи тіл. Сили зовнішні та внутрішні. Статично означені та неозначені системи. Метод розчленування системи тіл для визначення внутрішніх сил реакцій.

6. Розрахунок ферми. Поняття про ферму. Аналітичні методи розрахунку ферми. Метод вирізування вузлів, метод перетинів (метод Ріттера). Графічний метод розрахунку плоскої ферми.

7. Рівновага тіл з урахуванням сил тертя. Тертя ковзання. Кут та конус тертя. Рівновага тіл на похилій площині. Тертя кочення. Тертя нитки об циліндричну поверхню.

8. Система довільних сил. Момент сили відносно осі. Залежність між моментом сили відносно центра та відносно осі, що проходить через цей центр. Формули для обчислення моментів сили відносно координатних осей. Пари сил у просторі. Теорема про перенесення пари у паралельну площину. Умови еквівалентності пар у просторі. Додавання пар, довільно розміщених у просторі. Умови рівноваги системи пар у просторі.

9. Зведення просторової системи сил до даного центра. Обчислення головного вектора та головного моменту просторової системи сил. Окремі випадки зведення довільної системи сил, динамічний гвинт. Аналітичні умови рівноваги системи сил, довільно розміщених у просторі, випадок паралельних сил. Теорема Варіньона про момент рівнодійної сили відносно осі.

10. Центр паралельних сил та центр ваги. Зведення системи паралельних сил до рівнодійної. Центр паралельних сил. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі. Способи визначення положення центрів ваги тіл. Центр ваги деяких однорідних тіл: дуга кола, сектор, трикутник.

Розділ «Кінематика»

1. Кінематика матеріальної точки. Предмет кінематики. Способи задання руху точки. Векторний спосіб. Швидкість та прискорення точки при векторному способі. Координатний спосіб. Швидкість та прискорення точки при координатному способі. Натуральний спосіб задання руху точки. Закон руху і швидкість руху точки. Натуральний тригранник. Кривизна кривої. Прискорення точки. Дотична і нормальна складові прискорення.

2. Кінематика твердого тіла. Поступальний рух. Теорема про траєкторії, швидкості і прискорення точок твердого тіла при поступальному русі. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі. Закон руху, кутова швидкість і кутове прискорення. Швидкість та прискорення точок обертового тіла. Швидкість точки як векторний добуток. Плоскопаралельний рух твердого тіла. Швидкість точок плоскої фігури. Миттєвий центр швидкостей, його визначення. План швидкостей. Прискорення точок фігури. План прискорень. Методика побудови планів швидкостей та прискорень плоского механізму. Сферичний рух.

3. Складний рух матеріальної точки. Теореми про додавання швидкостей та прискорень точки в складному русі. Прискорення Коріоліса. Методика розв'язування задач на складний рух точки.

4. Складний рух твердого тіла. Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей. Додавання обертальних рухів навколо осей, що перетинаються. Гвинтовий рух твердого тіла.

2. ВСТУП. ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. СТРУКТУРА КУРСУ

Теоретична механіка – це природнича наука, яка вивчає найбільш загальні закономірності механічного руху і рівноваги матеріальних об'єктів (тіл і матеріальних систем).

Під механічним рухом матеріальних тіл розуміють зміну положень матеріальних тіл у просторі протягом часу.

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико–математичного циклу і є, фактично, науковою базою всіх галузей сучасної, зокрема, сільськогосподарської техніки.

Традиційно теоретична механіка ділиться на три основні розділи: статика, кінематика та динаміка.

Статика вивчає властивості сил і умови їх спільної дії на тіло або на систему тіл, рівновагу тіл під дією сил.

Кінематика вивчає геометричні властивості руху матеріальних тіл без врахування їх мас і діючих сил.

Динаміка вивчає закони руху матеріальних тіл під дією сил, які цей рух обумовлюють.

Предметом теоретичної або загальної механіки є матеріальні тіла у вигляді простіших моделей, які розглядаються у зв'язку зі зміною їхнього взаємного розташування. Цей видимий зовнішній рух на відміну від "прихованих" внутрішніх атомно-молекулярних рухів називається механічним рухом.

Теоретична механіка вивчає спільні закономірності механічного руху матеріальних тіл і механічних, силових взаємодій між ними, а також взаємодій тіл із фізичними силовими полями (гравітація, електромагнетизм).

Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Тому теоретична механіка належить до фундаментальних природознавчих наук. В той же час, на відміну від ряду загально інженерних дисциплін: теорія механізмів і машин, опір матеріалів, будівельна механіка, деталі машин тощо – теоретична механіка вивчає найбільш загальні властивості руху і взаємодії тіл, як абстрактних моделей.

В загальнонауковому контексті механіка охоплює цілий комплекс дисциплін, що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл і середовищ. Це, наприклад, гідро – і аеромеханіка, що досліджує рух тіл у рідині і газовому середовищі; небесна механіка – рух небесних тіл у всесвіті; теорія коливань – коливальний рух; електродинаміка – рух і взаємодію тіл в електромагнітних полях; біомеханіка – рух і взаємодію біологічних об'єктів тощо.

Ще давньогрецький філософ Геракліт у IV ст. до н.е. вчив: “Все тече, ніщо не перебуває у незмінності”, але тільки нещодавно люди зрозуміли, що рух у найзагальнішому розумінні цього слова є формою буття матерії, він обіймає собою всі зміни і процеси, які відбуваються у природі, починаючи від простого переміщення і закінчуючи найскладнішими рухами – мислення, суспільні форми руху.

Наскільки теоретичні положення механіки допомагають розуміти спостережні життєві явища і передбачати закономірності інших явищ – в цьому і тільки в цьому справжність і цінність механіки. Отже, критерієм істинності наших знань є досвід і практика.

Теоретична механіка широко застосовує у своїх теоремах методи математики і формальної логіки, методи подібності, узагальнення і абстракції. Предметом її досліджень є не самі матеріальні об'єкти, а їхні достатньо еквівалентні моделі. По Гегелю, розвиток будь-якої науки, а тим більш природознавчої, йде по шляху від живого спостереження до абстрактного мислення, а від останнього – до практики. Це діалектичний шлях пізнання істини, пізнання явищ природи.

Теоретична механіка має велике значення в підготовці інженерів усіх галузей народного господарства. Вона є науковим фундаментом для вивчення таких загально-інженерних дисциплін як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, приладів і робото-технічних пристроїв, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеро – і гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування тощо.

Розуміння положень, методів і законів теоретичної механіки, які вірно відображають об'єктивні реалії механічних процесів, існуючих взаємозв'язків механічних рухів і перетворення енергії дає змогу науково передбачати закономірності у нових задачах, що виникають у процесі розвитку науки, техніки і технології. Таким чином, задача механіки – відкриття, пізнання і наступне практичне застосування кількісних і якісних закономірностей механічного руху.

Всесвіт – це матерія, яка закономірно і взаємопов'язано рухається у просторі і часі. Знаючи про такі зв'язки між матеріальними об'єктами світу, М.В. Ломоносов вчив, що “Для изучения явлений природы необходимо выпрашивать у осторожной и догадливой геометрии, советоваться с точною и замысловатою механикой, выведывать через проницательную оптику”. У сучасної науки арсенал засобів дослідження явищ природи незрівнянно ширший.

Традиційно в історичній ретроспективі склалося, що за характером задач, що вивчаються, почасти з методичних міркувань теоретична механіка, як було сказано вище, поділяється на статику, кінематику, динаміку та аналітичну механіку. Такий розподіл значно полегшує

вивчення механічного руху тіл і дозволяє пов'язати вивчення теоретичної механіки з іншими дисциплінами інженерно-технічних спеціальностей.

Найвищу ступінь узагальнення має аналітична механіка. Центральне місце аналітичної механіки – рівняння Лагранжа другого роду, в якому базовим постулатом є методика використання функцій кінетичної і потенціальної енергії. Останні служать основою для перенесення методів аналітичної механіки на електродинаміку у формі рівнянь Лагранжа – Максвелла, де замість кінетичної і потенціальної енергій оперують енергіями електричного і магнітного полів. Це дуже важливо для електромеханічних систем, які є основою сучасної техніки.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона, тому вона називається ньютонівською класичною механікою, на відміну від інших напрямів у механіці, як, наприклад, релятивістська механіка. Класична механіка спирається також на систему аксіом – певних знань, які накопичені у галузі механіки історичною практикою людства.

«СТАТИКА»

3. АКСІОМИ СТАТИКИ. РЕАКЦІЇ В'ЯЗЕЙ

3.1. Предмет статистики. Основні поняття і визначення

Згадаємо основні поняття теоретичної механіки, які добре відомі з курсу фізики.

Матеріальна точка – це тіло певної маси, розмірами та формою якого можна нехтувати в умовах даної задачі.

Система матеріальних точок (матеріальна система) – це сукупність точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємообумовлені.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, в якому відстані між двома довільними точками не змінюються з часом, простіше, це тіло, яке не деформується під дією сил.

Цілком зрозуміло, що в природі та техніці не існує реальних тіл, які повністю відповідають цим поняттям. Матеріальна точка, система матеріальних точок та тверде тіло є ідеальними поняттями, розрахунковими моделями при вивченні механіки.

3.2. Задачі статистики

Перш, ніж вивчати перший розділ теоретичної механіки – статику, сформулюємо задачі статистики:

1) визначення умов рівноваги тіл під дією різних систем сил як на площині, так і у просторі;

2) визначення методів перетворення систем сил з метою спрощення і заміни їх найменшою кількістю силових факторів.

В основі цього розділу механіки покладені аксиоми статистики, які нижче будуть розглянуті. А зараз розглянемо ще деякі основні поняття статистики та визначення.

Сила – це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, величину та напрямок взаємодії.

З цього класичного визначення сили випливає, що вона є величиною векторною, а тому має три визначальних параметри: величина сили (або модуль), напрямок дії та точка прикладення.

На розрахунково – силових схемах силу зображують у вигляді вектора довільної довжини (крім випадків графічної статистики, коли силу креслять у масштабі). Покажемо, наприклад, (рис. 3.1) довільну силу \vec{P} , яка зображена у вигляді вектора \overline{AB} , прикладена у точці A і діє вздовж лінії MN .

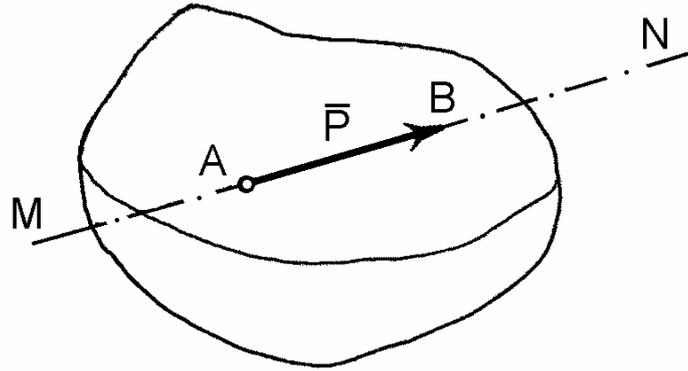


Рис. 3.1.

У Міжнародній системі одиниць (СІ) одиницею вимірювання сили є один ньютон – [1 Н] або один кілоньютон [1 кН]. Причому, 1 кН = 1000 Н. У технічній системі (МКГСС) одиницею вимірювання сили є один кілограм–сила – [кГ] або [кгс], у системі (СГС) – одна дина [дин].

На тіло можуть одночасно діяти декілька сил, утворюючи систему.

Система сил – це сукупність декількох сил, які діють на тіло або на механічну систему одночасно.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які на одне і теж тіло діють однаково. Система сил може бути, в деяких випадках, еквівалентною нулю.

Рівнодійна сила системи сил – це така сила, дія якої еквівалентна дії заданої системи сил.

Зрівноважувальна сила – це сила, яка за величиною дорівнює рівнодійній силі, розташована з нею на одній прямій, але протилежна за напрямком.

3.3. Аксиоми статички

В основу статички покладені аксиоми, тобто положення, які приймаються без доведення, тому що вони підтверджені багатовіковою практикою.

I аксіома. Абсолютно тверде тіло під дією двох сил тільки тоді буде перебувати в рівновазі, коли їх вектори дорівнюють за модулем, протилежні за напрямком і лінії їх дії співпадають.

На рисунку. 3.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , які мають однакові модулі $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2|$, розташовані на одній прямій MN і мають протилежні напрямки. Точки прикладання сил можуть співпадати. Таким чином, $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$.

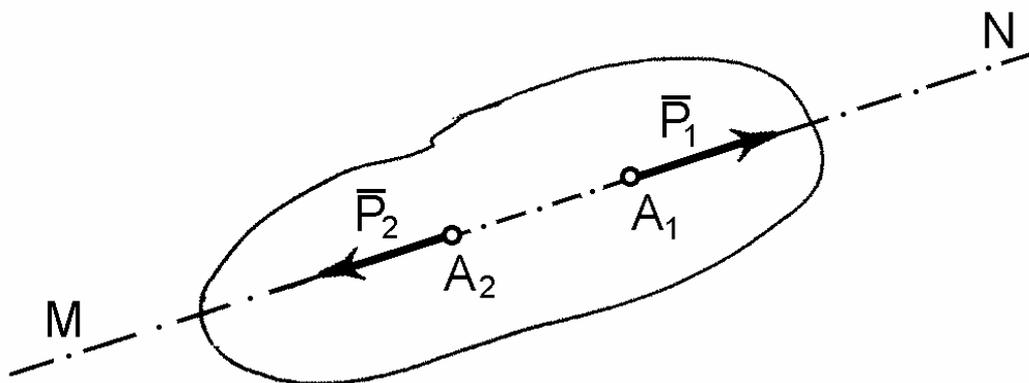


Рис. 3.2.

II аксіома. Стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил.

Наприклад, система зрівноважених сил (\bar{P}_1, \bar{P}_2) показана на рисунку 3.2. Ця аксіома носить назву аксіоми виключення сил.

Наслідок з перших двох аксіом. *Точку прикладення сили можна пересувати в межах даного тіла вздовж лінії дії сили (сила є ковзним вектором).*

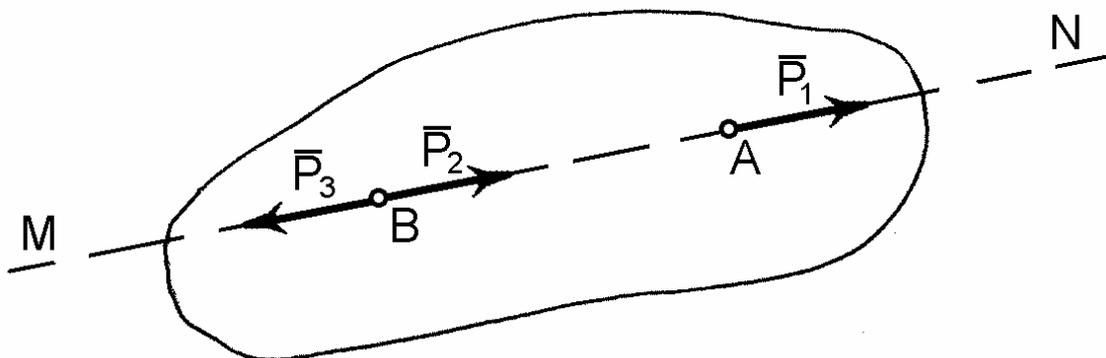


Рис. 3.3.

Припустимо, що на тіло (рис. 3.3) діє вектор сили \bar{P}_1 , який прикладений в точці A і має лінію дії MN . Прикладемо в довільній точці B на лінії дії MN дві сили \bar{P}_2 і \bar{P}_3 , такі, що $\bar{P}_2 = \bar{P}_1$, а $\bar{P}_3 = -\bar{P}_1$. Згідно першої аксіоми ці сили зрівноважені, а згідно другої аксіоми їх можна приєднати, не змінюючи кінематичного стану тіла.

Але цю систему трьох сил можна розглядати по іншому: як силу \bar{P}_2 , яка дорівнює силі \bar{P}_1 і перенесена з точки A в точку B , і зрівноважену систему двох сил (\bar{P}_1, \bar{P}_3) , яку можна відкинути.

III аксіома. Рівнодійна двох непаралельних сил, що прикладені до тіла в одній точці, зображується діагоналлю паралелограма, який побудований на цих силах, як на сторонах, і прикладена в точці їх перетину.

Ця аксіома носить назву закону паралелограма сил.

Припустимо, що до тіла (рис. 3.4) в точці A прикладені дві сили \bar{P}_1 та \bar{P}_2 , які розташовані під кутом α . Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку A діагональ, яка і буде рівнодійною $\bar{R}_{1,2}$ цих сил.

Таким чином, III аксіома статки дає можливість геометрично додати дві сили, що прикладені в одній точці:

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2. \quad (1.1)$$

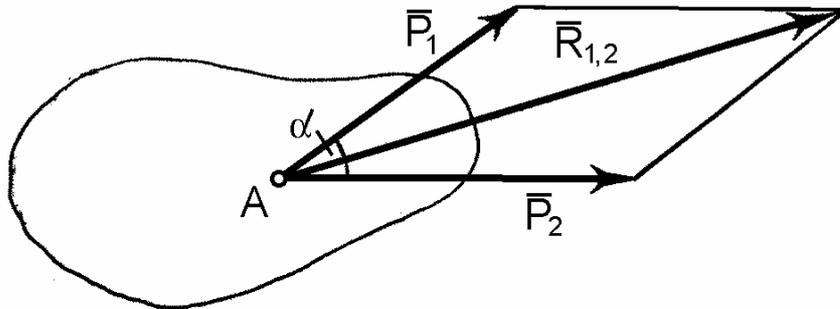


Рис. 3.4.

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто модуль рівнодійної, дорівнює:

$$R_{1,2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

Пропонується самостійно визначити рівнодійну, якщо сили прикладені в одній точці і розташовані під прямим кутом, а також, коли вони співпадають за напрямком або спрямовані у протилежні сторони.

IV аксіома. Два взаємодіючих тіла діють одне на одного з рівними за модулем, але протилежними за напрямком силами.

Ця аксіома носить назву закону дії та протидії.

Слід зауважити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, тому що вони прикладені до різних тіл.

V аксіома. Якщо деформоване (нетверде) тіло перебуває у стані рівноваги під дією системи сил, то цей стан не зміниться, якщо тіло затвердіє.

Ця аксіома має назву принципу затвердіння.

3.4. Основні типи в'язей та їхні реакції

У теоретичній механіці тверді тіла і матеріальні системи поділяються на вільні та невольні.

Тіло вважається вільним, якщо воно має можливість рухатись у просторі в будь-якому напрямку (або, якщо на рух системи не накладені обмеження).

Тіло, рух якого у просторі чимось обмежується, вважається невольним.

Тіла або перешкоди, які обмежують рух даного тіла, називаються в'язями. Якщо тіло невольне, то вважають, що на нього накладені в'язі.

Механічна дія в'язі на дане тіло має назву сили реакції в'язі (в подальшому "реакція").

У статичі розглядаються найпростіші в'язі у формі різних твердих та гнучких тіл.

Розглянемо основні типи в'язей як розрахункові моделі. Кожна з цих в'язей має свою назву, графічне зображення і свої реакції.

1. Ідеально гладенька поверхня або опора (рис. 3.5, а). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до поверхні або розташована вздовж нормалі. Гладенька площина накладає одну в'язь – неможливість рухатись по нормалі від поверхні, тому буде одна реакція, яка напрямлена проти напрямку втраченого переміщення за рахунок накладення в'язі.

Якщо поверхня є сферичною (рис. 3.5, а₁), то реакція \bar{R}_A проходить крізь центри сфер O і O_1 по нормалі n (перпендикулярно до дотичної τ).

2. Точкова опора (рис. 3.5, б). Якщо гладенька площина вироджується у лінію або точку, то реакція в'язей \bar{R}_A і \bar{R}_B буде спрямована по перпендикуляру до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в даній точці.

3. Шарнірно-нерухома опора або нерухомий шарнір (підшипник) (рис. 3.5, в). Реакція шарнірно-нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і заздалегідь невідома за напрямком. Невідомий вектор реакції розкладається на дві складових вздовж осей координат \bar{R}_x і \bar{R}_y . З другого боку, ця опора накладає дві в'язі – неможливість вертикального і горизонтального переміщень, тому і буде дві відповідні складові реакції у площині, яка перпендикулярна до осі шарніра.

4. Шарнірно-рухома опора або коток (рис. 3.5, г). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до площини, по якій рухається коток.

5. Жорстке закріплення (рис. 3.5, д). Реакція цієї в'язі повинна бути представлена двома складовими у вигляді сил \bar{R}_{Ax} і \bar{R}_{Ay} та реактивного моменту M_R . Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: неможливість вертикального і горизонтального лінійних переміщень та повороту у площині.

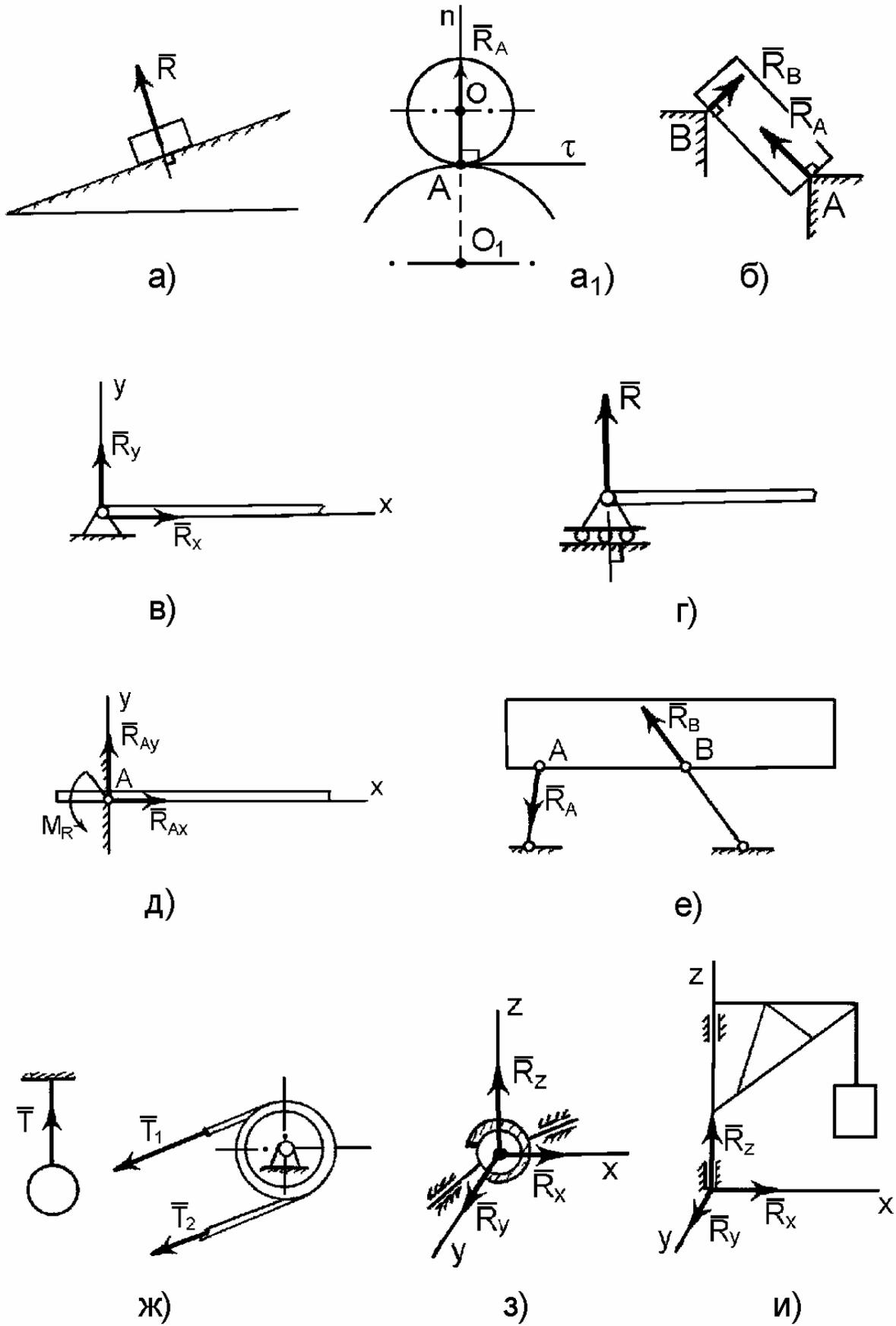


Рис. 3.5

6. Ідеальний стрижень, тобто невагомий тонкий стрижень, на кінцях якого встановлені циліндричні, точкові шарніри і який працює тільки на розтяг або на стиск (рис. 3.5, е). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована вздовж стрижня і прикладена у центрі шарніра.

7. Гнучка нитка або в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами, тобто невагомими, нерозтяжними нитками: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 3.5, ж). Реакція цієї в'язі \bar{T} напрямлена вздовж нитки і прикладена у точці закріплення A . У пасовій передачі натяги в її гілках \bar{T}_1 і \bar{T}_2 також вважаються реакціями гнучких в'язей.

8. Сферичний шарнір або його частковий випадок – підп'ятник (рис. 3.5, з, и). Реакція цієї в'язі повинна бути зображеною трьома складовими у вигляді реакцій \bar{R}_x , \bar{R}_y , \bar{R}_z , напрямлених вздовж осей просторової декартової системи координат xuz , з початком у центрі сферичного шарніра або підп'ятника.

У зв'язку з введенням поняття в'язей вводиться VI та VII аксиоми статистики, які носять назви аксиоми про звільнення від в'язей та аксиоми про накладання нових в'язей.

VI аксіома. Рівновага невірного матеріального тіла не порушиться, якщо відкинути в'язі, що накладені на нього, а замість них прикласти сили, які дорівнюють їх реакціям.

VII аксіома. Рівновага невірного матеріального тіла не порушиться, якщо на нього накласти нові в'язі.

3.5. Класифікація систем сил

По характеру розташування всі системи сил можна поділити на плоскі і просторові системи. Крім того, кожна з цих систем може бути поділена на систему збіжних сил, систему паралельних сил і систему довільних сил.

Зробимо такі визначення:

- система збіжних сил характеризується тим, що напрямки векторів усіх сил перетинаються в одній точці;
- у системі паралельних сил вектори сил паралельні;
- у системі довільних сил вектори розташовані як завгодно на площині або у просторі.

Таким чином, можна констатувати, що маємо шість різних систем сил, під дією яких тіло може перебувати в стані рівноваги або рухатись за певним законом.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає теоретична механіка? Що таке механічний рух?
2. Що вивчає статика? Задачі статички.
3. В чому полягає суть понять матеріальна точка та абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Назвіть три параметри, що характеризують силу?
5. Що таке система сил?
6. Яка сила є рівнодійною системи сил?
7. Як формулюються аксіоми статички?
8. В якому випадку матеріальне тіло буде вільним?
9. Що таке в'язь і що таке реакція в'язі?
10. Які основні типи в'язей зустрічаються при розв'язуванні задач статички і які напрями мають їх реакції?

4. ПЛОСКА СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

Якщо всі сили, що прикладені до тіла, розташовані в одній площині та лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву плоскої системи збіжних сил.

Покажемо на рисунку 4.1 довільне тіло, до якого прикладена плоска системи збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$. При цьому лінії дії всіх сил перетинаються в точці A .

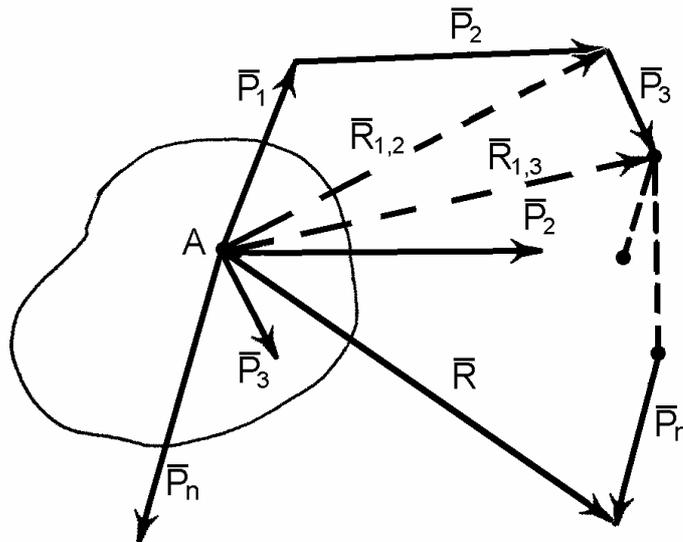


Рис. 4.1.

4.1. Визначення рівнодійної системи збіжних сил.

Геометричний спосіб додавання сил

Додати систему сил означає визначити їх рівнодійну. Спробуємо знайти рівнодійну для плоскої системи збіжних сил, яка зображена на рис. 4.1. Візьмемо (умовно) дві перші сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 і на підставі III аксіоми статки знайдемо їх рівнодійну $\bar{R}_{1,2}$, для чого на силах \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , як на сторонах, побудуємо паралелограм¹, діагональ якого, що прикладена у точці A , і є їх рівнодійною $\bar{R}_{1,2}$. Далі геометрично додамо дві наступні сили $\bar{R}_{1,2}$ і \bar{P}_3 і вже на цих силах як на сторонах побудуємо свій паралелограм, діагональ якого буде другою рівнодійною $\bar{R}_{1,3}$. Так же далі продовжуємо до останньої сили \bar{P}_n . Коли побудовано останній паралелограм і проведена остання діагональ, то вона і буде рівнодійною \bar{R} системи збіжних сил, яка показана на рисунку 4.1.

¹ Тут показаний не паралелограм, а його половина, тобто трикутник сил.

Якщо уважно придивитися до геометричної побудови паралелограмів, то можна побачити, що до кінця вектора сили \vec{P}_1 було приєднано вектор сили \vec{P}_2 (тобто в кінець вектора \vec{P}_1 перенесено паралельно вектор \vec{P}_2) і так далі до останньої сили \vec{P}_n .

Таким чином, геометричний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови силового многокутника. Він будується шляхом паралельного перенесення векторів сил у масштабі, коли початок наступної сили співпадає з кінцем попередньої сили. Тоді вектор рівнодійної з'єднає початок першої сили з кінцем останньої сили. Це можна записати так:

$$\vec{R}_{1,n} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \dots + \vec{P}_n. \quad (4.1)$$

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до многокутника, але конфігурація силового многокутника буде іншою.

4.2. Умова рівноваги плоскої системи збіжних сил у геометричній формі

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила, то про рівновагу цього тіла мови не може бути. Таким чином, якщо розглядати плоску систему збіжних сил, яка зведена до рівнодійної, то тіло не може бути у рівновазі.

Для рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна всіх сил дорівнювала нулю.

Рівнодійна такої системи сил буде дорівнювати нулю, якщо силовий многокутник буде замкненим, тобто якщо початок вектора першої сили буде співпадати з кінцем вектора останньої сили. Це є геометричною умовою рівноваги тіла.

4.3. Теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил

Якщо тіло під дією плоскої системи трьох непаралельних сил перебуває в рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Уявимо тіло (рис. 4.2), до якого в точках A, B, C прикладені сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, вектори яких розташовані в одній площині. Розглянемо спочатку дві сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 . На підставі наслідку з I і II аксіом статки вказані сили завжди можна перенести по лінії їх дії в одну точку, наприклад, у точку O .

Далі, якщо маємо в точці O дві прикладені сили, то на підставі III аксіоми статистики їх можна замінити однією силою, тобто рівнодійною $\bar{R}_{1,2}$.

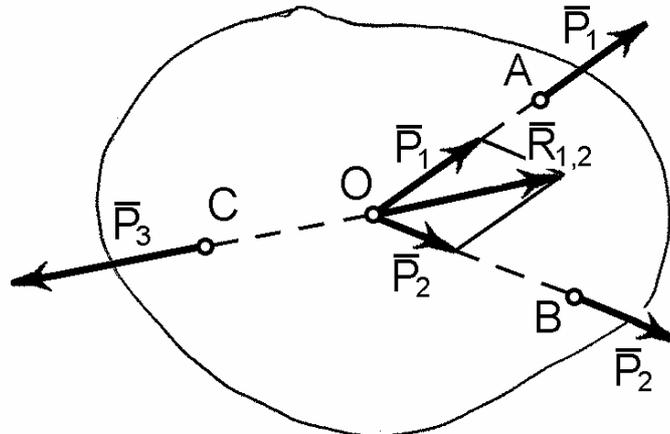


Рис. 4.2.

Побудуємо на рисунку 4.2 на вказаних векторах сил \bar{P}_1 та \bar{P}_2 паралелограм і покажемо рівнодійну $\bar{R}_{1,2}$. Тепер тіло перебуває під дією тільки двох сил \bar{P}_3 та $\bar{R}_{1,2}$ і воно буде в рівновазі лише тоді, коли вектори цих сил розташовані на одній прямій, тобто на прямій CO . Тоді і вектор сили \bar{P}_3 перетинає точку O . Теорема доведена.

4.4. Проекція сили на вісь та на площину

Уявимо силу \bar{P} , вектор якої довільно розташований у площині креслення (рис. 4.3). Виберемо у цій площині вісь, наприклад, вісь x . Необхідно спроектувати вказану силу \bar{P} на дану вісь x .

Позначимо спочатку кінці вектора сили \bar{P} літерами A і B і опустимо з них на вісь x перпендикуляри. Точки перетину перпендикулярів з віссю x (позначимо їх відповідними малими буквами a і b) утворили на осі x напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили \bar{P} на вісь x . За величиною цей відрізок дорівнює добутку модуля сили $|\bar{P}|$ на косинус кута, під яким вектор сили перетинає вісь:

$$P_x = P \cos \alpha. \quad (4.2)$$

За знаком проекція сили на вісь тоді буде додатня, коли кут α (кут перетину напрямку вектора сили або лінії дії сили з віссю) гострий. Цілком зрозуміло, якщо цей кут дорівнює 90° , то проекція сили \bar{P}_1 на вісь x дорівнюватиме нулю. Якщо кут α буде тупий, то проекція сили \bar{P}_2 на вісь x буде мати від'ємний знак. Значення модуля проекції в даному випадку буде

$$P_{2x} = P_2 \cos \alpha_2.$$

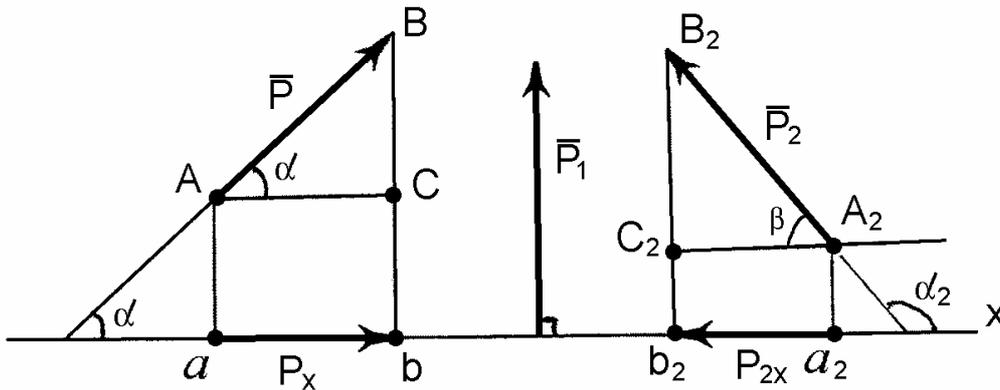


Рис. 4.3.

Але практично тут зручніше використовувати не тупий кут α_2 , а гострий кут β між вектором сили \bar{P}_2 і напрямком осі x . Знак проекції легко визначається зі схеми:

$$P_{2x} = -P_2 \cos \beta.$$

Таким чином, проекція сили на вісь – це напрямлений відрізок на осі, утворений між перпендикулярами, які опущені з кінців вектора сили на вісь, і який за величиною дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом вектора сили та віссю.

Спроекуємо тепер вектор сили на площину і осі координат.

Візьмемо силу \bar{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 4.4). Виберемо у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$, початок відліку якої (точка O) суміщений з точкою прикладання вектора сили \bar{P} . Спроекуємо вектор сили \bar{P} на площину xOy . Опустимо з точки A (кінець вектора сили) на вказану площину перпендикуляр, який перетинає її в точці a . На площині xOy утворено вектор \overline{Oa} , який і є проекцією \bar{P}_{xy} сили на площину. За модулем ця проекція дорівнює:

$$P_{xy} = P \cos \alpha, \quad (4.3)$$

де α – кут між вектором сили \bar{P} та площиною xOy .

Слід зауважити, що проекція вектора сили на площину є вектором, тому що площина не має базисних векторів або ортів.

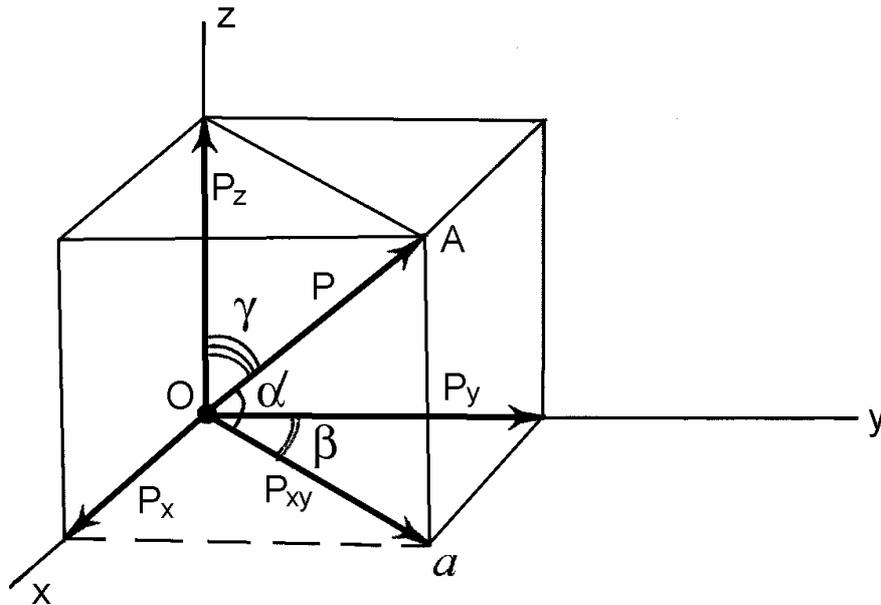


Рис. 4.4.

Якщо в площині xOy позначити кут β , то є можливість спроекувати силу \bar{P} на осі x та y , опускаючи з точки a на ці осі перпендикуляри і за відомим вже правилом отримати проекції вектора \bar{P}_{xy} на вказані осі:

$$P_x = P_{xy} \cos(90^\circ - \beta) = P \cos \alpha \sin \beta, \quad (4.4)$$

$$P_y = P_{xy} \cos \beta = P \cos \alpha \cos \beta. \quad (4.5)$$

У даному випадку крізь вісь z та вектор сили \bar{P} можна провести площину, тому є можливість відразу спроекувати силу на цю вісь за відомим правилом. Ця проекція буде дорівнювати:

$$P_z = P \cos \gamma, \quad (4.6)$$

де γ – кут між вектором сили \bar{P} та віссю z .

4.5. Визначення сили за її проекціями

Припустимо, що маємо в площині рисунка прямокутну декартову систему координат Oxy , задані дві проекції сили – P_x та P_y (рис. 4.5). Треба за даними проекціями обчислити модуль вектора самої сили \bar{P} , а також його напрямок.

На заданих проекціях, як на сторонах, будуємо прямокутник, діагональ якого, що проходить крізь точку перетину проекцій, і є шуканим вектором сили \bar{P} . Модуль сили \bar{P} можна визначити з наступного виразу:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}. \quad (4.7)$$

Кути між вектором сили \bar{P} та осями x та y можна визначити за допомогою напрямних косинусів:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(x, \hat{\bar{P}}) = \frac{P_x}{P}, \\ \cos \beta &= \cos(y, \hat{\bar{P}}) = \frac{P_y}{P}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Знаючи напрямні косинуси, через функції арккосинусів є можливість знайти величини самих кутів.

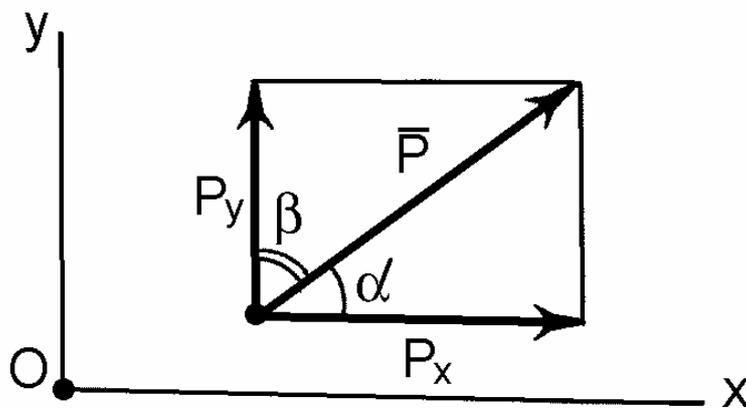


Рис. 4.5

Аналогічно для просторової системи сил (рис. 4.4) можна побудувати на проекціях сил як на сторонах паралелепіпед, а модуль сили \bar{P} визначити так:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}.$$

Напрямок вектора цієї сили також визначається через напрямні косинуси його кутів з відповідними осями координат x , y і z :

$$\begin{aligned} \cos(x, \hat{\bar{P}}) &= \frac{P_x}{P}, \\ \cos(y, \hat{\bar{P}}) &= \frac{P_y}{P}, \\ \cos(z, \hat{\bar{P}}) &= \frac{P_z}{P}. \end{aligned}$$

Через відповідні функції арккосинусів визначають величини кутів.

4.6. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь

Проекція вектора рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій векторів складових сил на ту ж саму вісь.

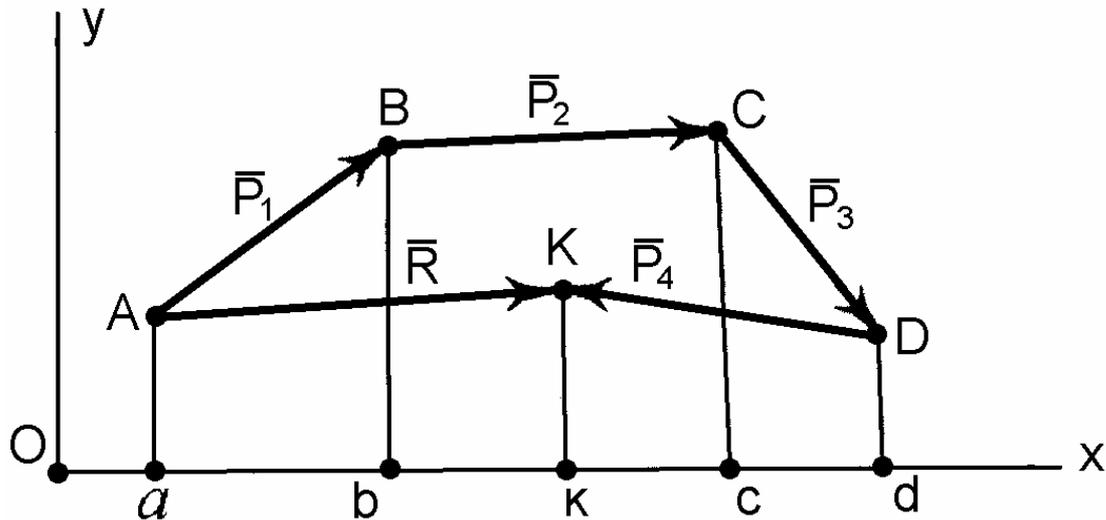


Рис. 4.6.

Доведення. Маємо систему сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$, яка зведена до рівнодійної \bar{R} за допомогою силового многокутника (рис. 4.6). Введемо на площині прямокутну декартову систему координат Oxy і спроекуємо на вісь x всі сили. Для цього позначимо кінці векторів всіх сил літерами – A, B, C, D, K і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь x . Точки перетину перпендикулярів з віссю, які позначені відповідними малими літерами – a, b, c, d, k , утворили на осі x напрямлені відрізки, які і є проєкціями всіх сил на цю вісь. Кожна проєкція, відповідно, дорівнює

$$|ab| = P_{1x}; \quad |bc| = P_{2x}; \quad |cd| = P_{3x}; \quad |-dk| = P_{4x}. \quad (4.9)$$

Додамо алгебраїчно всі проєкції і підрахуємо, чому ця сума дорівнюватиме:

$$ab + bc + cd - dk = ak. \quad (4.10)$$

Але відрізок ak і є проєкцією рівнодійної сили \bar{R} на вісь x . Поширюючи цю суму на n сил, можна записати:

$$R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx}. \quad (4.11)$$

Теорема доведена.

4.7. Аналітичний спосіб додавання плоскої системи збіжних сил

На підставі теореми про проекцію рівнодійної сили на вісь, маємо:

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}. \quad (4.12)$$

Аналогічно проекція рівнодійної сили на вісь y буде дорівнювати:

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}. \quad (4.13)$$

Модуль рівнодійної дорівнює:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (4.14)$$

Кути між вектором рівнодійної \bar{R} та осями координат x та y визначимо через напрямні косинуси кутів між відповідною віссю та рівнодійною:

$$\begin{aligned} \cos(x, \bar{R}) &= \frac{R_x}{R}, \\ \cos(y, \bar{R}) &= \frac{R_y}{R}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Знаючи напрямні косинуси, через функції арккосинусів є можливість знайти величини відповідних кутів.

4.8. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил в аналітичній формі

Плоску систему збіжних сил можна замінити однією силою, яка носить назву рівнодійної.

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна системи дорівнювала нулю. А якщо рівнодійна дорівнює нулю, то і її проекції на осі x і y теж повинні дорівнювати нулю. Оскільки проекції рівнодійної дорівнюють алгебраїчним сумах проекцій складових сил, то, остаточно, матимемо умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією плоскої системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на дві осі координат дорівнювали нулю.

Питання для самоконтролю

1. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
2. Для чого і яким чином будується силовий багатокутник?
3. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній формі?
4. Як формулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил?
5. Як визначаються проекції сили на вісь і площину?
6. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
7. Як визначити силу за її проекціями?
8. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
9. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
10. Які умови і які рівняння рівноваги системи збіжних сил?

5. ТЕОРІЯ МОМЕНТІВ І ПАР СИЛ

5.1. Паралельні сили. Додавання двох паралельних сил

Якщо лінії дії сил паралельні, то така система сил носить назву "система паралельних сил".

Розглянемо питання про додавання сил, лінії дії яких паралельні. При цьому тут можуть бути два випадки: якщо паралельні сили мають однаковий напрямок та якщо паралельні сили протилежно напрямлені.

1. Розглянемо випадок, якщо дві паралельні сили мають однаковий напрямок.

Маємо тіло, до якого прикладені дві паралельні сили: \bar{P}_1 – в точці A і \bar{P}_2 – в точці B (рис. 5.1). Напрямок сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 однаковий. Додати сили – це означає визначити їх рівнодійну.

Спочатку з'єднаємо точки A і B прямою. Далі прикладемо в точках A і B зрівноважену систему сил \bar{P}_3 і \bar{P}_4 . Причому $\bar{P}_3 = -\bar{P}_4$. Вектори сил \bar{P}_3 і \bar{P}_4 розміщені на прямій AB . Друга аксіома статки дозволяє це зробити. Внаслідок цього в точках A і B отримані по дві сили (в точці A – \bar{P}_1 і \bar{P}_3 , а в точці B – \bar{P}_2 і \bar{P}_4), які можна додати (завдяки третій аксіомі статки) і в кожній точці отримати рівнодійні сили – $\bar{R}_{1,3}$ і $\bar{R}_{2,4}$.

Перенесемо точки прикладення рівнодійних $\bar{R}_{1,3}$ і $\bar{R}_{2,4}$ вздовж ліній їх дії в точку перетину D . Далі розкладемо кожну рівнодійну на складові: $\bar{R}_{1,3}$ розкладається на \bar{P}_1 і \bar{P}_3 , а $\bar{R}_{2,4}$ – на \bar{P}_2 і \bar{P}_4 . За вже відомою другою аксіомою статки прикладені в точці D сили \bar{P}_3 і \bar{P}_4 є зрівноваженою системою сил, яку можна відкинути. Залишаються прикладені в точці D дві сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , напрямок яких співпадає. Додамо їх і отримаємо рівнодійну \bar{R} , модуль якої буде дорівнювати:

$$R = P_1 + P_2. \quad (5.1)$$

Перенесемо вектор рівнодійної сили \bar{R} з точки D в точку C , яка розташована на прямій AB . Розглянемо трикутники, які є на рисунку 5.1. Позначимо літерами кінці векторів сил \bar{P}_1 – L , \bar{P}_2 – M , $\bar{R}_{1,3}$ – K , $\bar{R}_{2,4}$ – N . Як бачимо з рисунку 5.1, трикутник $\triangle ADC$ подібний трикутнику $\triangle AKL$ і $\triangle BCD$ подібний $\triangle BMN$. Для подібних трикутників можемо скласти такі дві

пропорції $\frac{AC}{KL} = \frac{DC}{AL}$ і $\frac{BC}{MN} = \frac{DC}{BM}$. Прирівняємо їх, оскільки в них є спільний член DC , і тоді отримаємо:

$$DC = \frac{AC \cdot AL}{KL} = \frac{BC \cdot BM}{MN}.$$

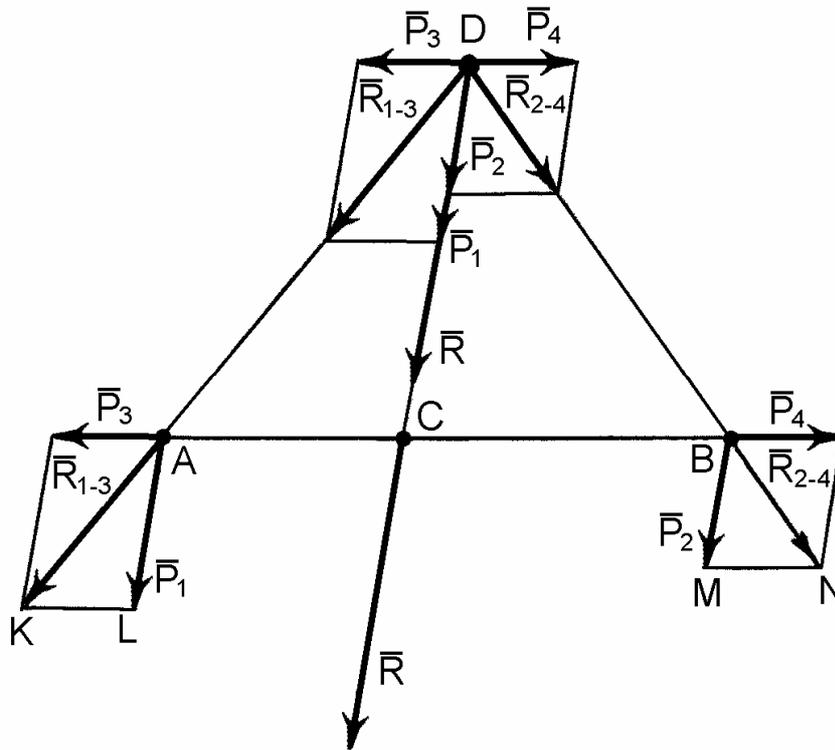


Рис. 5.1.

Покажемо позначені літерами (AL, BM, KL, MN) в цьому виразі сили (P_1, P_2, P_3, P_4). Будемо мати:

$$\frac{AC \cdot P_1}{P_3} = \frac{BC \cdot P_2}{P_4}.$$

Якщо скоротити множники P_3 і P_4 ($P_3 = P_4$) і перегрупувати, то отримаємо таке співвідношення:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (5.2)$$

Таким чином, на підставі отриманих виразів (5.1) і (5.2), остаточно можна сформулювати наступну теорему.

Рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в один бік, є сумою цих сил, паралельна цим силам і спрямована в той же бік, точка її прикладення ділить внутрішнім чином відрізок, що з'єднує сили, на частини, які є обернено пропорційні силам.

2. Далі розглянемо випадок, коли є дві паралельні сили, але напрямки яких протилежні. Як в цьому разі визначити їх рівнодійну?

Уявимо, що до довільного тіла в точках A і B прикладені дві паралельні сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , які мають протилежний напрямок (рис. 5.2). Вважаємо, що модулі сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 не однакові. Далі буде зрозуміло, чому так приймається. Як і в попередньому випадку, з'єднаємо точки A і B прямою, приєднаємо в точках \hat{A} і \hat{A} зрівноважену систему сил $\vec{P}_3 = -\vec{P}_4$, вектори якої розташовані на прямій AB і мають протилежний напрямок. Додамо сили, які прикладені в точках A і B , і отримаємо дві рівнодійні $\vec{R}_{1,3}$ і $\vec{R}_{2,4}$. Як бачимо, ці рівнодійні мають напрямки різні, але вони не паралельні і лінії їх дії перетинаються, в даному випадку попереду тіла в точці D . Як і в попередньому випадку, перенесемо рівнодійні $\vec{R}_{1,3}$ і $\vec{R}_{2,4}$ по лініях їх дії в точку D і розкладемо кожен на складові. Зрівноважену систему сил \vec{P}_3 і \vec{P}_4 відкидаємо і остаточно маємо в точці D дві сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , які лежать на одній прямій і мають протилежний напрямок. Ці сили можна геометрично додати, отримавши їх рівнодійну. В даному випадку це буде різниця сил, модуль якої дорівнює:

$$R = P_1 - P_2. \quad (5.3)$$

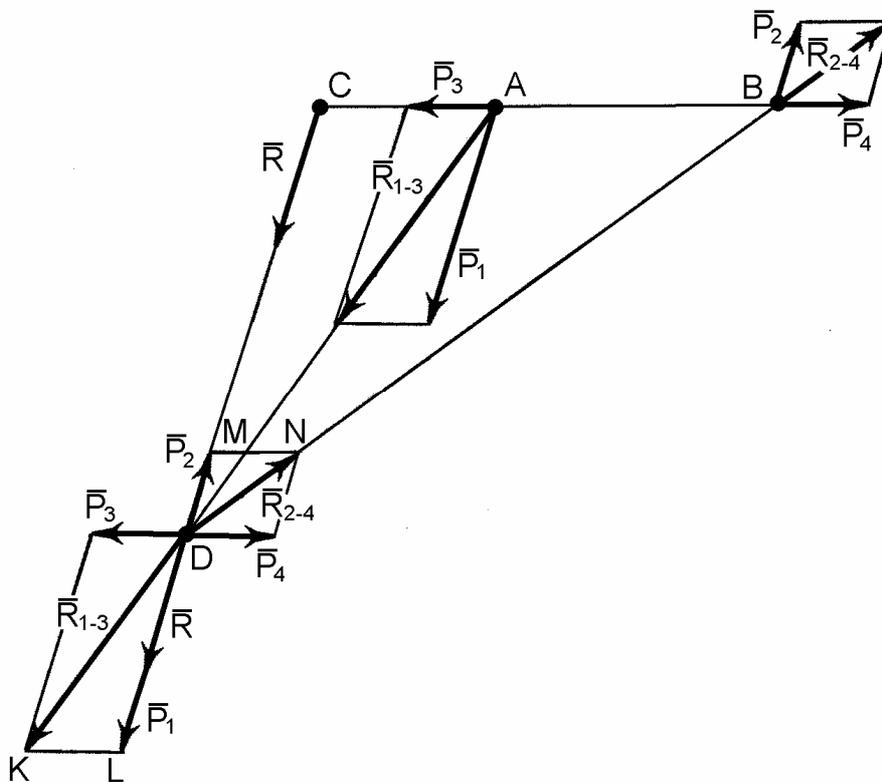


Рис. 5.2

Напрямок цієї рівнодійної – в бік більшої сили, тобто, в бік сили P_1 .

Перенесемо рівнодійну R з точки D вздовж лінії її дії в точку C , яка розташована на прямій AB . В даному випадку точка C розміщена за межами відрізка AB , тобто за точкою A , де була прикладена більша сила \bar{P}_1 .

Знайдемо місце розташування точки C . Як і в попередньому випадку, розглянемо трикутники. Позначимо літерами кінці векторів сил: $\bar{P}_1 - L$, $\bar{P}_2 - M$, $\bar{R}_{1,3} - K$, $\bar{R}_{2,4} - N$. Як бачимо з рисунку 5.3, $\triangle BCD$ є подібним $\triangle DMN$, а $\triangle ACD$ – подібний $\triangle DLK$. Для подібних трикутників складемо такі дві пропорції:

$$\frac{BC}{MN} = \frac{CD}{DM},$$

і

$$\frac{AC}{KL} = \frac{CD}{DL}.$$

Оскільки кожна пропорція містить множник CD , то прирівняємо їх:

$$CD = \frac{DM \cdot BC}{MN} = \frac{DL \cdot AC}{KL}.$$

Покажемо, як і в попередньому випадку, сили, які в цьому виразі позначені літерами. Матимемо:

$$\frac{P_2 \cdot BC}{P_4} = \frac{P_1 \cdot AC}{P_3}.$$

Скоротимо далі дану рівність на P_4, P_3 ($P_3 = P_4$), отримаємо таке співвідношення:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (5.4)$$

Таким чином, на підставі отриманих виразів (5.3) і (5.4), остаточно можна записати так.

Рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані у протилежні сторони, дорівнює різниці цих сил і напрямлена у бік більшої сили; точка прикладення рівнодійної сили ділить зовнішнім чином відстань між точками прикладення заданих сил на відрізки, які є обернено пропорційними цим силам.

5.2. Момент сили відносно центра (точки).

Алгебраїчна величина моменту сили

Обертальний ефект сили характеризується її моментом відносно центра (точки), а також і відносно осі (останній буде далі).

Розглянемо довільне тіло (рис. 5.3), яке може повертатися навколо точки O (точніше навколо осі, яка перпендикулярна площині рисунка і проходить крізь точку O). Прикладемо в інших точках тіла A , B , C вектори сил \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 і визначимо спочатку, чи зможуть вони повертати тіло навколо точки O .

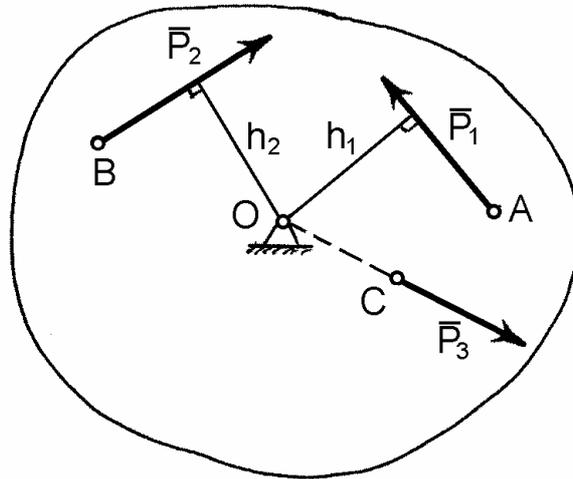


Рис. 5.3.

Як бачимо з рисунка, сила P_1 , яка прикладена у точці A , може повернути тіло навколо точки O проти ходу стрілки годинника. Сила \vec{P}_2 – за ходом стрілки годинника. Проте сила \vec{P}_3 не може повертати тіло навколо точки O , оскільки лінія дії сили \vec{P}_3 перетинає дану точку. Таким чином сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 створюють обертальний ефект (момент) відносно точки O , а сила \vec{P}_3 – ні.

Отже, можна стверджувати, що момент сили – це механічна величина, що характеризує зовнішню дію сили на тіло (або навіть на систему тіл) і визначає можливість обертання тіла навколо точки.

Алгебраїчним моментом сили відносно центра (точки) називається взятий з відповідним знаком добуток сили на плече. Плече сили відносно центра – це найкоротша відстань (перпендикуляр) між даним центром і лінією дії сили.

Момент вважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно даної точки проти годинникової стрілки і від'ємним, якщо – за годинниковою стрілкою.

Момент сили \vec{P} відносно точки O позначається як $m_o(\vec{P})$.

Покажемо на рисунку 5.3 плечі сил, які створюють моменти відносно точки O , і визначимо алгебраїчні величини моментів цих сил:

$$m_o(\vec{P}_1) = P_1 \cdot h_1, \quad (5.5)$$

$$m_o(\bar{P}_2) = -P_2 \cdot h_2, \quad (5.6)$$

$$m_o(\bar{P}_3) = P_3 \cdot 0 = 0. \quad (5.7)$$

Таким чином, момент сили характеризується трьома параметрами: модулем, площиною дії і напрямом повороту.

5.3. Момент сили відносно центра як вектор

Розглянемо силу \bar{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 5.4). Визначимо момент сили \bar{P} відносно довільної точки O , для чого опустимо з точки O до вектора сили \bar{P} перпендикуляр, це буде плече h . Тоді алгебраїчна величина моменту сили \bar{P} відносно точки O дорівнює:

$$m_o(P) = Ph. \quad (5.8)$$

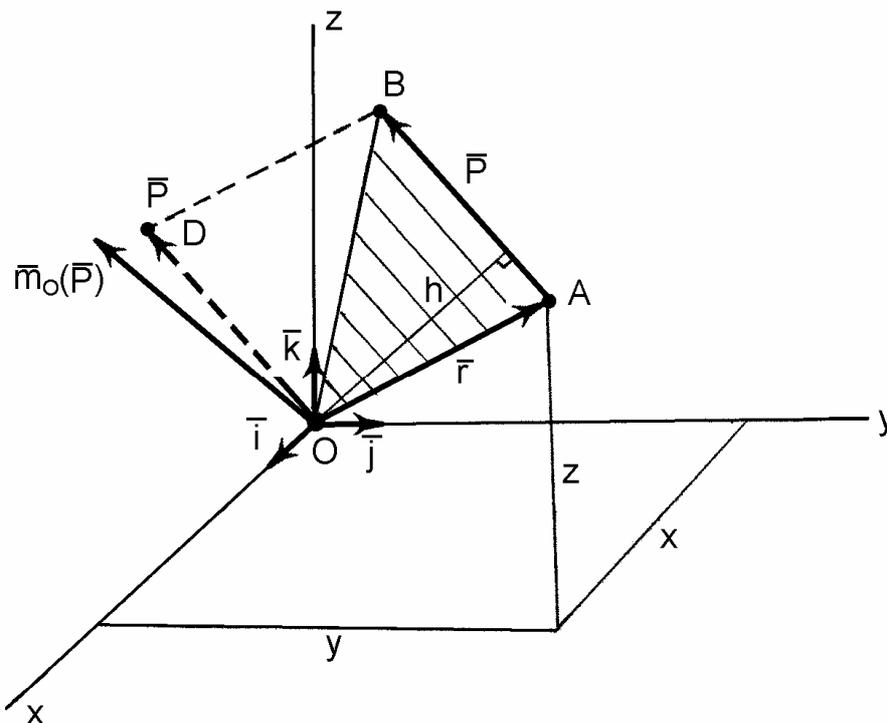


Рис. 5.4.

Позначимо літерами A і B кінці вектора сили \bar{P} і з'єднаємо їх з точкою O . Основою трикутника AOB є вектор сили \bar{P} , а вершина розміщена в точці O . Плече h є висотою трикутника AOB . Тоді момент сили \bar{P} відносно точки O є подвійною площею трикутника AOB , тобто

$$m_o(\bar{P}) = 2S_{\Delta AOB}. \quad (5.9)$$

Далі проведемо через точку O просторову декартову систему координат $Oxyz$ з ортами \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} . Вважаємо, що відстань OA є радіусом-вектором \bar{r} точки A прикладення вектора сили \bar{P} .

Оскільки момент сили \bar{P} відносно точки O , як ми визначили, є подвійною площею трикутника, то побудуємо паралелограм $OABD$. Фактично вектор сили \bar{P} є перенесеним паралельно самому собі у точку O . Тепер можна бачити, що в точці O прикладені два вектори \bar{r} і \bar{P} , на яких і побудовано паралелограм. А це, як відомо, є векторний добуток двох векторів $\bar{r} \times \bar{P}$. Таким чином, момент сили відносно точки $\bar{m}_o(\bar{P})$ є підсумковим вектором добутку двох векторів \bar{r} і \bar{P} , тобто $\bar{m}_o(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}$.

Остаточно сформулюємо визначення.

Момент сили відносно центра O , як підсумковий вектор добутку $\bar{r} \times \bar{P}$, проходить крізь точку O перпендикулярно площі трикутника OAB , і спрямований у той бік, з якого можна бачити поворот тіла під дією сили \bar{P} відносно точки O проти напрямку руху годинникової стрілки. За модулем він дорівнює подвійній площі трикутника, який утворює вектор сили \bar{P} і точка O .

Таким чином, момент сили відносно точки як вектор повністю визначає обертальний ефект сили, яка прикладена до тіла: лінія його дії визначає площину обертання, його напрямок визначає напрямок обертання, а довжина у певному масштабі визначає модуль моменту.

Визначимо аналітично значення моменту сили відносно точки.

У прийнятій системі координат вектори \bar{r} і \bar{P} можна виразити через відповідні проекції на осі. А саме:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (5.10)$$

$$\bar{P} = P_x\bar{i} + P_y\bar{j} + P_z\bar{k}, \quad (5.11)$$

де x, y, z – проекції радіуса – вектора \bar{r} на осі координат; P_x, P_y, P_z – проекції вектора сили \bar{P} на відповідні осі; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – відповідні орти осей координат.

Оскільки

$$\bar{m}_o(P) = \bar{r} \times \bar{P}, \quad (5.12)$$

то, як відомо з векторної алгебри, векторний добуток можна записати у вигляді визначника третього порядку через проекції векторів на осі координат та орти, а саме:

$$\bar{m}_o(P) = \bar{r} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}.$$

Розкривши даний визначник за елементами першого рядка, отримаємо:

$$\bar{m}_o(\bar{P}) = (yP_z - zP_y)\bar{i} + (zP_x - xP_z)\bar{j} + (xP_y - yP_x)\bar{k}. \quad (5.13)$$

Коефіцієнти при одиничних векторах у виразі (5.13) є проєкціями векторного моменту сили відносно точки на осі координат x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} [m_o(\bar{P})]_x &= yP_z - zP_y, \\ [m_o(\bar{P})]_y &= zP_x - xP_z, \\ [m_o(\bar{P})]_z &= xP_y - yP_x. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

5.4. Пара сил. Момент пари сил

Пара сил – це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил, прикладених до одного тіла.

Розглянемо довільне тіло (рис. 5.5), до якого в точках A і B прикладені сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 . Причому $P_1 = P_2$ і $\bar{P}_1 \parallel \bar{P}_2$, тобто до тіла прикладена пара сил.

Площина, в якій розташовані сили пари, має назву площини дії пари. Пара сил не має рівнодійної сили, тому вона не може зрівноважитись однією силою, і характеризується моментом, що викликає обертання тіла під дією сил пари у площині дії пари.

Моментом пари називається взятий з відповідним знаком добуток однієї із сил пари на плече пари. Плече пари – це найкоротша відстань (по перпендикуляру) між лініями дії сил, які складають пару.

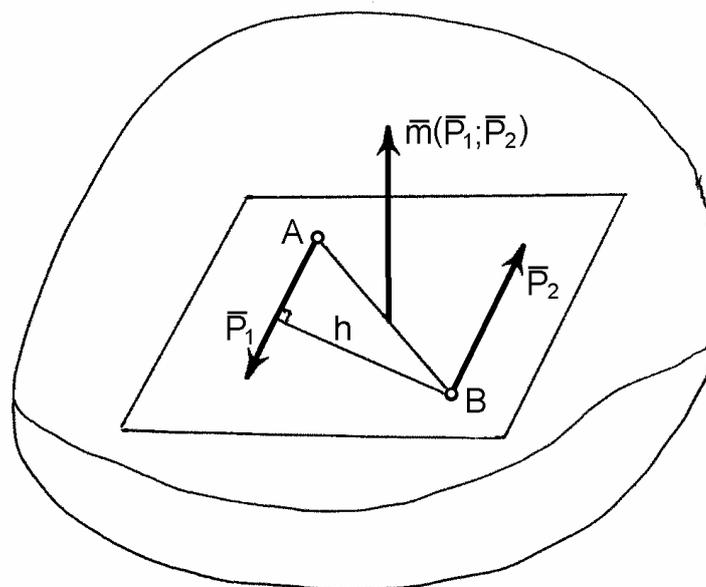


Рис. 5.5.

Момент пари вважається додатним, якщо вона намагається обертати тіло проти напрямку руху годинникової стрілки і, навпаки, – від'ємним, якщо вона намагається обертати тіло за годинниковою стрілкою.

Момент пари за модулем позначається $m(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$. Визначимо момент пари сил, яка зображена на рисунку 5.5:

$$m(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = P_1 h. \quad (5.15)$$

Момент пари сил можна уявити вектором. Цей вектор є перпендикулярним до площини дії пари і напрямлений у той бік, з якого можна побачити обертання тіла під дією пари проти годинникової стрілки (правило свердлика). Момент $\vec{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ як вектор показаний на рисунку 5.5. Проте, момент пари сил як вектор не має фіксованої точки прикладення, оскільки він є вільним вектором.

5.5. Властивості пари сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил будуть еквівалентними, якщо при інших рівних умовах їхня дія на тіло однакова. Оскільки пара сил характеризується моментом пари, то пари сил, що лежать в одній площині будуть еквівалентні, якщо вони мають однакові моменти (однакові за величиною та напрямком).

З цих положень випливають основні властивості (умови еквівалентності) пар сил:

- не змінюючи дії пари сил на тіло, пару сил можна повертати та переносити, як завгодно, в площині її дії;
- дія пари на тіло не змінюється, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площа дії залишалися незмінними;
- якщо на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати. Якщо всі пари даної системи пар розташовані в одній площині, то момент підсумкової пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар

$$M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (5.16)$$

5.6. Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил, що розташовані в одній площині

Якщо на тіло діє система пар сил з моментами m_1, m_2, \dots, m_n і момент підсумкової пари M , як вже відомо, буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів складових пар, то для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб

момент підсумкової пари дорівнював нулю. В такому разі і алгебраїчна сума моментів складових пар теж повинна дорівнювати нулю. Аналітично це буде мати такий вигляд

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = 0. \quad (5.17)$$

Питання для самоконтролю

1. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладення?
2. Чому дорівнює рівнодійна двох протилежно спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладення?
3. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
4. Куди спрямований вектор моменту сили відносно точки?
5. Що таке пара сил, або просто пара?
6. Які властивості має пара сил у площині?
7. Як визначити момент пари? Куди спрямований момент пари як вектор?
8. Яка умова рівноваги системи пар у площині?
9. Які дві пари є еквівалентними?

6. ПЛОСКА СИСТЕМА ДОВІЛЬНИХ СИЛ

6.1. Теорема про паралельне перенесення сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла, довільно розташовані в одній площині, то така система сил є плоскою системою довільних сил.

Розглянемо теорему про паралельне перенесення сили, що прикладена до тіла, яку можна вважати лемою. Візьмемо довільне тіло, до якого в точці A прикладена сила \bar{P}_1 з лінією дії MN (рис. 6.1, а). Виберемо на тілі другу точку B і проведемо крізь неї пряму, паралельну прямій MN . Прикладемо на цій прямій у точці B зрівноважену систему сил $\bar{P}_2 = -\bar{P}_3$, модулі усіх трьох сил виберемо однаковими, тобто:

$$P_1 = P_2 = P_3. \quad (6.1)$$

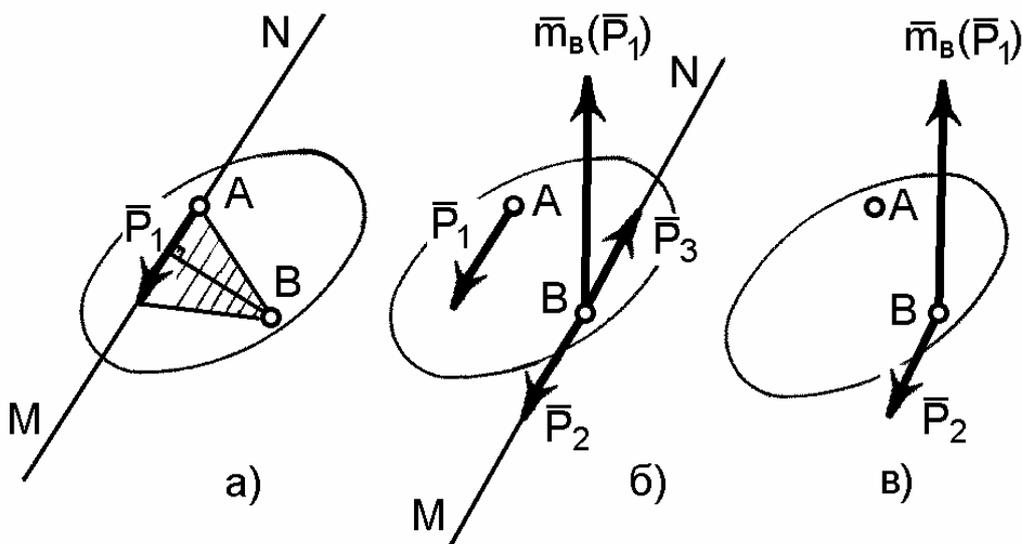


Рис. 6.1.

Тепер, як бачимо з рисунку 6.1, б, сили \bar{P}_1 і \bar{P}_3 можна об'єднати у пару сил ($P_1 = P_3$, $\bar{P}_1 \parallel \bar{P}_3$) і її можна замінити моментом $\bar{m}(\bar{P}_1, \bar{P}_3)$ пари. Модуль моменту цієї пари буде дорівнювати моменту даної сили \bar{P}_1 відносно точки B :

$$m(\bar{P}_1, \bar{P}_3) = P_1 \cdot h = m_B(\bar{P}_1). \quad (6.2)$$

Отже, остаточно маємо силу \bar{P}_1 , яка перенесена паралельно в точку B (сила $\bar{P}_2 = \bar{P}_1$) і, так звану, “приєднану” пару (\bar{P}_1, \bar{P}_3) , момент якої дорівнює моменту сили \bar{P}_1 , що переноситься, відносно точки B (рис. 6.1, в).

Таким чином, теорему можна сформулювати так: *при паралельному переносі сили в іншу точку рівновага тіла не зміниться, якщо додати, так звану, “приєднану” або компенсуючу пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно точки, в яку переноситься сила.*

6.2. Зведення плоскої системи довільних сил до даного центра

Уявимо довільне тіло, що знаходиться під дією системи сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, лінії дії яких розміщені у площині рисунку і розташовані довільно (рис. 6.2, а). Виберемо на тілі довільну точку O , як центр зведення. Перенесемо у центр зведення всі сили, які діють на тіло, паралельно самим собі (якщо лінія дії сили перетинає точку O , то ця сила просто переноситься по лінії дії у центр зведення).

Розпочнемо з сили \bar{P}_1 . Сила переноситься паралельно самій собі у точку O , але при цьому до тіла додається момент “приєднаної” пари сил, який дорівнює моменту сили \bar{P}_1 відносно точки O :

$$m_1 = P_1 h_1 = m_o(\bar{P}_1). \quad (6.3)$$

Тепер маємо силу \bar{P}_1 , яка прикладена до тіла у центрі зведення O , та приєднану до тіла пару сил з моментом m_1 .

Подібно вчинимо і з рештою сил $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$. Всі вони переносяться паралельно самим собі у центр зведення O і при цьому до тіла додаються “приєднані” пари сил

$$\begin{aligned} m_2 &= P_2 h_2 = m_o(\bar{P}_2), \\ m_3 &= P_3 h_3 = m_o(\bar{P}_3), \\ &\dots\dots\dots, \\ m_n &= P_n h_n = m_o(\bar{P}_n). \end{aligned} \quad (6.4)$$

В результаті таких дій до тіла в точці O прикладена плоска система збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ і на тіло діє система пар сил з моментами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, величини яких визначаються залежностями (6.3) і (6.4).

Систему збіжних сил у точці O можна замінити однією силою \bar{R} , яка називається головним вектором плоскої системи довільних сил. Для цього необхідно геометрично додати систему збіжних сил, прикладених у центрі зведення O , тобто побудувати силовий багатокутник (рис. 6.2, б):

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (6.5)$$

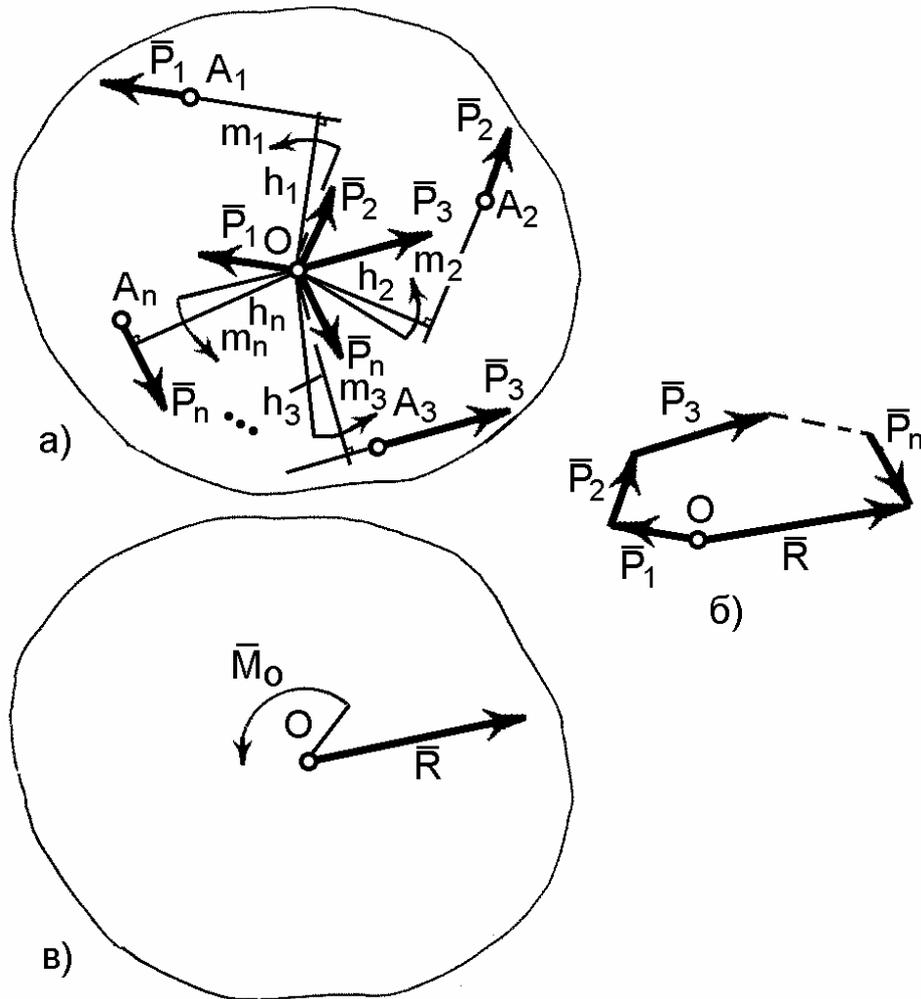


Рис. 6.2.

Систему пар сил, яка тепер прикладена до тіла, також можна додати, отримавши головний момент плоскої системи довільних сил, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_o(\vec{P}_k). \quad (6.6)$$

Таким чином, плоска система довільних сил може бути зведена до двох силових факторів: однієї сили \vec{R} – головного вектора системи, і однієї пари сил з моментом M – головного моменту системи (рис. 6.2, в).

Головний вектор системи дорівнює геометричній сумі векторів складових сил, а головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно центра зведення.

Головний вектор \vec{R} і головний момент M плоскої системи довільних сил мають деякі особливості.

Так, величина головного вектора \bar{R} не залежить від положення центра зведення, а величина головного моменту M залежить від зміни центра зведення. А якщо головний вектор \bar{R} дорівнює нулю, то головний момент M також буде незалежним від вибору центра зведення. Якщо ж головний момент M дорівнює нулю, то головний вектор \bar{R} буде звичайною рівнодійною плоскої системи сил.

Визначимо аналітично головний вектор та головний момент плоскої системи довільних сил. Для головного вектора \bar{R} спочатку визначимо його проєкції на осі плоскої декартової системи координат (відповідно до теореми про проєкцію рівнодійної сили на вісь). А саме:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ R_y &= \sum_{k=1}^n P_{ky}, \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

де P_{kx} , P_{ky} – проєкції k -тої сили системи на відповідні осі координат.

Модуль головного вектора R буде дорівнювати:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (6.8)$$

Головний момент M визначається алгебраїчним додаванням моментів складових сил відносно центра зведення O , а саме:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (6.9)$$

6.2.1. Деякі випадки зведення плоскої системи довільних сил до даного центра

Сформулюємо окремі випадки, які можуть бути при зведенні плоскої системи довільних сил до даного центра.

1. Головний вектор $\bar{R} = 0$, а головний момент $M \neq 0$. У цьому випадку величина головного моменту M не залежить від вибору центра зведення;
2. Головний момент $M = 0$, а головний вектор $\bar{R} \neq 0$. У даному випадку головний вектор \bar{R} є рівнодійною силою системи сил.

6.3. Теорема Варіньона про момент рівнодійної системи збіжних сил

Момент рівнодійної системи збіжних сил відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того ж центра.

Доведення. Маємо довільне тіло, до якого в точці A прикладена система збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, яка зведена до рівнодійної сили \bar{R} (рис. 6.3). Виберемо довільну точку O (центр) і визначимо відносно неї моменти сил. Починаємо з сили \bar{P}_1 . Знайдемо її момент відносно точки O . Спочатку з'єднаємо прямими лініями початок і кінець вектора сили \bar{P}_1 з точкою O . Проведемо крізь точку O пряму, яка перпендикулярна прямій OA , і будемо вважати цю пряму віссю x (тобто задамо її напрямком). Момент сили \bar{P}_1 відносно точки O є подвійною площею трикутника OAB (кінець вектора сили \bar{P}_1 позначимо B), тобто:

$$m_o(\bar{P}_1) = 2S\Delta OAB. \quad (6.10)$$

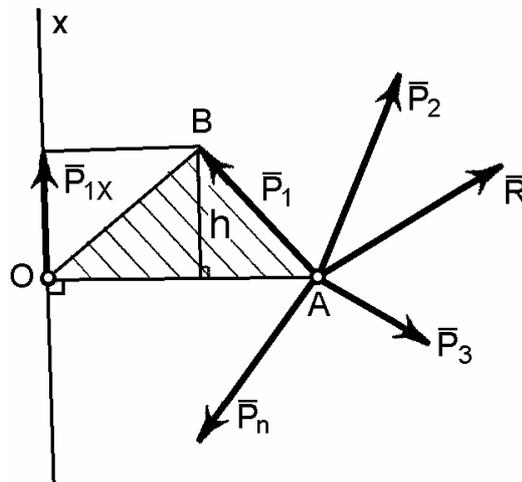


Рис. 6.3.

Визначимо площу цього трикутника. Як відомо, це є половина добутку основи (у нашому випадку це сторона OA) на висоту трикутника h . А висота h цього трикутника у даному випадку дорівнює проекції вектора сили \bar{P}_1 на вісь x – ($h = P_{1x}$). Таким чином, момент сили \bar{P}_1 відносно точки O дорівнює:

$$m_o(\bar{P}_1) = 2 \left(\frac{1}{2} OA \cdot h \right) = OA \cdot P_{1x}. \quad (6.11)$$

Аналогічно обчислимо моменти інших сил заданої системи:

$$\begin{aligned} m_o(\bar{P}_2) &= OA \cdot P_{2x}, \\ m_o(\bar{P}_3) &= OA \cdot P_{3x}, \\ &\dots\dots\dots \\ m_o(\bar{P}_n) &= OA \cdot P_{nx}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тепер перейдемо до рівнодійної \bar{R} системи сил і таким же чином визначимо її момент відносно точки O . Він буде дорівнювати:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x, \quad (6.13)$$

де R_x – проекція рівнодійної сили \bar{R} на вісь x .

Згідно теореми про проекцію рівнодійної сили на вісь, яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю вісь, можна записати

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x = OA (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx}). \quad (6.14)$$

Розкриваючи дужки, матимемо:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot P_{1x} + OA \cdot P_{2x} + OA \cdot P_{3x} + \dots + OA \cdot P_{nx}. \quad (6.15)$$

Права частина даного виразу містить моменти складових сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ відносно точки O . Остаточо отримаємо:

$$m_o(\bar{R}) = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (6.16)$$

Таким чином, з останнього виразу видно, що момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того ж центра.

Теорема доведена.

6.4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил

Як доведено, плоска система довільних сил завжди може бути зведена до однієї сили, яка має назву головного вектора системи, і однієї пари – головного моменту системи.

Тоді для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор \bar{R} і головний її момент M дорівнювали нулю.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = 0, \\ M = 0, \end{array} \right\} \quad (6.17)$$

або через проекції головного вектора \bar{R} на осі плоскої системи координат:

$$\left. \begin{array}{l} R_x = 0, \\ R_y = 0, \\ M = 0, \end{array} \right\} \quad (6.18)$$

остаточно отримуємо такі умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Таким чином, для рівноваги тіла, що перебуває під дією плоскої системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на дві осі координат і сума моментів всіх сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

Існують дві інші форми умов рівноваги плоскої системи довільних сил. А саме:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Але на дану систему рівнянь рівноваги накладається обмеження: пряма, яка може з'єднати точки A і B , відносно яких визначаються суми моментів усіх сил, не повинна бути перпендикулярною осі (у даному випадку осі x), на яку проєктуються сили.

Третя форма умов рівноваги має такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_C(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

На цю систему умов рівноваги також накладається обмеження: точки A , B і C , відносно яких визначаються суми моментів усіх сил, не повинні бути розміщені на одній прямій.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
2. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
3. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
4. В якому випадку плоска система довільних сил зводиться до однієї пари?
5. Чи залежить головний вектор від вибору центра зведення?
6. В якому випадку головний момент не залежить від вибору центра зведення?
7. Сформулюйте теорему Варіньона про момент рівнодійної сили відносно центра.
8. Які умови рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи довільних сил?
9. Напишіть три форми умов рівноваги плоскої системи довільних сил.
10. Яке обмеження накладається на третю форму системи рівнянь рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи довільних сил?

6.5. Зосереджені сили та розподілені навантаження

Досі розглядалися сили, які були представлені у вигляді вектора, прикладеного до точки. Проте у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Такими силовими факторами є сили тиску рідини або газу на поверхню твердих тіл, сили тяжіння, як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому у теоретичній механіці вводиться поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі та об'ємні.

Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла. Об'ємні сили діють на кожний елемент об'єму тіла, яке розглядається. Прикладом останніх сил є сила тяжіння (вага).

У теоретичній механіці розглядається дія на тіло тільки зосереджених сил, які прикладені до абсолютно твердих тіл. А тому розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодійною, тобто зосередженою силою. Введемо декілька загальних положень.

Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю \bar{q} , тобто величиною сили, що припадає на одиницю об'єму тіла (у випадку об'ємних сил), на одиницю площі (у випадку поверхневих сил) та на одиницю довжини (якщо поверхню, на яку діє навантаження, можна вважати лінією, тобто шириною поверхні можна знехтувати). В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах воно зображується у вигляді епюри елементарних сил, тобто графіка інтенсивності навантаження, яке прикладене до лінійного елемента тіла.

У загальному випадку розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає даний закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (рис. 6.4). Напрямок дії навантаження показується стрілками.

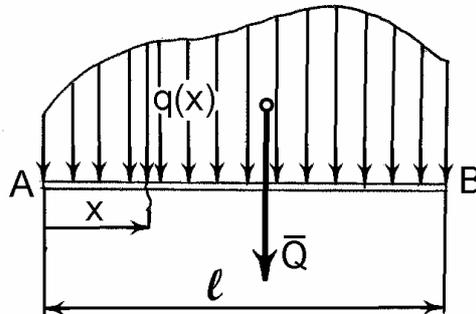


Рис. 6.4.

Спочатку розглянемо рівномірно розподілене навантаження та навантаження, яке розподілене за лінійним законом. Замінюємо розподілене навантаження зосередженою силою.

Розглянемо два випадки:

– рівномірно розподілене навантаження (або навантаження, яке розподілене за законом прямокутника) зображується на схемах у вигляді прямокутника, розміри якого такі: висота – це інтенсивність навантаження \bar{q} , довжина – це довжина l ділянки тіла, на якій діє навантаження. Стрілки показують напрямок дії навантаження (рис. 6.5). Для того, щоб замінити це навантаження рівнодійною силою \bar{Q} , треба визначити її. У даному випадку

$$Q = ql, \quad (6.22)$$

де q – інтенсивність навантаження, Н/м; l – довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, м.

Точка C прикладання рівнодійної сили \bar{Q} розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє навантаження. Тобто $AC = \frac{l}{2} = CB$, а напрямок співпадає з напрямком розподіленого навантаження.

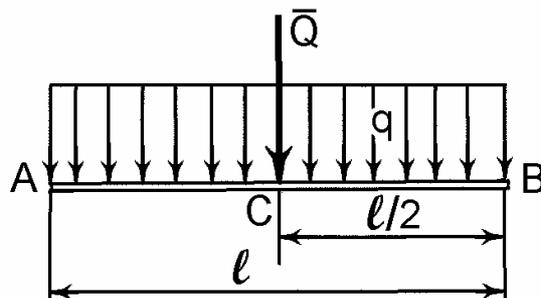


Рис. 6.5.

– навантаження розподілене за лінійним законом (тобто за законом трикутника). У цьому випадку (рис. 6.6) інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці l змінюється від 0 до максимального значення q_{\max} . Рівнодійна сила \bar{Q} від цього навантаження за величиною дорівнює:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l. \quad (6.23)$$

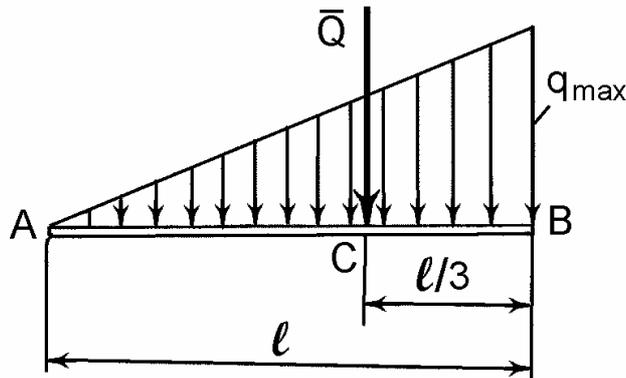


Рис. 6.6.

Точка C прикладення рівнодійної \bar{Q} розташована на відстані $AC = \frac{2}{3}l$ або $BC = \frac{1}{3}l$, а напрямок співпадає з напрямком навантаження.

6.6. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

Якщо лінії дії усіх сил паралельні, то завжди у площині можна так розташувати осі координат, що одна з них буде обов'язково паралельною заданим силам, а друга – їм перпендикулярною. А тому, щоб тіло під дією плоскої системи паралельних сил перебувало у рівновазі, необхідно прирівняти до нуля алгебраїчну суму проєкцій усіх сил на паралельну вісь і алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно довільної точки. У даному випадку система умов рівноваги (6.19) спрощується і буде мати такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на

вісь, яка паралельна силам², і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки A площини дорівнювали нулю.

Для системи паралельних сил на площині можна використовувати і такі умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок площини дорівнювали нулю.

Проте, для цих умов існує обмеження: лінія AB , якою можна з'єднати центри моментів, не повинна бути паралельною силам.

Дані умови найбільш придатні при розрахунках двохопорних балок. Використовуючи ці умови, складають алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно точок A і B , у яких встановлені опори балки.

Розглянемо приклади задач на рівновагу тіла під дією плоскої системи довільних сил.

Приклад 6.1. Однорідна балка AB прямокутного перерізу вагою 400 Н має один кінець A , який закріплений шарнірно, і опирається на точкову опору O (рис. 6.7). До другого кінця балки B підвішений вантаж вагою 200 Н. Довжина балки 4 м, точкова опора розташована на відстані $3/4$ довжини балки від шарнірної опори. Кут нахилу балки до горизонту складає $\alpha = 30^\circ$. Визначити реакції опор балки.

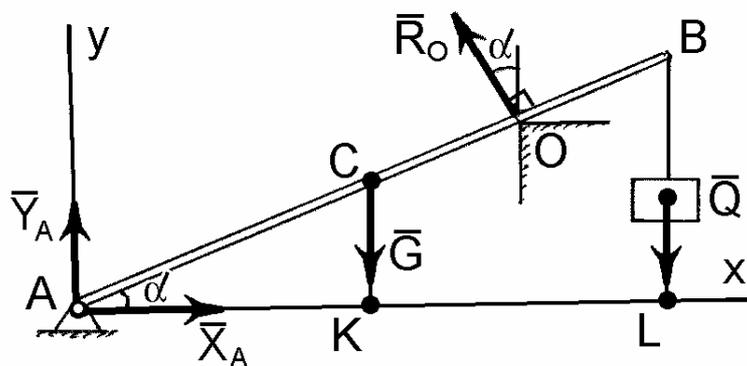


Рис. 6.7.

² На яку завгодно вісь, крім перпендикулярної, але простіше проектувати на паралельну силам вісь, що тут і приймається.

Розв'язання.

Складаємо розрахунково-силову схему задачі. Прикладемо до осі балки задані активні сили: силу тяжіння \bar{G} самої балки та силу тяжіння \bar{Q} вантажу. Сила тяжіння балки \bar{G} прикладена посередині балки у точці C (оскільки балка однорідна) і спрямована вертикально донизу. Сила тяжіння вантажу \bar{Q} прикладена до кінця балки B і спрямована вертикально донизу.

Далі умовно звільняємо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в'язей. У точці A розміщена нерухома шарнірна опора, вона має дві складові реакції \bar{X}_A і \bar{Y}_A , які розташовані вздовж відповідних осей координат. У точці O – точкова опора, яка має одну реакцію \bar{R}_o , що напрямлена перпендикулярно до балки.

Таким чином, балка знаходиться у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання цієї задачі використовуємо умови рівноваги: (6.19),

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Оскільки осі координат x і y задані за умовою задачі, то складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} X_A - R_o \sin \alpha &= 0, \\ Y_A - G - Q + R_o \cos \alpha &= 0, \\ -G \frac{AB}{2} \cos \alpha + R_o \cdot AO - Q \cdot AB \cdot \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} X_A - 0,5R_o &= 0, \\ Y_A - 400 - 200 + 0,866R_o &= 0, \\ -400 \cdot 2 \cdot 0,866 + 3R_o - 200 \cdot 4 \cdot 0,866 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З третього рівняння обчислимо реакцію R_o :

$$R_o = \frac{692,8 + 692,8}{3} = 461,86 \text{ Н,}$$

і підставимо її значення у перші два рівняння:

$$X_A = \frac{1}{2} R_o = 230,93 \text{ Н};$$

$$Y_A = 400 + 200 - 0,866 \cdot 461,86 = 160,04 \text{ Н}.$$

Оскільки визначені дві складові реакції, які прикладені в точці A , – X_A та Y_A , то геометричним додаванням можна обчислити модуль повної реакції R_A . А саме:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{230,93^2 + 160,04^2} = \sqrt{78941,5} = 280,97 \text{ Н}.$$

Таким чином визначенні усі шукані реакції.

Відповідь:

$$R_A = 280,97 \text{ Н};$$

$$R_o = 461,86 \text{ Н}.$$

Приклад 6.2. Визначити реакції опори однорідної балки AB прямокутного перерізу, один кінець якої A жорстко закріплений у стіні і яка перебуває під дією зосередженої сили $P = 4,0 \text{ кН}$, пари сил з моментом $m = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ та рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 1,5 \text{ кН/м}$. Довжина балки $AB = 5 \text{ м}$, рівномірно розподілене навантаження діє на ділянці 3 м від точки A . Кут нахилу зосередженої сили \bar{P} до горизонту складає $\alpha = 30^\circ$, осі x та y показані на рисунку 6.8.

Розв'язання.

Складаємо розрахунково-силову схему. Покажемо всі сили, що прикладені до балки AB . Насамперед, це задані активні сили – сила \bar{P} , що прикладена до кінця балки B і спрямована під кутом α до горизонту. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою \bar{Q} , яка дорівнює:

$$Q = q \cdot AC = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ кН}.$$

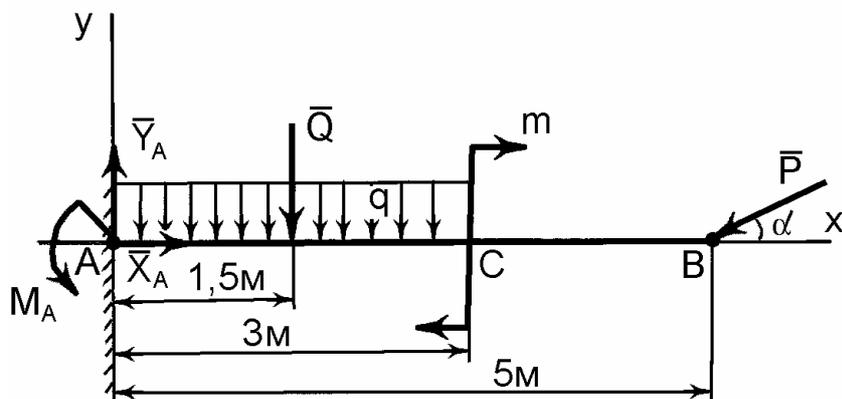


Рис. 6.8.

Сила \bar{Q} прикладена посередині ділянки AC і спрямована у той же бік, що і саме навантаження, тобто вертикально донизу. Покажемо на силовій схемі пару сил, яка визначається моментом m .

Далі умовно звільняємо балку від в'язі і замінюємо її відповідними реакціями в'язі. У точці A – жорстке закріплення балки у стіні, а тому воно має дві складові реакції: \bar{X}_A , \bar{Y}_A , які розташовані вздовж відповідних осей координат, і реактивний момент M_A . Напрямок цього невідомого моменту показуємо на силовій схемі довільно, наприклад, проти напрямку стрілки годинника. Якщо ж при остаточному визначенні моменту M_A отримаємо від'ємний знак, то це означає, що дійсний напрямок моменту – протилежний. Покажемо на силовій схемі лінійні і кутові розміри. Осі координат показані на схемі.

Як видно з побудованої розрахунково-силової схеми, балка перебуває під дією плоскої системи довільних сил. Використовуємо умови рівноваги (6.19):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} X_A - P \cos \alpha &= 0, \\ Y_A - Q - P \sin \alpha &= 0, \\ -Q \frac{AC}{2} - P \cdot AB \cdot \sin \alpha + M_A - m &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} X_A - 4,0 \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0, \\ Y_A - 4,5 - 4,0 \frac{1}{2} &= 0, \\ -4,5 \frac{3}{2} - 4,0 \frac{1}{2} 5 + M_A - 2,0 &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

З першого рівняння обчислимо X_A :

$$X_A = 4,0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ кН.}$$

З другого рівняння обчислимо Y_A :

$$Y_A = 4,5 + 4,0 \frac{1}{2} = 6,50 \text{ кН.}$$

З третього рівняння обчислимо M_A :

$$M_A = 2,0 + 4,5 \frac{3}{2} + 4,0 \frac{1}{2} 5 = 2,0 + 6,75 + 10,0 = 18,75 \text{ кН.}$$

Оскільки складові реакцій X_A та Y_A , що прикладені у точці A , обчислені, то можна знайти модуль R_A повної реакції у точці A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(3,46)^2 + (6,5)^2} = \sqrt{54,22} = 7,36 \text{ кН.}$$

Таким чином, визначені всі шукані реакції.

Відповідь: $R_A = 4,30 \text{ кН};$
 $M_A = 18,75 \text{ кН.}$

7. РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТІЛ

Системою тіл називається сукупність декількох тіл, які або спираються одне на одне або з'єднані шарнірами, що дають можливість відносного руху тіл.

При розв'язанні задач на систему тіл розрізняють сили зовнішні та внутрішні.

Зовнішні сили – це сили взаємодії тіл даної системи з іншими тілами, які не входять до складу системи.

Внутрішні сили – це сили взаємодії між окремими тілами, які входять до складу даної системи. Внутрішні сили існують попарно, як дія і протидія.

7.1. Статично означені та статично неозначені задачі

Задача є статично означеною, якщо для неї можна скласти таку кількість рівнянь рівноваги матеріальної системи, яка не менша, ніж число невідомих.

Задача, є статично неозначеною, якщо число рівнянь рівноваги системи менше, ніж число невідомих.

У теоретичній механіці розглядаються тільки статично означені матеріальні системи.

7.2. Методика розв'язування задач на рівновагу системи тіл

Рівновагу системи тіл можна розглядати в цілому під дією тільки зовнішніх сил. Але може так статись, що кількість рівнянь рівноваги буде меншою, ніж кількість невідомих. Тоді необхідно розглядати рівновагу окремих тіл системи, умовно розділяючи її обов'язково по внутрішніх в'язях. Причому необхідно враховувати, що внутрішні сили реакцій входять попарно, як дія та протидія.

Розглянемо приклад розв'язування задач на рівновагу системи тіл.

Приклад 7.1. На трьохшарнірну арку ABC (рис. 7.1) діє вертикальна сила $P = 10$ кН. Вага кожної частини балки $Q_1 = Q_2 = 6$ кН. Визначити реакції шарнірів A, B, C арки, розміри якої дані на рисунку.

Розв'язання.

Як видно зі схеми, задана система тіл складається з двох піварок *I* та *II*, які з'єднані шарніром у точці *C*. Складемо розрахунково – силову схему, де покажемо задані активні сили $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}$ та реакції в'язей: у точках *A* і *B* (нерухомі шарнірні опори) – \bar{X}_A, \bar{Y}_A і \bar{X}_B, \bar{Y}_B та у точці *C* (шарнірне з'єднання) – \bar{X}_C, \bar{X}'_C та \bar{Y}_C, \bar{Y}'_C . Ці невідомі реакції у точці *C* є внутрішніми силами системи тіл, а тому $X_C = X'_C$ і $Y_C = Y'_C$.

Покажемо осі прямокутної декартової системи координат *Ax*.

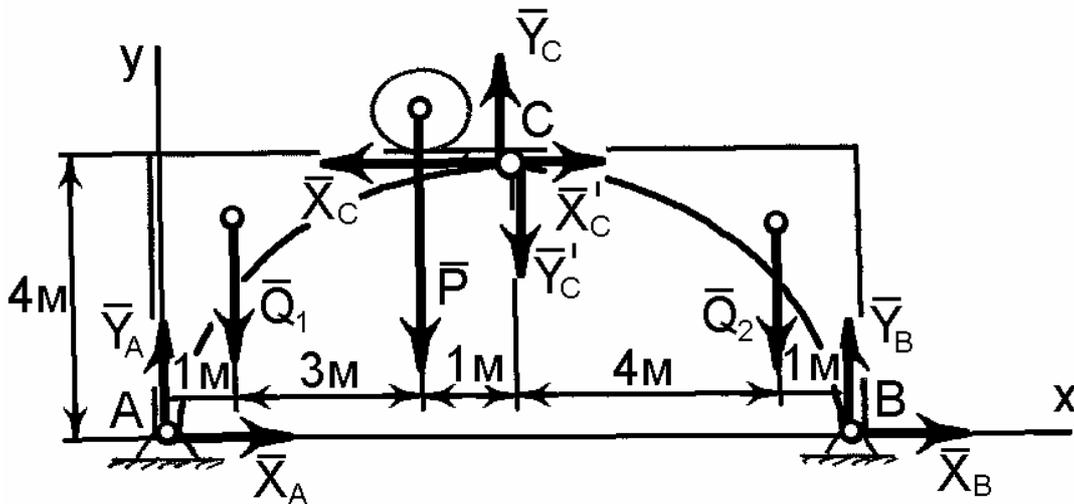


Рис. 7.1

Умовно розділяємо систему тіл на два окремих тіла по шарніру *C*. Дію відкинутої частини замінюємо двома реакціями \bar{X}_C і \bar{Y}_C , які дорівнюють:

$$\bar{X}_C = \bar{X}'_C,$$

$$\bar{Y}_C = \bar{Y}'_C.$$

Тепер розглянемо окремо рівновагу кожного тіла, для чого складемо дві системи рівнянь рівноваги. Використаємо умови рівноваги (6.19).

Для першого тіла (ліва половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_A - X_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_A + Y_C - Q_1 - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Для другого тіла (права половина арки):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; X_B + X'_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; Y_B - Y'_C - Q_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) = 0; Q_2 \cdot 1 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 5 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Як видно з отриманих шести рівнянь рівноваги, в них містяться шість невідомих: X_A , X_B , X_C , Y_A , Y_B , Y_C .

Визначимо ці невідомі величини. З третього рівняння другої системи визначимо Y'_C . Перепишемо це рівняння наступним чином:

$$5Y'_C = 4X'_C - Q_2,$$

звідки знаходимо реакцію Y'_C :

$$Y'_C = \frac{4X'_C - Q_2}{5}.$$

Оскільки чисельно $Y'_C = Y_C$, а $X_C = X'_C$, то підставивши значення цих реакцій у третє рівняння першої системи, отримаємо:

$$5 \frac{(4X_C - Q_2)}{5} + 4X_C = Q_1 + 4P,$$

або

$$8X_C = Q_1 + Q_2 + 4P,$$

звідки

$$X_C = \frac{6 + 6 + 40}{8} = \frac{52}{8} = 6,5 \text{ кН.}$$

Тепер є можливість визначити невідому реакцію Y'_C . Підставивши значення X_C у третє рівняння другої системи, будемо мати:

$$Y'_C = \frac{4X_C - Q_2}{5} = \frac{4 \cdot 6,5 - 6,0}{5} = 4,0 \text{ кН.}$$

З першого рівняння першої системи маємо $X_A = X_C = 6,5$ кН. А з першого рівняння другої системи маємо $X_B = -X'_C = -6,5$ кН. Напрямок цієї реакції є протилежним показаному на силовій схемі. З другого рівняння першої системи одержуємо:

$$Y_A = Q_1 + P - Y_C = 6,0 + 10,0 - 4,0 = 12,0 \text{ кН.}$$

З другого рівняння другої системи обчислимо останню невідому реакцію Y_B . Вона буде дорівнювати: $Y_B = Y'_C + Q_2 = 4,0 + 6,0 = 10,0$ кН.

Таким чином обчислено всі шукані величини.

Відповідь:

$$X_A = 6,5 \text{ кН}; \quad Y_A = 12,0 \text{ кН}; \quad X_B = -6,5 \text{ кН}; \quad Y_B = 10,0 \text{ кН};$$

$$X_C = 6,5 \text{ кН}; \quad Y_C = 4,0 \text{ кН}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке зосереджене та розподілене навантаження?
2. Як замінити рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою?
3. Як замінити розподілене за лінійним законом навантаження зосередженою силою?
4. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?
5. Що таке статично означені і статично неозначені задачі?
6. Які особливості має метод розв'язування задач на рівновагу системи тіл

8. МЕТОДИКА ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ

Задача 8.1

Тверде тіло AB (рис. 8.1) знаходиться в рівновазі під дією сил $F_1 = 40$ кН, $F_2 = 25$ кН і пари сил з моментом $m = 30$ кН·м. Геометричні розміри: $a = 2$ м, $b = 3$ м. Визначити реакції опор.

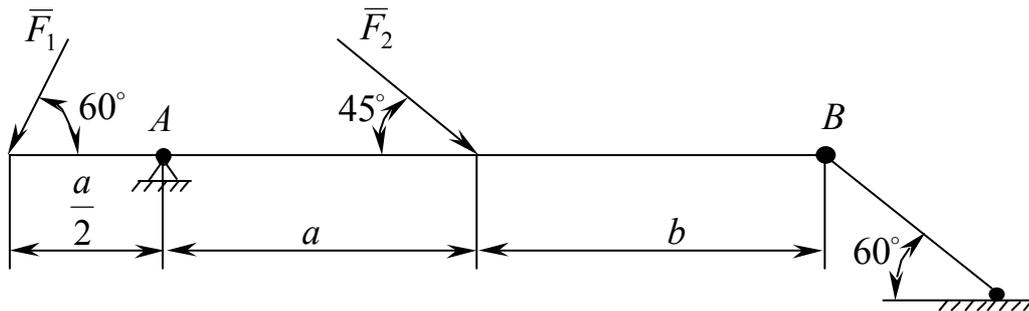


Рис. 8.1

Розв'язання

Розв'язування задач на рівновагу сил, прикладених до твердого тіла виконують за наступним алгоритмом:

1. Виділити тіло, рівновагу якого слід розглянути.
2. Прикласти до нього всі задані сили, включаючи і вагу самого тіла.
3. Користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, відкинути в'язі і замінити їх дію реакціями.
4. Застосувати відповідні умови рівноваги і скласти рівняння рівноваги.
5. Розв'язати рівняння відносно шуканих реакцій в'язей, провести перевірку і аналіз результатів.

Виконаємо розв'язування задачі з застосуванням даного алгоритму.

Виділимо тіло AB для розгляду його рівноваги, оскільки до нього прикладені задані сили і пара сил, а також шукані реакції в опорах A і B . Відкидаємо в'язі і замінюємо їх реакціями. Опора A – нерухомий шарнір, реакція складається з двох складових, які раціонально направити вздовж координатних осей. Опора B є стрижнем, реакція котрого направлена вздовж його осі.

Вибираємо вісь X горизонтально, вісь Y – вертикально. Покажемо тіло AB (балка) з відкинутими в'язями і прикладеними реакціями (рис. 8.2).

У наступних прикладах такого детального аналізу проводити не будемо, а також окремо зображувати балку з відкинутими в'язями. Раціонально на рисунку (рис. 8.2) показати реакції і положення вибраних осей.

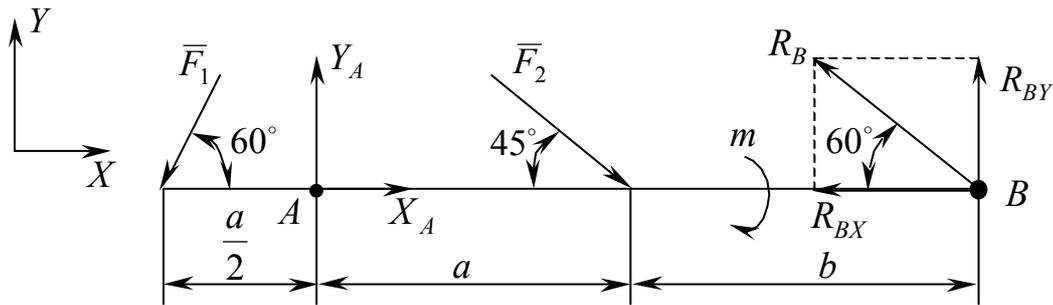


Рис. 8.2

З рисунку 8.2 видно, що до балки AB прикладена плоска система сил, тому застосуємо тип рівнянь рівноваги, котрі мають місце для даного випадку: два рівняння проєкцій на координатні осі X і Y , а також сума моментів відносно точки A , оскільки в даній точці перетинаються лінії дії двох невідомих реакцій. Можна взяти і точку B , в якій перетинаються лінії дії реакцій. Точку перетину ліній дії реакцій вибирати не слід. Це викличе складнощі при визначенні моментів сил відносно цієї точки. Складемо рівняння рівноваги.

$$\sum X_i = 0, \quad -F_1 \cos 60^\circ + X_A + F_2 \cos 45^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0; \quad (8.1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -F_1 \sin 60^\circ + Y_A - F_2 \sin 45^\circ + R_B \sin 60^\circ = 0; \quad (8.2)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad F_1 \frac{a}{2} \sin 60^\circ - F_2 a \sin 45^\circ - m + R_B (a + b) \sin 60^\circ = 0. \quad (8.3)$$

При складанні останнього рівняння моментів відносно точки A використана теорема Варіньона про момент равнодійної, при цьому сила і реакція розкладаються по осях X і Y . На рисунку 8.2 показаний приклад розкладення реакції на складові. Моменти відносно точки A створюють тільки вертикальні складові. Горизонтальні складові (компоненти) моменту відносно точки A не створюють, оскільки лінії їхньої дії перетинають точку A .

При додержанні цих рекомендацій останнє рівняння (8.3) буде мати тільки одну невідому, у нашому випадку R_B . Розв'яжемо це рівняння відносно R_B .

$$R_B = \frac{m + F_2 a \sin 45^\circ - F_1 \frac{a}{2} \sin 60^\circ}{(a + b) \sin 60^\circ}.$$

Підставимо чисельні значення в отриманий розв'язок і визначимо реакцію R_B .

$$R_B = \frac{30 + 25 \cdot 2 \sin 45^\circ - 40 \frac{2}{2} \sin 60^\circ}{(2 + 3) \sin 60^\circ} = 7,093 \text{ кН.}$$

При обчисленні краще використати інженерні калькулятори, які містять тригонометричні функції. При цьому чисельні значення тригонометричних функцій підставляти не слід, калькулятор дозволяє обчислювати значення тригонометричних функцій і множити ці значення у виразі. При цьому буде досягнута максимальна точність. Якщо в подальшому використати пам'ять калькулятора, то проміжні обчислення не потрібні. Тоді остаточний результат буде отриманий з максимальною точністю. І тільки цей результат слід округлити, хоча в пам'яті калькулятора він може зберігатися з цією ж точністю. При округленні слід користуватись наступними рекомендаціями. Для більшості інженерних розрахунків достатня точність у трьохзначних цифрах. Для отримання такої точності всі проміжні обчислення повинні бути проведені з точністю на порядок вище, тобто чотирма значущими цифрами.

Підставляємо R_B в рівняння (8.1) і обчислюємо X_A .

$$X_A = F_1 \cos 60^\circ + R_B \cos 60^\circ - F_2 \cos 45^\circ = 40 \cos 60^\circ + 7,093 \cos 60^\circ - 25 \cos 45^\circ = 5,869 \text{ кН};$$

$$X_A = 5,869 \text{ кН.}$$

Підставляємо R_B в рівняння (8.2) і обчислюємо Y_A .

$$Y_A = F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 45^\circ - R_B \sin 60^\circ = 40 \sin 60^\circ + 25 \sin 45^\circ - 7,093 \sin 60^\circ = 46,18 \text{ кН};$$

$$Y_A = 46,176 \text{ кН.}$$

Відповідь: $X_A = 5,869 \text{ кН}; Y_A = 46,18 \text{ кН}; R_B = 7,093 \text{ кН.}$

Задача 8.2

Тверде тіло (балка, рис. 8.3) жорстко закріплена в точці A і навантажена розподіленим навантаженням інтенсивністю $q = 10 \text{ кН/м}$, силою $F_1 = 20 \text{ кН}$ і парою сил $M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Геометричні розміри $a = 3 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$. Визначити реакції опори.

Розв'язання

Опора A є жорстким закріпленням, реакція такої опори складається із трьох складових. Виберемо осі X , Y (рис. 8.3) і покажемо на цьому рисунку складові реакції опори A : X_A , Y_A , M_A . Складаємо три рівняння рівноваги, оскільки маємо плоску систему сил.

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - F_1 \cos 30^\circ = 0; \tag{8.4}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - q(a + b) + F_1 \sin 30^\circ = 0; \tag{8.5}$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad M_A - q(a + b) \frac{a + b}{2} + F_1 a \sin 30^\circ + M = 0. \tag{8.6}$$

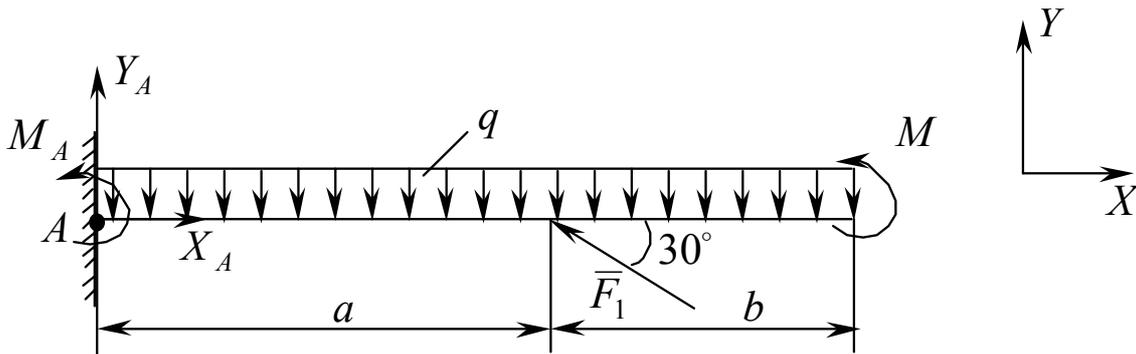


Рис. 8.3

Розв'язок таких рівнянь легкий, оскільки кожне рівняння має по одній невідомій.

Підставимо у вираз (8.4) чисельні значення і визначимо відповідну реакцію X_A .

$$X_A = F_1 \cos 30^\circ = 20 \cos 30^\circ = 17,32 \text{ кН};$$

$$X_A = 17,32 \text{ кН}.$$

Рівняння (8.5) розв'яжемо відносно Y_A .

$$Y_A = q(a + b) - F_1 \sin 30^\circ = 10(3 + 2) - 20 \sin 30^\circ = 40 \text{ кН};$$

$$Y_A = 40 \text{ кН}.$$

Рівняння (8.6) розв'яжемо відносно реактивного моменту M_A .

$$\begin{aligned} M_A &= q(a + b) \frac{a + b}{2} - F_1 a \sin 30^\circ - M = \\ &= 10(3 + 2) \frac{3 + 2}{2} - 20 \cdot 3 \sin 30^\circ - 25 = 70 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$M_A = 70 \text{ кН}.$$

Всі складові реакції опори A отримані додатними. Це означає, що вибрані напрями X_A , Y_A і M_A відповідають дійсності.

Відповідь: $X_A = 17,32 \text{ кН}$, $Y_A = 40 \text{ кН}$, $M_A = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Задача 8.3

Балка AB (рис. 8.4) в точці A закріплена до стіни нерухомим шарніром, в точці B спирається на вістря. Визначити реакції опор якщо $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = 18 \text{ кН}$, $F_3 = 22 \text{ кН}$, $a = 1,5 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$.

Розв'язання

Опора A є нерухомим шарніром, реакцію розкладемо на дві складові. Виберемо осі X , Y (рис. 8.4) і покажемо складові опори A реакції X_A і

Y_A . Вістря B спирається на абсолютно гладеньку поверхню балки AB , тобто, якщо з двох контактуючих тіл одне є точкою, то реакція напрямлена по перпендикуляру до площини AB (реакція R_B).

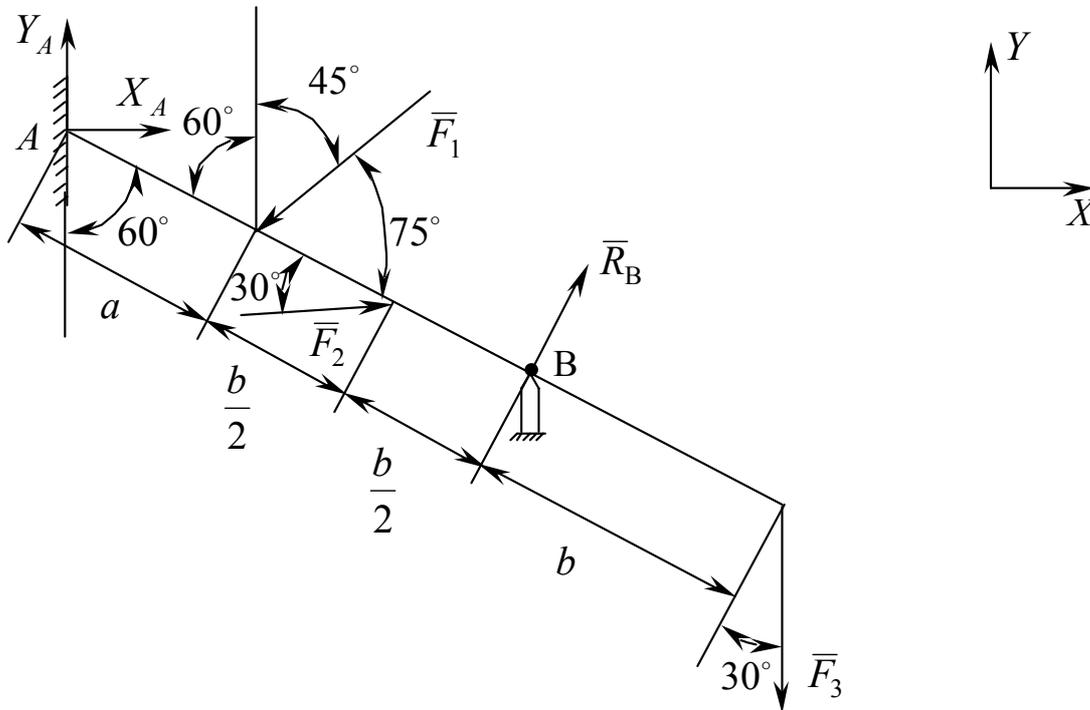


Рис. 8.4.

Складаємо три рівняння рівноваги, рівняння моментів запишемо відносно точки A .

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - F_1 \sin 45^\circ + F_2 + R_B \cos 60^\circ = 0; \quad (8.7)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - F_1 \cos 45^\circ + R_B \sin 60^\circ - F_3 = 0; \quad (8.8)$$

$$\sum m_A = 0, \quad -F_1 a \sin 75^\circ + F_2 \left(a + \frac{b}{2}\right) \sin 30^\circ + R_B (a + b) - F_3 (a + 2b) \cos 30^\circ = 0. \quad (8.9)$$

При складанні рівняння моментів (8.9) сили F_1 , F_2 і F_3 розкладаємо на складові вздовж балки AB і перпендикулярно до неї. Всі складові вздовж балки моменту відносно точки A не створюють. Складові, що перпендикулярні до балки AB створюють моменти відносно точки A .

Із аналізу рівнянь випливає, що рівняння (8.9) може бути розв'язане відносно R_B .

$$R_B = \frac{F_1 a \sin 75^\circ - F_2 \left(a + \frac{b}{2}\right) \sin 30^\circ + F_3 (a + 2b) \cos 30^\circ}{a + b}.$$

Підставимо в рівняння чисельні значення і знайдемо реакцію вістря R_B .

$$R_B = \frac{15 \cdot 1,5 \sin 75^\circ - 18(1,5 + 1) \sin 30^\circ + 22(1,5 + 4) \cos 30^\circ}{1,5 + 2} = 29,72 \text{ кН};$$

$$R_B = 29,72 \text{ кН.}$$

Підставимо R_B в рівняння (8.7) і (8.8) та визначимо реакції X_A і Y_A .

$$\begin{aligned} X_A &= F_1 \sin 45^\circ - F_2 - R_B \cos 60^\circ = \\ &= 15 \sin 45^\circ - 18 - 29,72 \cos 60^\circ = -22,25 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$X_A = -22,25 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= F_1 \cos 45^\circ - R_B \sin 60^\circ + F_3 = \\ &= 15 \cos 45^\circ - 22,72 \sin 60^\circ + 22 = 6,868 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$Y_A = 6,868 \text{ кН.}$$

Відповідь: $X_A = -22,25$ кН, $Y_A = 6,868$ кН, $R_B = 29,72$ кН, реакція X_A спрямована в сторону, що протилежна показаної на рисунку 8.4.

Задача 8.4

Балка AB (рис. 8.5) в точці A закріплена нерухомим шарніром, в точці B – гнучкою нерозтяжною ниткою, один кінець котрої закріплено нерухомо в точці B , а другий кінець перекинуто через блок C і до нього прикріплено вантаж $Q = 50$ кН. На балку діє розподілене навантаження інтенсивністю $q = 10$ кН/м і зосереджена сила $F_1 = 20$ кН. Геометричні розміри $a = 3$ м, $b = 2$ м.

Розв'язання

Нерухомий шарнір A має дві складові реакцій, як показано на рисунку 8.5. Гнучка нерозтяжна нитка працює тільки на розтяг, а тому напрям її реакції R_B відомий. Нитка BC має натяг, який дорівнює Q (тертям у блоці C нехтуємо).

Одержана система сил є плоскою, вибираємо осі X і Y , складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0, \quad Q \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ - X_A = 0; \quad (8.10)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Q \sin 45^\circ + F_1 \sin 60^\circ - R_B - qb + Y_A = 0; \quad (8.11)$$

$$\sum M_A(F_i) = 0,$$

$$R_B(a + b) - Q(a + b) \sin 45^\circ - F_1 b \sin 60^\circ + qb \frac{b}{2} = 0. \quad (8.12)$$

Рівняння (8.10) розв'язуємо відносно X_A :

$$X_A = Q \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ = 50 \cos 45^\circ - 20 \cos 60^\circ = 25,36 \text{ кН};$$

$$X_A = 25,36 \text{ кН.}$$

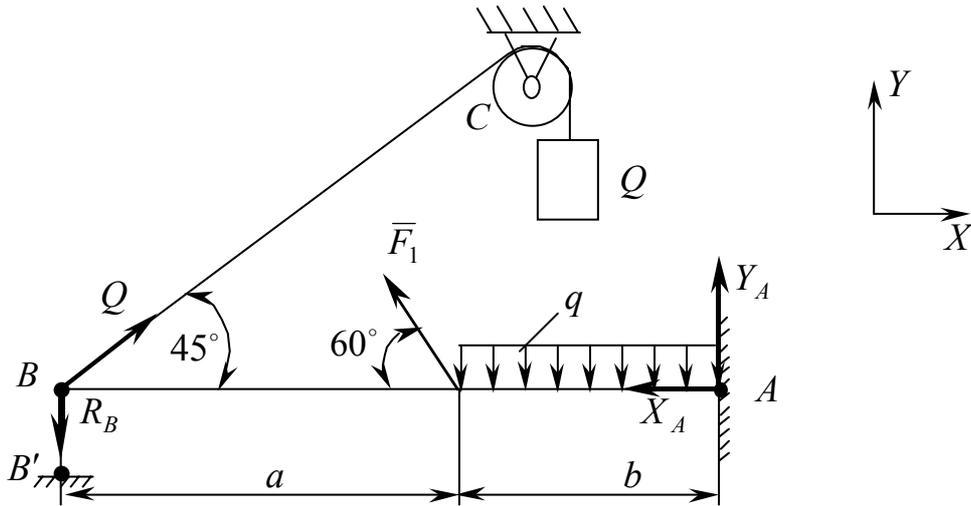


Рис. 8.5.

Рівняння (8.12) має одну невідому R_B , визначимо її:

$$R_B = \frac{Q(a+b)\sin 45^\circ + F_1 b \sin 60^\circ - qb \frac{b}{2}}{a+b} =$$

$$= \frac{50(3+2)\sin 45^\circ + 20 \cdot 2 \sin 60^\circ - 10 \cdot 2 \cdot 1}{3+2} = 38,28 \text{ кН};$$

$$R_B = 38,28 \text{ кН}.$$

Зазначимо, що реакція гнучкої нитки R_B повинна бути додатною (якщо правильно вибрано напрям). Якщо в результаті розв'язку отримали знак мінус, то точку закріплення B' необхідно змінити на протилежну, тобто розвернути нитку BB' на 180° , і про це треба обов'язково вказати.

Тепер можна розв'язати рівняння (8.11) відносно Y_A (R_B відома).

$$Y_A = R_B + qb - Q \sin 45^\circ - F_1 \sin 60^\circ =$$

$$= 38,28 + 10 \cdot 2 - 50 \sin 45^\circ - 20 \sin 60^\circ = 5,608 \text{ кН};$$

$$Y_A = 5,608 \text{ кН}.$$

Відповідь: $X_A = 25,36 \text{ кН}$, $Y_A = 5,608 \text{ кН}$, $R_B = 38,28 \text{ кН}$.

Задача 8.5

Балка AB своїми кінцями спирається на дві взаємно перпендикулярні, абсолютно гладенькі стінки (рис. 8.6) і навантажена силами $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_2 = 30 \text{ кН}$, власна вага балки $P = 8 \text{ кН}$. Визначити вагу вантажу Q , котрий необхідно закріпити до кінця гнучкої нерозтяжної нитки, щоб утримати в рівновазі балку AB в показаному на рисунку 8.6 положенні. Визначити також реакції в опорах A і B , якщо $a = 2 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$.

Розв'язання

Балка AB в точках A і B торкається до абсолютно гладенької стіни, тому реакції в цих точках будуть перпендикулярні до поверхонь (див. рис. 8.6). В точці C покажемо натяг нитки Q (тертям в блоці нехтуємо). Виберемо осі X , Y і складемо рівняння рівноваги, при цьому рівняння моментів буде відносно точки D (рис. 8.6), де перетинаються невідомі реакції R_A і R_B .

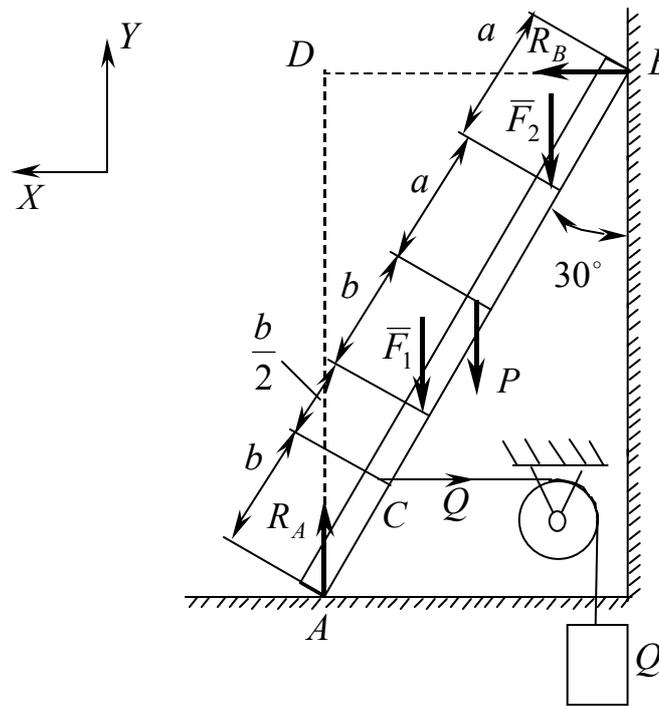


Рис. 8.6.

$$\sum X_i = 0, \quad R_B - Q = 0; \quad (8.13)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A - F_1 - P - F_2 = 0; \quad (8.14)$$

$$\sum M_D(F_i) = 0, \quad Q(2a + b + a/2)\cos 30^\circ - F_1(b + a/2)\sin 30^\circ - P(2b + a/2)\sin 30^\circ - F_2(2b + a/2 + a)\sin 30^\circ = 0. \quad (8.15)$$

Рівняння (8.14) розв'яжемо відносно R_A :

$$R_A = F_1 + F_2 + P = 10 + 30 + 8 = 48 \text{ кН};$$

$$R_A = 48 \text{ кН}.$$

Рівняння (8.15) розв'яжемо відносно Q :

$$Q = \frac{F_1(b + \frac{a}{2})\sin 30^\circ + P(2b + \frac{a}{2})\sin 30^\circ + F_2(2b + \frac{3}{2}a)\sin 30^\circ}{(2a + b + \frac{a}{2})\cos 30^\circ} =$$

$$= \frac{10(1,5 + 1)\sin 30^\circ + 8(3 + 1)\sin 30^\circ + 30(3 + 3)\sin 30^\circ}{(4 + 1,5 + 1)\cos 30^\circ} = 21,05 \text{ кН};$$

$$Q = 21,05 \text{ кН}.$$

Із рівняння (8.13) визначимо R_B :

$$R_B = Q = 21,05 \text{ кН.}$$

Необхідно зазначити, що положення рівноваги балки AB , яке одержано в розв'язку не є стійким. Для отримання стійкої рівноваги необхідно відкинути блок і замість вантажу Q закріпити нитку на вертикальній стінці, зберігаючи горизонтальне положення нитки. При цьому буде отримана геометрично незмінна жорстка фігура – трикутник.

Відповідь: $R_A = 48 \text{ кН}$, $R_B = Q = 21,05 \text{ кН}$.

Задача 8.6

Задача 8.6 – ускладнений варіант плоскої системи сил.

Жорстка рама AB (рис. 8.7) знаходиться в рівновазі під дією зосереджених сил $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = 22 \text{ кН}$, розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 12 \text{ кН/м}$ і пари сил з моментом $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Визначити реакції опор, якщо $a = 2 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$, $c = 4 \text{ м}$, $d = 3 \text{ м}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

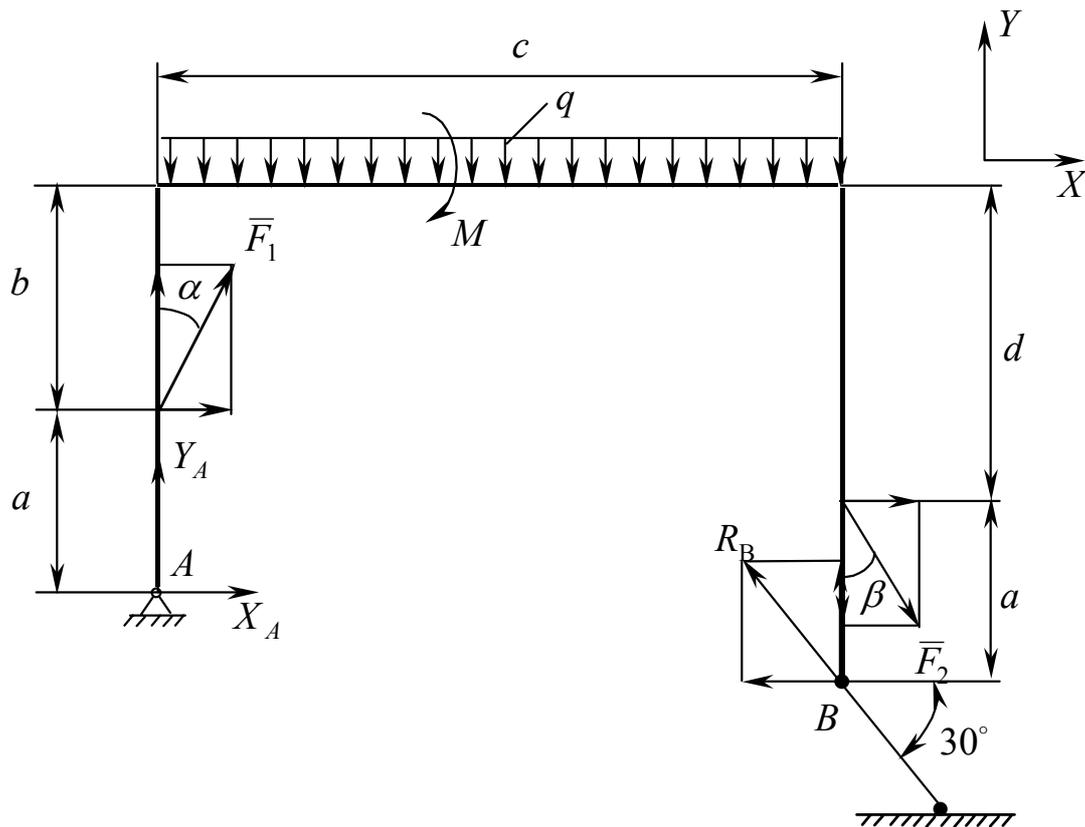


Рис. 8.7.

Розв'язання

Розв'язування задачі виконується за тим же алгоритмом, що наданий при розв'язуванні задачі 8.1. Тому не будемо детально зупинятися на цьому алгоритмі і перейдемо до реакцій опор. Опора A – нерухомий шарнір, реакція складається з двох складових: X_A і Y_A . Покажемо їх на

рисунку 8.7, попередньо вибравши осі X і Y . В опорі B встановлений стрижень, реакція котрого направлена вздовж його осі. В результаті отримаємо плоску систему сил, для котрої складемо три рівняння рівноваги.

$$\sum X_i = 0, X_A + F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \beta - R_B \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (8.16)$$

$$\sum Y_i = 0, Y_A + F_1 \cos \alpha - qc - F_2 \sin \beta + R_B \sin 30^\circ = 0; \quad (8.17)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, -F_1 a \sin \alpha - qc \frac{c}{2} - m - F_2 c \sin \beta - \\ - F_2(a + b - d) \cos \beta + R_B c \sin 30^\circ - R_B(d - b) \cos 30^\circ = 0. \quad (8.18)$$

При складанні рівняння моментів (8.18) моменти сил F_1 , F_2 і R_B визначали з використанням теореми Варіньона про момент равнодійної, розклавши сили по осях координат. При цьому обидві складові F_2 і R_B створюють моменти відносно точки A .

Аналізуючи отримані рівняння, зазначимо, що рівняння (8.18) має одну невідому R_B . Знайдемо її.

$$R_B = \frac{F_1 a \sin \alpha + q \frac{c^2}{2} + M + F_2 c \sin \beta + F_2(a + b - d) \cos \beta}{c \sin 30^\circ - (d - b) \cos 30^\circ} = \\ = \frac{15 \cdot 2 \sin 45^\circ + 12 \frac{4^2}{2} + 20 + 22 \cdot 4 \sin 60^\circ + 22(2 + 1,5 - 3) \cos 60^\circ}{4 \sin 30^\circ - (3 - 1,5) \cos 30^\circ} = \\ = 312,32 \text{ кН}; \\ R_B = 312,32 \text{ кН}.$$

Із рівняння (8.16) визначимо X_A :

$$X_A = R_B \cos 30^\circ - F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \beta = \\ = 312,32 \cos 30^\circ - 15 \sin 45^\circ - 22 \cos 60^\circ = 248,87 \text{ кН}; \\ X_A = 248,87 \text{ кН}.$$

Рівняння (8.17) розв'яжемо відносно Y_A :

$$Y_A = qc + F_2 \sin \beta - F_1 \cos \alpha - R_B \sin 30^\circ = \\ = 12 \cdot 4 + 22 \sin 60^\circ - 15 \cos 45^\circ - 312,32 \sin 30^\circ = -99,71 \text{ кН}; \\ Y_A = -99,71 \text{ кН}.$$

Відповідь: $X_A = 248,87$ кН, $Y_A = -99,71$ кН, $R_B = 312,32$ кН. Реакція Y_A направлена у протилежну сторону, ніж це показано на рисунку 8.7.

Задача 8.7

Жорстка рама (рис. 8.8) знаходиться в рівновазі під дією сил, $F_1 = 22$ кН, $F_2 = 18$ кН, пари сил з моментом $M = 10$ кН·м і рівномірно розподіленого

навантаження інтенсивністю $q = 15 \text{ кН/м}$. Визначити реакції опори A , якщо $a = 3 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$, $c = 2,5 \text{ м}$, $d = 2,0 \text{ м}$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 20^\circ$.

Розв'язання

Реакції опори A , жорсткого закріплення, складаються із двох складових і реактивного моменту. Вибираємо осі координат X , Y (рис. 8.8) і позначаємо, реакції в опорі A – X_A , Y_A і реактивний момент – M_A .

Складемо три рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0, \quad qa - F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \beta + X_A = 0; \quad (8.19)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \beta + Y_A = 0; \quad (8.20)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad -qa(b + d - a/2) + F_1(b + d) \cos \alpha + F_1 c \sin \alpha - M - F_2 d \sin \beta + M_A = 0. \quad (8.21)$$

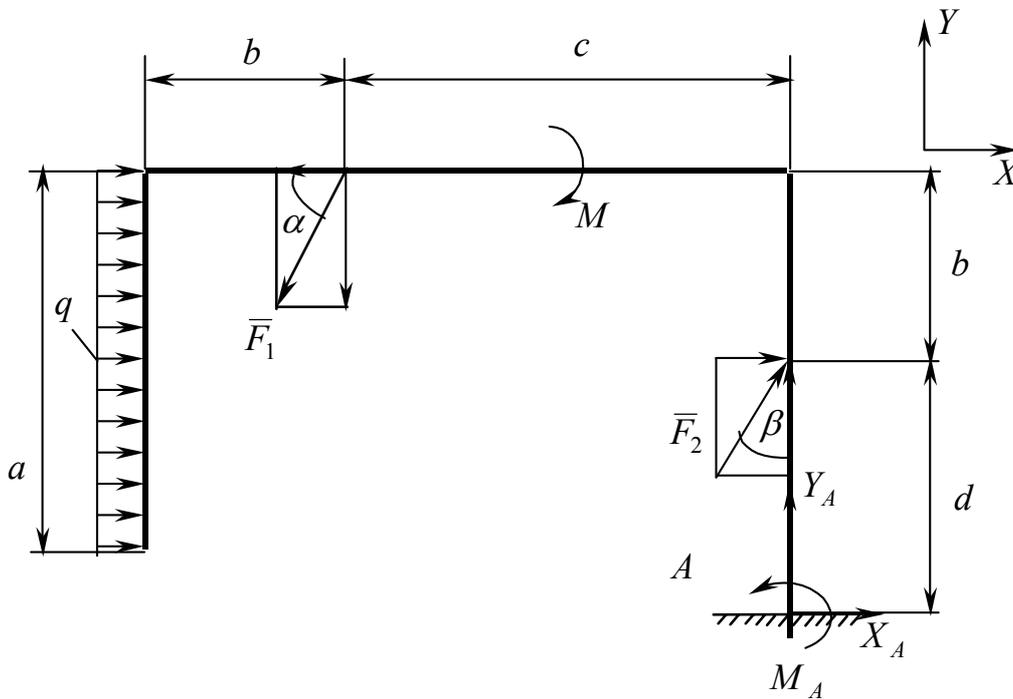


Рис. 8.8.

При складанні рівняння моментів відносно точки A сили F_1 і F_2 розкладемо на складові вздовж координатних осей і використаємо теорему Варіньона про момент рівнодійної.

Кожне із рівнянь має по одній невідомій, тому розв'яжемо послідовно всі рівняння.

$$X_A = F_1 \cos \alpha - qa - F_2 \sin \beta =$$

$$= 22 \cos 75^\circ - 15 \cdot 3 - 18 \sin 20^\circ = -45,46 \text{ кН};$$

$$X_A = -45,46 \text{ кН.}$$

$$Y_A = F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \beta =$$

$$= 22 \sin 75^\circ - 18 \cos 20^\circ = 4,336 \text{ кН};$$

$$Y_A = 4,336 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned}
 M_A &= qa(b+d-a/2) - F_1(b+d)\cos\alpha - F_1c\sin\alpha + M + F_2d\sin\beta = \\
 &= 15 \cdot 3(1,5+2-1,5) - 22(1,5+2,0)\cos 75^\circ - 22 \cdot 2,5\sin 75^\circ + \\
 &+ 10 + 18 \cdot 2,0\sin 20^\circ = 39,26 \text{ кН} \cdot \text{м};
 \end{aligned}$$

$$M_A = 39,26 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Відповідь: $X_A = -45,46 \text{ кН}$, $Y_A = 4,336 \text{ кН}$, $M_A = 39,26 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Реакція X_A є протилежною прийнятому на рисунку 8.8 напрямку.

Задача 8.8

Жорстка рама AB (рис. 8.9) знаходиться в рівновазі під дією сил $F_1 = 28 \text{ кН}$, $F_2 = 14 \text{ кН}$, пари сил з моментом $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а також розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 10 \text{ кН/м}$. Визначити реакції опор, якщо $a = 2,5 \text{ м}$, $b = 2,0 \text{ м}$, $c = 2,5 \text{ м}$, $d = 1,5 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 50^\circ$.

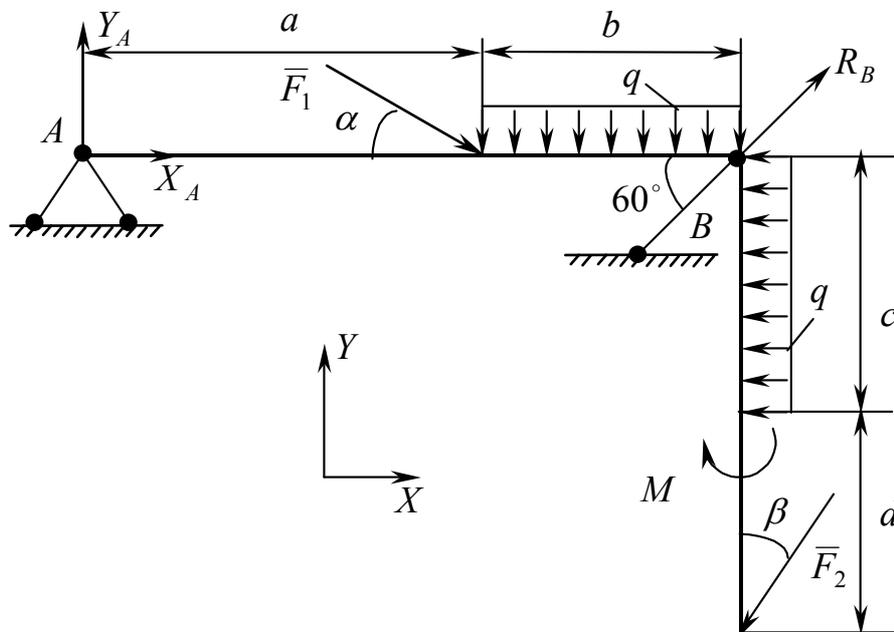


Рис. 8.9.

Розв'язання

Опора A має два стрижні, з'єднані шарнірно разом з рамою в точці A . Другі кінці стрижнів закріплені до нерухомої основи, так що два стрижні і нерухома основа утворюють геометрично незмінну фігуру – трикутник. Точка A цього трикутника не може переміщуватись в площині, тому реакція шарніра A складається з двох складових X_A і Y_A (рис. 8.9). В точці B рама також закріплена шарнірно за допомогою невагомий стрижня з кутом нахилу 60° до горизонту. Реакція стрижня направлена вздовж його осі R_B (рис. 8.9).

Після звільнення від в'язей ми будемо мати плоску систему сил, яка діє на раму. Складемо рівняння рівноваги, вибравши осі X , Y (рис. 8.9). При

складанні рівняння моментів відносно точки A розкладемо на складові, які паралельні осям, сили F_1 , F_2 і R_B , застосуємо теорему Варіньона про момент рівнодійної.

$$\sum X_i = 0, X_A + F_1 \cos \alpha + R_B \cos 60^\circ - qc - F_2 \sin \beta = 0; \quad (8.22)$$

$$\sum Y_i = 0, Y_A - F_1 \sin \alpha - qb + R_B \sin 60^\circ - F_2 \cos \beta = 0; \quad (8.23)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, -F_1 a \sin \alpha - qb(a + b/2) + R_B(a + b) \sin 60^\circ - qc \frac{c}{2} - M - F_2(a + b) \cos \beta - F_2(c + d) \sin \beta = 0. \quad (8.24)$$

Останнє рівняння має одну невідому R_B , розв'яжемо рівняння (8.24) відносно R_B .

$$R_B = \frac{F_1 a \sin \alpha + qb \left(a + \frac{b}{2} \right) + q \frac{c^2}{2} + M + F_2 [(a + b) \cos \beta + (c + d) \sin \beta]}{(a + b) \sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{28 \cdot 2,5 \sin 30^\circ + 10 \cdot 2,0(2,5 + 1) + 10 \frac{2,5^2}{2} + 30 +}{(2,5 + 2,0) \cdot \sin 60^\circ} \dots$$

$$+ 14[(2,5 + 2,0) \cos 50^\circ + (2,5 + 1,5) \sin 50^\circ] = 64,06 \text{ кН};$$

$$R_B = 64,06 \text{ кН.}$$

Із рівняння (8.22) визначимо X_A :

$$X_A = qc + F_2 \sin \beta - F_1 \cos \alpha - R_B \cos 60^\circ =$$

$$= 10 \cdot 2,5 + 14 \sin 50^\circ - 28 \cos 30^\circ - R_B \cos 60^\circ = -20,55 \text{ кН};$$

$$X_A = -20,55 \text{ кН.}$$

Із рівняння (8.23) визначимо Y_A :

$$Y_A = F_1 \sin \alpha + qb - R_B \sin 60^\circ + F_2 \cos \beta =$$

$$= 28 \sin 30^\circ + 10 \cdot 2 - 64,06 \sin 60^\circ + 14 \cos 50^\circ = -12,48 \text{ кН};$$

$$Y_A = -12,48 \text{ кН.}$$

Відповідь: $X_A = -20,55 \text{ кН}$, $Y_A = -12,48 \text{ кН}$, $R_B = 64,06 \text{ кН}$.

Напрямок реакцій X_A і Y_A є протилежним показаному на рисунку 8.9.

Задача 8.9

Балка AB (рис. 8.10) знаходиться в рівновазі під дією сил $F_1 = 16 \text{ кН}$, $F_2 = 27 \text{ кН}$, пари сил з моментом $M = 19 \text{ кН}\cdot\text{м}$, а також розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 24 \text{ кН/м}$. Визначити реакції опор балки, якщо $a = 2,0 \text{ м}$, $b = 3,0 \text{ м}$, $c = 1,5 \text{ м}$, $d = 1 \text{ м}$, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 75^\circ$.

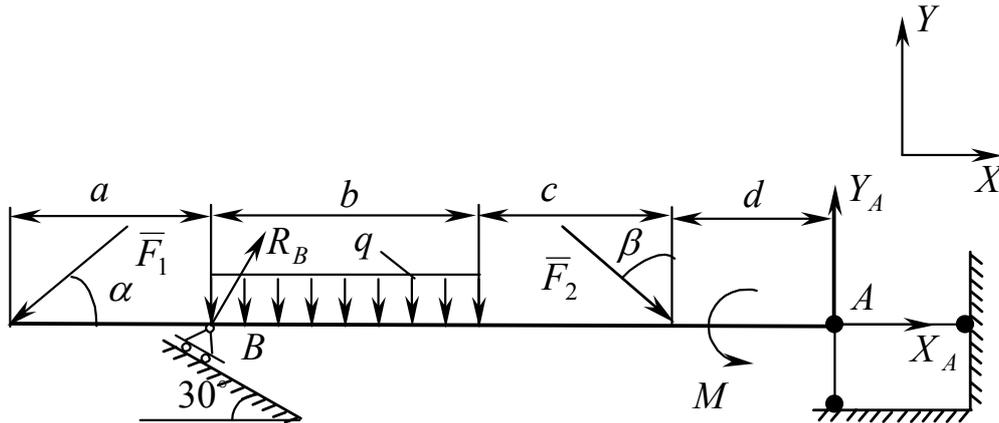


Рис. 8.10

Розв'язання

Опора A (рис. 8.10), як і в попередньому випадку складається з двох стрижнів, з'єднаних з балкою в точці A шарнірно, другі кінці стрижнів закріплені до жорсткої основи також шарнірно. Тому реакція шарніра A складається із двох складових X_A і Y_A (рис. 8.10). Шарнір B – рухомий, реакція R_B напрямлена перпендикулярно похилій площині (рис. 8.10).

Виберемо осі координат X , Y і складемо три рівняння рівноваги.

$$\sum X_i = 0, -F_1 \cos \alpha + R_B \sin 30^\circ + F_2 \sin \beta + X_A = 0; \quad (8.25)$$

$$\sum Y_i = 0, -F_1 \sin \alpha + R_B \cos 30^\circ - qb - F_2 \cos \beta + Y_A = 0; \quad (8.26)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, F_1 \sin \alpha (a + b + c + d) - R_B (b + c + d) \cos 30^\circ + F_2 d \cos \beta + M + qb(b/2 + c + d) = 0. \quad (8.27)$$

Рівняння (8.27) розв'яжемо відносно R_B , а тоді два інші – відносно X_A і Y_A відповідно.

$$R_B = \frac{F_1(a + b + c + d) \sin \alpha + F_2 d \cos \beta + M + qb(c + d + b/2)}{(b + c + d) \cos 30^\circ} =$$

$$= \frac{16(2 + 3 + 1,5 + 1) \sin 40^\circ + 27 \cdot 1 \cos 75^\circ + 19 + 24 \cdot 3(1,5 + 1,5 + 1)}{(3 + 1,5 + 1) \cos 30^\circ} =$$

$$= 100,4 \text{ кН};$$

$$R_B = 100,4 \text{ кН.}$$

$$X_A = F_1 \cos \alpha - R_B \sin 30^\circ - F_2 \sin \beta =$$

$$= 16 \cos 40^\circ - 100,4 \sin 30^\circ - 27 \sin 75^\circ = -64,02 \text{ кН};$$

$$X_A = -64,02 \text{ кН.}$$

$$Y_A = F_1 \sin \alpha - R_B \cos 30^\circ + qb + F_2 \cos \beta =$$

$$= 16 \sin 40^\circ - 100,4 \cos 30^\circ + 24 \cdot 3 + 27 \cos 75^\circ = 6,988 \text{ кН};$$

$$Y_A = 6,988 \text{ кН.}$$

Відповідь: $X_A = -64,02$ кН, $Y_A = 6,988$ кН, $R_B = 100,4$ кН. Реакція напрямлена в протилежну сторону, ніж це показано на рисунку 8.10.

Задача 8.10

Балка в похилому положенні жорстко закріплена в точці A (рис. 8.11) і навантажена силами $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 12$ кН, парою сил з моментом $M = 19$ кН·м, а також вертикальним розподіленим навантаженням інтенсивністю $q = 24$ кН/м. Визначити реакції опори A , якщо $a = 2,0$ м, $b = 2,0$ м, $c = 2,5$ м, $d = 3,0$ м, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 75^\circ$.

Розв'язання

Виберемо осі координат X , Y і покажемо реакції жорсткого закріплення в точці A – X_A , Y_A , M_A (рис. 8.11).

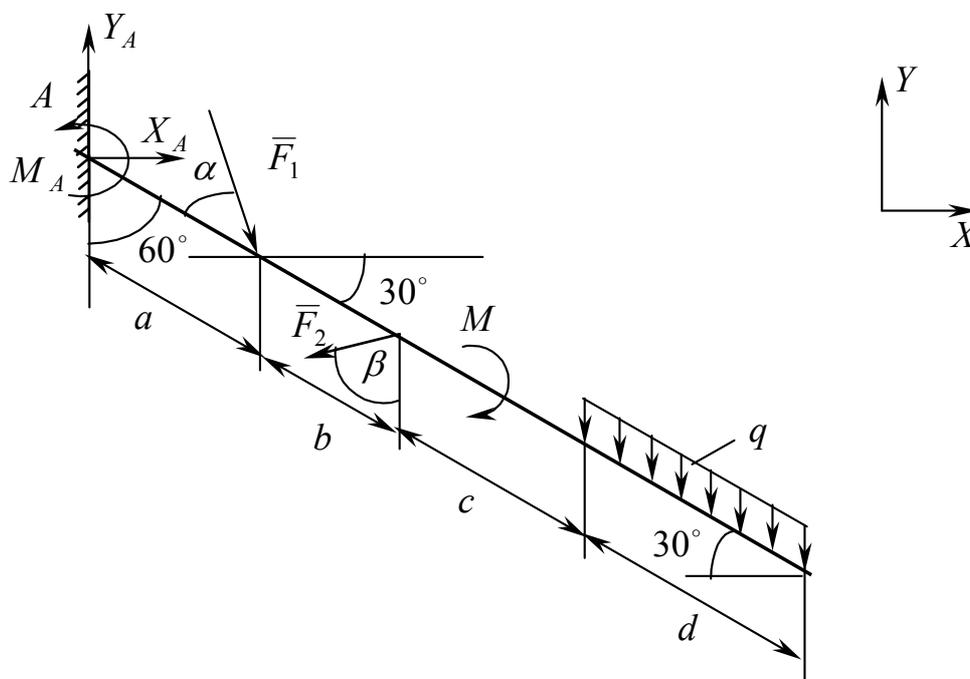


Рис. 8.11

При розв'язуванні подібних задач з нахилом виникають труднощі з розподіленим навантаженням.

Розглянемо це детальніше. Введення поняття рівномірно розподілене навантаження пов'язано з урахуванням власної ваги самої конструкції, наприклад, масивна залізобетонна балка сталого перерізу, вага котрої Q , а довжина l (рис. 8.12, а). Вага одиниці довжини такої балки дорівнює:

$$q = \frac{Q}{l}.$$

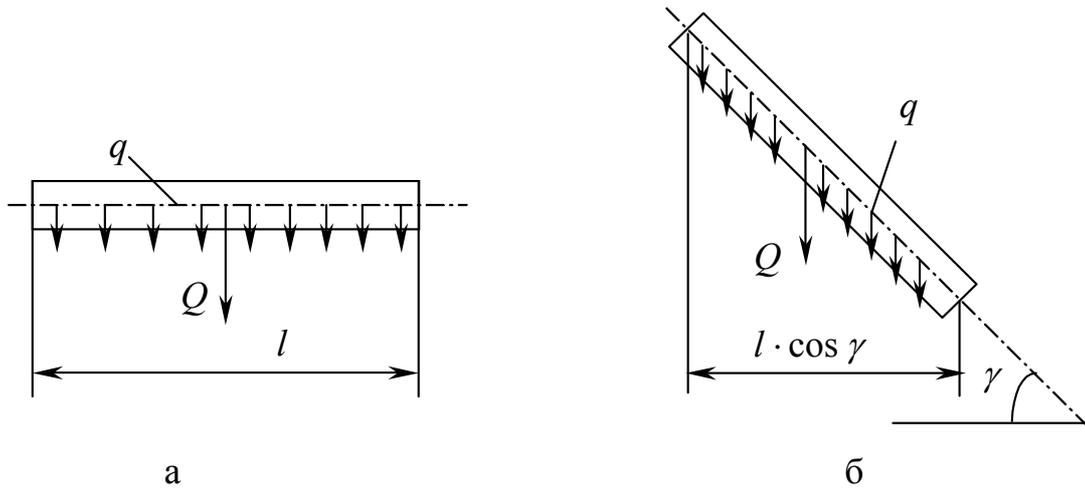


Рис. 8.12

Величина q називається інтенсивністю розподіленого навантаження. При нахилі балки на кут γ інтенсивність q_γ , котра вимірюється, як відношення ваги Q до відрізка, перпендикулярного до навантаження, на котрому вона діє:

$$q = \frac{Q}{l \cos \gamma} = \frac{ql}{l \cos \gamma} = \frac{q}{\cos \gamma}.$$

При вертикальному положенні балки поняття розподіленого навантаження не має сенсу, тому використовується тільки вага самої конструкції.

Оскільки в умові задачі задане вертикальне розподілене навантаження q_γ , то для визначення Q необхідно покласти:

$$Q = q_\gamma l \cos \gamma.$$

Враховуючи ці обставини, складемо рівняння рівноваги.

$$\sum X_i = 0, X_A + F_1 \cos(\alpha + 30^\circ) - F_2 \sin \beta = 0; \quad (8.28)$$

$$\sum Y_i = 0, Y_A - F_1 \sin(\alpha + 30^\circ) - F_2 \cos \beta - qd \cos 30^\circ = 0; \quad (8.29)$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, M_A - F_1 a \sin \alpha - F_2 (a + b) \cos(\beta - 30^\circ) - M - qd \cos 30^\circ (a + b + c + d/2) \cos 30^\circ = 0. \quad (8.30)$$

Всі рівняння містять по одній невідомій, тому розв'язуються просто:

$$X_A = F_2 \sin \beta - F_1 \cos(\alpha + 30^\circ) = 8 \sin 75^\circ - 12 \cos(30^\circ + 30^\circ) = 1,727 \text{ кН};$$

$$X_A = 1,727 \text{ кН};$$

$$Y_A = F_1 \sin(\alpha + 30^\circ) + F_2 \cos \beta + qd \cos 30^\circ = 8 \sin(30^\circ + 30^\circ) + 12 \cos 75^\circ + 10 \cdot 3,0 \cos 30^\circ = 32,91 \text{ кН};$$

$$Y_A = 32,91 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned}M_A &= F_1 a \sin \alpha + F_2 (a + b) \cos(\beta - 30^\circ) + M + \\ &+ qd \cos^2 30^\circ (a + b + c + d / 2) = \\ &= 8 \cdot 2 \sin 30^\circ + 12(2 + 2) \cos(75^\circ - 30^\circ) + 14 + \\ &+ 10 \cdot 3 \cos^2 30^\circ (2 + 2 + 2,5 + 1,5) = 235,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_A &= 235,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Відповідь: $X_A = 1,727 \text{ кН}$, $Y_A = 32,91 \text{ кН}$, $M_A = 235,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

9. ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА

9.1. Центр паралельних сил

Припустимо, що до тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних і однаково спрямованих сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ (рис. 9.1). Додамо геометрично сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , тобто визначимо їх рівнодійну $\bar{R}_{1,2}$. Вона буде дорівнювати

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2. \quad (9.1)$$

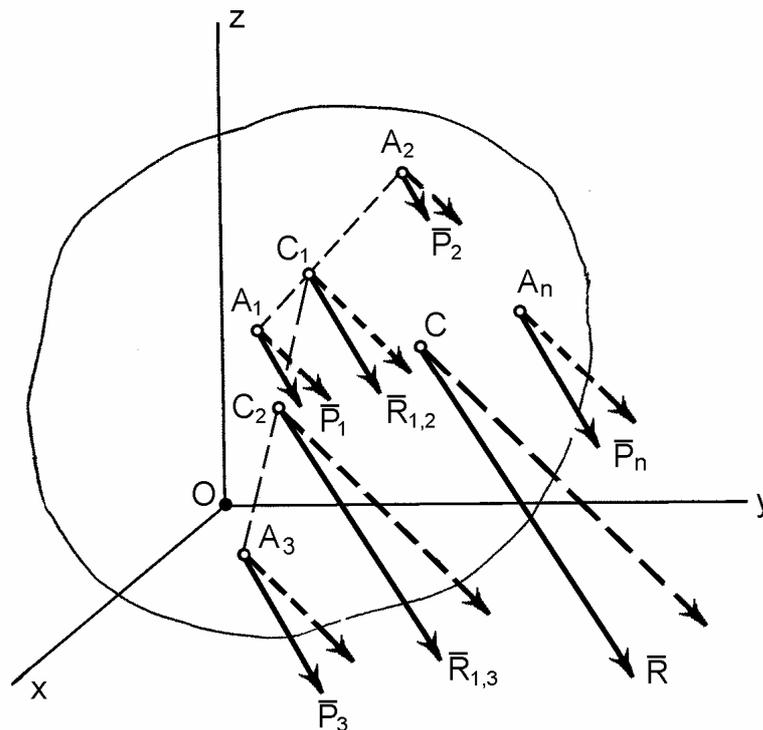


Рис. 9.1.

Точка C_1 прикладення цієї рівнодійній $\bar{R}_{1,2}$ визначається за відомим правилом додавання двох паралельних сил, які мають однаковий напрямок. Оскільки сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 прикладені у точках A_1 і A_2 , то, з'єднавши ці точки прямою, можна відшукати положення точки C_1 на цій прямій за відомим рівнянням або пропорцією

$$P_1 \cdot A_1 C_1 = P_2 \cdot A_2 C_1. \quad (9.2)$$

Далі аналогічно додамо сили $\bar{R}_{1,2}$ і \bar{P}_3 , отримуючи їх рівнодійну $\bar{R}_{1,3}$, яка є фактично рівнодійною трьох сил і буде дорівнювати

$$\bar{R}_{1,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{P}_3 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3. \quad (9.3)$$

Точка C_2 прикладення цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,3}$ також визначається за вказаним вище правилом на прямій $C_1 A_3$.

Таким же чином поведимося з рештою сил, послідовно їх додаючи, і, остаточно, отримаємо рівнодійну \bar{R} системи паралельних сил. Вона буде прикладена в точці C , спрямована у той же бік, що і задані паралельні сили, величина її буде дорівнювати:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{k=1}^n P_k. \quad (9.4)$$

Повернемо всі задані сили навколо їх точок прикладання в один бік на один і той же кут і знову знайдемо їх рівнодійну. Також починаємо з додавання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 . Але, як бачимо з рисунку 9.1, а також з рівнянь (9.1) і (9.2), ні модуль рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$, ні положення точки її прикладання C_1 на прямій A_1A_2 , не змінюються. Змінюється лише напрямок, який буде паралельним новому напрямку сил.

Якщо провести до кінця додавання паралельних сил, які вже мають новий напрямок, то можна побачити, що і рівнодійна \bar{R} у даному випадку не змінює ні свого модулю, ні точки прикладання C . Змінюється лише напрямок її лінії дії.

Таким чином, точка прикладання рівнодійної \bar{R} системи паралельних сил завжди співпадає з точкою C , положення якої по відношенню до положення точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ завжди буде незмінним. Ця точка має назву центра паралельних сил.

Центр паралельних сил – це точка прикладення їх рівнодійної, яка не змінює свого положення при повороті усіх сил на однаковий кут і в один і той же бік.

9.2. Координати центра паралельних сил

Припустимо, що до тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ прикладена система паралельних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, яка зведена до рівнодійної сили \bar{R} , що прикладена у точці C (рис. 9.2). Виберемо просторову декартову систему координат $Oxyz$ так, щоб б одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна заданим силам. Знайдемо моменти усіх сил відносно осей координат x, y і z .

Позначимо у прийнятій системі координати точок прикладення сил $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ і точки прикладення рівнодійної $\bar{R} - C(x_C, y_C, z_C)$.

Обчислимо спочатку моменти всіх сил відносно осі y . Оскільки

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k,$$

то за теоремою Варіньона

$$m_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k),$$

а тому

$$Rx_C = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \dots + P_nx_n = \sum_{k=1}^n P_kx_k. \quad (9.5)$$

Звідки координата x_C буде дорівнювати:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_kx_k}{R}. \quad (9.6)$$

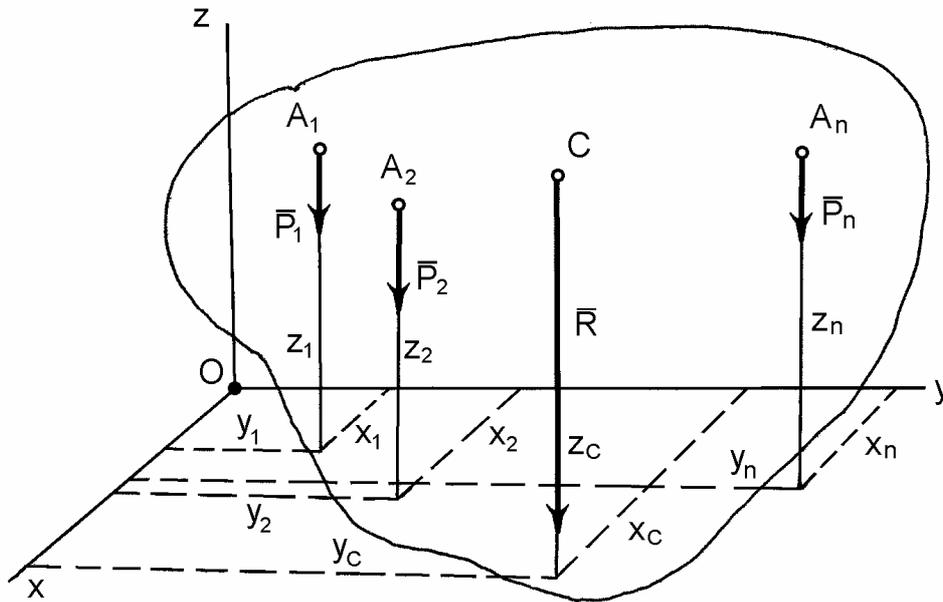


Рис. 9.2.

Аналогічно визначимо моменти усіх сил відносно осі x :

$$-Ry_C = -P_1y_1 - P_2y_2 - P_3y_3 - \dots - P_ny_n = \sum_{k=1}^n (-P_ky_k), \quad (9.7)$$

звідки координата y_C буде дорівнювати:

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_ky_k}{R}. \quad (9.8)$$

Далі повернемо всі сили на один і той же кут в один бік (наприклад, на кут 90° , перпендикулярно до площини yOz). Положення точки C , як відомо, при повороті усіх сил на однаковий кут, в один і той же бік не змінюється. Тепер обчислимо моменти усіх сил відносно осі y . Матимемо:

$$Rz_C = P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \dots + P_nz_n = \sum_{k=1}^n P_k z_k, \quad (9.9)$$

звідки координата z_C буде дорівнювати:

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (9.10)$$

Таким чином, остаточно отримаємо формули для координат центра паралельних сил:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (9.11)$$

9.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії

На довільне тіло, яке розміщене поблизу поверхні землі, діє сила, що має вертикальний донизу напрямок і зветься силою ваги (або просто вага). Якщо вважати радіус Землі достатньо великим (приблизно 6,4 тис. км), то для тіл, розміри яких у порівнянні з цим радіусом є малими, сили ваги (тяжіння), що діють на частинки тіла, можна вважати паралельними, вони зберігають свою власну величину, незважаючи на будь-які повороти тіла.

Для визначення положення центра ваги тіло умовно можна поділити на багато частинок (рис. 9.3). Кожна частинка має силу ваги $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$. Як бачимо, це є система паралельних сил, рівнодійну якої \bar{Q} можна визначити, використовуючи вираз (9.4):

$$\bar{Q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \dots + \bar{q}_n = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k. \quad (9.12)$$

При будь-якому повороті тіла сили \bar{q}_k залишаються прикладеними до тих же самих точок і залишаються паралельними між собою. Змінюється лише напрямок цих сил по відношенню до тіла. А тому рівнодійна \bar{Q} буде при довільному повороті тіла прикладена у точці, яка є центром паралельних сил. Ця точка має назву центра ваги тіла.

Таким чином, центр ваги тіла – це геометрична точка, яка незмінно пов'язана з цим тілом, в якій прикладена сила тяжіння тіла і яка не змінює свого положення при довільному повороті тіла.

Визначимо координати центра ваги як центра паралельних сил $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$ на підставі виразів (9.11), а саме:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k y_k}{Q}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k z_k}{Q}. \quad (9.13)$$

де x_k, y_k і z_k – координати прикладання сили тяжіння частинок тіла \bar{q}_k .

Якщо тіло є однорідним, то вага кожної частини пропорційна її об'єму, а саме:

$$q_k = \gamma \cdot v_k, \quad (9.14)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); v_k – об'єм частинки тіла.

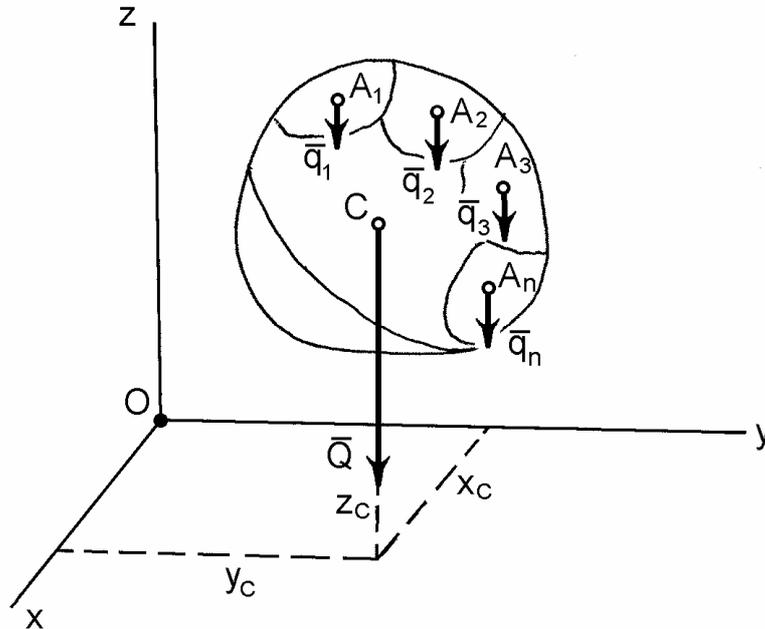


Рис. 9.3.

Вага усього тіла визначається так:

$$Q = \gamma \cdot V, \quad (9.15)$$

де V – об'єм тіла; γ – питома вага тіла.

Тепер підставимо (9.14) і (9.15) у (9.13). Причому питома вага γ , як загальний множник, скорочується. Отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma (v_k x_k)}{\gamma V} = \frac{\sum_{k=1}^n v_k x_k}{V}. \quad (9.16)$$

Аналогічно поведимось і при визначенні двох інших координат. Остаточно матимемо координати центра ваги об'єму:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n v_k x_k}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n v_k y_k}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n v_k z_k}{V}. \quad (9.17)$$

Як бачимо, центр ваги однорідного тіла залежить тільки від його геометричної форми. А тому, точка C , координати якої визначені виразом (9.17) носить назву – центр ваги об'єму.

Тепер, розглянемо пластину (рис. 9.4), товщина якої h відносно мала, то її координата z_C центра її ваги буде дорівнювати $z_C = \frac{h}{2}$.

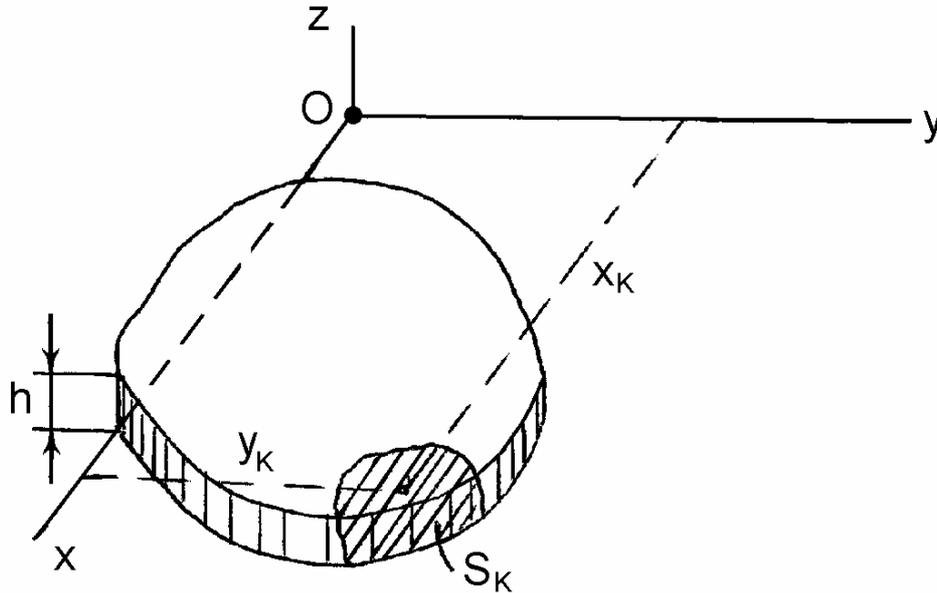


Рис. 9.4.

Для визначення двох інших координат x_C, y_C використаємо вирази (9.13). Пластину треба уявити у вигляді декількох частинок, які мають власну вагу. Далі вважаємо, що вага кожної частки пластини буде дорівнювати:

$$q_k = \gamma v_k = \gamma h s_k, \quad (9.18)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); h – товщина пластини; s_k – площа частинки пластини.

Вага всієї пластини буде дорівнювати:

$$Q = \gamma V = \gamma h S, \quad (9.19)$$

де S – площа пластини.

Тепер підставимо (9.18) і (9.19) у перші два вирази (9.13). Зробимо це спочатку для координати x_C :

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma h (s_k x_k)}{\gamma h \cdot S} = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}. \quad (9.20)$$

Аналогічно обчислимо значення і другої координати y_C . Остаточно матимемо координати центра ваги тонкої пластини:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S}. \quad (9.21)$$

Точка C , координати якої визначаються формулами (9.21), має назву центра ваги площі.

Тепер визначимо координати центра ваги лінії. Це може бути, наприклад, дріт малого діаметра і постійного поперечного перерізу (рис. 9.5).

Як і в попередніх випадках, спочатку визначимо вагу кожної частки лінії і вагу всієї лінії. Вага частки лінії буде дорівнювати:

$$q_k = \gamma v_k = \gamma S l_k, \quad (9.22)$$

де γ – питома вага (вага одиниці об'єму); S – площа поперечного перерізу лінії; l_k – довжина частки лінії.

Вага всієї лінії буде дорівнювати:

$$Q = \gamma V = \gamma S L, \quad (9.23)$$

де L – загальна довжина лінії.

Тепер підставимо значення (9.22) і (9.23) у (9.13) і визначимо спочатку координату x_C . Вона буде дорівнювати:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma S (l_k x_k)}{\gamma S L} = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}, \quad (9.24)$$

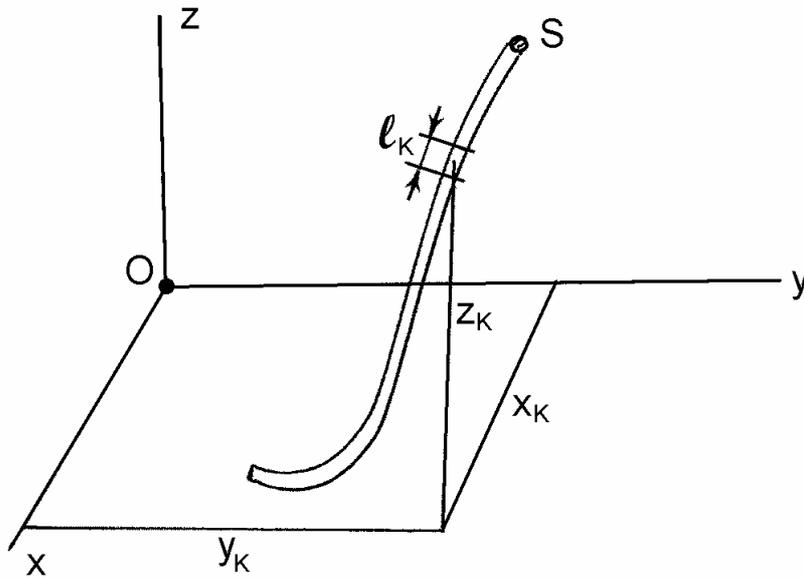


Рис. 9.5.

Таким же чином визначаємо дві інші координати центра ваги лінії. Отже:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k y_k}{L}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k z_k}{L}. \quad (9.25)$$

Як бачимо з виразу (9.25), координати центра ваги лінії залежать лише від довжини кожної частки лінії та загальної довжини.

9.4. Визначення координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі

Досі визначалися координати центра ваги однорідних тіл, в яких питома вага γ є величиною сталою ($\gamma = const$). Тепер визначимо координати центра ваги неоднорідного твердого тіла.

Уявимо неоднорідне тіло довільної форми (рис. 9.6). Розіб'ємо його на n елементарних елементів і виділимо з них один k -тий елемент. Позначимо його вагу через $\Delta\bar{q}_k$, x_k , y_k і z_k – координати центра ваги k -того елемента. Підставивши у формули координат центра ваги тіла (9.13) значення ваги елемента $\Delta\bar{q}_k$, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta q_k \cdot x_k}{Q}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta q_k \cdot y_k}{Q}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta q_k \cdot z_k}{Q}. \quad (9.26)$$

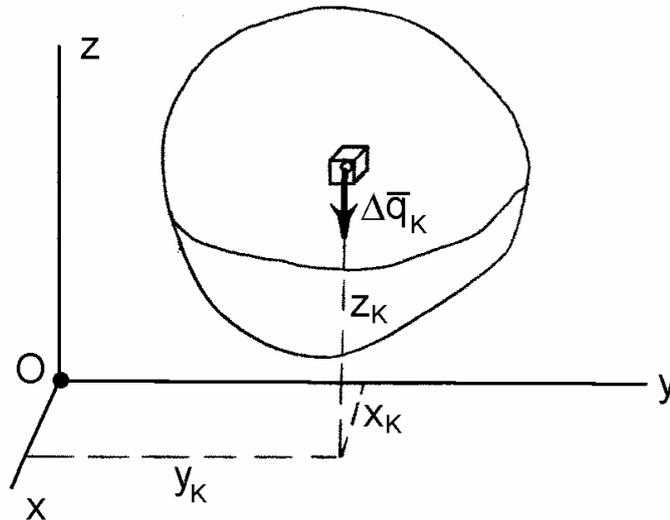


Рис. 9.6.

Точка прикладення сили $\Delta\bar{q}_k$ розташована всередині елемента. Для точного визначення точок прикладання цих сил необхідно, щоб об'єм кожного елемента n прямував до нуля, а число елементів необмежено зростало, тобто $n \rightarrow \infty$. А тому необхідно, щоб суми виразу (9.26) розглядались як границі:

$$x_C = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \Delta q_k}{Q}, \quad y_C = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k \Delta q_k}{Q}, \quad z_C = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \Delta q_k}{Q}, \quad (9.27)$$

де Q – вага всього тіла.

Як відомо, границі сум, що є в чисельниках виразу (9.27), не залежать від вибору точок прикладання сил $\Delta\bar{q}_k$ і є інтегралами, які можуть бути поширені по всьому об'єму тіла:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \Delta q_k &= \int_{(V)} x dq, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k \Delta q_k &= \int_{(V)} y dq, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \Delta q_k &= \int_{(V)} z dq.\end{aligned}\tag{9.28}$$

Тепер, якщо підставити вирази (9.28) у (9.27), то остаточно отримаємо координати центра ваги неоднорідного тіла в інтегральній формі:

$$x_C = \frac{\int_{(V)} x dq}{Q}, \quad y_C = \frac{\int_{(V)} y dq}{Q}, \quad z_C = \frac{\int_{(V)} z dq}{Q}.\tag{9.29}$$

Аналогічно можна визначити координати центра ваги об'єму тіла в інтегральній формі. Якщо вважати, що

$$dq = \gamma dV,\tag{9.30}$$

де dV – елемент об'єму тіла, а

$$Q = \gamma \cdot V,\tag{9.31}$$

де V – об'єм тіла, то, підставляючи (9.30) і (9.31) у (9.29) і скорочуючи на γ , отримаємо:

$$x_C = \frac{\int_{(V)} x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_{(V)} y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_{(V)} z dV}{V}.\tag{9.32}$$

З формул (9.32) випливає, що положення центра ваги однорідного тіла не залежить від фізичних властивостей його матеріалу, а залежить лише від геометричної форми і розмірів тіла.

В інтегральній формі можна визначити координати центра ваги площі. Знайдемо положення центра ваги однорідної пластини, яка має сталу товщину h (рис. 9.7). Координата z_C центра ваги буде дорівнювати

$z_C = \frac{h}{2}$. Визначимо інші дві координати. Також виділимо у пластині

елемент об'єму dV у формі елементарної призми з основою dS , висотою h і ребрами, що перпендикулярні площині симетрії пластинки. Елементарний об'єм dV дорівнює:

$$dV = h dS,\tag{9.33}$$

а повний об'єм пластини дорівнює:

$$V = h S,\tag{9.34}$$

де S – площа пластини.

Підставимо (9.33) і (9.34) у перші два рівняння виразу (9.32). Одержимо

$$x_C = \frac{\int_{(S)} x dS}{S}, \quad y_C = \frac{\int_{(S)} y dS}{S}.\tag{9.35}$$

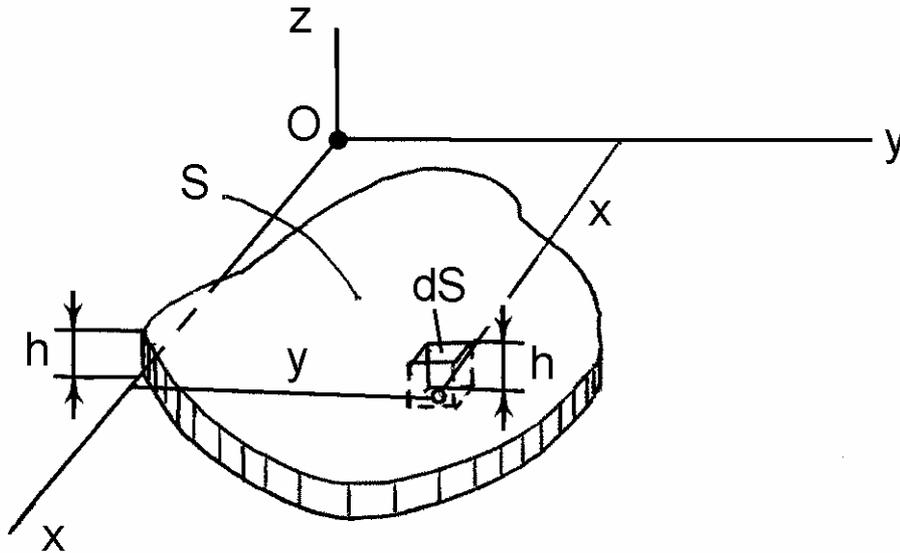


Рис. 9.7.

Формули (9.35) визначають координати центра ваги площі.

У формулах (9.35) в чисельниках стоять вирази статичних моментів площі відносно координатних осей Oy і Ox , а саме:

$$S_y = \int_{(S)} x dS, \quad S_x = \int_{(S)} y dS. \quad (9.36)$$

Таким же чином визначимо координати центра ваги лінії в інтегральній формі. Для цього візьмемо однорідне тіло, наприклад, у вигляді дроту AB з сталою площею поперечного перерізу S і довжиною L (рис. 9.8). Виділимо у дроті елемент dl певного об'єму. Якщо елемент має форму циліндра з основою S та висотою dl , то елементарний об'єм буде дорівнювати:

$$dV = S dl. \quad (9.37)$$

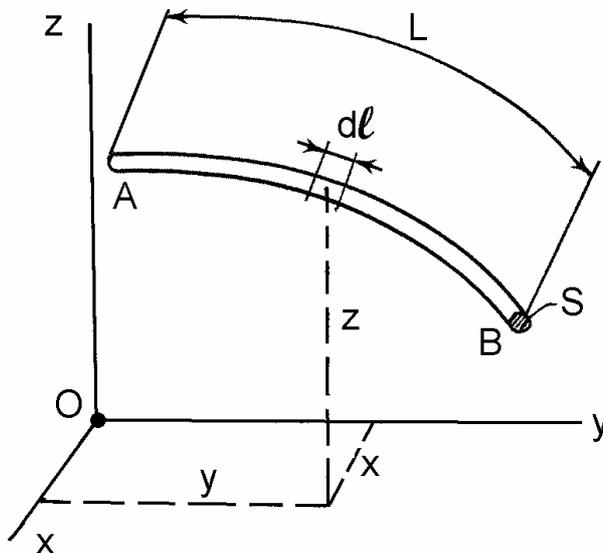


Рис. 9.8.

Повний об'єм тіла, що розглядається, буде дорівнювати:

$$V = S L. \quad (9.38)$$

Тепер, підставивши (9.37) і (9.38) у (9.32), визначимо координати центра ваги даного тіла:

$$x_C = \frac{\int x dl}{L}, \quad y_C = \frac{\int y dl}{L}, \quad z_C = \frac{\int z dl}{L}. \quad (9.39)$$

Інтегралі, що містяться у чисельниках виразу (9.39), мають назву криволінійних інтегралів. Як бачимо, положення центра ваги однорідного тіла у вигляді дроту не залежить від його поперечних розмірів. А тому формули (9.39) визначають координати центра ваги лінії.

Питання для самоконтролю

1. Що називають центром паралельних сил?
2. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
3. За якими формулами визначаються положення центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії?
4. Що таке центр ваги тіла?
5. Як записати формули координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі?

9.5. Способи визначення координат центра ваги тіла

Існує декілька способів визначення координат центра ваги тіл. Серед них розрізняють: метод симетрії, метод розбиття і доповнення, експериментальні способи.

Розглянемо послідовно ці способи.

9.5.1. Метод симетрії

Якщо однорідне тіло має площину, вісь, або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно у площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії.

Таким чином, центр ваги однорідних симетричних тіл, таких як кільця, прямокутні пластини, прямокутні паралелепіпеди, кулі та інші тіла, які мають центр симетрії, розташований у геометричних центрах (центри симетрії) цих тіл.

9.5.2. Метод розбиття

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких частин, для кожної з яких положення центра ваги легко визначається, то координати центра

ваги усього тіла можна визначити безпосередньо за формулами (9.13), (9.17), (9.21) і (9.25). Причому кількість доданків у чисельнику кожного з указаних виразів дорівнює кількості частин, на яке розбивається тіло.

Наведемо приклад визначення центра ваги тіла методом розбиття його на окремі тіла, центри ваги яких відомі.

Приклад 9.1

Визначити координати центра ваги однорідної пластини. Розміри в мм задані на рисунку 9.9.

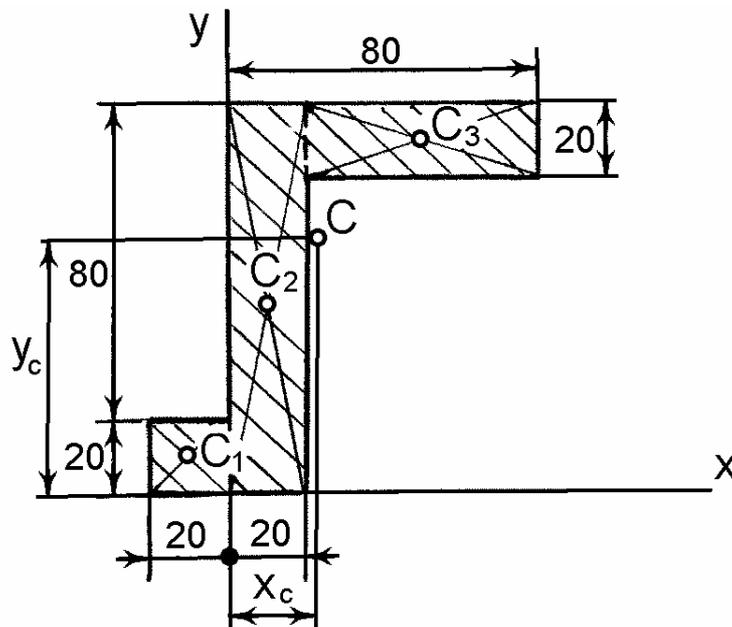


Рис. 9.9.

Розв'язання

Оберемо осі координат x і y . Розбиваємо пластину на окремі прямокутні частини. Для кожного прямокутника проводимо діагоналі, точки перетину яких c_1 , c_2 і c_3 відповідають центрам ваги кожного прямокутника. У прийнятій системі координат неважко отримати значення координат цих точок. А саме: $c_1(-1; 1)$, $c_2(1; 5)$, $c_3(5; 9)$. Площі кожного тіла відповідно дорівнюють: I – $s_1 = 4 \text{ см}^2$; II – $s_2 = 20 \text{ см}^2$; III – $s_3 = 12 \text{ см}^2$. Площа всієї пластини дорівнює: $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2$.

Для визначення координат центра ваги заданої пластини використаємо вираз (9.21). Підставивши значення всіх відомих величин у рівняння, отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = 2,1 \text{ см},$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S} = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = 5,9 \text{ см.}$$

За обчисленими значеннями координат центра ваги пластини можна позначити точку C на рисунку 9.9. Як бачимо, центр ваги (геометрична точка) пластини розташований за її межами.

9.5.3. Метод доповнення

Спосіб, про який йдеться далі, є деяким випадком способу розбиття. Він може застосовуватись до тіл, які мають вирізи, порожнини, причому без врахування вирізу або вирізаної частини тіла положення центра ваги тіла відомо. Розглянемо приклад застосування такого методу.

Приклад 9.2

Визначити положення центра ваги круглої пластини радіусом R , яка має круговий отвір радіуса r (рис. 9.10). Відстань $C_1 C_2 = a$.

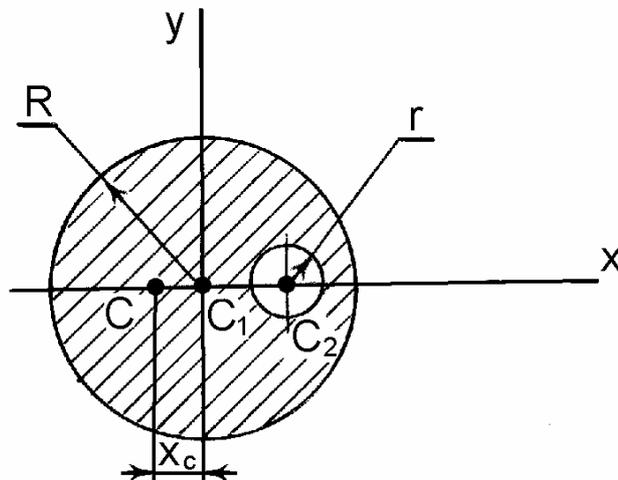


Рис. 9.10

Розв'язання

Як бачимо з рисунка, центр ваги пластини міститься на осі симетрії пластини x , тобто на прямій, яка проходить крізь точки C_1 і C_2 . Таким чином, для визначення положення центра ваги цієї пластини необхідно обчислити тільки одну координату x_C , оскільки друга координата y_C дорівнює нулю. Покажемо осі координат x, y . Приймемо, що пластини складається з двох тіл – з повного круга (без врахування вирізу) і тіла, яке утворено вирізом. У прийнятій системі координати x для вказаних тіл будуть дорівнювати: $x_1 = 0$; $x_2 = C_1 C_2 = a$. Площі тіл дорівнюють: $s_1 = \pi R^2$; $s_2 = -\pi r^2$. Загальна площа всього тіла буде дорівнювати фізич-

ній різниці між площами першого і другого тіл: $S = s_1 - s_2 = \pi(R^2 - r^2)$. Для визначення невідомої координати центра ваги заданої пластини використаємо перше рівняння виразу (9.21).

Підставивши значення усіх відомих величин у це рівняння, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = \frac{-a \cdot \pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)} = -\frac{a r^2}{(R^2 - r^2)}.$$

Таким чином, значення координати x_C від'ємне, а тому, оскільки друга координата $y_C = 0$, то центр ваги пластини C розміщений на осі x зліва від точки C_1 .

9.5.4. Експериментальні способи

Ці способи знайшли широке застосування при відшуванні положення центра ваги тіл складних форм і конфігурацій, для яких інші способи майже непридатні внаслідок громіздкості та складності. До таких тіл, в першу чергу, слід віднести комбайни, трактори, складні сільськогосподарські машини та знаряддя. При застосуванні експериментальних способів відшування положення центра ваги найбільш широко використовують метод підвішування та метод зважування тіл.

При застосуванні методу підвішування тіло на тросі підвішують за різні його точки. Напрямок троса, буде давати кожного разу напрямок сили ваги тіла. Тоді точка перетину цих напрямків і дає положення центра ваги тіла.

Використання другого методу – зважування вимагає вимірювання ваги усього тіла, а також окремих його частин. Розглянемо приклад застосування цього методу.

Приклад 9.3

Визначимо повздовжню координату центра ваги трактора, у якого повздовжня база становить l (рис. 9.11).

Розв'язання

Спочатку поставимо на платформу терезів задні колеса трактора, як це показано на рисунку. Отже, визначаємо силу тиску задніх коліс на платформу, або реакцію \bar{R}_A . Аналогічно визначаємо вагу переднього мосту, або реакцію \bar{R}_B . Цілком зрозуміло, що сума цих реакцій дорівнює загальній вазі трактора, а саме:

$$Q = R_A + R_B.$$

Тепер складемо алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки A . Вона дорівнює:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) = 0; \quad -R_B l + Q x_C = 0.$$

Звідки визначаємо поздовжню координату центра ваги:

$$x_C = \frac{R_B l}{Q}.$$

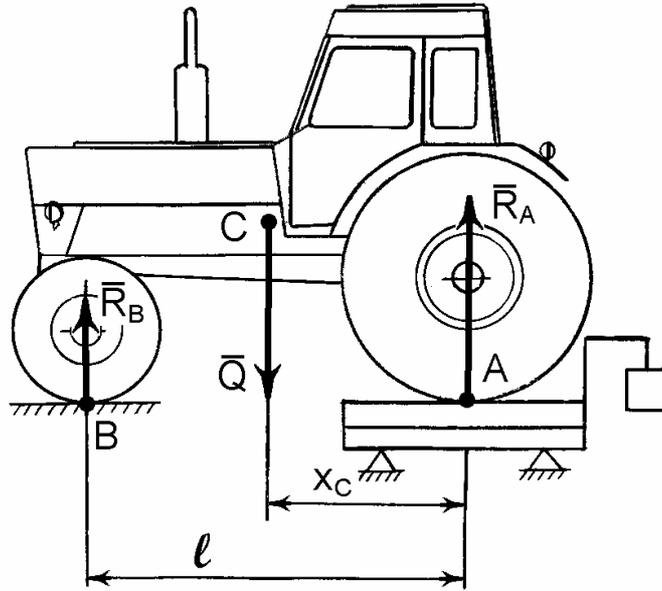


Рис. 9.11.

Для визначення поперечної координати центра ваги трактора необхідно знати реакції лівих коліс (переднього і заднього) і правих, а також поперечну базу трактора. Далі за аналогічним виразом визначається ця координата центра ваги.

9.6. Центри ваги деяких однорідних тіл

Визначимо далі координати центрів ваги деяких простих однорідних тіл.

9.6.1. Центр ваги дуги кола

Розглянемо дугу AB кола радіусом R , у якої центральний кут OAB дорівнює 2α (радіан) (рис. 9.12). Покажемо осі координат x, y , початок яких розмістимо у точці O . Внаслідок того, що дуга має вісь симетрії Ox , то центр її ваги буде розташований саме на цій осі ($y_C = 0$). Залишається тільки обчислити координату x_C .

Використаємо для обчислення цієї координати перше рівняння виразу (9.39), а саме:

$$x_C = \frac{\int x dl}{L}.$$

Визначимо складові, які необхідно підставити у це рівняння. Для цього виділимо на дузі AB елемент MM_1 довжиною dl , яка дорівнює:

$$dl = R d\varphi. \quad (9.40)$$

Якщо φ – кут, який визначає положення елемента MM_1 на дузі AB , то координата x елемента MM_1 буде дорівнювати:

$$x = R \cos \varphi. \quad (9.41)$$

Загальна довжина дуги AB дорівнює:

$$L = 2\alpha R. \quad (9.42)$$

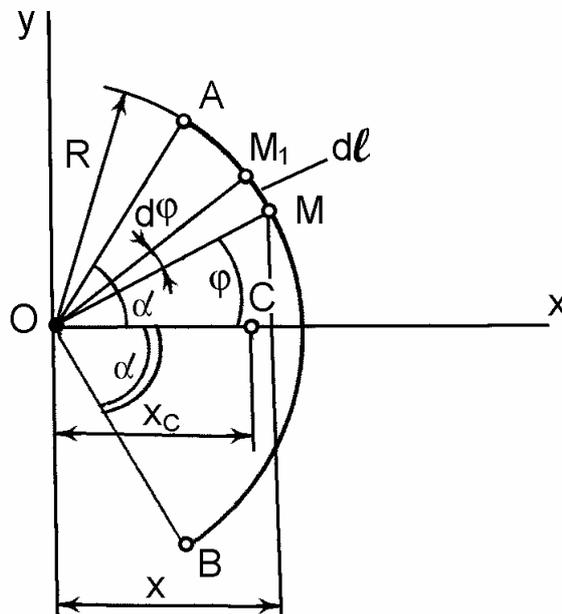


Рис. 9.12.

Підставимо ці значення у перше рівняння виразу (9.39). При цьому вважається, що інтеграл у чисельнику даного виразу повинен бути визначеним по всій довжині дуги:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R}{2\alpha} \left\{ \sin \alpha - \left[\sin (-\alpha) \right] \right\} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким чином, координата x_C буде дорівнювати:

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (9.43)$$

9.6.2. Центр ваги трикутника

Маємо довільний трикутник, вершини якого у прийнятій системі координат Ox відповідають точкам з координатами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ і $A_3(x_3, y_3)$ (рис. 9.13). Якщо провести прямі, які будуть паралельні основі A_1A_3 і провести їх достатню кількість, то вся площа трикутника буде складатися із смуг нескінченно малої ширини, центри ваги яких будуть розміщені посередині кожної смуги, а тому і центр ваги трикутника буде розташований на його медіані. А якщо провести лінії, які паралельні іншій стороні трикутника, то і в цьому випадку центр ваги буде розміщений на відповідній медіані. Таким чином, цілком очевидно, що центр ваги трикутника C буде розташований у точці перетину його медіан.

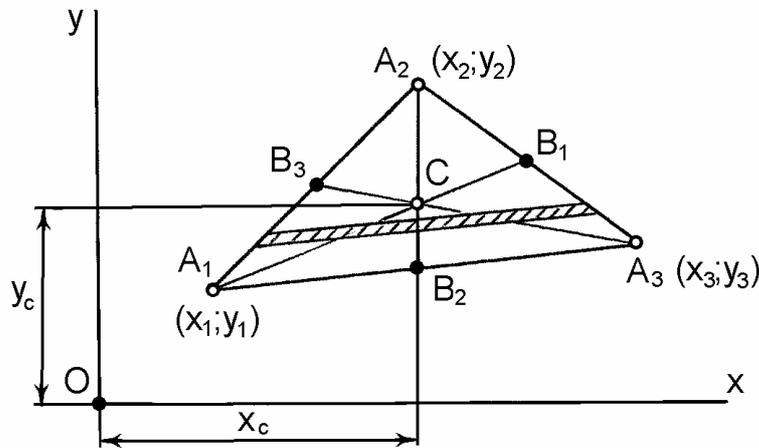


Рис. 9.13.

Визначимо координати цієї точки. Із курсу аналітичної геометрії відомо, що точка перетину медіан трикутника у прийнятій системі координат визначається такими залежностями:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_C &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \end{aligned} \quad (9.44)$$

де x_1, x_2, \dots, y_3 – координати вершин трикутника.

Корисно також знати, що:

$$\begin{aligned} CA_1 &= \frac{2}{3} A_1B_1; & CB_1 &= \frac{1}{3} A_1B_1; \\ CA_2 &= \frac{2}{3} A_2B_2; & CB_2 &= \frac{1}{3} A_2B_2; \\ CA_3 &= \frac{2}{3} A_3B_3; & CB_3 &= \frac{1}{3} A_3B_3; \end{aligned}$$

9.6.3. Центр ваги сектора

Розглянемо коловий сектор OAB радіуса R , центральний кут якого дорівнює 2α (радіан) (рис. 9.14). Центр ваги сектора, цілком очевидно, лежить на осі його симетрії, тобто на бісектрисі кута AOB . Цю бісектрису приймемо за вісь x і знайдемо на цій осі положення центра C . Розіб'ємо площу сектора на нескінченно велике число елементарних секторів з центральними кутами $\Delta\varphi$.

Будемо розглядати кожний сектор як трикутник з основою $R\Delta\varphi$ і висотою R . Центр ваги кожного трикутника розташований на відстані $r = \frac{2}{3}R$ від центра сектора. Таким чином, центри ваги всіх трикутників розташовані на дузі $A'B'$. Отже, якщо $\Delta\varphi \rightarrow 0$, то центри ваги утворять дугу $A'B'$, тоді необхідно знайти центр ваги дуги кола радіусом r :

$$x_C = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}$$

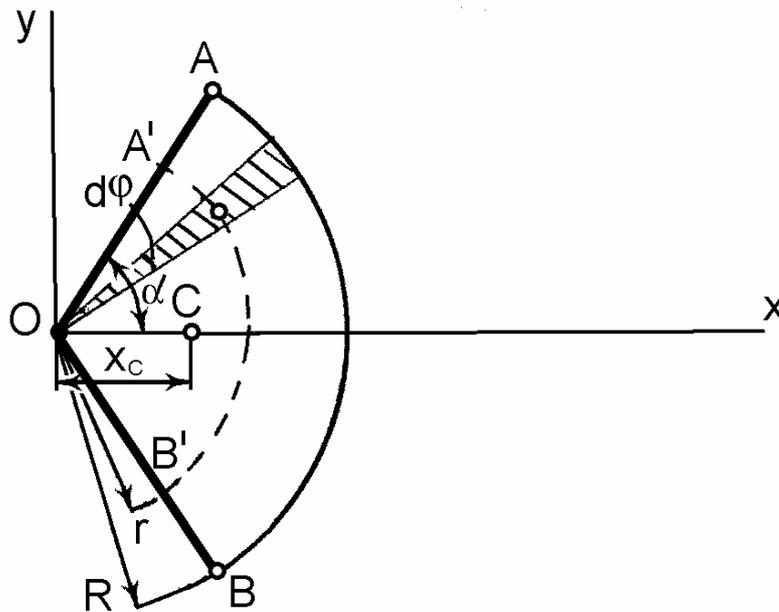


Рис. 9.14.

Тоді, враховуючи, що

$$r = \frac{2}{3}R,$$

матимемо остаточно:

$$x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (9.45)$$

Питання для самоконтролю

1. Які існують способи визначення координат центра ваги тіла?
2. Як визначити координати центра ваги дуги кола?
3. Як визначити координати центра ваги трикутника?
4. Як визначити координати центра ваги сектора?
5. Що таке метод симетрії, як і коли їм користуються?
6. Метод розбивання тіла на частини і його застосування.
7. Коли і як можна користуватись методом підвішування?
8. Як визначаються координати центра ваги складних машин?
9. На перетині яких характерних прямих розміщений центр ваги трикутника?
10. Яка відстань вздовж медіани від центра ваги трикутника до вершини, до основи?

10. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ "ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА"

Нижче наведені варіанти індивідуального завдання для студентів інженерних факультетів.

Всі необхідні розміри для знаходження положення центра ваги даної фігури надані на рисунках.

Номер індивідуального завдання студент вибирає наступним способом. Якщо в перших трьох групах число студентів складає відповідно n_1 , n_2 і n_3 і якщо $n_1 + n_2 + n_3 \leq 76$, то студенти вибирають номер завдання згідно списку в груповому журналі:

для першої групи $1, 2, \dots, n_1$;

для другої групи $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$;

для третьої групи $n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3$.

Якщо в наступних трьох групах число студентів відповідно дорівнює n_4, n_5 і n_6 , причому $n_4 + n_5 + n_6 \leq 76$, то номер завдання становить:

для четвертої групи $1, 2, \dots, n_4$;

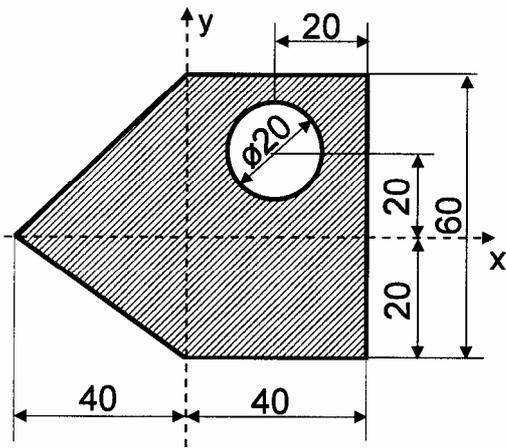
для п'ятої групи $n_4 + 1, n_4 + 2, \dots, n_4 + n_5$;

для шостої групи $n_4 + n_5 + 1, n_4 + n_5 + 2, \dots, n_4 + n_5 + n_6$,

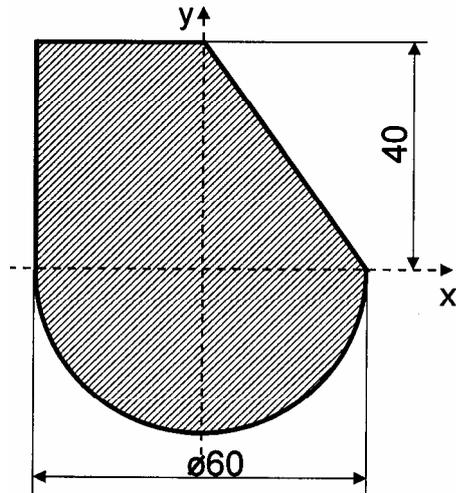
причому розміри на рисунках для кожного варіанту необхідно збільшити в два рази.

Аналогічно робимо і для наступних номерів груп з числом студентів n_7, n_8, n_9 і n_{10}, n_{11}, n_{12} , збільшуючи для кожної наступної трійки груп розміри на рисунках в три і чотири рази відповідно.

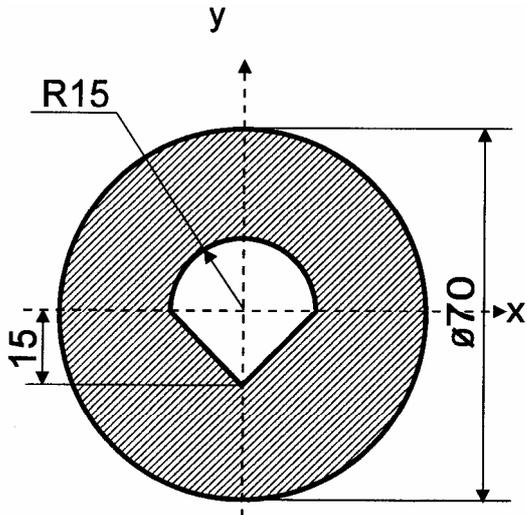
1



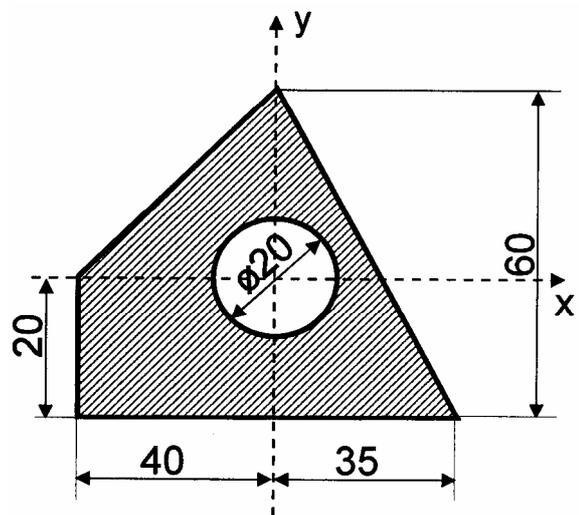
2



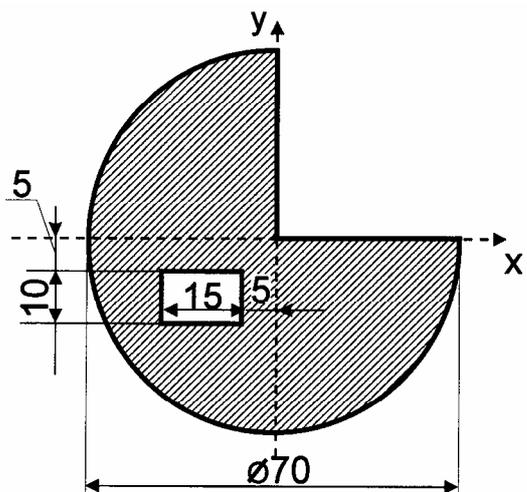
3



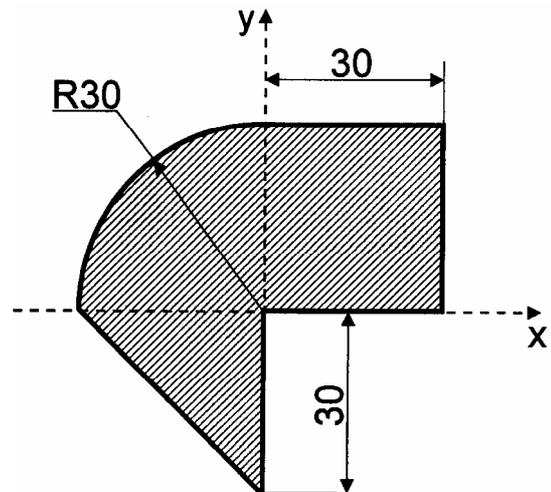
4



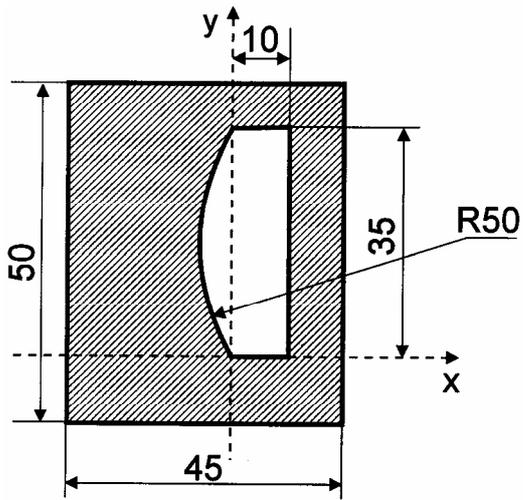
5



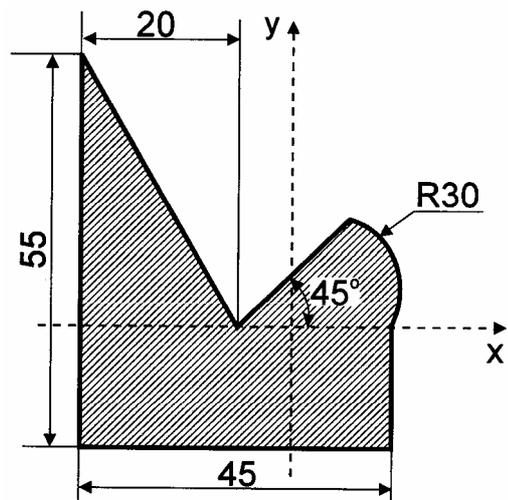
6



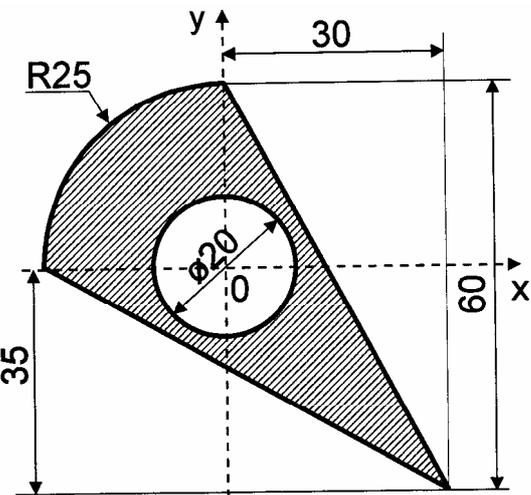
7



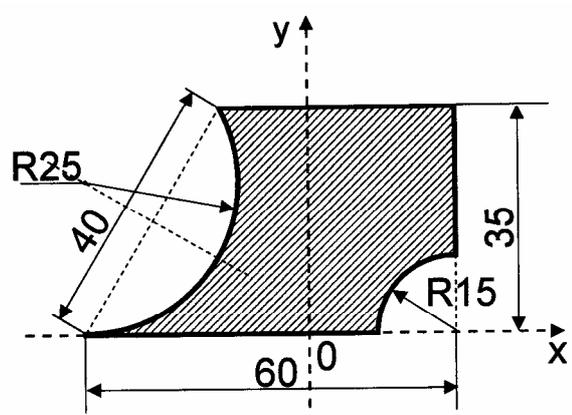
8



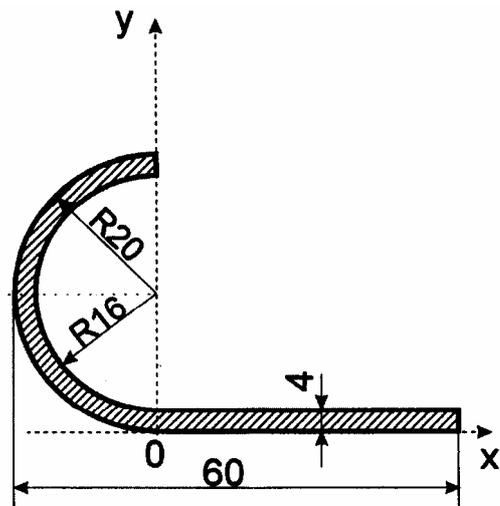
9



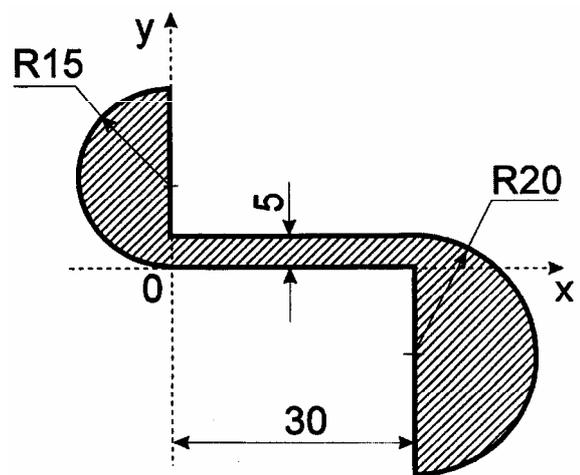
10



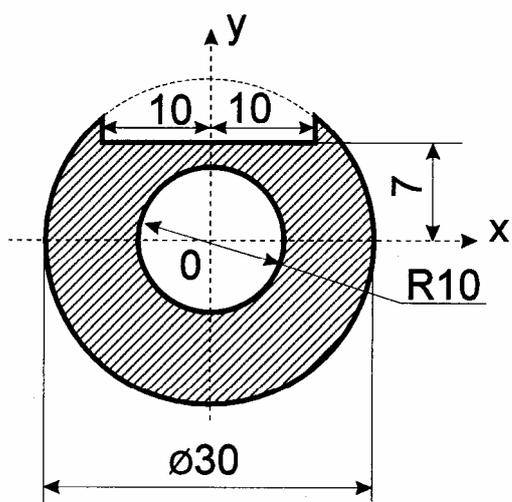
11



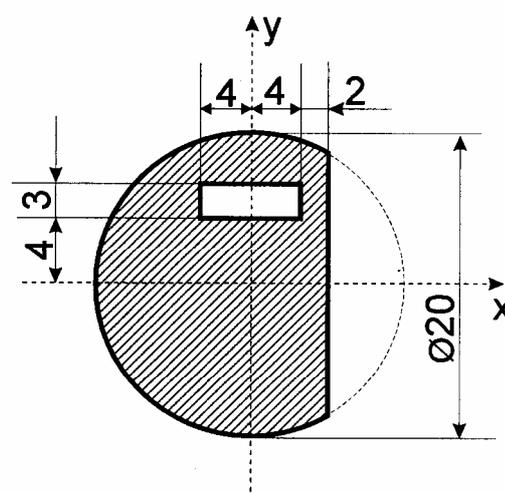
12



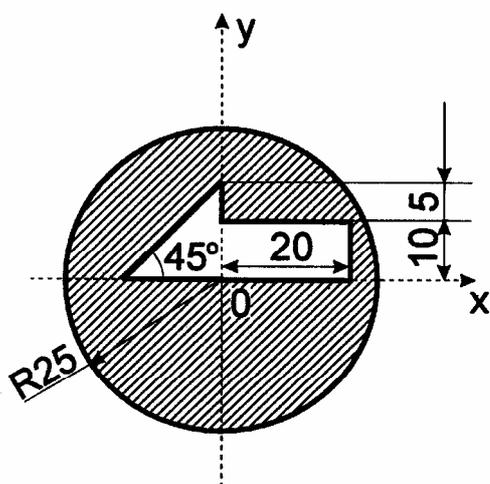
19



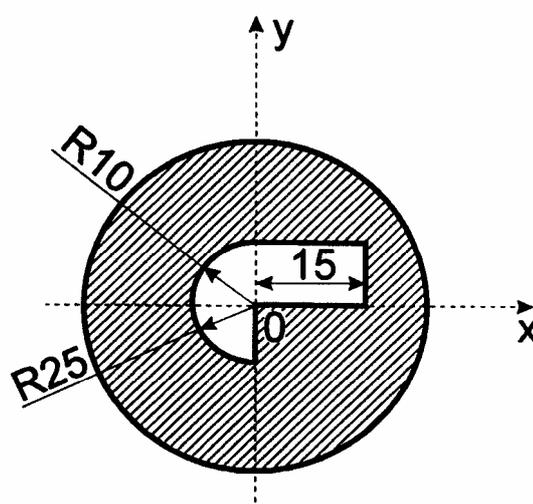
20



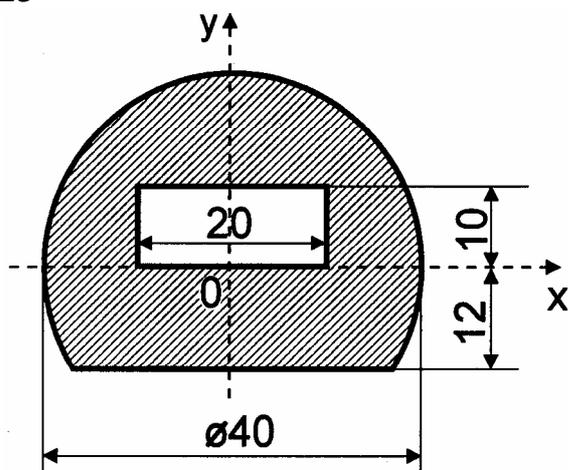
21



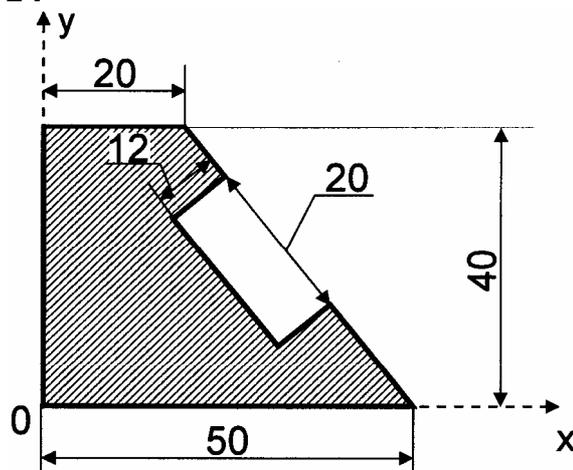
22



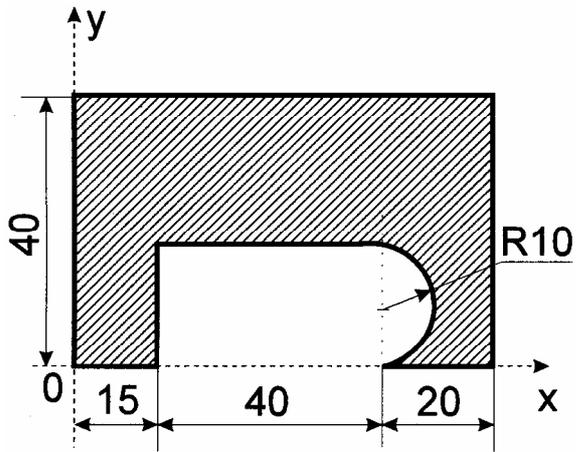
23



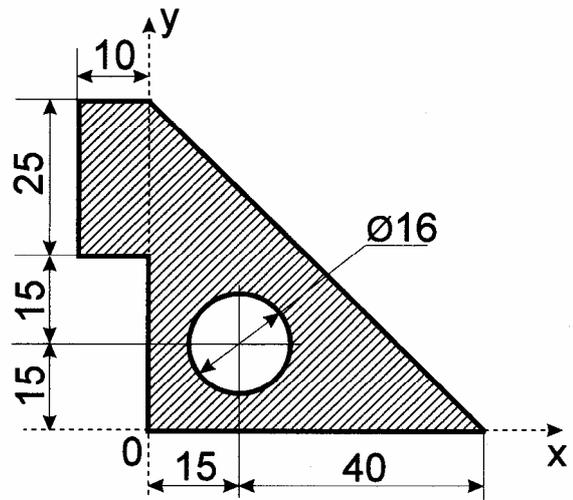
24



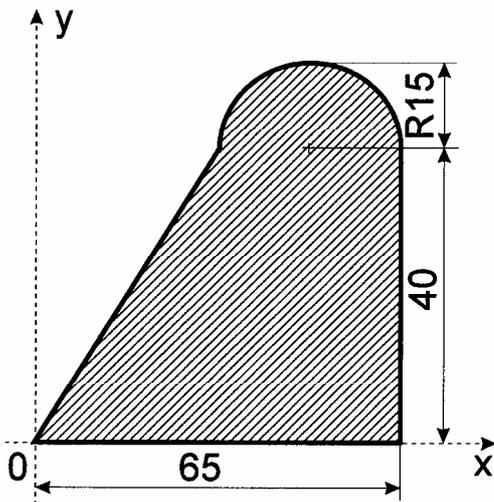
25



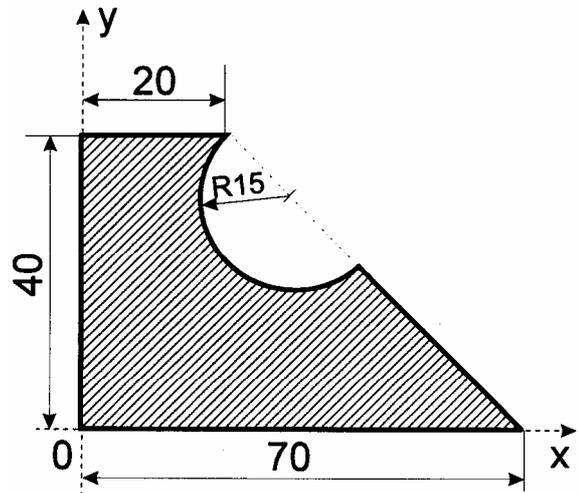
26



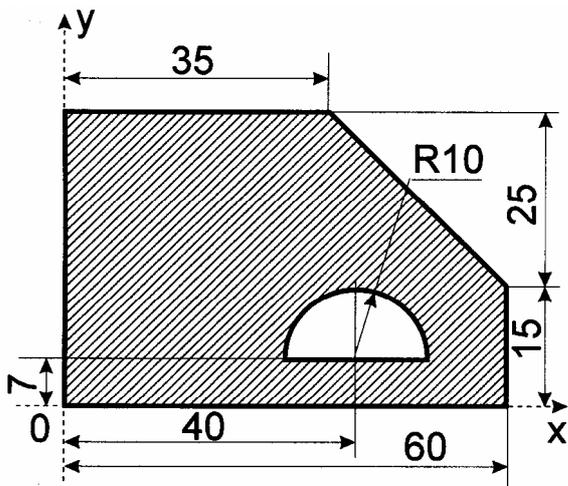
27



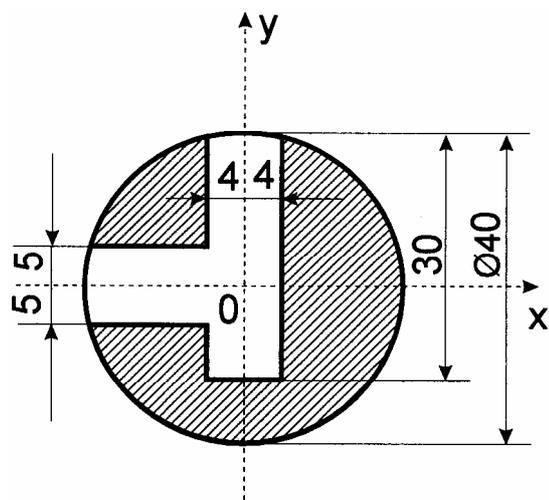
28



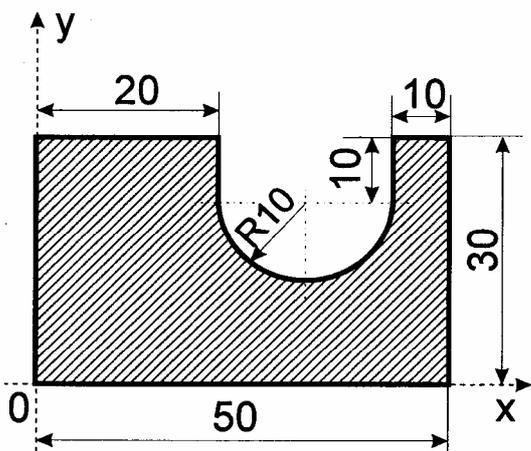
29



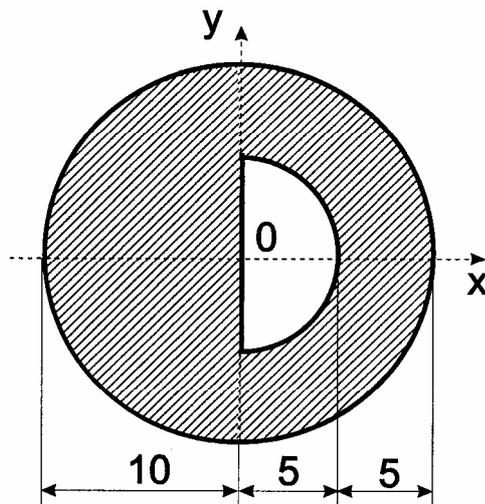
30



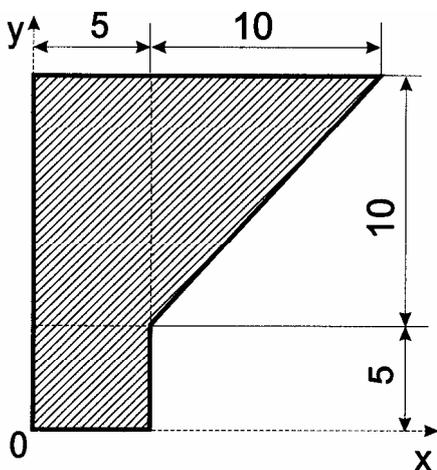
31



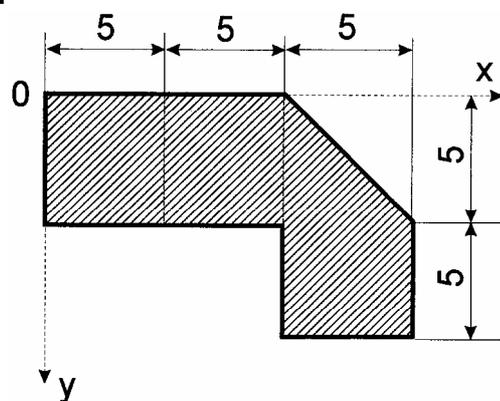
32



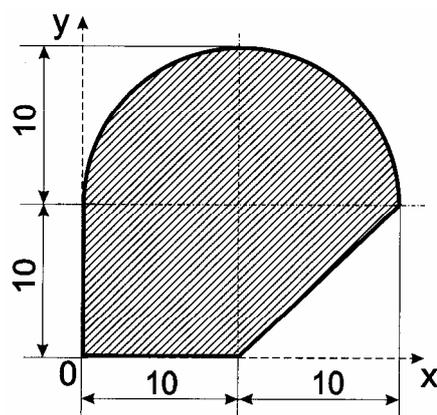
33



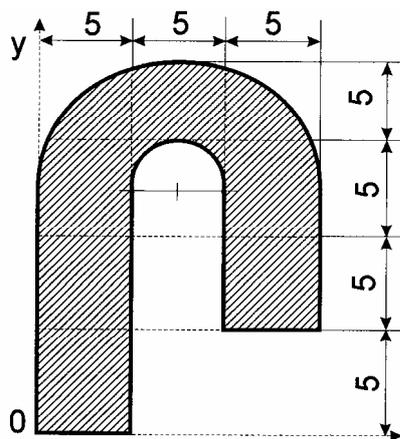
34



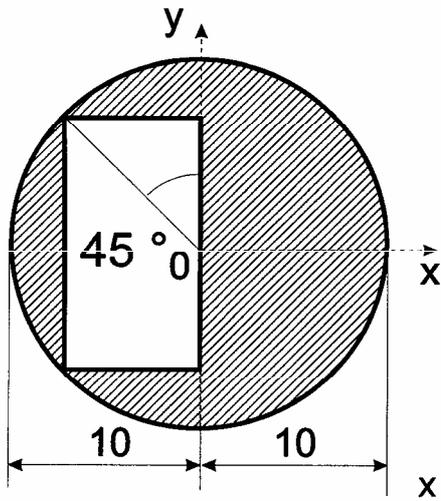
35



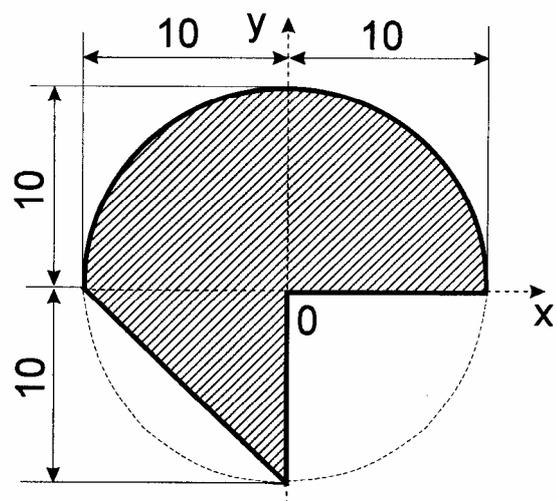
36



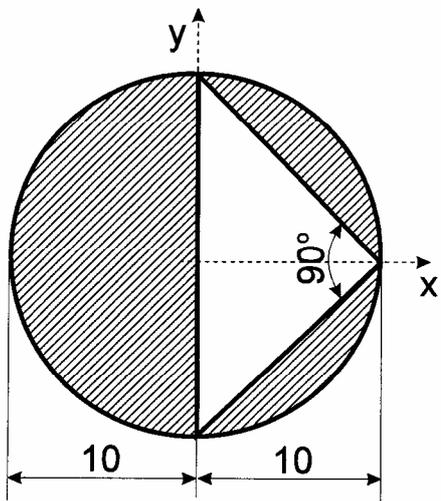
37



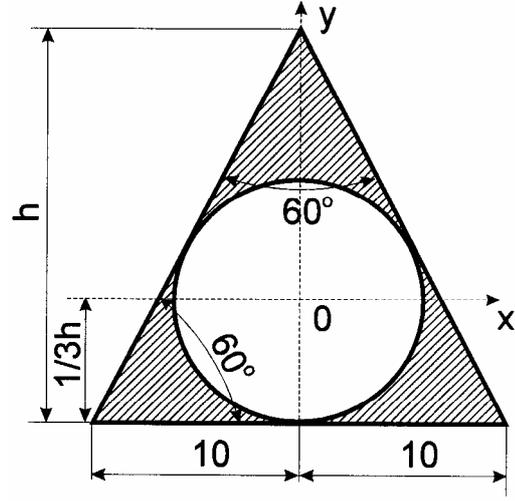
38



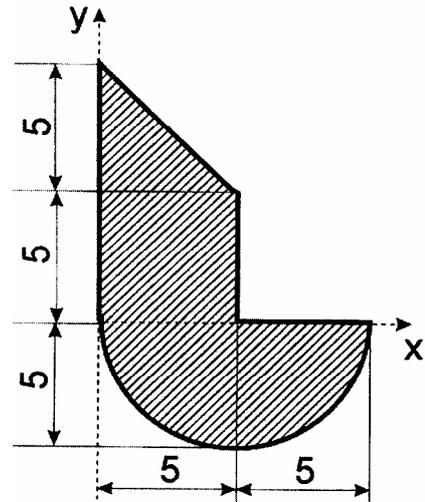
39



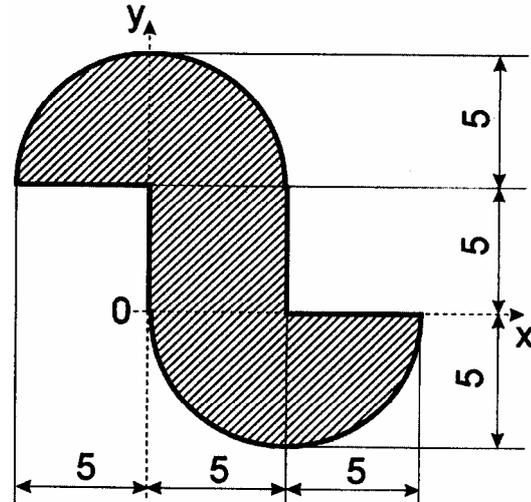
40



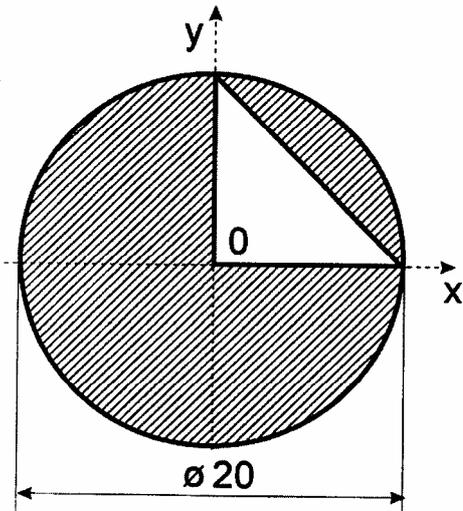
41



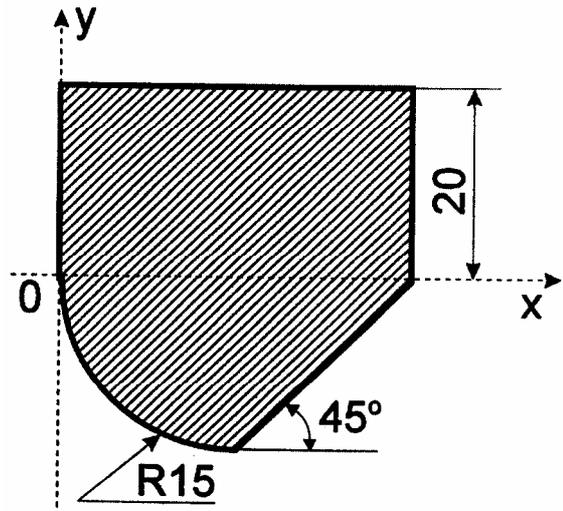
42



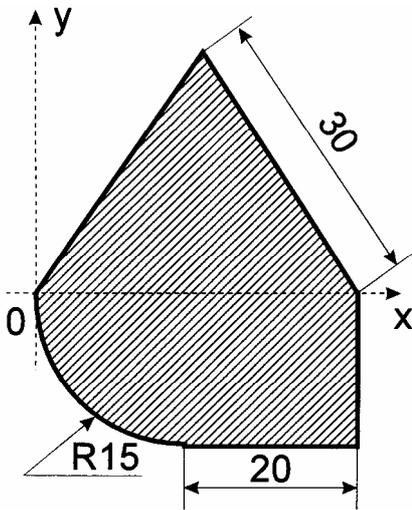
43



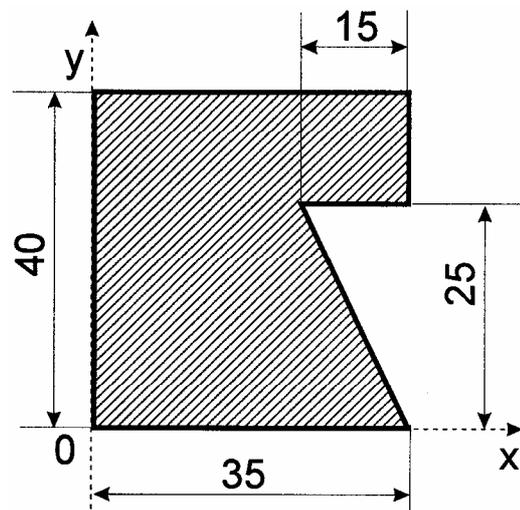
44



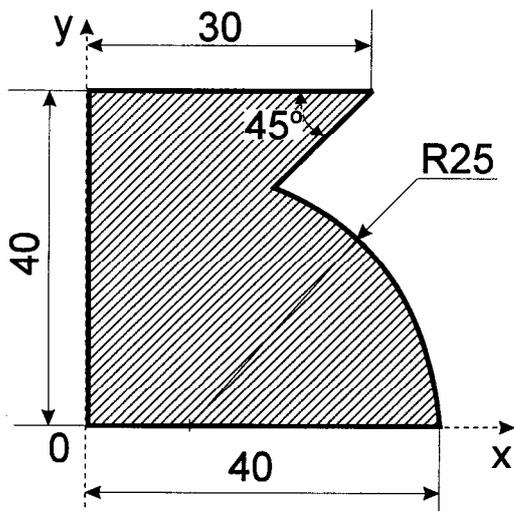
45



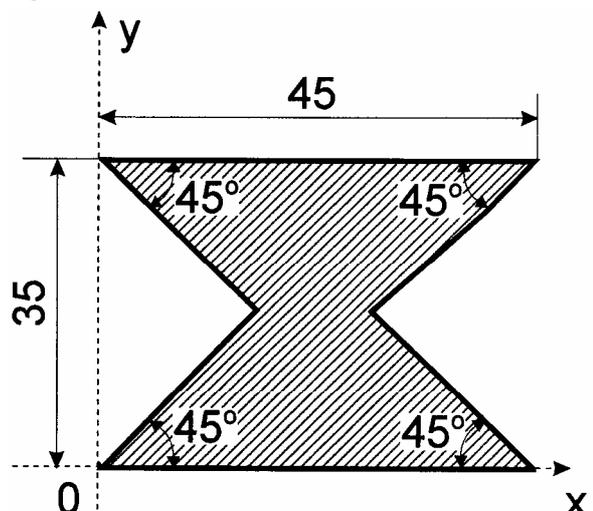
46



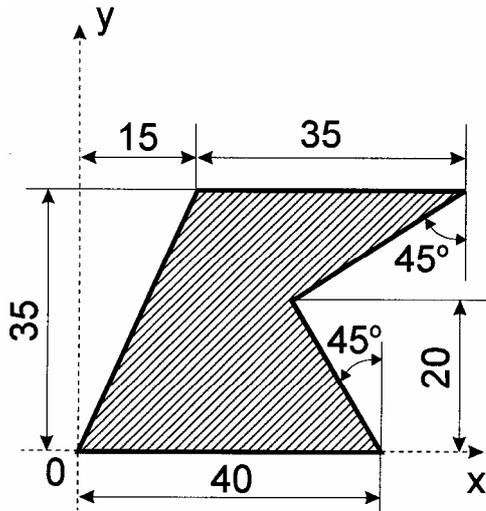
47



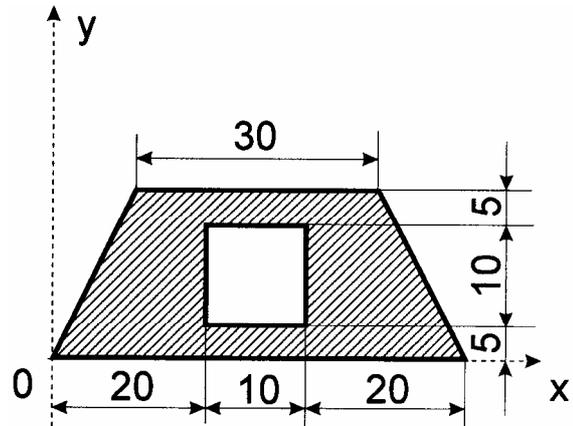
48



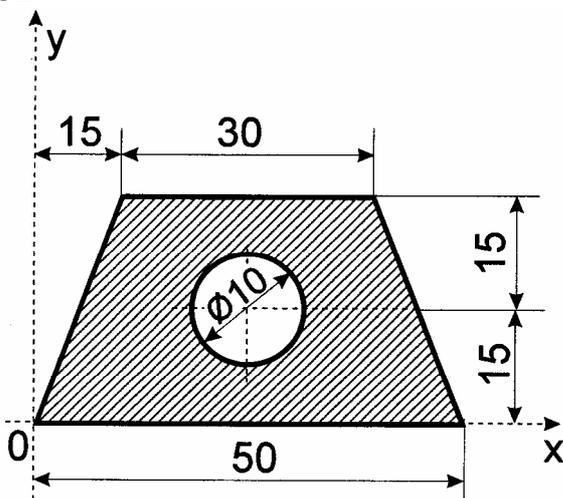
49



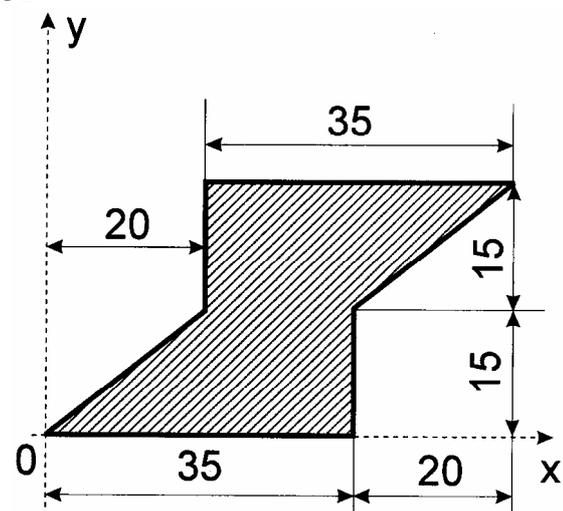
50



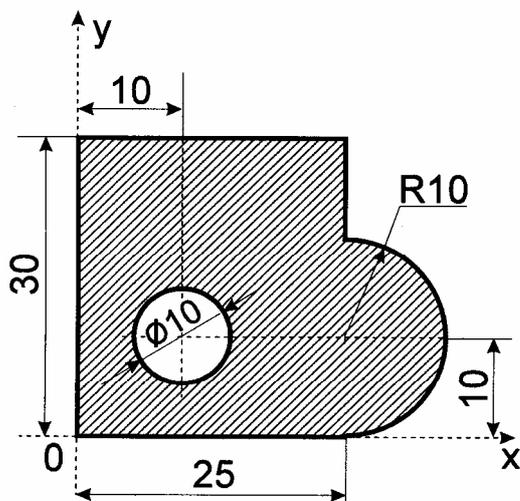
51



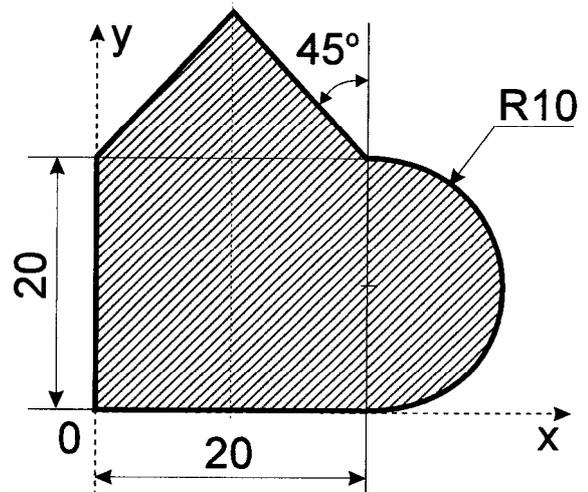
52

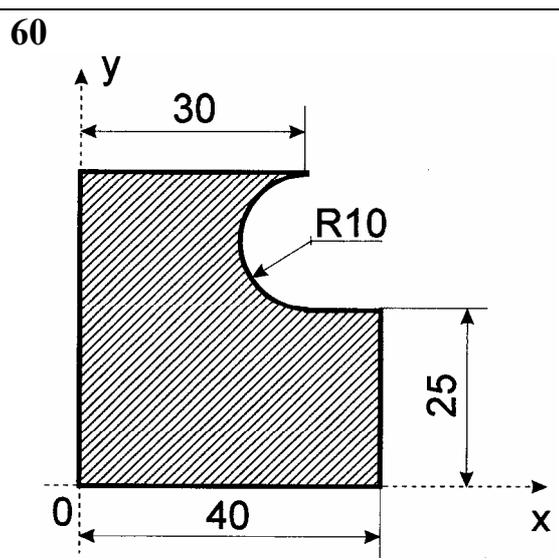
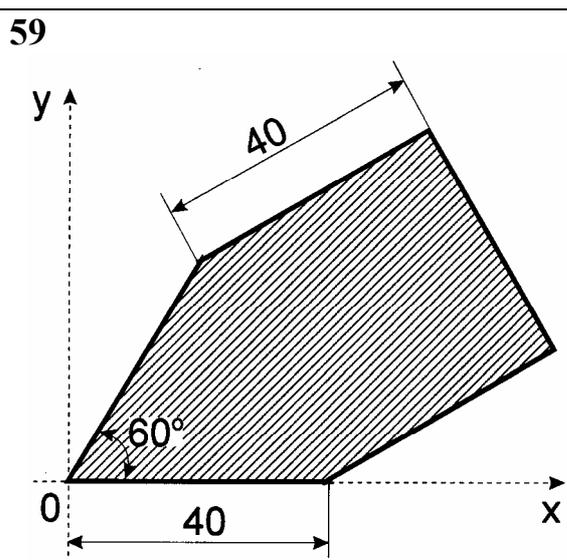
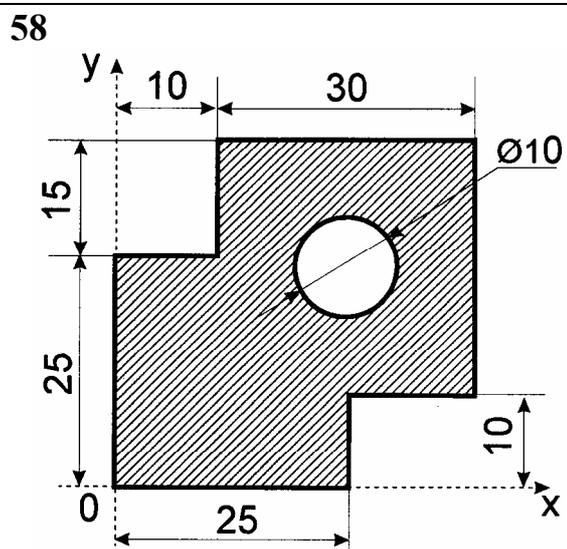
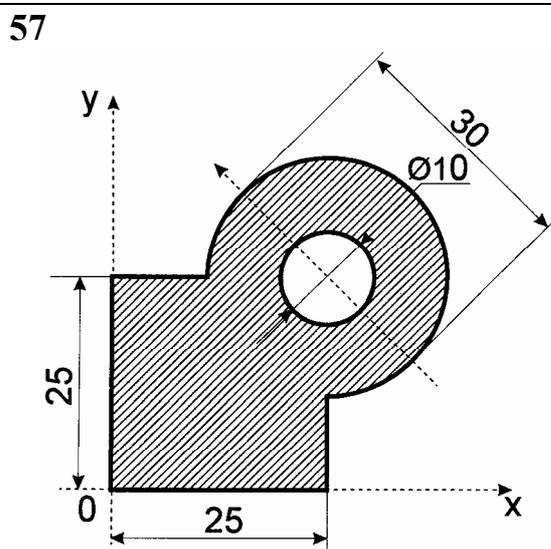
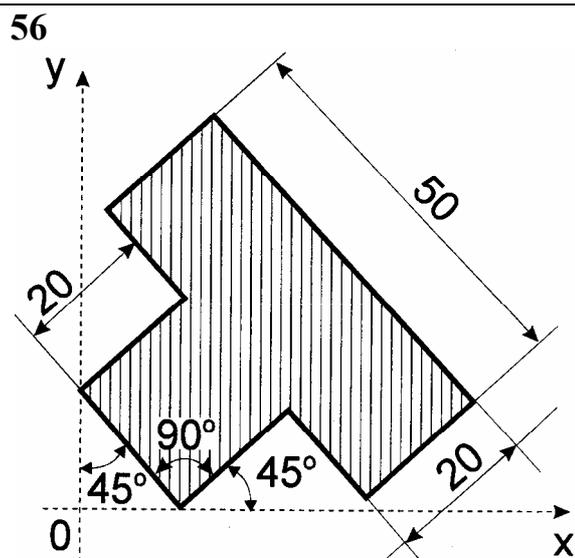
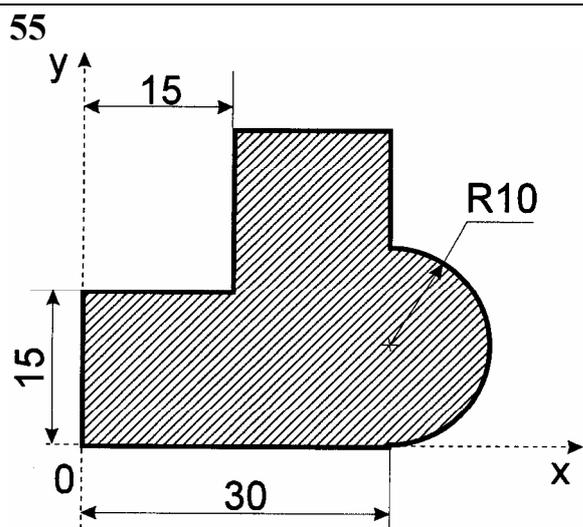


53

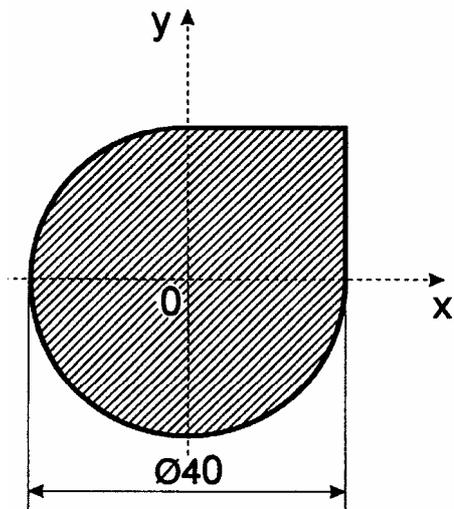


54

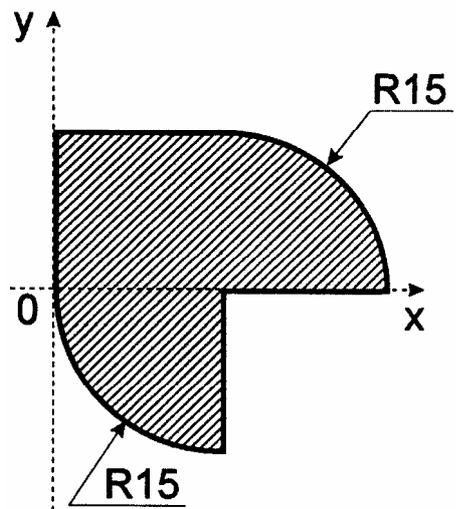




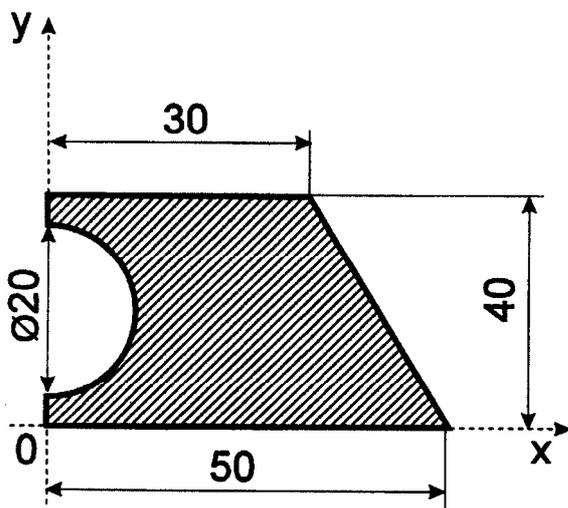
61



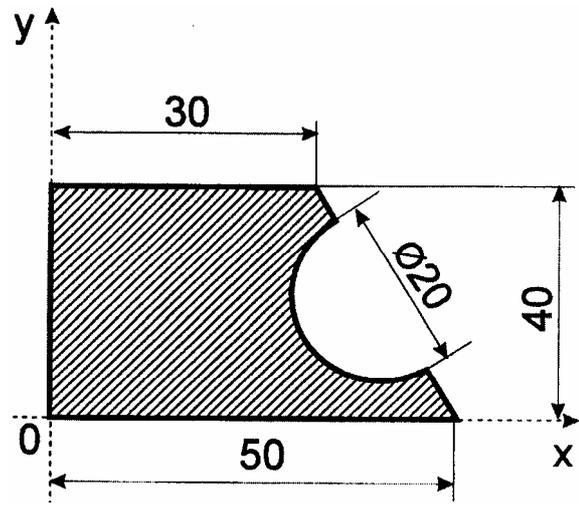
62



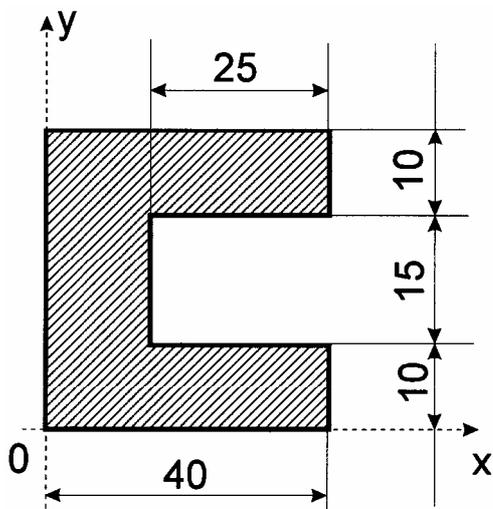
63



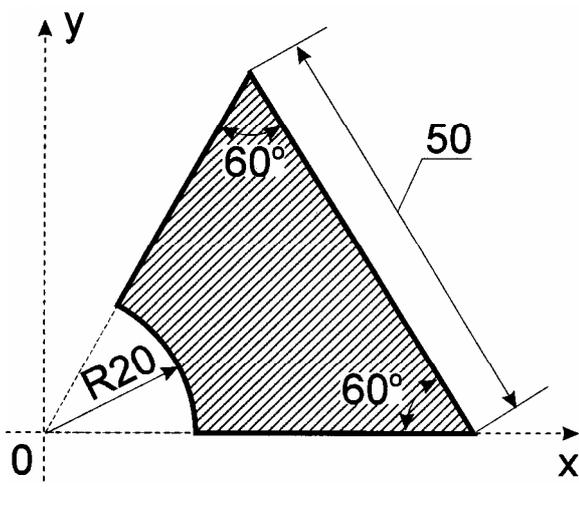
64

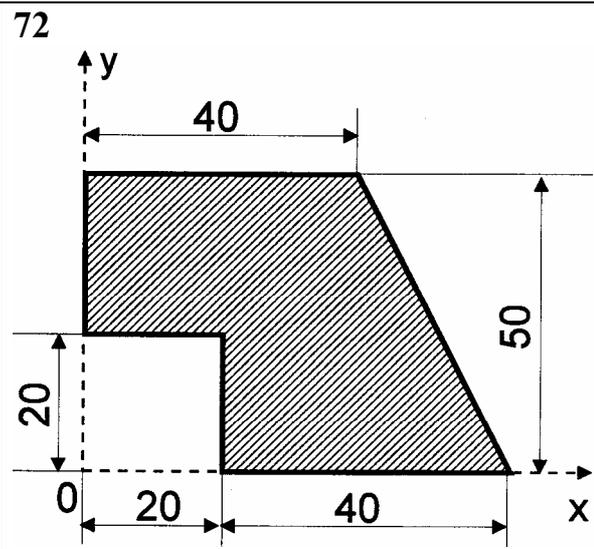
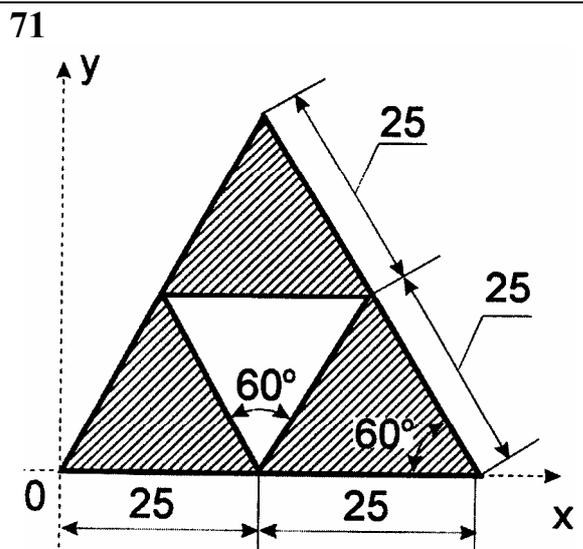
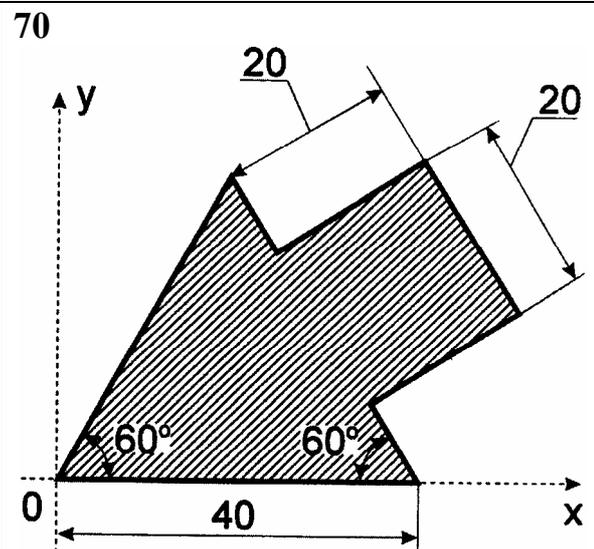
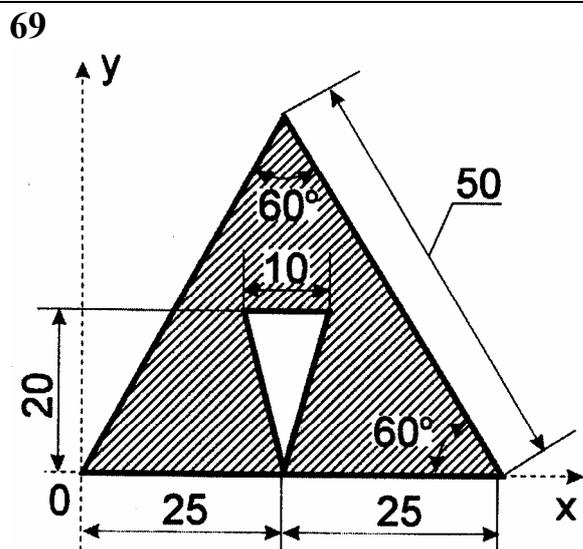
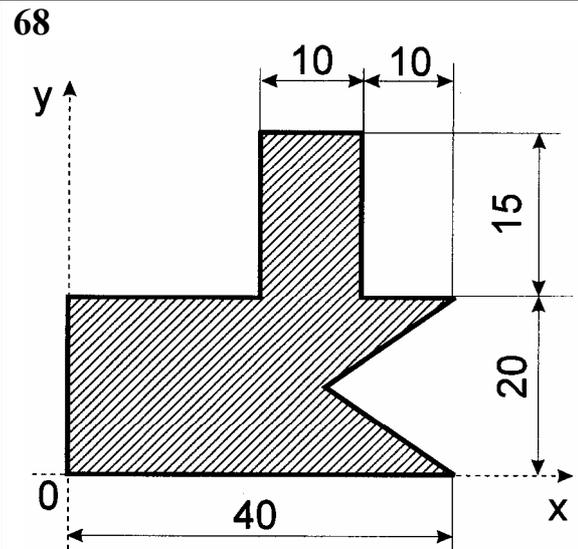
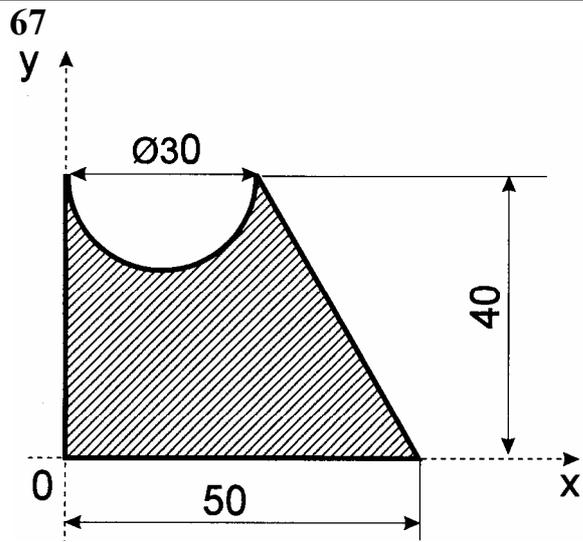


65

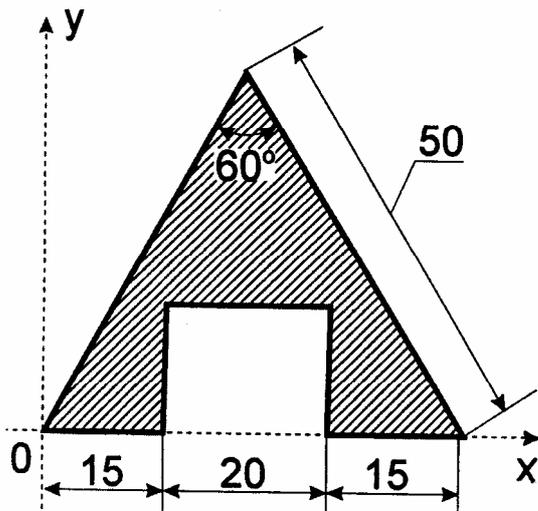


66

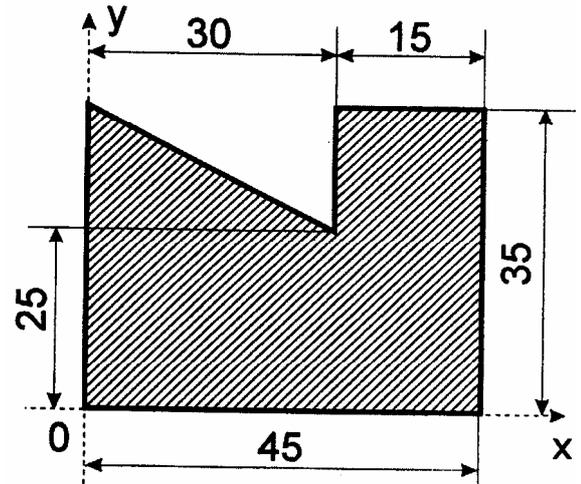




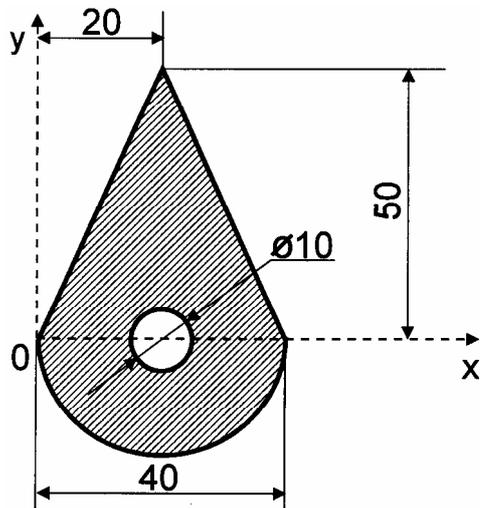
73



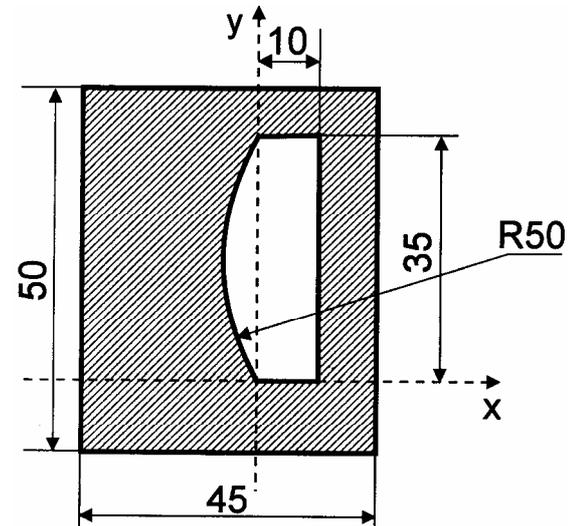
74



75



76



11. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ "ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ"

Нижче наведені варіанти індивідуального завдання для студентів інженерних факультетів.

Всі необхідні схеми та розміри для визначення реакцій опор надані в таблиці 11.1 та таблиці 11.2.

Номер індивідуального завдання студент вибирає наступним способом. Якщо в перших трьох групах число студентів складає відповідно n_1 , n_2 і n_3 і якщо $n_1 + n_2 + n_3 \leq 76$, то студенти вибирають номер завдання згідно списку в груповому журналі:

для першої групи $1, 2, \dots, n_1$;

для другої групи $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$;

для третьої групи $n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3$.

Якщо в наступних трьох групах число студентів відповідно дорівнює n_4, n_5 і n_6 , причому $n_4 + n_5 + n_6 \leq 76$, то номер завдання становить:

для четвертої групи $1, 2, \dots, n_4$;

для п'ятої групи $n_4 + 1, n_4 + 2, \dots, n_4 + n_5$;

для шостої групи $n_4 + n_5 + 1, n_4 + n_5 + 2, \dots, n_4 + n_5 + n_6$,

причому розміри на рисунках для кожного варіанту необхідно збільшити в два рази.

Аналогічно робимо і для наступних номерів груп з числом студентів n_7, n_8, n_9 і n_{10}, n_{11}, n_{12} , збільшуючи для кожної наступної трійки груп розміри на рисунках в три і чотири рази відповідно.

Таблиця 11.1

Варі- ант	F_1	F_2	α	β	M	q	a	b	c	d
	кН		град		кН·м	кН/м	м	м	м	м
1	10	15	30	45	20	15	2,0	0,8	1,2	1,0
2	7	18	60	30	10	12	1,0	1,5	1,5	2,0
3	20	12	75	30	18	10	2,0	1,0	3,0	1,0
4	8	7	60	75	30	5	2,0	3,0	1,0	2,0
5	12	15	30	20	18	7	2,0	2,0	1,5	2,5
6	16	8	75	15	20	10	1,0	2,0	1,0	2,0

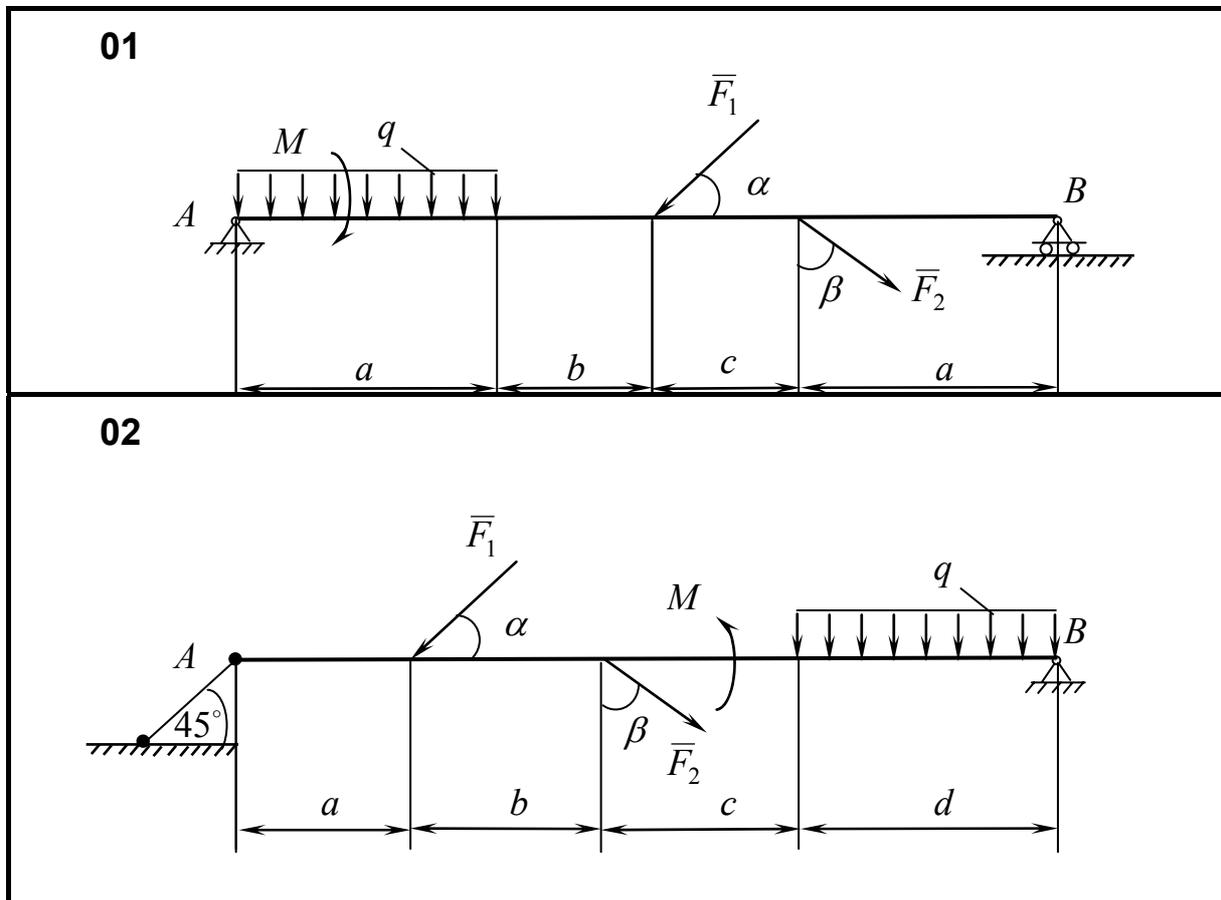
Вариант	F_1	F_2	α	β	M	q	a	b	c	d
	кН		град		кН·м	кН/м	м	м	м	м
7	10	18	60	20	15	12	1,0	1,0	2,0	1,0
8	8	20	30	30	10	10	1,0	2,0	0,8	1,2
9	15	6	60	15	20	7	1,4	0,6	0,2	1,8
10	5	18	20	40	15	8	2,2	0,8	1,0	1,0
11	7	20	45	20	10	15	2,0	2,0	2,0	1,0
12	10	12	25	75	18	5	2,0	3,0	1,5	1,5
13	15	10	70	20	15	5	3,0	2,0	1,0	2,0
14	20	8	60	40	20	10	2,0	1,0	0,6	1,4
15	18	12	15	30	18	15	1,2	0,8	0,4	1,6
16	10	18	60	40	15	10	1,0	1,0	0,8	1,2
17	6	20	45	30	8	20	1,0	1,8	1,2	2,0
18	12	15	25	60	6	10	1,5	0,5	1,0	1,0
19	16	16	45	15	20	15	2,5	1,5	2,5	1,5
20	20	8	75	25	10	10	2,0	2,0	2,5	1,5
21	15	10	20	30	18	5	2,5	1,5	2,0	1,0
22	10	15	30	45	20	10	2,0	2,0	2,0	2,0
23	12	8	60	30	12	12	1,0	1,0	2,0	1,0
24	7	15	75	30	16	10	1,5	2,5	1,0	2,0
25	10	20	30	20	8	7	1,0	2,0	2,0	2,0
26	5	18	30	30	30	5	2,0	1,0	2,0	1,0
27	18	12	60	15	10	10	3,0	1,0	2,0	2,0
28	16	8	70	20	12	8	1,5	2,5	2,0	2,0
29	12	15	75	15	20	5	2,0	2,0	3,0	1,0
30	18	10	15	30	15	5	2,0	2,0	4,0	3,0
31	20	8	60	40	8	10	2,0	1,0	1,5	1,5
32	15	15	20	30	16	5	2,0	1,0	1,5	1,5
33	10	18	25	75	10	5	3,0	1,0	1,0	2,0
34	6	20	15	60	8	10	1,2	1,8	1,0	2,0
35	8	16	45	20	10	15	2,0	1,0	2,5	1,5
36	20	10	75	60	12	10	2,0	2,0	1,5	2,5

Варі- ант	F_1	F_2	α	β	M	q	a	b	c	d
	кН		град		кН·м	кН/м	м	м	м	м
37	12	18	30	75	18	5	3,0	2,0	1,5	1,5
38	15	12	45	30	8	7	1,5	1,5	3,0	2,0
39	16	8	70	20	12	10	2,0	0,5	2,5	1,0
40	10	15	15	40	18	12	1,2	0,8	2,0	1,0
41	14	12	20	45	12	10	3,0	2,0	1,5	1,5
42	20	8	30	30	10	5	2,0	1,0	1,5	1,5
43	10	18	30	60	8	5	2,0	1,0	4,0	2,0
44	15	15	25	60	20	7	1,5	1,5	3,0	2,0
45	7	18	45	15	15	5	2,0	2,0	1,0	3,0
46	12	7	25	15	12	10	2,0	2,0	1,5	1,5
47	20	12	60	45	10	10	2,0	2,0	2,5	1,5
48	10	18	75	20	16	15	3,0	2,0	1,0	3,0
49	12	8	20	45	12	12	2,0	3,0	1,5	1,5
50	16	25	15	25	18	7	1,0	2,0	1,5	1,5
51	6	20	30	20	6	7	3,0	1,0	2,0	1,0
52	10	16	25	40	10	10	2,0	1,0	2,0	1,0
53	20	12	70	30	12	10	3,0	2,0	1,0	1,0
54	8	6	20	15	15	5	3,0	2,0	1,0	2,0
55	18	10	45	60	8	15	2,0	1,0	1,5	1,0
56	7	15	25	75	20	12	1,5	2,0	1,0	1,5
57	15	18	15	30	16	20	2,0	1,5	2,0	–
58	10	25	60	15	12	10	2,0	1,0	1,5	1,5
59	16	16	30	45	6	5	1,0	1,0	3,0	1,5
60	12	20	25	20	10	7	3,0	1,5	1,5	1,0
61	14	12	70	60	15	20	2,0	3,0	1,5	1,0
62	8	10	45	40	20	12	3,0	2,0	2,0	3,0
63	7	8	20	70	18	10	2,0	1,5	2,0	1,0
64	6	15	15	25	16	7	2,0	1,0	3,0	1,0
65	10	15	30	45	20	15	2,0	1,8	1,2	2,0
66	7	18	60	30	10	12	1,0	1,5	2,0	2,5

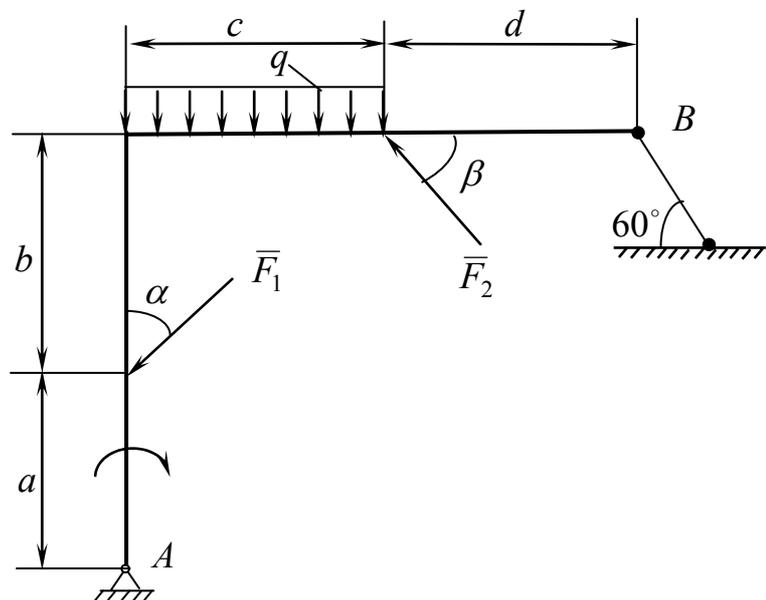
Вариант	F_1	F_2	α	β	M	q	a	b	c	d
	кН		град		кН·м	кН/м	м	м	м	м
67	20	12	75	20	18	10	3,0	2,0	3,0	–
68	8	7	25	15	30	5	2,0	3,0	2,0	1,0
69	12	15	45	60	18	7	3,0	1,0	1,0	2,0
70	16	8	70	40	20	10	1,0	2,0	2,0	2,0
71	10	18	15	75	15	12	1,5	2,5	2,0	1,0
72	8	20	30	70	10	10	1,0	1,5	1,0	1,5
73	15	6	20	45	16	15	1,5	1,0	2,0	0,5
74	5	18	60	25	12	8	2,0	1,5	1,5	2,0
75	17	20	25	30	14	12	2,0	1,5	2,0	1,5
76	12	15	75	20	15	20	2,0	2,5	0,5	1,0

Таблиця 11.2

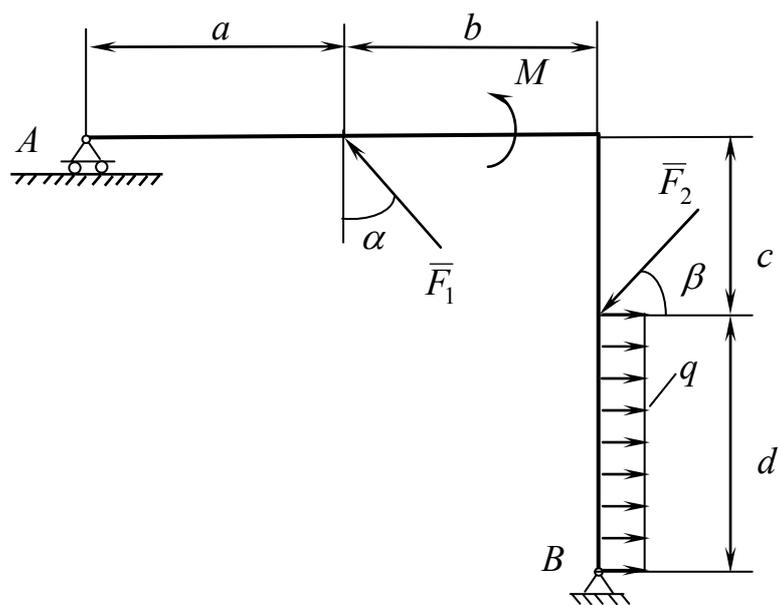
Схеми завдань



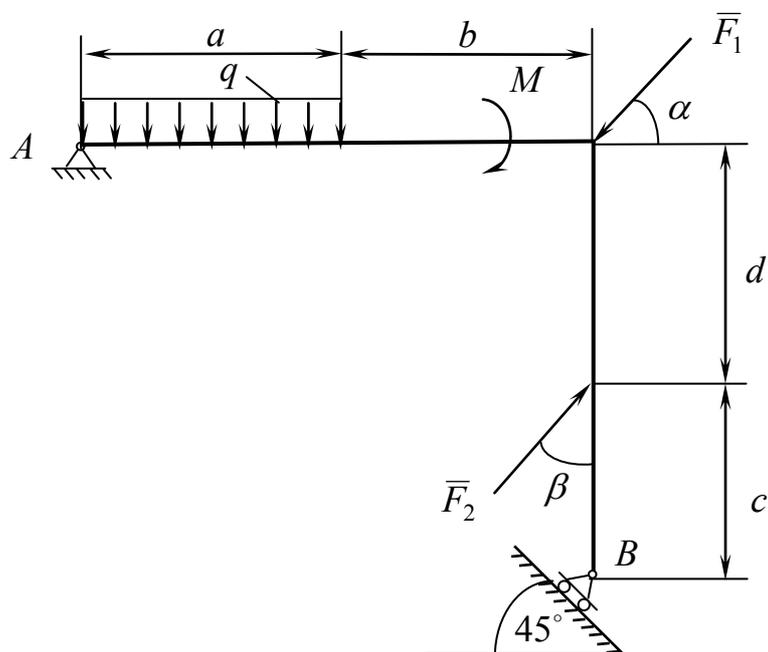
03



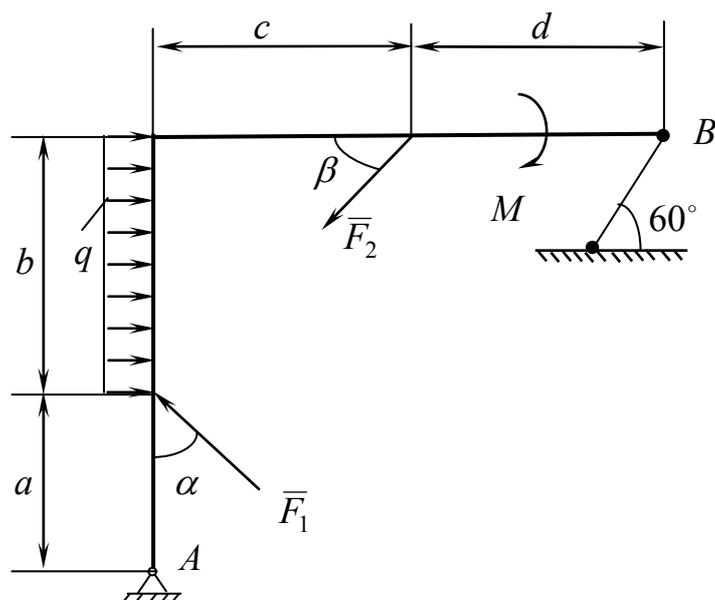
04



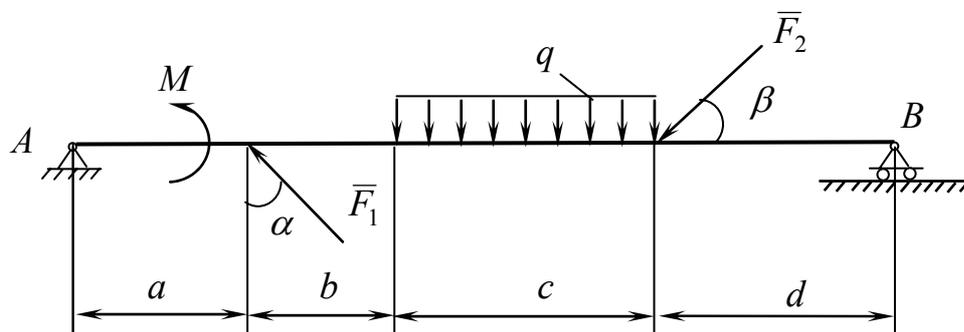
05



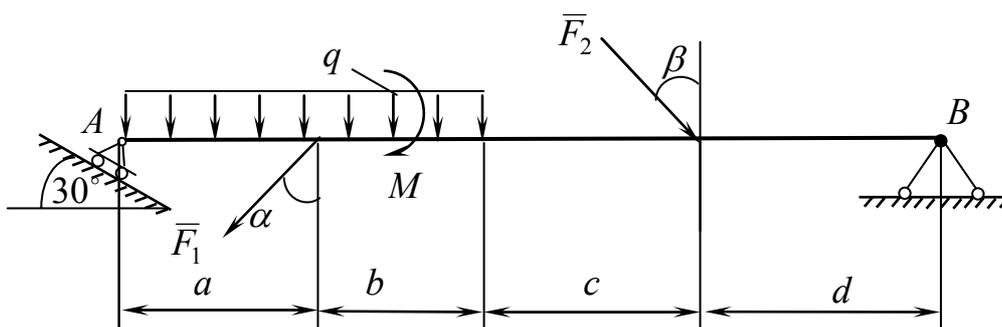
06



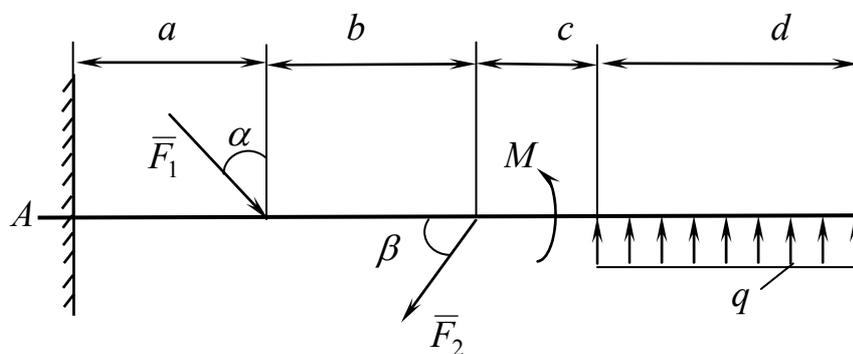
07



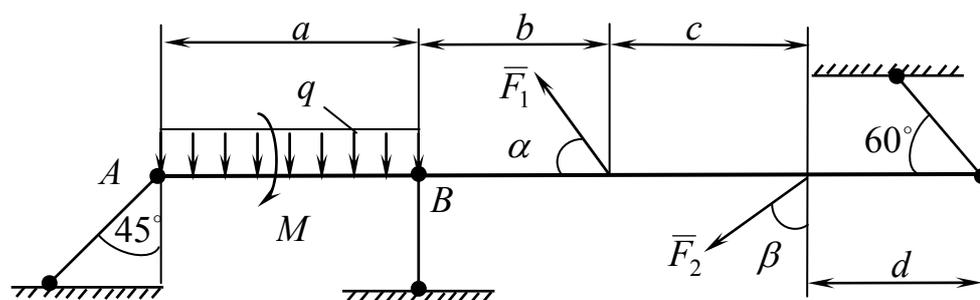
08



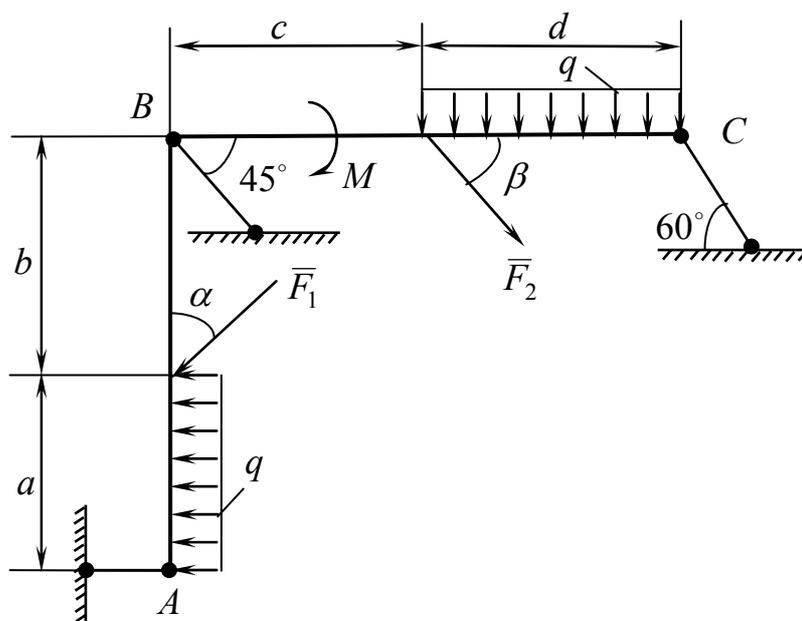
09



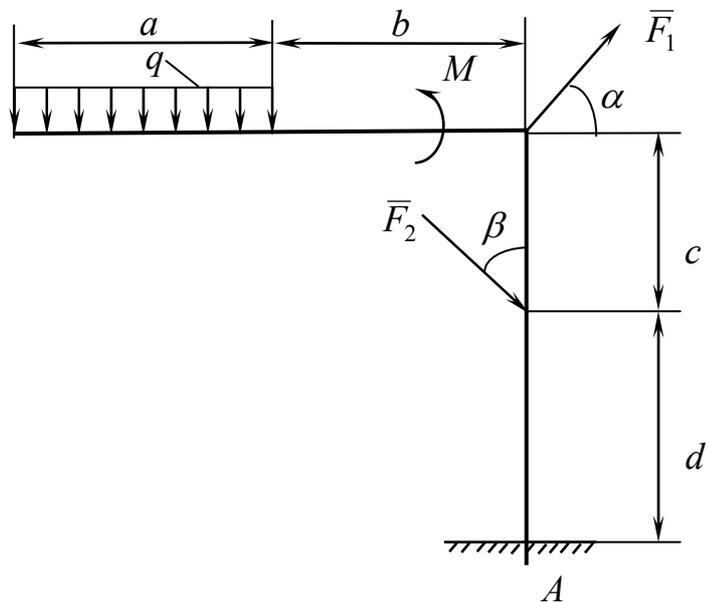
10



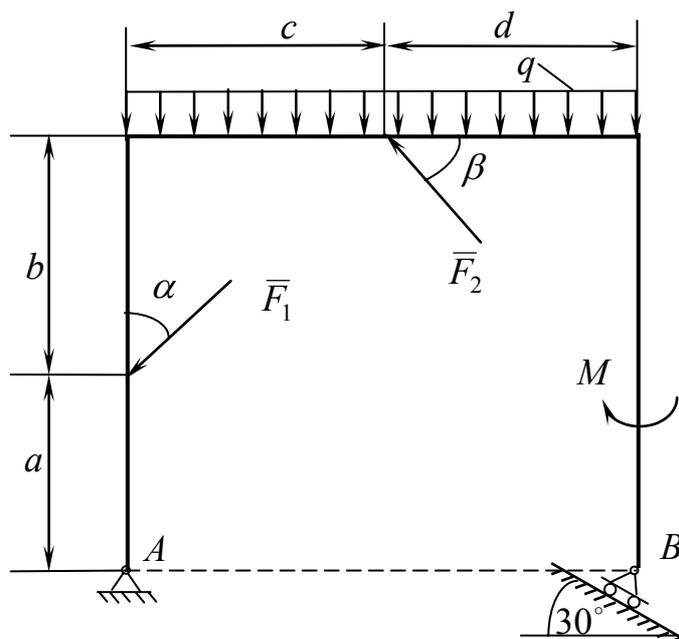
11



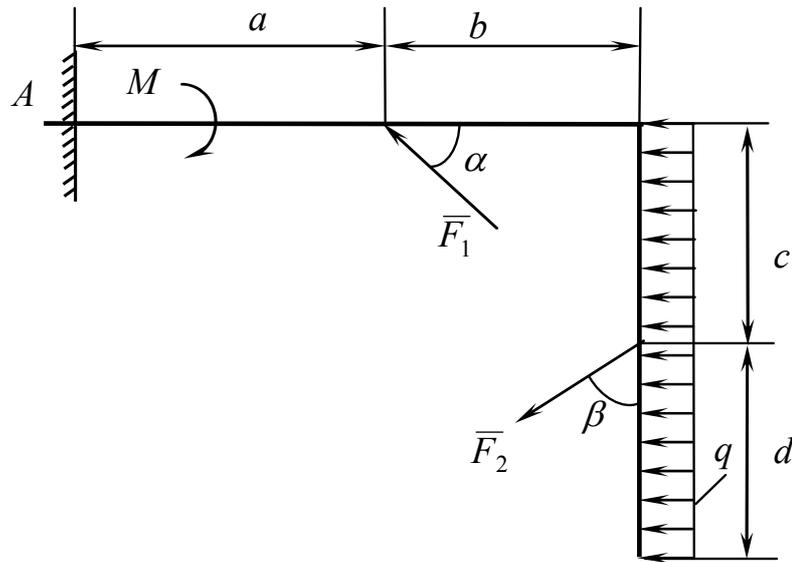
12



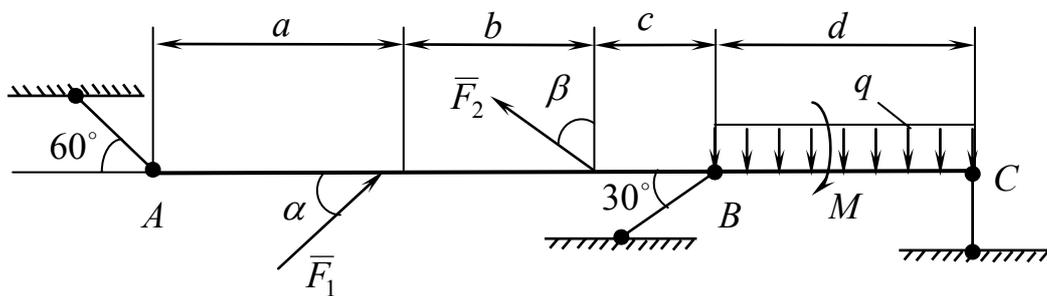
13



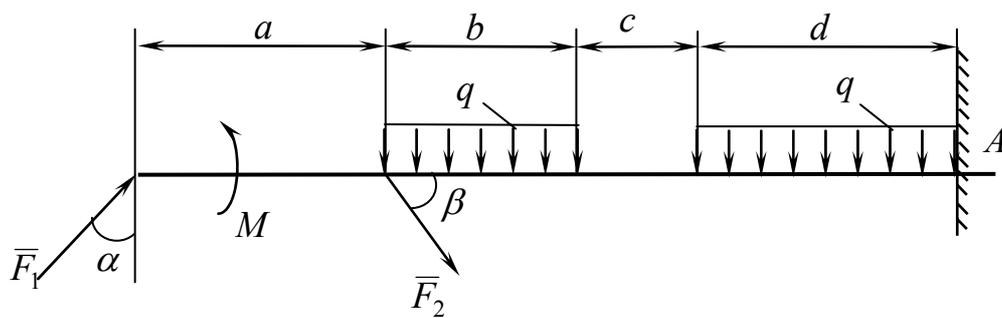
14



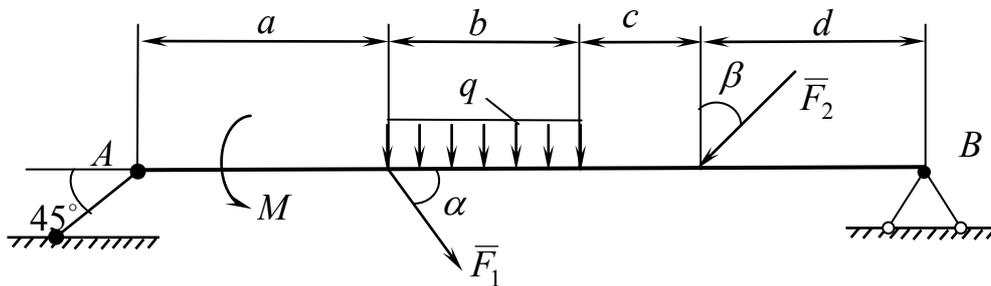
15



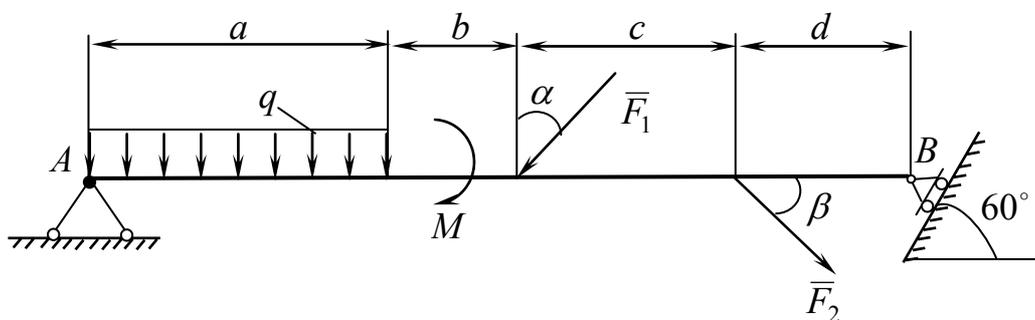
16



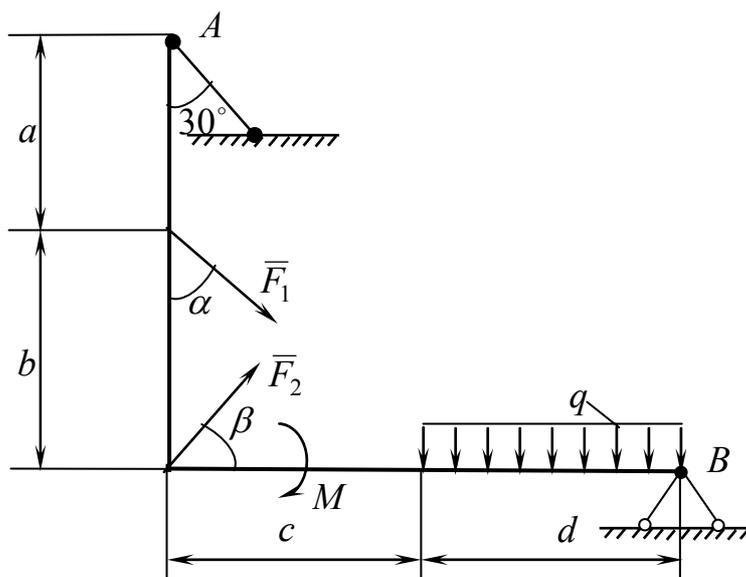
17



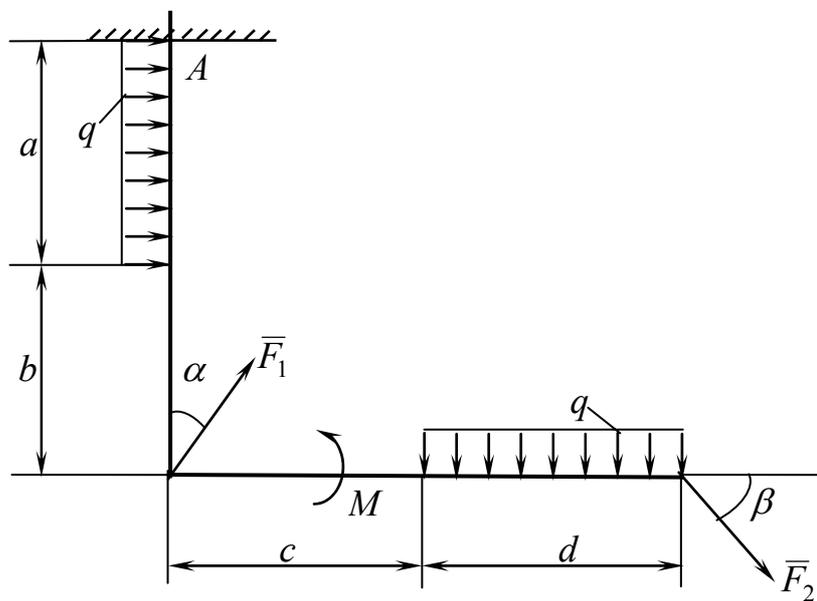
18



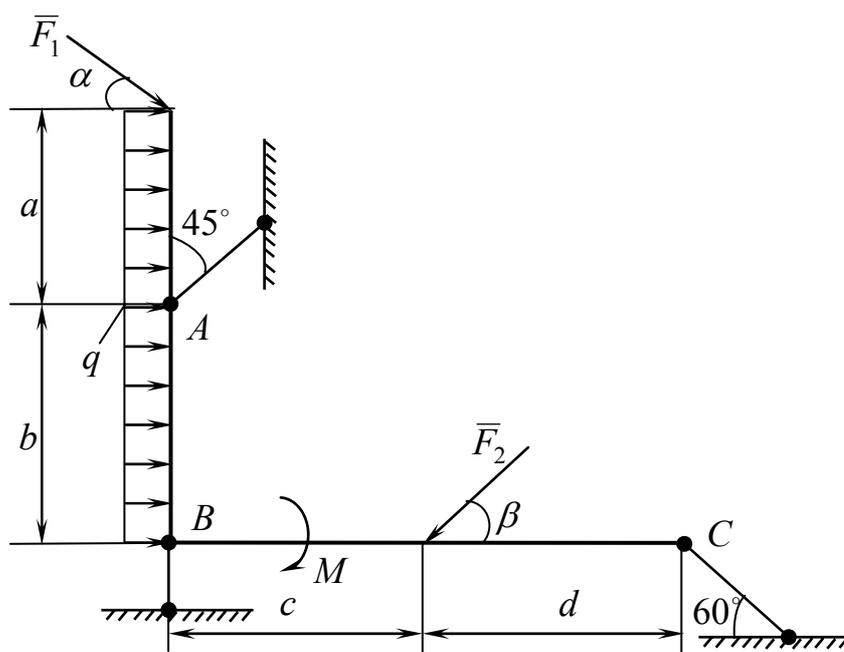
19



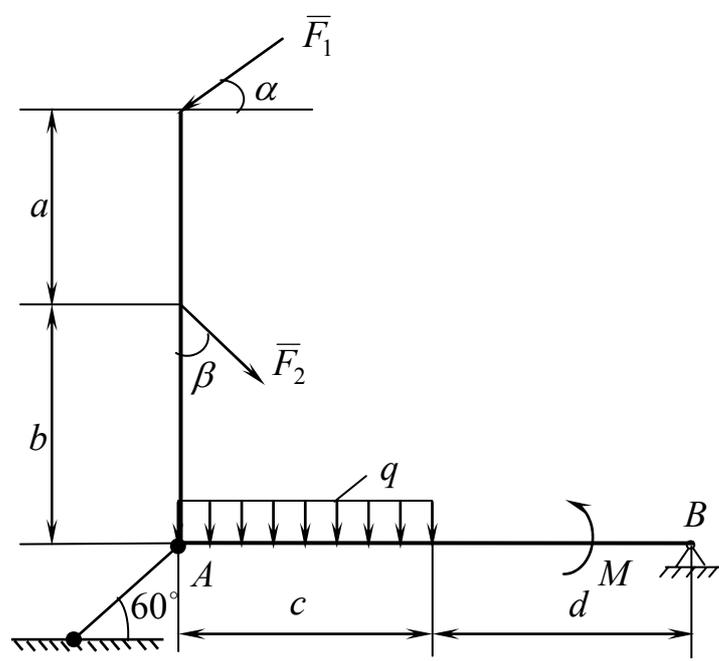
20



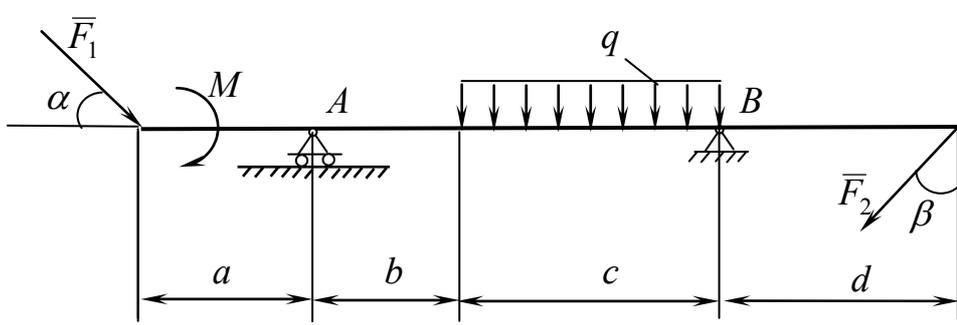
21



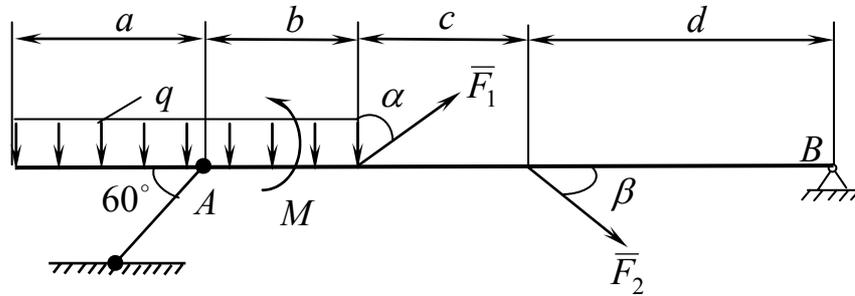
22



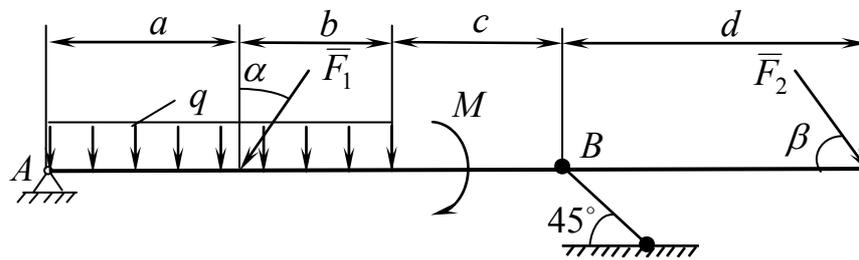
23



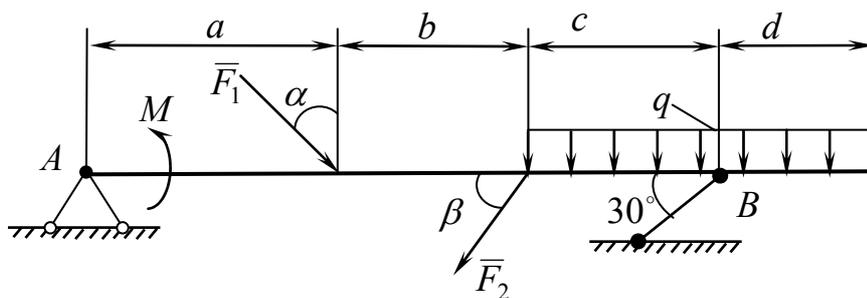
24



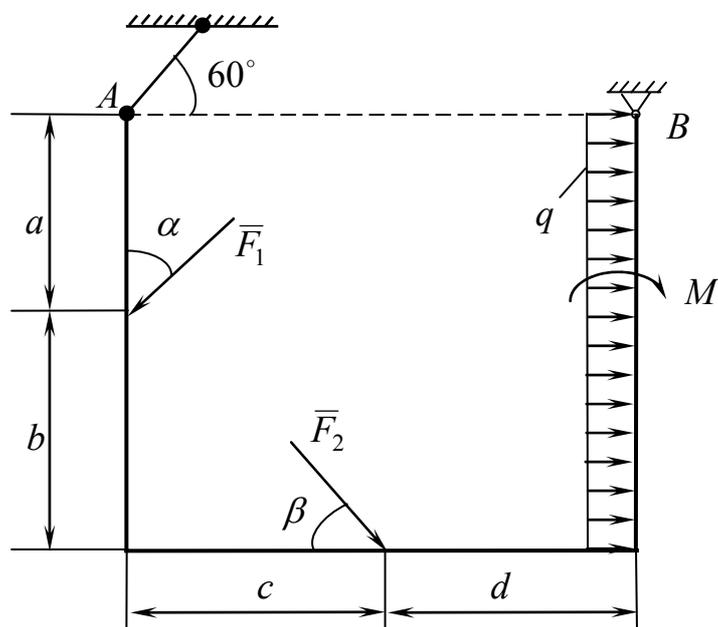
25



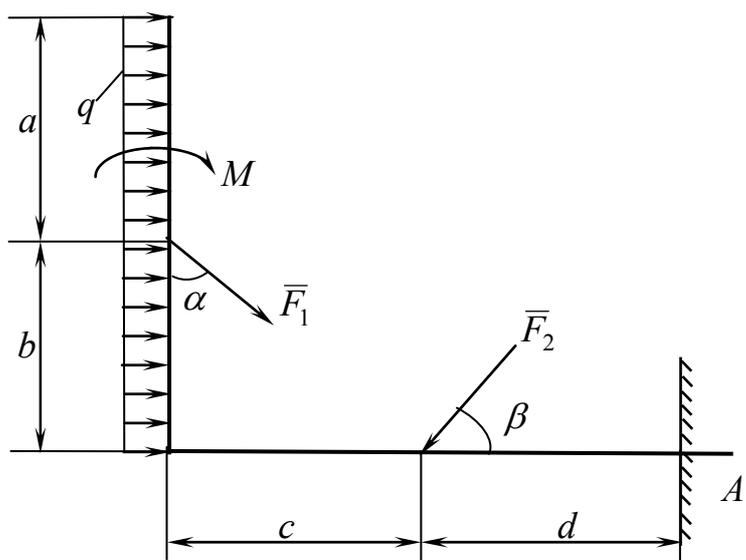
26



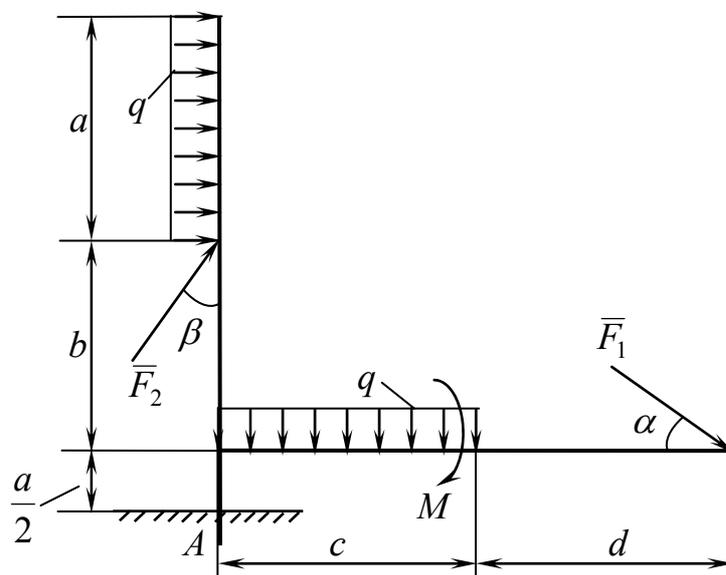
27



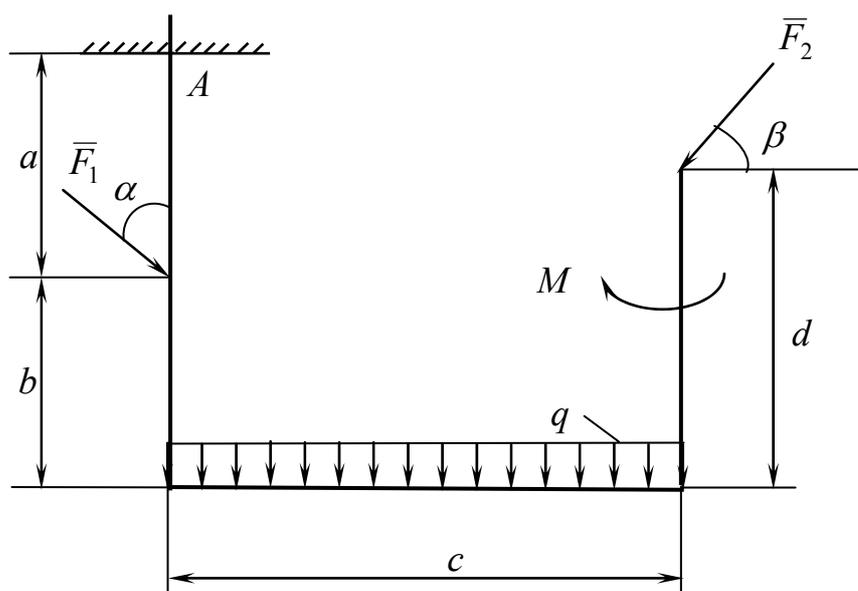
28



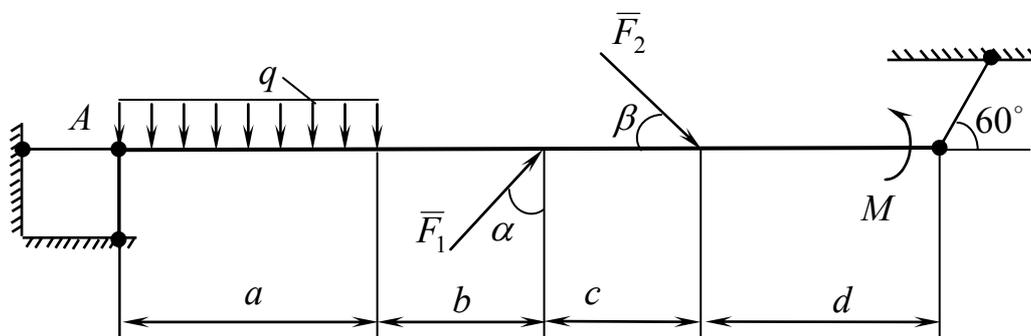
29



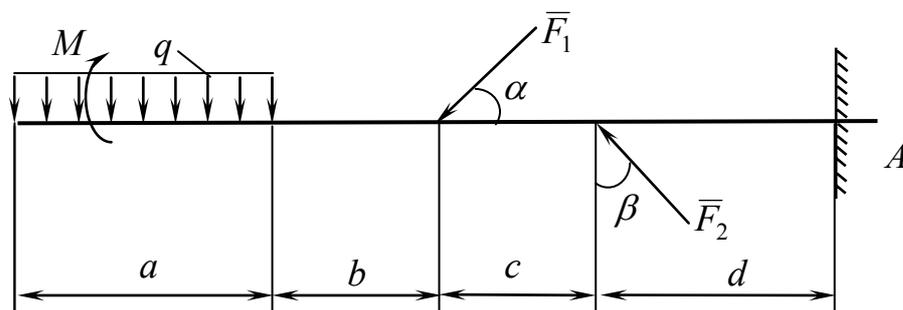
30



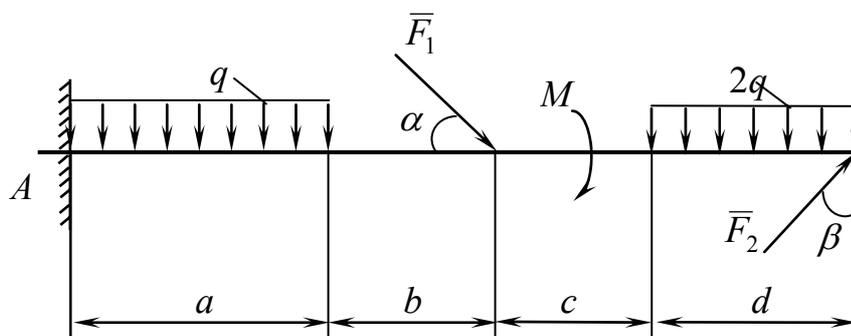
31



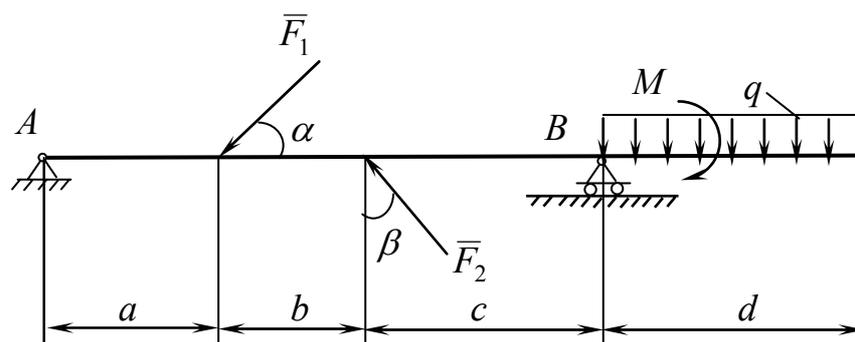
32



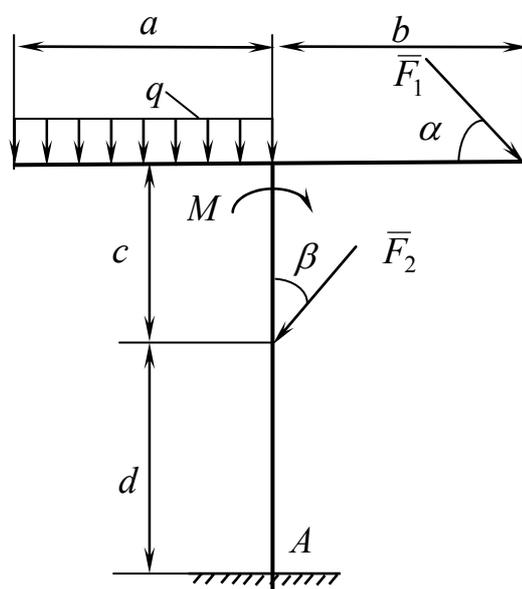
33



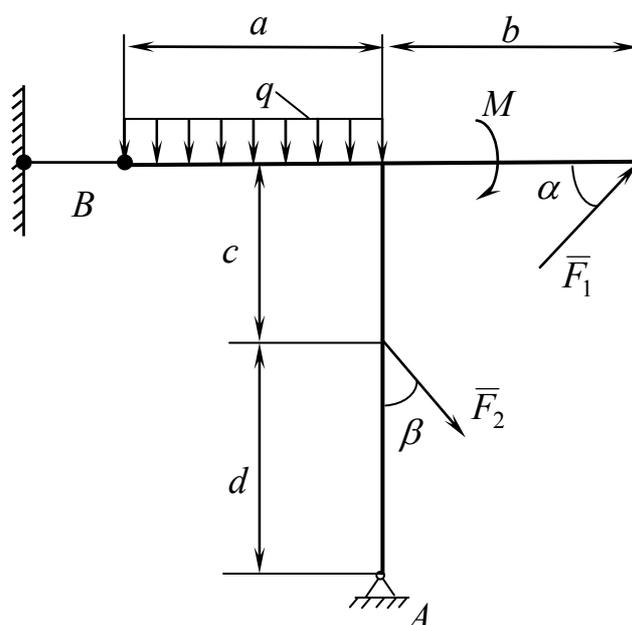
34



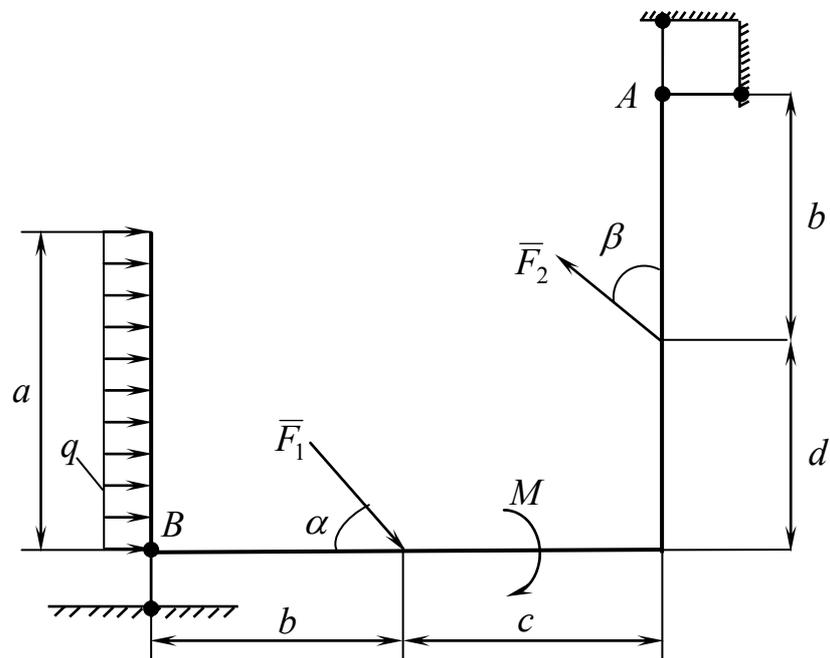
35



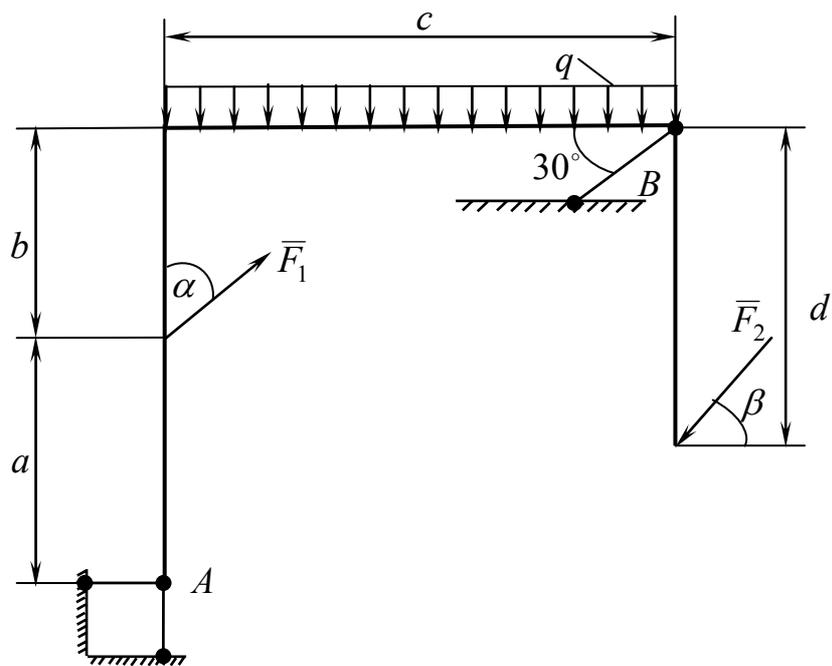
36



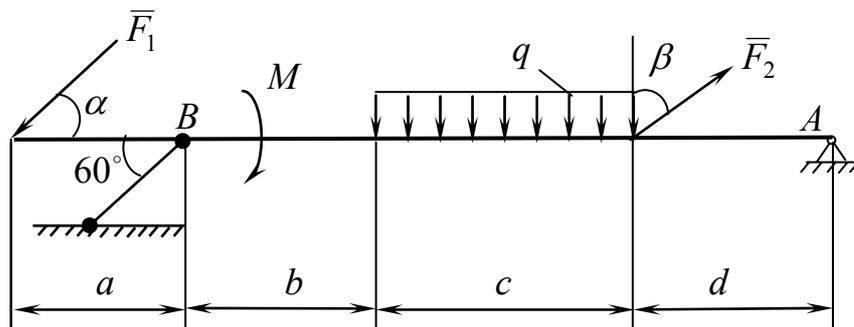
37



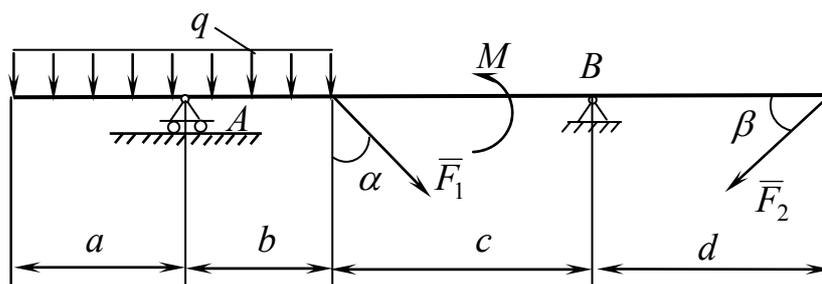
38



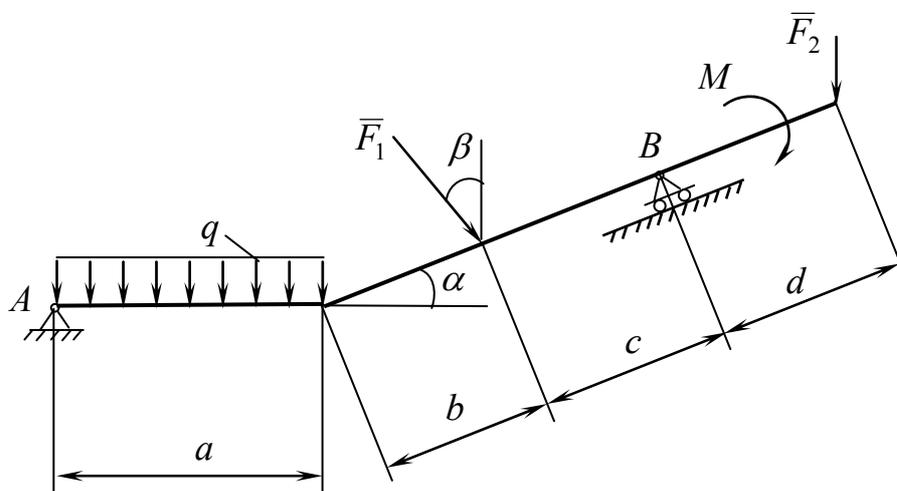
39



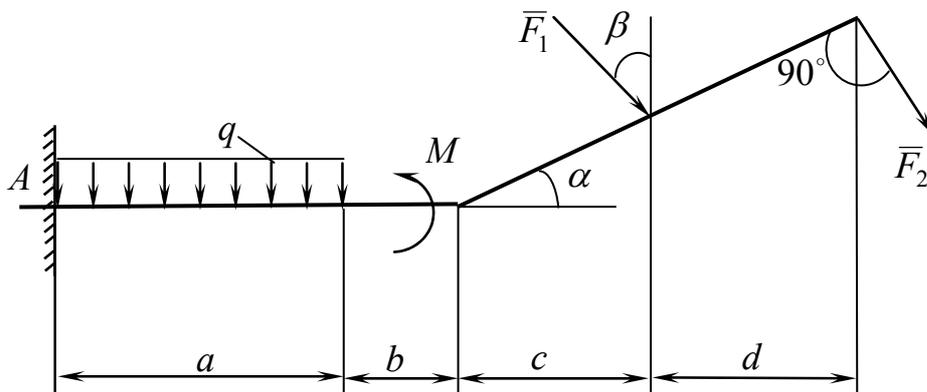
40



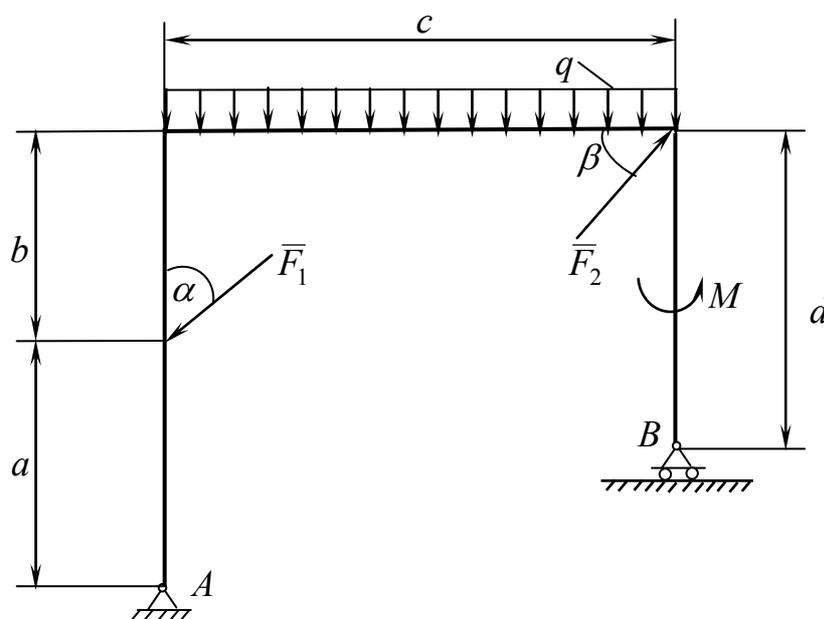
41



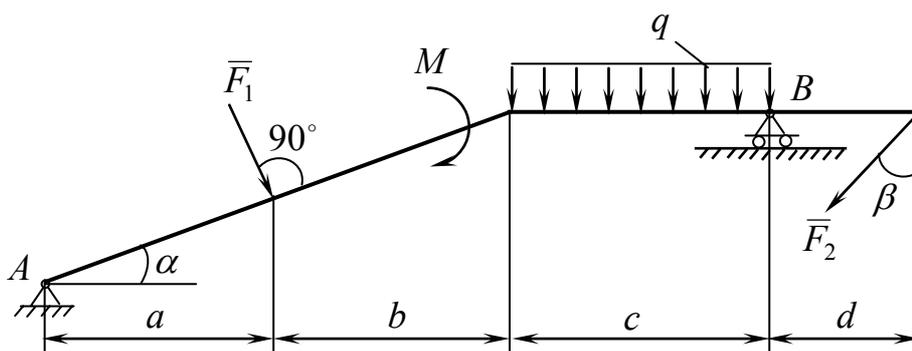
42



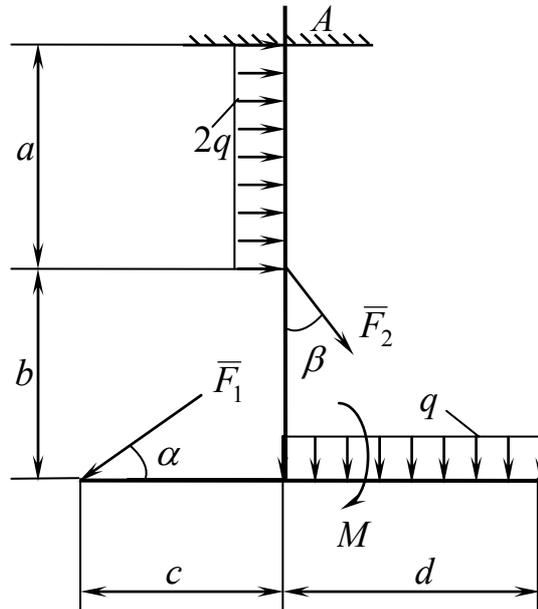
43



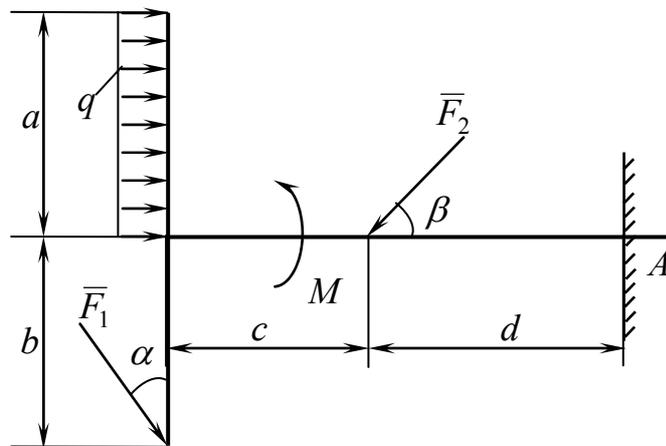
44



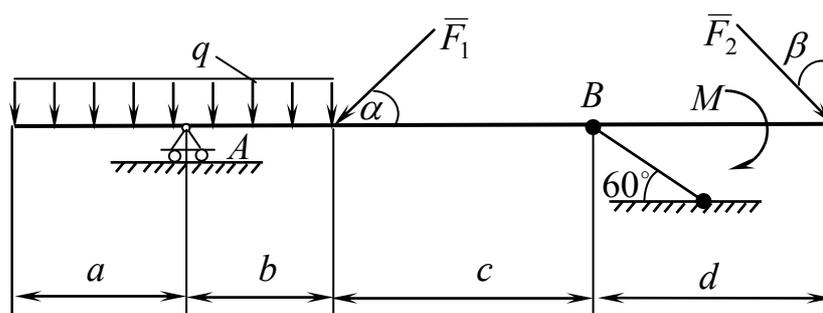
45



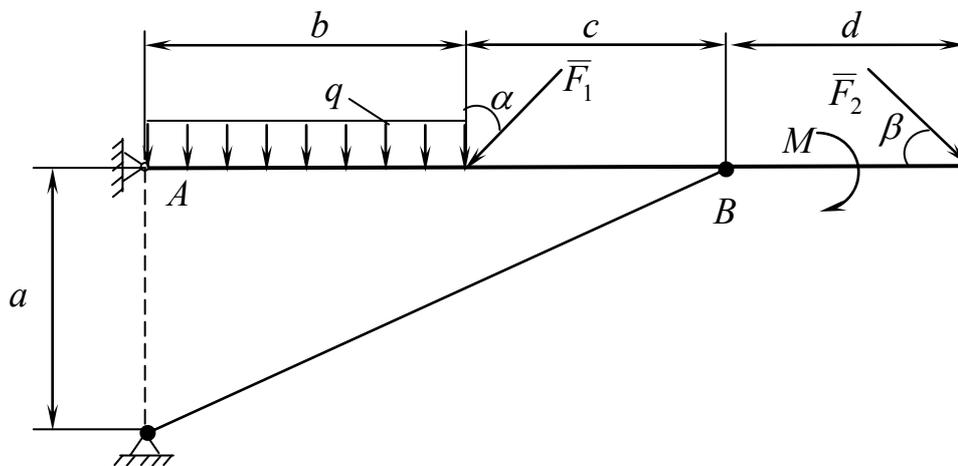
46



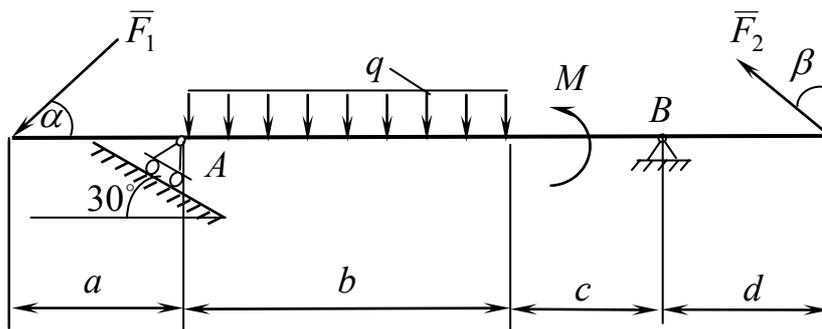
47



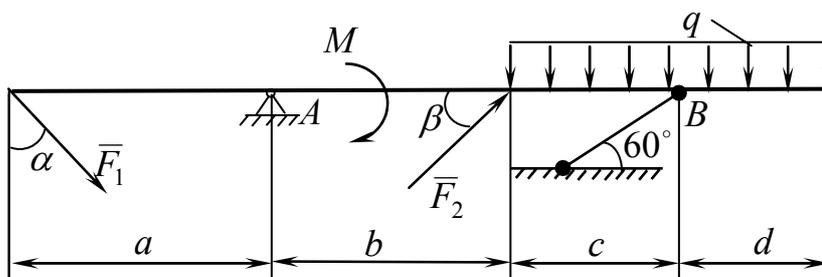
48



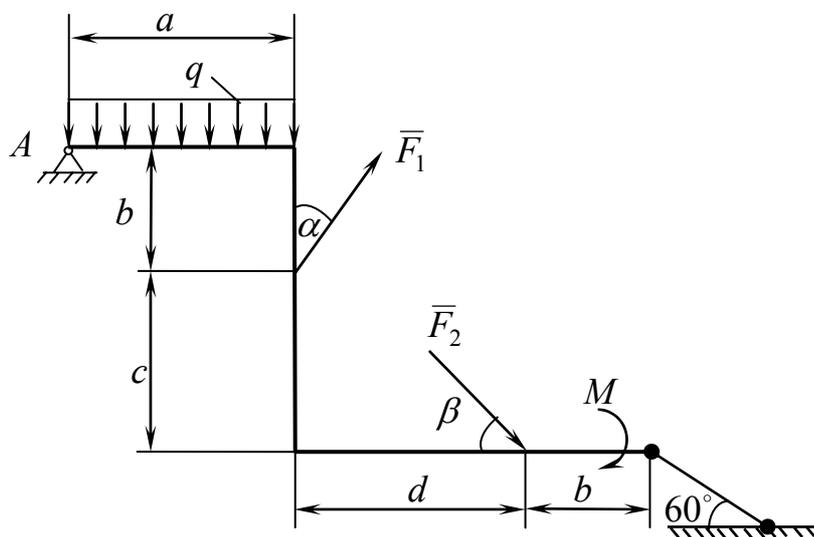
49



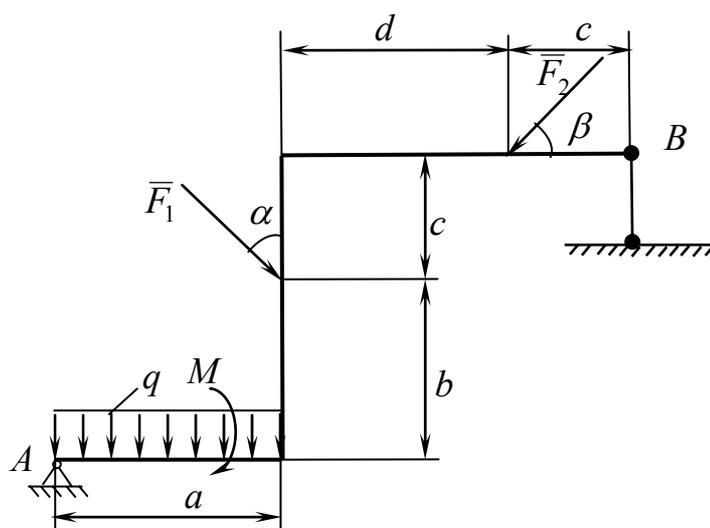
50



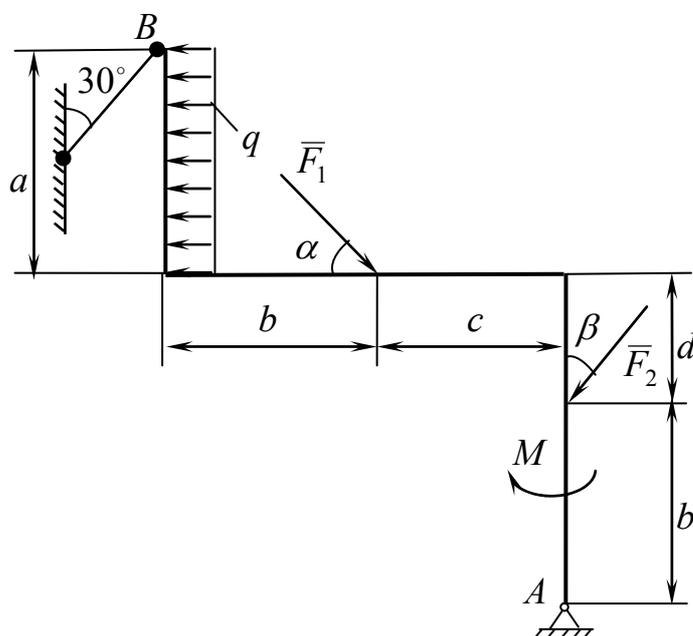
51



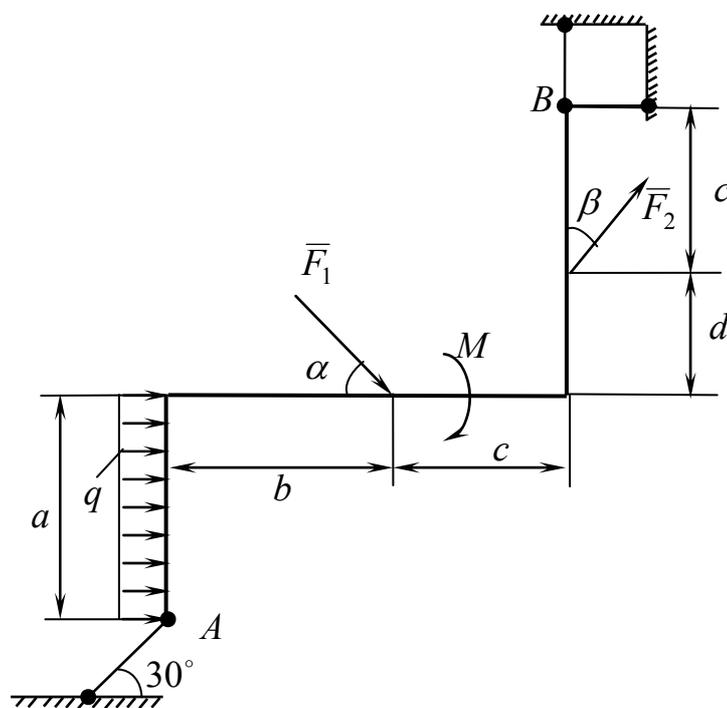
52



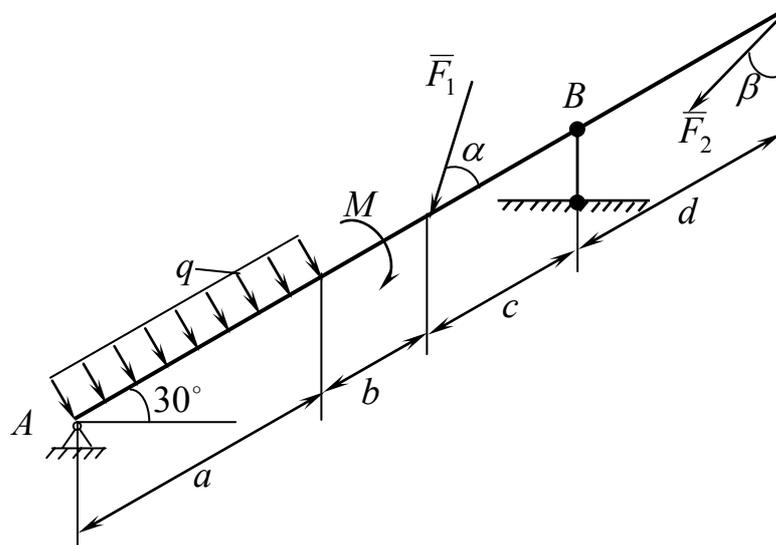
53



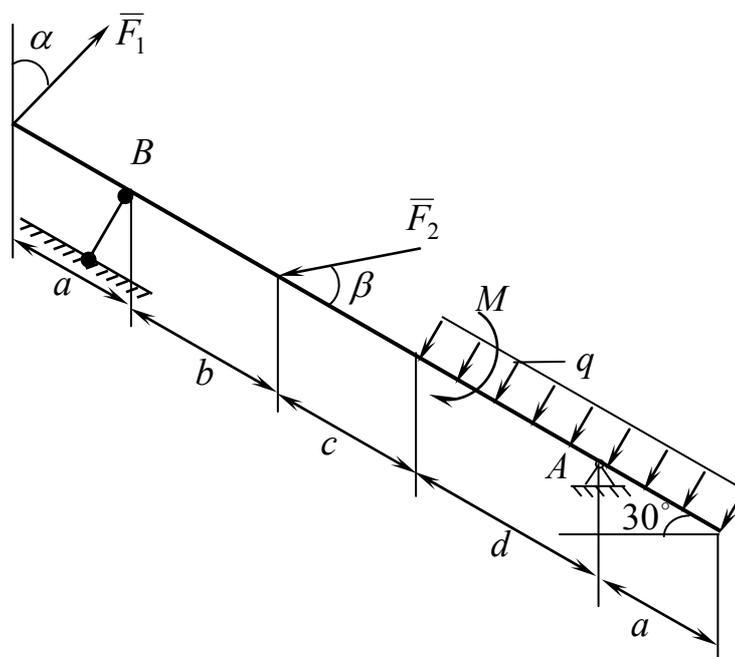
54



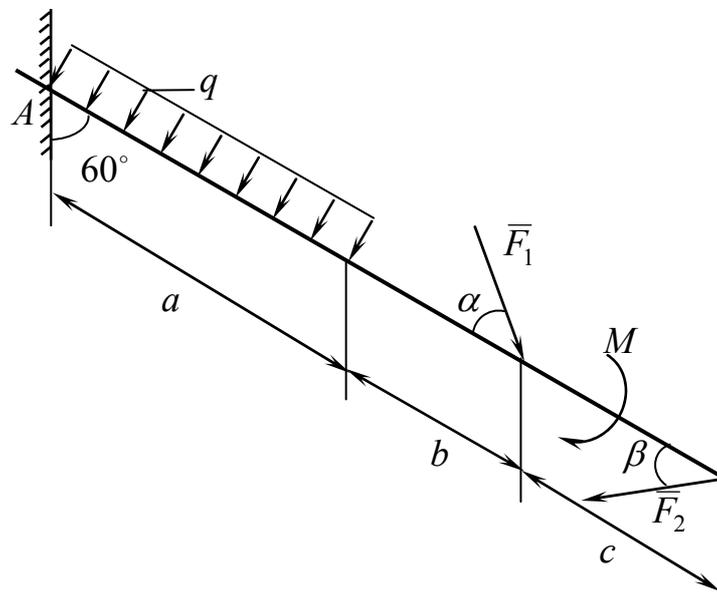
55



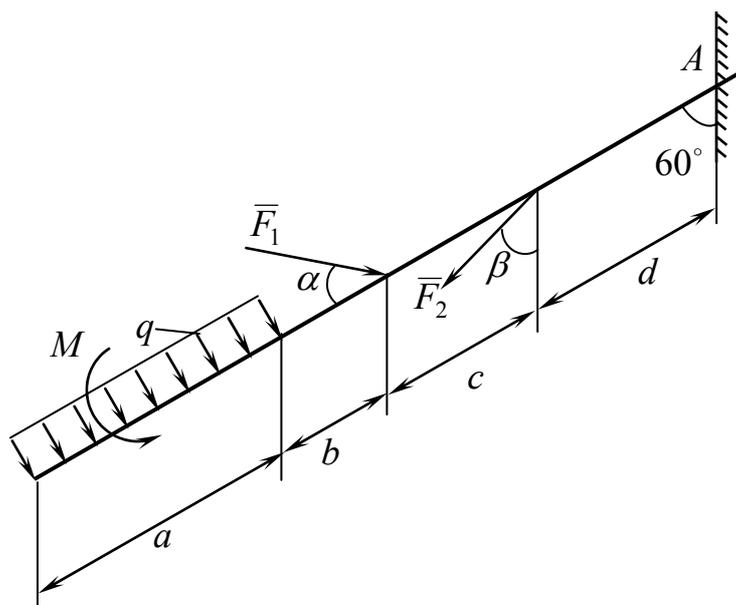
56



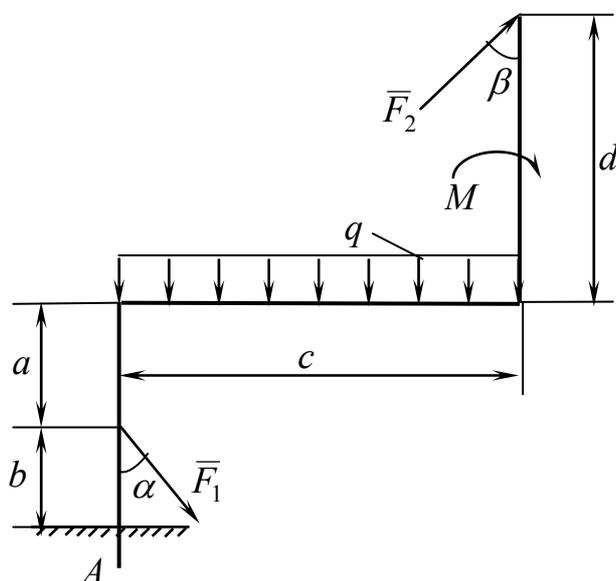
57



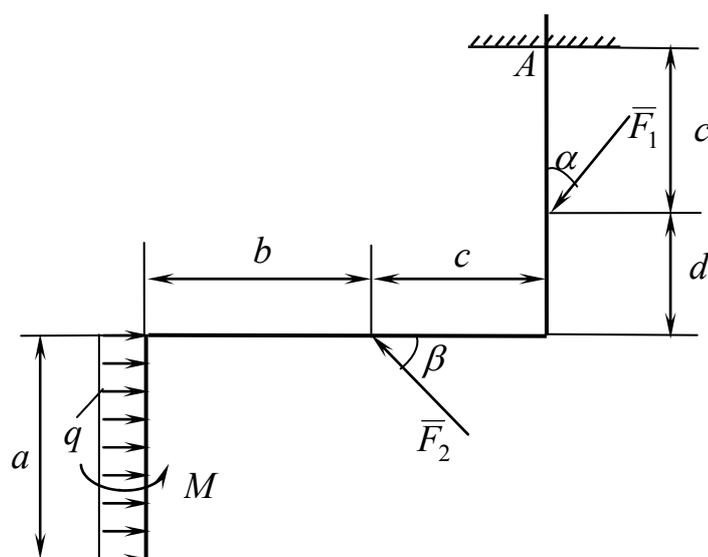
58



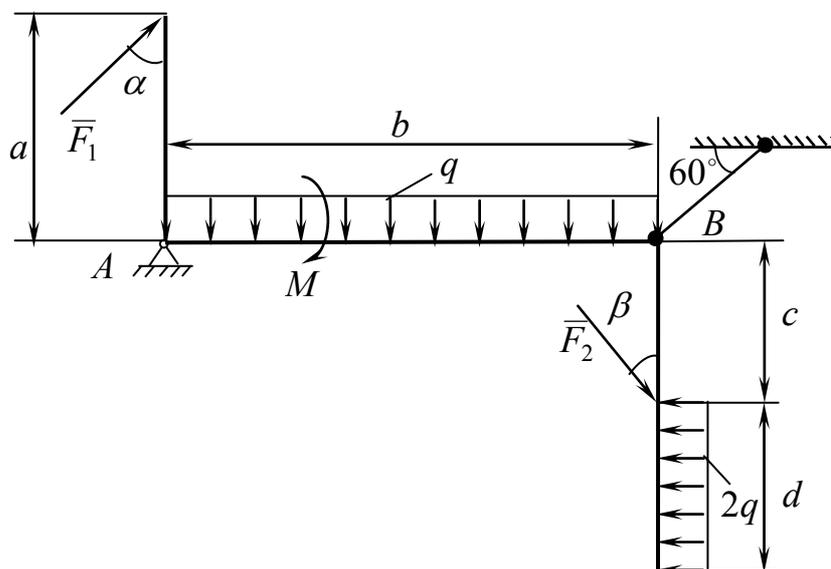
59



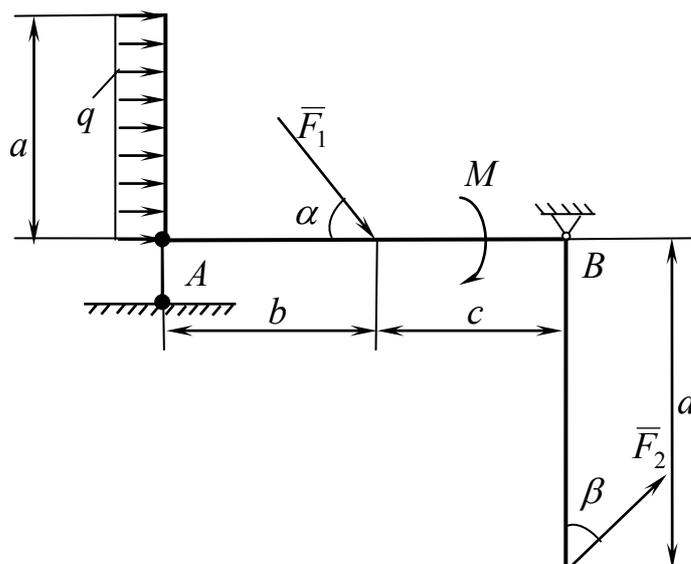
60



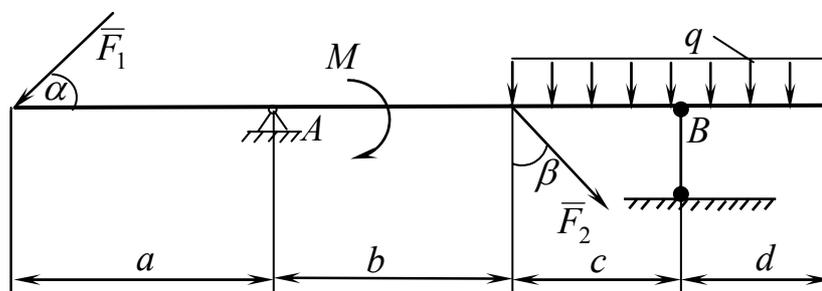
61



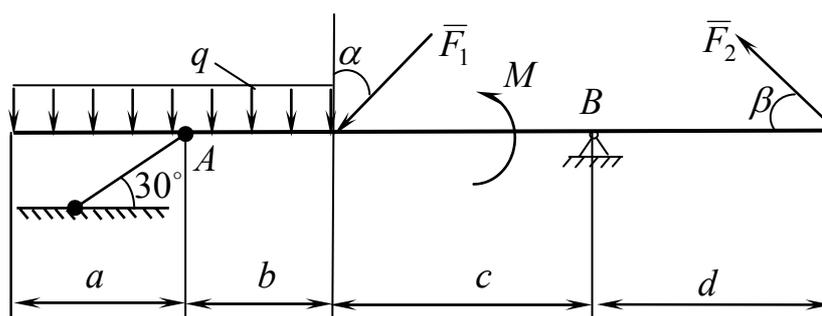
62



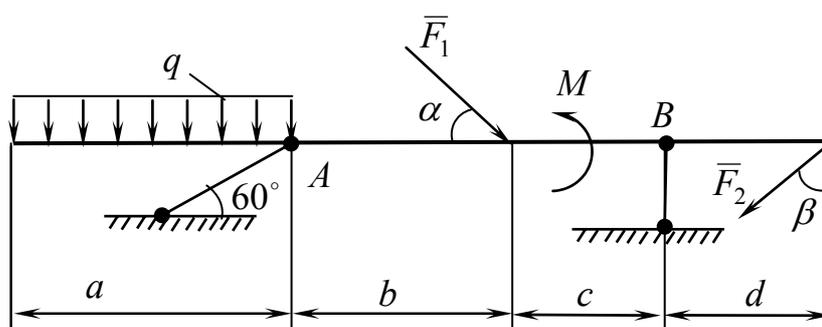
63



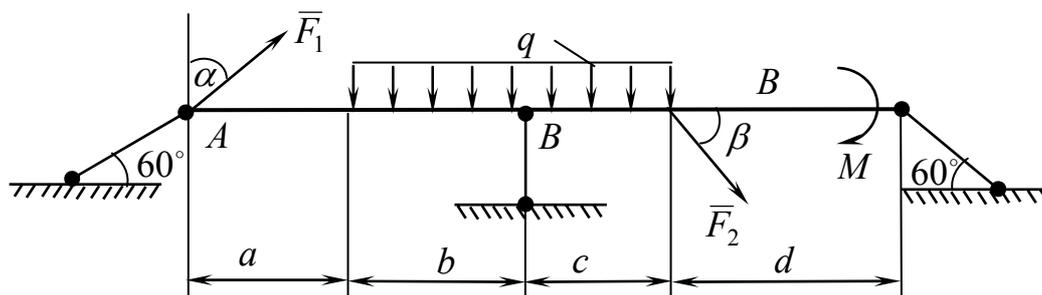
64



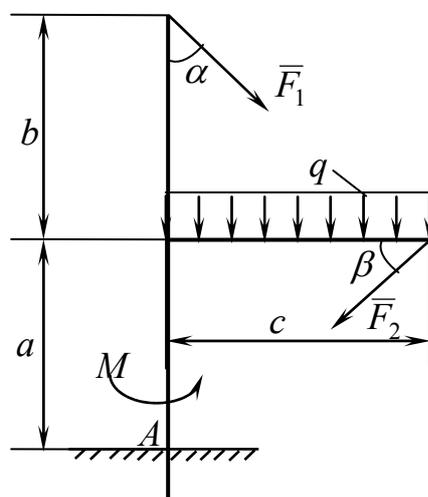
65



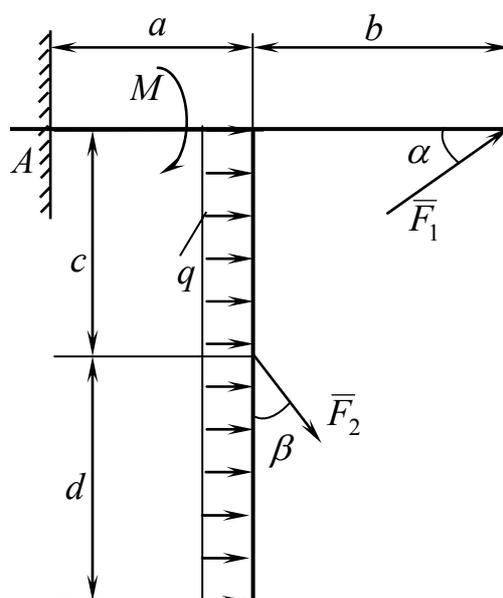
66



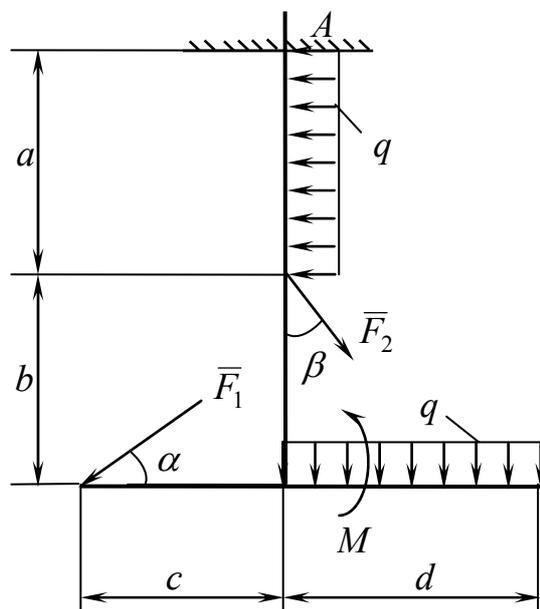
67



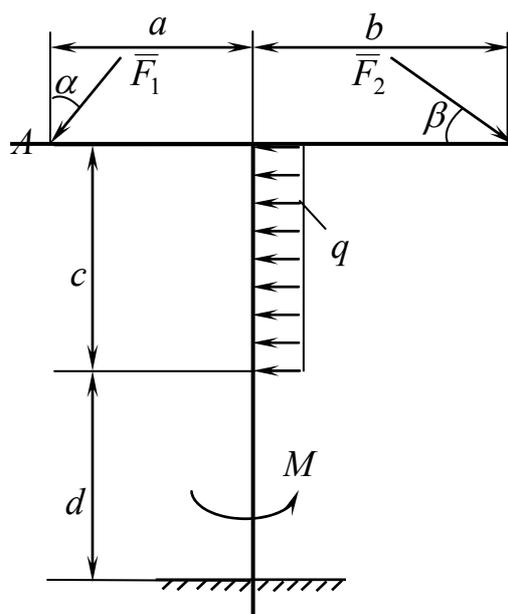
68



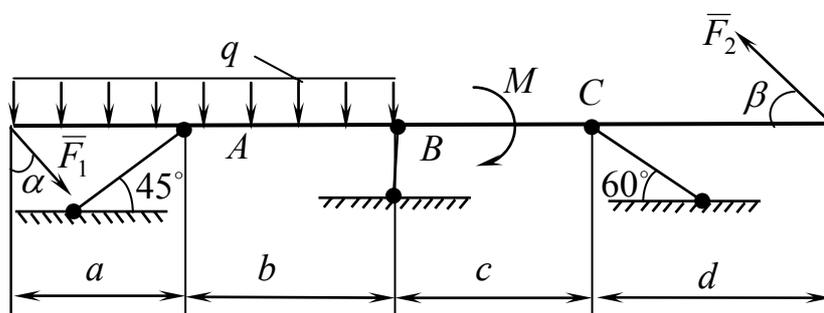
69



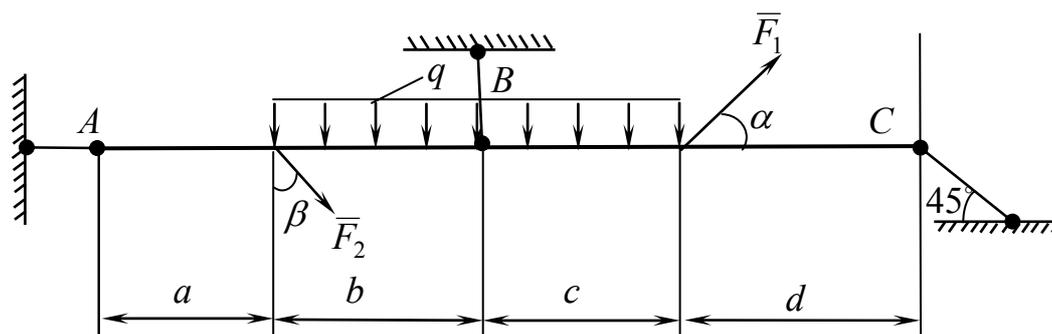
70



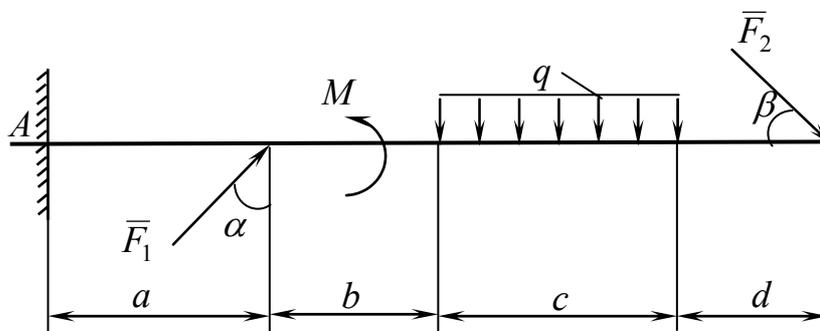
71



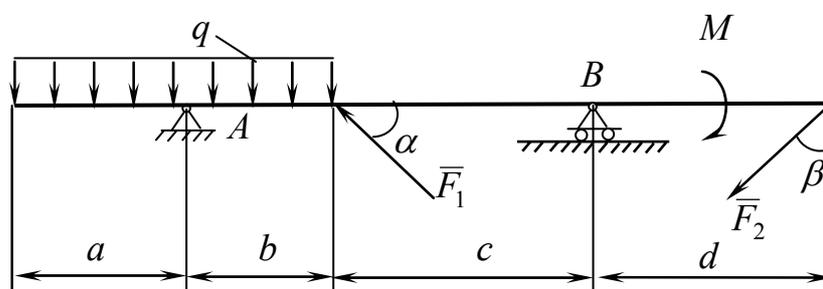
72



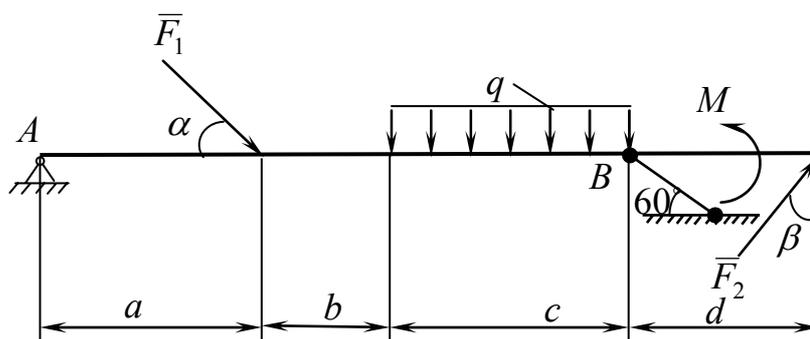
73



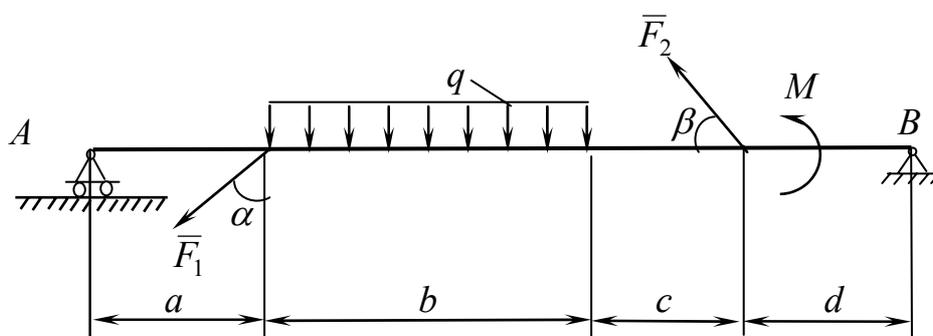
74



75



76



12. ТИПОВІ КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ПРИ ЗАХИСТІ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ

1. Що вивчає статика?
2. У чому полягає суть понять матеріальна точка і тверде тіло?
3. Що називають силою? Які три характеристики має сила?
4. Що називають системою сил?
5. Яку силу називають рівнодієюю системи сил?
6. Яку силу називають зрівноважувальною системи сил?
7. Як формулюються аксіоми статички?
8. У якому випадку тіло є вільним?
9. Що таке механічна в'язь?
10. Що таке реакція в'язі?
11. Які основні види в'язей зустрічаються при розв'язуванні задач статички і який напрям мають їх реакції?
12. Хто вважається засновником статички?
13. Яка система сил є збіжною?
14. Для чого і яким чином будується силовий багатокутник?
15. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил в геометричній формі?
16. Як читається теорема про рівновагу трьох непаралельних сил?
17. Як знаходяться проекції сили на вісь та площину?
18. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
19. Як визначити силу за її проекціями?
20. Що таке напрямні косинуси?
21. Як формулюється теорема про проекцію рівнодіючої сили на вісь?
22. Як знаходиться аналітично рівнодіюча системи сил?
23. Які аналітичні умови рівноваги тіла під дією системи збіжних сил?
24. Як знайти рівнодіючу двох однаково спрямованих паралельних сил? Як знайти точку прикладення рівнодіючої?
25. Як знайти рівнодіючу двох протилежно спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка прикладення рівнодіючої?
26. Що таке момент сили відносно точки?
27. У якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
28. Куди спрямований вектор моменту сили відносно точки, підсумковий вектор векторного добутку.
29. Що називається парою сил або просто парою?
30. Які властивості пари в площині її дії?
31. Що таке момент пари? Куди спрямований момент пари як вектор?
32. Які дві пари є еквівалентними?
33. Яка умова рівноваги пар у площині?

34. Чи можуть бути еквівалентними дві пари, які розташовані в площинах, що перетинаються?
35. Сформулюйте теорему про додавання пар.
36. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
37. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
38. У якому випадку плоска система довільних сил зводиться до рівнодійної, у якому випадку до однієї пари?
39. Сформулюйте теорему Варіньона про момент рівнодійної сили відносно центра.
40. Які умови рівноваги плоскої системи довільних сил?
41. Які три форми рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи довільних сил?
42. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?
43. Що таке зосереджене і розподілене навантаження?
44. Які особливості методу розв'язування задач на рівновагу системи тіл?
45. Яку конструкцію називають фермою?
46. Які суттєві ознаки методу вирізування вузлів при розрахунках ферми?
47. Яка послідовність побудови діаграми Максвелла-Кремони?
48. Що таке сила тертя?
49. Що називають коефіцієнтом тертя ковзання?
50. Що таке кут і конус тертя?
51. Яка залежність між силами на кінцях нитки, яка треться по циліндричній поверхні?
52. Що таке коефіцієнт тертя кочення?
53. Чому дорівнює момент тертя кочення?
54. Як знайти момент сили відносно осі?
55. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
56. Яка залежність між моментом сили відносно точки і осі, яка проходить через цю точку?
57. За якими формулами обчислюються моменти сили відносно координатних осей?
58. Як читається теорема про перенесення сил у паралельну площину?
59. Які умови еквівалентності пар у просторі?
60. Як додати пари, що довільно розташовані у просторі?
61. Яка умова рівноваги системи пар у просторі?
62. Чому дорівнює головний вектор та головний момент просторової системи сил? Як їх обчислювати?
63. Чи залежить величина головного вектора і головного моменту просторової системи сил від вибору центра зведення?

64. Які окремі випадки зустрічаються при зведенні просторової системи сил до єдиного центра?
65. Які аналітичні умови рівноваги системи сил, що довільно розташовані в просторі?
66. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи сил?
67. Які умови рівноваги просторової системи паралельних сил?
68. Як читається теорема Варіньона про момент рівнодійної системи сил?
69. Що таке центр паралельних сил?
70. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
71. Що таке центр ваги?
72. За якими формулами визначаються положення центра ваги тіла, об'єму, площі та лінії?
73. Чому дорівнює статичний момент площі фігури відносно осі?
74. Які способи використовуються для визначення положення центра ваги тіла?
75. Як визначити координати центра ваги дуги кола?
76. Як визначити координати центра ваги трикутника згідно з координатами його вершин?
77. Як визначити координати центра ваги сектора?

«КІНЕМАТИКА»

1. ВСТУП. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1. Предмет кінематики

Кінематика вивчає рух матеріальних об'єктів як моделей реальних тіл (точка, тверде тіло, матеріальна система) з геометричної точки зору, як геометричних образів, без викладення причин, які викликають цей рух. Такий підхід не потребує врахування інерційних і силових характеристик: маса і момент інерції, сила і момент сили.

Рух є формою існування матеріального світу, а механічний рух, найпростіша форма руху матерії – один із наслідків взаємодії матеріальних тіл. Під ним розуміють зміну положення тіл у просторі протягом часу по відношенню до іншого тіла, з яким пов'язана система відліку.

Простір, в якому відбувається рух геометричних моделей у формі перелічених матеріальних об'єктів, вважається абсолютним, метричні особливості якого не залежать від руху в ньому матерії у різних точках і напрямках (однорідність і ізотропність простору). Такий простір сприймається як тривимірний, так що кожній точці абсолютного простору відповідають, наприклад, у декартовій системі, три координати. Одиницею виміру простору у Міжнародній системі одиниць СІ є метр (1 м).

Властивості абсолютного часу – однорідність і універсальність, він однаково спливає у всіх точках простору, на всіх тілах. Тому можна довільно вибирати початок відліку часу та вимірювати інтервали між окремими моментами часу. Одиницею вимірювання часу є секунда (1 с).

За абсолютним простором та часом вводиться поняття системи відліку. Це сукупність системи координат, незмінно пов'язаної з деяким тілом відліку та пристроєм з періодичним процесом для вимірювання часу (годинник).

У множині систем відліку, в яких можна постулювати простір та час як абсолютні, вибираються так звані інерціальні системи відліку, в яких ізольована матеріальна точка може необмежено довго перебувати у стані спокою або рівномірного та прямолінійного руху під дією системи зрівноважених сил.

Якщо деяка система відліку править за інерціальну із заданим ступенем точності, то можна вказати нескінченну кількість інерціальних систем відліку, які рухаються відносно вибраної системи поступально, рівномірно та прямолінійно.

При розв'язуванні задач небесної механіки, обчисленні траєкторій супутників приймається геліоцентрична система відліку з початком у центрі мас Сонячної системи і осями координат, спрямованими на «нерухомі» зірки.

При розв'язуванні багатьох технічних задач за інерціальну приймають систему відліку, яка пов'язана з центром Землі (геоцентрична система відліку).

Рух геометричної моделі відносно вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити її положення відносно цієї системи у будь-який момент часу. При цьому розрізняють момент часу і проміжок часу. Проміжок часу – це перебіг часу між двома фізичними явищами. Момент часу – це границя між двома суміжними проміжками часу.

Положення моделі відносно даної системи відліку визначається відповідними параметрами, а її рух – кінематичними рівняннями, що виражають зміну цих параметрів як функцій часу.

Основна задача кінематики полягає в тому, щоб за відомими кінематичними рівняннями руху визначити кінематичні характеристики цього руху: траєкторії точок, їхні лінійні швидкості та прискорення; кутові швидкості та прискорення тіла.

Оскільки кожне тіло складається з матеріальних точок, то природньо почати кінематику з вивчення руху матеріальної точки.

1.2. Кінематика матеріальної точки

Для того, щоб вивчати рух матеріальної точки, необхідно вибрати спосіб його задання. Існує декілька способів задання руху матеріальної точки.

Кінематично задати рух або закон руху точки означає вказати такий спосіб, який дає можливість визначити положення цієї точки відносно даної системи відліку у будь-який момент часу.

1.2.1. Способи задання руху матеріальної точки

Для задання руху матеріальної точки можна застосувати один з трьох наступних способів:

1. Векторний;
2. Координатний;
3. Натуральний.

Розглянемо послідовно вказані способи.

1.2.2. Векторний спосіб задання руху матеріальної точки

Цей спосіб знайшов широке застосування у теоретичних розрахунках. Розглянемо сутність цього способу.

Припустимо, що довільна матеріальна точка M рухається у просторі по деякій траєкторії AB (рис. 2.1). Візьмемо у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з одиничними векторами (ортами) на відповідних осях $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. З початку системи координат точки O проведемо до рухомої точки M радіус-вектор \bar{r} . При русі точки M її радіус-вектор \bar{r} буде з плином часу змінюватися за величиною (модулем) та напрямом. Таким чином, якщо буде заданий закон зміни радіуса-вектора \bar{r} рухомої точки M як функція часу, то рух матеріальної точки вважається заданим векторним способом. Математично це можна записати так:

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad (2.1)$$

де t – час.

Співвідношення (2.1) називається кінематичним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі. Одночасно цей вираз можна розглядати як рівняння траєкторії руху.

Знайдемо у прийнятій системі координат $Oxyz$ величину радіуса-вектора \bar{r} , для чого спроектуємо його на осі координат:

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \quad (2.2)$$

де $x(t), y(t), z(t)$ – поточні значення координат кінця радіуса-вектора \bar{r} або координати рухомої точки M .

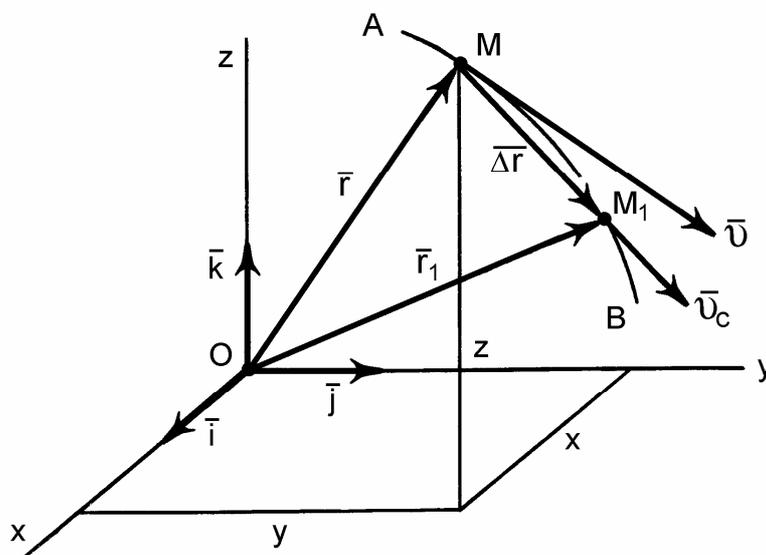


Рис. 2.1.

Визначимо кінематичні характеристики рухомої точки M .

Траєкторія руху точки

Траєкторією AB руху матеріальної точки M є геометричне місце кінців радіуса-вектора \vec{r} або неперервна лінія, яку описує точка під час свого руху відносно даної системи відліку.

Введемо поняття годографа векторної функції $\vec{r}(t)$ (2.1) по скалярному аргументу t . Це крива, яка намалюється кінцем вектора \vec{r} при неперервній зміні часу t , коли початок вектора залишається у фіксованій точці O . Тобто, годограф описують кінці векторів $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, що відповідають конкретним положенням точки M у процесі руху. Це стосується не тільки радіусів-векторів, а і векторів швидкості, прискорень тощо. В даному разі годограф співпадає з траєкторією AB .

Швидкість руху точки.

Друга кінематична характеристика – швидкість руху матеріальної точки M , показує, як швидко і в якому напрямку змінюється її положення у просторі.

Швидкість – це векторна величина, яка характеризує степінь змінювання переміщення за часом.

Одиниця виміру швидкості – $\left[\frac{м}{с} \right]$ або $\left[\frac{км}{год} \right]$.

Для визначення цієї кінематичної характеристики розглянемо рух матеріальної точки M . Вважаємо, що точка M рухається по довільній траєкторії AB (рис. 2.1). За деякий проміжок часу Δt точка перемістилась із положення M в положення M_1 (радіус-вектор \vec{r}_1). Для того, щоб визначити переміщення точки M за проміжок часу Δt , з'єднаємо точки M і M_1 прямою і отримаємо вектор $\Delta\vec{r}$, який є геометричною різницею між векторами \vec{r}_1 і \vec{r} . Тоді середня швидкість точки M за проміжок часу Δt (згідно визначення) дорівнює:

$$\bar{v}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

За напрямком вектор \bar{v}_c співпадає з вектором $\Delta\vec{r}$, тобто він розташований вздовж хорди MM_1 у бік руху точки M .

Якщо розглянути границю середньої швидкості \bar{v}_c за умовою, що Δt прямує до нуля ($\Delta t \rightarrow 0$), то швидкість точки M у будь-який момент часу t буде дорівнювати:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.4)$$

Таким чином, при векторному способі задання руху матеріальної точки її швидкість є першою похідною від радіуса-вектора точки за часом.

Напрямок вектора швидкості \bar{v} точки – по дотичній до траєкторії і спрямований у бік її руху.

Прискорення руху точки.

Третя кінематична характеристика – прискорення руху матеріальної точки M , показує, як швидко і в якому напрямку змінюється її швидкість руху.

Прискорення – це векторна величина, яка характеризує степінь змінювання вектора швидкості за часом.

Одиниця виміру прискорення – $\left[\frac{m}{c^2} \right]$.

Визначимо прискорення матеріальної точки M . Розглянемо рух точки по довільній траєкторії AB (рис. 2.2). У положенні M швидкість точки була \bar{v} . За деякий проміжок часу Δt точка перемістилась у положення M_1 , а її швидкість змінилась і дорівнює \bar{v}_1 . Вказані вектори швидкостей точки будуть спрямовані по дотичних до траєкторії. Знайдемо приріст швидкості за даний проміжок часу. Для цього перенесемо паралельно вектор швидкості \bar{v}_1 у положення M . З'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 прямою і отримаємо вектор $\Delta \bar{v}$. Відношення приросту $\Delta \bar{v}$ вектора \bar{v} до проміжку часу Δt згідно визначення прискорення буде середнім прискоренням рухомої матеріальної точки M :

$$\bar{a}_c = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

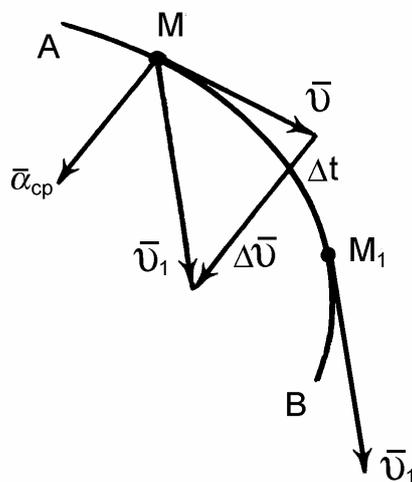


Рис. 2.2.

Вектор \bar{a}_c буде паралельним вектору $\Delta\bar{v}$.

Для отримання дійсного або миттєвого прискорення матеріальної точки в даний момент часу необхідно розглянути нескінченно малий проміжок часу (тобто $\Delta t \rightarrow 0$), а весь вираз (2.5) звести до границі:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (2.6)$$

Якщо підставити у вираз (2.6) значення швидкості точки (2.4), то матимемо:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (2.7)$$

Таким чином, при векторному способі задання руху матеріальної точки її прискорення дорівнює першій похідній від швидкості руху точки за часом або другій похідній від радіус-вектора точки за часом.

Вектор прискорення \bar{a} матеріальної точки буде спрямований у бік угнутості траєкторії, під деяким кутом до дотичної. Більш детально про напрямок вектора прискорення матеріальної точки буде далі.

1.2.3. Координатний спосіб задання руху матеріальної точки

Цей спосіб задання руху матеріальної точки широко використовується при аналітичному розв'язуванні задач, у технічних розрахунках.

При такому способі задання руху матеріальної точки наперед задаються координати матеріальної точки як функції часу. Якщо вибрати у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$, то при русі точки M всі три її координати будуть змінюватися з часом (рис. 2.1). Для того, щоб знати положення точки у будь-який момент часу, а також для визначення її кінематичних характеристик, необхідно задати вирази цих координат як функцій часу:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ці параметричні рівняння, в яких роль параметра відіграє час t , є кінематичними рівняннями руху точки у прямокутній декартовій системі координат (або законом руху точки у координатній формі) і визначають суть даного способу.

Слід зауважити, що якщо рух матеріальної точки здійснюється в одній площині xOy , то в рівняннях (2.8) закон зміни координати z вже не потрібний і рівняння (2.8) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Якщо матеріальна точка здійснює прямолінійний рух, то досить вибрати одну вісь координат, наприклад Ox , сумістивши її з напрямом руху, тоді цей рух буде описаний одним рівнянням:

$$x = x(t).\tag{2.10}$$

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки при даному способі задання її руху.

1.2.4. Траєкторія руху точки

Рівняння (2.8) та (2.9) фактично є рівняннями траєкторії руху матеріальної точки у параметричній формі, в яких, як було сказано вище, роль параметра відіграє час t . Для знаходження траєкторії руху у звичайній формі необхідно виключити з рівнянь руху параметр часу t , тобто здобути залежність між самими координатами. Це можна зробити декількома способами. Наприклад, підстановкою або піднесенням обох частин рівнянь до квадрату та почленним додаванням (якщо рівняння містять тригонометричні функції). Визначимо із першого рівняння (2.8.) параметр часу і підставимо його у два других – отримаємо просторову криву – рівняння траєкторії руху.

Приклад.

Рух матеріальної точки здійснюється у площині xOy і заданий такими рівняннями:

$$\begin{aligned}x &= 2t, \quad \text{м}, \\y &= 12t^2, \quad \text{м}.\end{aligned}$$

Визначити траєкторію руху точки.

Розв'язання.

Траєкторію руху матеріальної точки можна визначити одним з двох способів:

а) задати різні моменти часу та зобразити координати точки x , y на графіку;

б) виключити час t із заданих рівнянь руху. Так, з першого рівняння час буде дорівнювати $t = \frac{x}{2}$. Тоді після підстановки часу у друге рівняння, матимемо:

$$y = \frac{12x^2}{4} = 3x^2.$$

Таким чином, траєкторією руху точки є парабола з вершиною, яка

розташована в початку координат і віссю симетрії Oy .

Приклад.

Рух матеріальної точки заданий рівняннями:

$$x = 3 \sin t \text{ см,}$$

$$y = 3 \cos t \text{ см,}$$

де t – в секундах.

Визначити траєкторію руху точки.

Розв'язання.

Рівняння траєкторії руху можна визначити, якщо вилучити час t з рівнянь руху. Перепишемо рівняння руху матеріальної точки таким чином:

$$\sin t = \frac{x}{3},$$

$$\cos t = \frac{y}{3}.$$

Підносячи до квадрату і додаючи окремо ліві і праві частини цих виразів, матимемо:

$$1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2},$$

або

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

Отже, рівнянням траєкторії руху матеріальної точки буде рівняння кола радіусом $R = 3$ см з центром у початку координат.

1.2.5. Швидкість руху точки

Для визначення швидкості руху матеріальної точки при координатному способі задання використаємо основні положення, які були отримані при розгляді векторного способу задання руху матеріальної точки. З цією метою, підставивши вираз (2.2) у вираз (2.4), матимемо:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d \left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \right]}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (2.11)$$

З іншого боку, вектор швидкості \bar{v} (як і будь-який інший вектор) можна у прийнятій системі координат $Oxyz$ представити через його проєкції на осі координат:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}, \quad (2.12)$$

де v_x, v_y , і v_z – проєкції вектора швидкості на відповідні осі координат.

Якщо розглянути і порівняти вирази (2.11) і (2.12), то можна побачити, що є можливість прирівняти коефіцієнти при одиничних векторах \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} і отримати такі вирази для проекцій вектора швидкості на відповідні вісі координат:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt}, \\v_y &= \frac{dy}{dt}, \\v_z &= \frac{dz}{dt}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Таким чином, проекції вектора швидкості матеріальної точки на координатні осі дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат.

Якщо відомі проекції вектора швидкості на осі координат, то є можливість скласти їх геометрично і отримати модуль вектора швидкості v матеріальної точки:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.\tag{2.14}$$

Напрямок вектора швидкості \bar{v} визначається через напрямні косинуси кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат:

$$\begin{aligned}\cos(x, \bar{v}) &= \frac{v_x}{v}, \\ \cos(y, \bar{v}) &= \frac{v_y}{v}, \\ \cos(z, \bar{v}) &= \frac{v_z}{v}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Знаючи напрямні косинуси, через функції арккосинусів знаходять і величини кутів.

1.2.6. Прискорення руху точки

Для визначення прискорення руху матеріальної точки при координатному способі задання руху поводимося аналогічно, як і в випадку визначення швидкості руху. А саме: значення радіус-вектора \bar{r} (2.2) підставимо у вираз (2.7), визначимо другу похідну і знайдемо прискорення:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \right]}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}.\tag{2.16}$$

З іншого боку, вектор прискорення \bar{a} можна у прийнятій системі координат $Oxyz$ подати у вигляді його проєкцій на осі координат. А саме:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (2.17)$$

Якщо порівняти вирази (2.16) і (2.17), то можна написати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ a_y &= \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким чином, проєкції вектора прискорення матеріальної точки на осі координат дорівнюють другим похідним за часом від відповідних координат або першим похідним за часом від проєкцій швидкостей.

Якщо відомі проєкції вектора прискорення на осі координат, то є можливість скласти їх геометрично і отримати модуль самого вектора:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.19)$$

Напрямок вектора \bar{a} також визначається через напрямні косинуси:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{x}, \bar{a}) &= \frac{a_x}{a}, \\ \cos(\hat{y}, \bar{a}) &= \frac{a_y}{a}, \\ \cos(\hat{z}, \bar{a}) &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Використовуючи значення напрямних косинусів, через функції арккосинусів знаходять величини кутів.

Таким чином, при координатному способі задання руху матеріальної точки, якщо цей рух здійснюється у просторі, її швидкість \bar{v} і прискорення \bar{a} визначаються відповідно за допомогою виразів (2.13), (2.14), (2.15), (2.18), (2.19) і (2.20). Якщо рух здійснюється у площині, то у всіх цих виразах відкидається одна координата, а якщо прямолінійно, то відкидаються дві координати.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає кінематика? Які незалежні змінні в кінематиці?
2. У чому полягають основні задачі кінематики?
3. Які існують способи задання руху точки?
4. Що таке закон руху матеріальної точки?

5. Яка залежність між радіус-вектором точки та її координатами?
6. Як спрямовується вектор швидкості точки?
7. В яких одиницях вимірюються координати, швидкості та прискорення точки?
8. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки при векторному способі задання руху?
9. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки при координатному способі задання руху?
10. Які властивості простору і часу при вивченні руху тіл в механіці?

1.2.7. Натуральний спосіб задання руху матеріальної точки

Визначимо спочатку кінематичне рівняння руху при натуральному способі задання руху матеріальної точки.

Натуральний спосіб задання (опису) руху матеріальної точки застосовується тоді, коли траєкторія точки заздалегідь відома. Рух вивчається відносно фіксованого початку відліку. Задається і закон руху матеріальної точки вдовж траєкторії.

Таким чином, для задання руху натуральним способом необхідно знати:

1. Траєкторію AB (рис. 2.3), яка може бути задана рівнянням, графічно чи вказівкою, наприклад: точка рухається вдовж кола радіусом R .

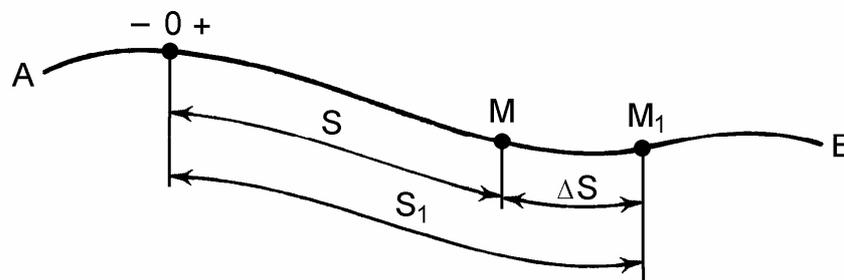


Рис. 2.3.

2. Початок відліку O дугової координати S на траєкторії руху з вказівкою напрямків додатних “+” і від’ємних “-” значень координат. Крім того, задається початок відліку часу t . Звичайно приймають, що $t = 0$ в момент, коли точка M проходить через точку O на траєкторії руху.

3. Закон руху матеріальної точки вздовж траєкторії. Якщо, наприклад, у момент часу t точка займає положення M , дугова координата якого дорівнює S , то це записується наступним чином:

$$S = S(t). \quad (2.21)$$

Ця функція повинна бути неперервною і, принаймні, двічі диференційованою.

Співвідношення (2.21) називається кінематичним рівнянням руху матеріальної точки у натуральній формі (або законом зміни дугової координати). Це, фактично, відстань рухомої точки M від початку відліку

вздовж траєкторії руху.

Дугову координату не слід плутати з довжиною шляху, який проходить точка за певний проміжок часу як у додатному, так і у від'ємному напрямках.

Визначимо кінематичні характеристики руху матеріальної точки при натуральному способі задання її руху.

Швидкість руху точки

Розглянемо схему руху матеріальної точки M (рис. 2.3). Положення точки M відповідає моменту часу t , а положення $M_1 - t_1$. Тоді проміжку часу $t_1 - t = \Delta t$ відповідає зміна дугової координати $S_1 - S = \Delta S$. Звідси можна визначити середню швидкість точки за проміжок часу Δt :

$$v_c = \frac{S_1 - S}{t_1 - t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

А швидкість точки у будь-який момент часу t можна визначити, якщо взяти границю відношення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, якщо Δt прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \quad (2.22)$$

Модуль швидкості матеріальної точки при натуральному способі задання її руху дорівнює першій похідній за часом від закону руху точки.

Напрямок вектора швидкості – по дотичній до траєкторії руху матеріальної точки.

Похідна за часом визначає чисельну алгебраїчну величину швидкості, тобто, якщо $v > 0$, то вектор швидкості спрямований у додатному напрямку відліку, а якщо $v < 0$, то протилежно.

Приклад.

Закон руху матеріальної точки заданий рівнянням $S = 4t^2 + t$ м. Визначити пройдений шлях та швидкість руху точки в момент часу $t_1 = 1$ с.

Розв'язання.

Визначимо спочатку положення точки на траєкторії руху при $t_1 = 1$ с. Оскільки відлік часу почався з початком моменту руху, то $S(0) = 0$. Підставимо у рівняння руху значення заданого моменту часу:

$$S = 4 \cdot 1^2 + 1 = 5 \text{ м.}$$

Для визначення швидкості руху точки продиференціюємо за часом рівняння руху:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(4t^2 + t)}{dt} = 8t + 1 \text{ м/с.}$$

З отриманої функції швидкості руху матеріальної точки можемо визначити підстановкою t , що на початку руху (при $t = 0$): $v(0) = 1 \text{ м/с}$, а при $t_1 = 1 \text{ с}$: $v(1) = 9 \text{ м/с}$.

1.2.8. Перехід від координатного способу задання руху матеріальної точки до натурального способу

Для переходу від одного способу задання руху матеріальної точки до іншого необхідно знайти залежності між основними параметрами цих рухів. Зробимо це, розглядаючи координатний і натуральний способи задання руху матеріальної точки. Так, на підставі (2.22), що визначає швидкість матеріальної точки при натуральному способі задання її руху, можна записати

$$dS = v \cdot dt,$$

звідки

$$S = \int_0^t v dt.$$

Оскільки при координатному способі задання руху матеріальної точки її швидкість визначається згідно виразу (2.14):

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

то, підставляючи його у попередній вираз, остаточно знайдемо залежність між двома вказаними способами задання руху матеріальної точки:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

1.2.9. Натуральний тригранник

Наведемо деякі відомості з диференціальної геометрії, які знадобляться для подальшого визначення кінематичних характеристик руху матеріальної точки натуральним способом.

Припустимо, що крива AB є траєкторією точки M (рис. 2.4). У довільній точці M та у нескінченно наближеній до неї точці M_1 проведемо дотичні до цієї кривої (орти, які відповідні цим дотичним, позначимо через $\bar{\tau}$ та $\bar{\tau}_1$). Потім перенесемо вектор $\bar{\tau}_1$ паралельно самому собі у точку M і проведемо через вектори $\bar{\tau}$ та $\bar{\tau}_1$ площину Q .

Площина, яка є граничним положенням площини Q , якщо точка M_1 прямує до точки M , називається стичною площиною.

Через точку M проведемо площину, що перпендикулярна до дотичної $\bar{\tau}$, яка називається нормальною. Очевидно, що будь-яка пряма у цій площині, яка проходить через точку M , буде перпендикулярна до $\bar{\tau}$, тобто буде нормаллю до кривої.

Лінія перетину нормальної та стичної площин визначає головну нормаль до кривої. Отже, головна нормаль – це єдина з нескінченної множини нормалей до кривої у точці M , яка розташована у стичній площині. Площина, що проходить через точку M перпендикулярно до головної нормалі, називається спрямною.

Лінія перетину спрямної та нормальної площин визначає бінормаль кривої. Очевидно, що бінормаль перпендикулярна до головної нормалі.

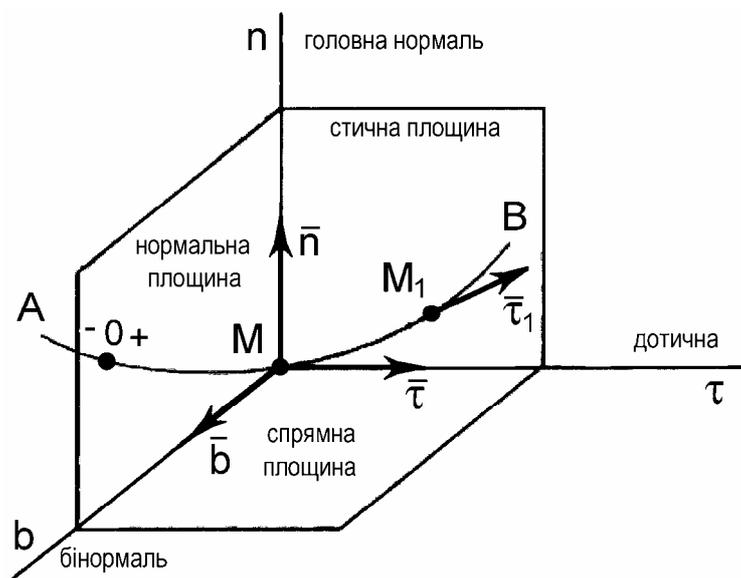


Рис. 2.4.

Таким чином, у кожній точці кривої можна вказати три взаємно перпендикулярні напрями, за якими можна провести дотичну у бік зростання дугової координати (відповідний орт $\bar{\tau}$), головну нормаль – у бік угнутості кривої (відповідний орт \bar{n}), бінормаль з відповідним ортом \bar{b} , спрямовану так, що орти $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} утворюють праву ортогональну трійку векторів.

Прямокутна рухома система координатних осей з ортами $\bar{\tau}$, \bar{n} і \bar{b} , з початком у рухомій точці M називається системою натуральних осей або натуральним рухомих тригранником $M\tau nb$.

Зауважимо, що плоска крива повністю розташована у стичній площині, а головна нормаль є нормаллю до кривої у цій площині. На відміну від інших систем відліку, натуральний тригранник рухається разом з точкою і змінює свою орієнтацію у просторі у відповідності з характером траєкторії.

1.2.10. Кривизна кривої

Як можна побачити далі, прискорення точки у криволінійному русі залежить від кривизни траєкторії, тому розглянемо цю характеристику. На рисунку 2.5 зображена траєкторія AB руху точки і два близькі положення M та M_1 . Проведемо через точки M та M_1 дотичні τ і τ_1 . Елементарна відстань між точками M і M_1 вдовж траєкторії дорівнює ΔS .

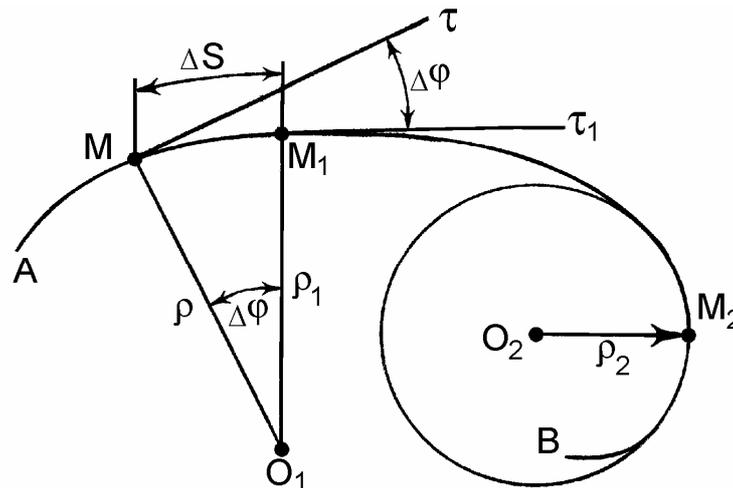


Рис. 2.5.

Кут $\Delta\varphi$ між дотичними у двох близьких точках є кутом суміжності.

Кривизною кривої K у даній точці M називається границя відношення кута суміжності до дуги ΔS , яка його стягує, коли ця дуга прямує до нуля.

Якщо відношення $\Delta\varphi$ до ΔS є середньою кривизною:

$$K_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S},$$

то зведення K_c до границі дає дійсне значення кривизни кривої:

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}. \quad (2.23)$$

Розглянемо коло радіусом R (рис. 2.6). Зробимо аналогічну геометричну побудову. Виразимо ΔS за відомою формулою:

$$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi,$$

або

$$dS = R \cdot d\varphi$$

і підставимо у (2.23):

$$K = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{R \cdot \Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{R},$$

тобто

$$K = \frac{1}{R}. \quad (2.24)$$

Таким чином, коло радіусом R є кривою сталої кривизни, значення якої дорівнює оберненій величині радіуса.

Для визначення кривизни довільної кривої досить підібрати таке коло, елемент дуги якого краще за все апроксимує ділянку кривої у даній точці.

Тоді радіус цього кола буде радіусом кривизни кривої, а центр кола – центром кривизни (рис. 2.5).

ρ_2 – радіус кривизни кривої у точці M_2 ;

O_2 – центр кривизни;

$K_2 = \frac{1}{\rho_2}$ – кривизна кривої у точці M_2 .

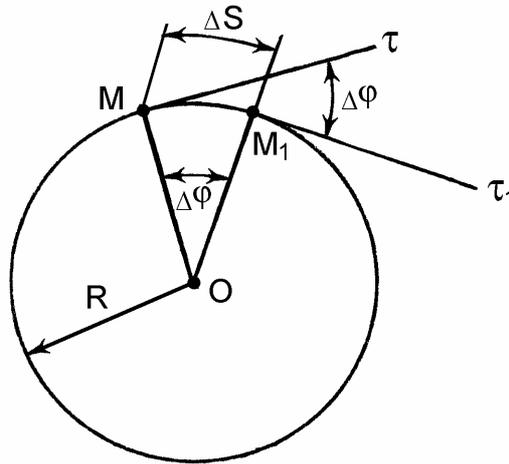


Рис. 2.6.

1.2.11. Дотичне і нормальне прискорення точки у натуральних осях координат

У декартових осях координат ми визначали прискорення точки у проєкціях на осі x, y, z . У натуральних осях координат визначимо проєкції вектора прискорення на дотичну τ і головну нормаль n . Але спочатку доведемо, що проєкція вектора прискорення на бінормаль b дорівнює нулю. Звернемось до рисунку 2.7. Швидкості близьких точок M і M_1 – вектори \bar{v} і \bar{v}_1 напрямлені по дотичних $\bar{\tau}$ і $\bar{\tau}_1$ у цих точках. Перенесемо паралельно вектор \bar{v}_1 у точку M і з'єднаємо кінці векторів \bar{v} і \bar{v}_1 . Побудувавши паралелограм, можна побачити, що вектор $\Delta\bar{v}$, як різниця швидкостей, формує вектор прискорення і розташований в стичній площині.

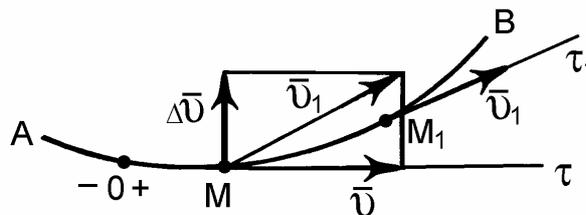


Рис. 2.7.

Паралельно $\Delta \bar{v}$ спрямований і вектор середнього прискорення \bar{a}_c , а вектор прискорення \bar{a} в даний момент часу дорівнює:

$$\bar{a} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M_1 \rightarrow M}} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t},$$

і також буде розташований в стичній площині. А це означає, що проекція вектора прискорення на бінормаль дорівнює нулю.

Тепер, знаючи, що вектор прискорення має тільки дотичну і нормальну складові, визначимо останні.

Для цього нам знадобиться схема, що представлена рис. 2.8, де:

- $M\tau$ – дотична до траєкторії,
- Mn – головна нормаль,
- Mb – бінормаль,
- C – центр кривизни траєкторії,
- ρ – радіус кривизни траєкторії.

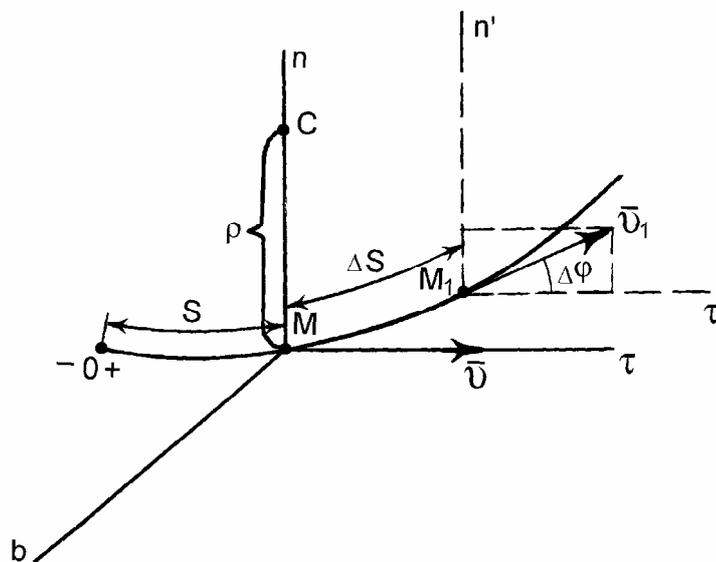


Рис. 2.8.

Припустимо, що в момент часу t точка M має швидкість \bar{v} , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – швидкість \bar{v}_1 . Тоді прискорення \bar{a} буде дорівнювати:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t}.$$

Переходимо до проекцій прискорення матеріальної точки на натуральні осі координат τ і n :

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad (2.25)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}. \quad (2.26)$$

Враховуючи, що проекції векторів на паралельні осі однакові, проведемо через точку M_1 осі $M_1\tau'$ і M_1n' , які паралельні відповідним осям $M\tau$ і Mn , і позначимо кут суміжності $\Delta\varphi$.

Знайдемо проекції векторів \bar{v} і \bar{v}_1 на осі $M\tau$ і Mn :

$$v_\tau = v,$$

$$v_n = 0,$$

$$v_{1\tau} = v_1 \cos \Delta\varphi,$$

$$v_{1n} = v_1 \sin \Delta\varphi.$$

Підставимо значення проекцій у вирази 2.25 і 2.26. Матимемо:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad (2.27)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2.28)$$

Якщо проміжок часу Δt прямує до нуля, то

$$M_1 \rightarrow M,$$

$$\Delta\varphi \rightarrow 0,$$

$$\Delta S \rightarrow 0,$$

$$v_1 \rightarrow v,$$

$$\cos \Delta\varphi \rightarrow 1.$$

Тоді рівняння (2.27) може бути записане, як показано нижче, і дотичне прискорення дорівнює:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

або

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}. \quad (2.29)$$

Таким чином, дотичне прискорення матеріальної точки характеризує зміну швидкості за величиною в одиницю часу і дорівнює першій похідній від функції швидкості за часом або другій похідній від закону руху.

Визначимо нормальне прискорення a_n . Перетворимо вираз для нормального прискорення (2.28), помноживши чисельник і знаменник на

добуток $\Delta\varphi \cdot \Delta S$:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right). \quad (2.30)$$

Перепишемо вираз (2.30) таким чином:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{v_1 \rightarrow v} v_1 = v,$$

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1 - \text{перша важлива границя},$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{1}{\rho} - \text{кривизна},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = v.$$

Підставимо значення цих границь у вираз для нормального прискорення:

$$a_n = v \cdot 1 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho},$$

або

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.31)$$

Нормальне прискорення матеріальної точки характеризує зміну швидкості за напрямом в одиницю часу і дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії у даній точці.

Вектор нормального прискорення \bar{a}_n завжди спрямований вздовж нормалі до центра кривизни в даній точці.

Нормальне прискорення a_n завжди додатне, тому що містить у чисельнику вираз v^2 . Дотичне прискорення a_τ може бути як додатним, так і від'ємним.

Вектор повного прискорення \bar{a} може бути визначений геометричним додавання векторів \bar{a}_τ та \bar{a}_n і є діагоналлю прямокутника побудованого на вказаних векторах, як на сторонах (рис. 2.9). Модуль повного прискорення a дорівнює:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

Кут φ між вектором \bar{a} і нормаллю n визначається тригонометрично:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Вектор прискорення \bar{a} через його проєкції a_τ і a_n може бути записаний наступним чином:

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n}, \quad (2.32)$$

де $\bar{\tau}, \bar{n}$ – відповідні орти дотичної і нормалі натуральних осей координат.

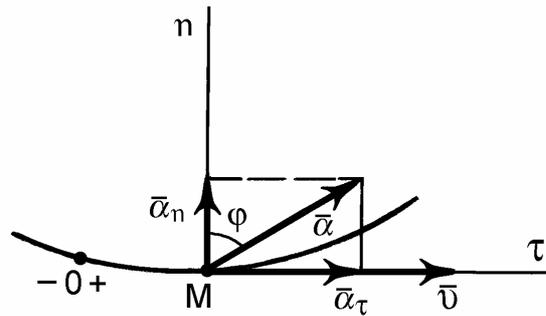


Рис. 2.9.

Слід зазначити, що складові вектора \bar{a} вздовж натуральних осей координат дорівнюють:

$$\bar{a}_\tau = \bar{\tau} \cdot a_\tau,$$

$$\bar{a}_n = \bar{n} \cdot a_n,$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

1.2.12. Окремі випадки руху матеріальної точки

1. Прямолінійний рух.

Радіус кривизни траєкторії, якою є пряма лінія, дорівнює $\rho = \infty$, тому:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Таким чином, швидкість v руху матеріальної точки змінюється лише чисельно, за модулем. Це означає, що дотичне прискорення a_τ характеризує зміну вектора швидкості за модулем.

А якщо цей рух є ще і рівномірним, тобто, коли $v = \text{const}$, то складові прискорення матеріальної точки будуть дорівнювати:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

$$a = 0.$$

2. Рівномірний криволінійний рух.

У даному випадку модуль швидкості $v = const$, а радіус кривизни траєкторії $\rho \neq \infty$. Визначимо прискорення a руху матеріальної точки:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = a.$$

Таким чином, як бачимо з наведених виразів, повне прискорення a матеріальної точки в цьому випадку дорівнює нормальному прискоренню a_n .

Вектор нормального (в даному випадку повного) прискорення \bar{a} напрямлений по нормалі \bar{n} до траєкторії руху матеріальної точки. Оскільки прискорення a з'являється тільки за рахунок зміни напрямку вектора швидкості \bar{v} , то нормальне прискорення a_n характеризує зміну вектора швидкості за напрямком.

3. Рівнозмінний криволінійний рух.

У цьому випадку рух точки є криволінійним, але прискорення a_{τ} є величиною сталою. Цей випадок носить назву рівнозмінного руху (тобто, коли за рівні проміжки часу швидкість руху матеріальної точки змінюється на одну і ту ж величину, збільшується або зменшується).

Визначимо кінематичні характеристики рівнозмінного руху матеріальної точки. Оскільки $a_{\tau} = const$, а $a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$, то звідси є можливість визначити швидкість руху точки:

$$dv = a_{\tau} \cdot dt.$$

Швидкість v перебуває під знаком диференціала, а тому для її визначення необхідно взяти інтеграли від лівої та правої частин останнього виразу. Використовуємо для цього визначені інтеграли, для яких задаємо верхню та нижню границі змінних величин. Швидкість точки змінюється від початкового значення v_0 до кінцевого v , а час від початку відліку $t = 0$ до кінцевого t :

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_{\tau} dt,$$

звідки

$$v - v_0 = a_\tau t,$$

або

$$v = v_0 + a_\tau t,$$

де v_0 - початкова швидкість руху матеріальної точки.

Використаємо далі вираз $v = \frac{dS}{dt}$, з якого маємо можливість визначити dS . Переміщення буде дорівнювати:

$$dS = v dt.$$

Замість v підставимо в останній вираз отримане його значення:

$$dS = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Як і у попередньому випадку знайдемо переміщення S , взявши визначені інтеграли від лівої і правої частин останнього виразу. Також задаємо верхні та нижні границі змінних величин, причому переміщення точки змінюється від початкового значення S_0 до кінцевого S :

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt,$$

звідки

$$S - S_0 = v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Остаточно останній вираз можна переписати так

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

де S_0 – початкове переміщення точки.

Таким чином, при рівнозмінному русі матеріальної точки її швидкість та переміщення визначаються за допомогою знайдених виразів. Слід зауважити, що знаки у правих частинах цих формул (перед a_τ) визначають характер рівнозмінного руху. Так, якщо вони додатні, то рух точки є рівноприскореним, а якщо від'ємні, то – рівносповільненим.

Приклад.

Палець кривошипу дизеля рухається відповідно заданих параметрично рівнянь

$$x = b \sin \omega t,$$

$$y = b \cos \omega t,$$

де x і y – у метрах; t – у секундах; b і ω – сталі величини.

Визначити траєкторію руху, швидкість та прискорення пальця.

Розв'язання.

Для визначення рівняння траєкторії руху пальця кривошипа треба виключити з заданих рівнянь руху параметр часу t . Спочатку визначимо з

заданих рівнянь тригонометричні функції

$$\sin \omega t = \frac{x}{b},$$

$$\cos \omega t = \frac{y}{b}.$$

Оскільки тригонометричні функції є функціями одного аргументу, то піднесемо до квадрату ліві та праві частини цих виразів і додамо їх по-членно:

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ліва частина останнього виразу дорівнює одиниці, оскільки $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, тоді

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Таким чином, з останнього виразу легко побачити, що траєкторією руху пальця кривошипа є коло радіуса b з центром у початку координат.

Для визначення швидкості руху знайдемо спочатку проекції швидкості руху пальця на координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\omega \cdot \cos \omega t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -b\omega \cdot \sin \omega t.$$

Модуль швидкості руху буде дорівнювати

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(b\omega \cdot \cos \omega t)^2 + (-b\omega \cdot \sin \omega t)^2} = b\omega.$$

Таким чином, з останнього виразу видно, що палець рухається зі сталою швидкістю, яка дорівнює $b\omega$.

Знайдемо прискорення пальця кривошипу. Також визначимо його через проекції на осі координат. Для цього візьмемо другі похідні від заданих координат руху:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -b\omega^2 \cdot \sin \omega t,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Повне прискорення буде дорівнювати:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-b\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2 + (-b\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2} = b\omega^2.$$

Оскільки палець кривошипу рухається по колу, тобто по криволінійній траєкторії руху сталого радіуса b , то його прискорення можна було б визначити, якщо використати вирази, що описують натуральний спосіб

задання руху матеріальної точки. Дотичне прискорення пальця кривошипу буде дорівнювати нулю, оскільки швидкість $b\omega = const$:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(b\omega)}{dt} = 0.$$

Нормальне прискорення визначимо так:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(b\omega)^2}{b} = b\omega^2.$$

Оскільки дотичного прискорення немає, то повне прискорення дорівнює нормальному:

$$a = a_n = b\omega^2.$$

Таким чином, величина прискорення пальця кривошипу, яка визначена різними способами, співпадає.

Приклад

Точка на ободі барабана зернозбирального комбайна у період розгону рухається згідно рівняння $S = 0,1 \cdot t^3$ (S – у метрах, t – у секундах). Радіус барабана дорівнює $R = 0,5$ м. Визначити дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість дорівнює $v = 30$ м/с.

Розв'язання.

Рівняння руху точки задане натуральним способом, а тому швидкість можна визначити так:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1 \cdot t^3)}{dt} = 0,3 \cdot t^2.$$

По заданому значенню швидкості точки $v = 30$ м/с знайдемо момент часу. Підставимо значення цієї швидкості в отриманий вираз і знайдемо t :

$$30 = 0,3 \cdot t^2,$$

звідки

$$t = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с}.$$

Дотичне прискорення точки буде дорівнювати:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(0,3 \cdot t^2)}{dt} = 0,6t,$$

або через 10 сек

$$a_{\tau}(10) = 0,6 \cdot 10 = 60 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення визначимо так:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,3 \cdot t^2)^2}{0,5} = \frac{30^2}{0,5} = 1800 \text{ м/с}^2.$$

Знак "+" перед дотичним прискоренням a_τ означає, що барабан зернозбирального комбайна перебуває у стані розгону, що відповідає умові задачі.

Питання для самоконтролю

1. Які потрібні умови для задання руху натуральним способом?
2. Як визначається швидкість точки за натуральним описом руху?
3. Які особливості мають натуральні осі координат?
4. Чим відрізняються криволінійна координата точки і шлях точки вздовж траєкторії?
5. Назвіть приклад закону руху матеріальної точки вздовж траєкторії і визначте закон зміни швидкості?
6. Чи проектується вектор прискорення на бінормаль?
7. Яким чином характеризує рух дотичне прискорення точки?
8. Що характеризує нормальне прискорення точки?
9. Наведіть залежність між кривизною і радіусом кривизни?
10. Що таке натуральний тригранник і як він утворюється?

2. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Після розгляду кінематики матеріальної точки перейдемо до вивчення руху твердого тіла. Розглянемо спочатку його найпростіші види – поступальний і обертальний.

2.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, що проведена на цьому тілі, переміщується, завжди залишаючись паралельною сама собі.

Прикладами поступального руху твердого тіла може бути: рух планки мотовила зернозбирального комбайна при прямолінійному його русі; рух клавіші соломотряса (шарнірного паралелограма O_1ABO_2 , рис. 2.10, а), який здійснює коловий поступальний рух; поступальний рух штанги кулачкового механізму (рис. 2.10, б), якій здійснює зворотно-поступальний рух; рух педалі велосипеда відносно рами, поршня двигуна відносно циліндра, рух кузова автомобіля при прямолінійному русі і т.п.

Таким чином, траєкторією руху точок тіла при поступальному русі можуть бути як пряма лінія, так і будь-які криві. Термін “поступальний рух” стосується тільки тіла, а не точки.

Яким же чином визначаються кінематичні характеристики руху твердого тіла при поступальному русі? Розглянемо теорему.

“При поступальному русі тіла всі його точки рухаються по тотожних траєкторіях і мають у кожен момент часу однакові швидкості і прискорення”.

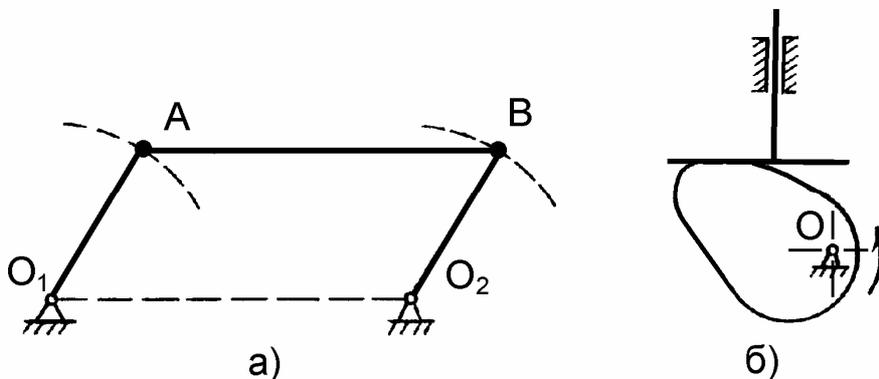


Рис. 2.10.

Доведення: Нехай є тіло, яке рухається поступально і яке за деякій проміжок часу перейшло з одного положення в друге (рис. 2.11). Пряма AB , що проведена крізь довільні точки A і B тіла залишилась паралельною самій собі і зайняла нове положення $A'B'$. Виберемо за початок відліку

довільну точку O . Проведемо з точки O радіуси – вектори \vec{r}_A, \vec{r}_B двох довільних точок тіла A і B . Із трикутника OAB , що утворено на рисунку 2.11, випливає, що

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (2.33)$$

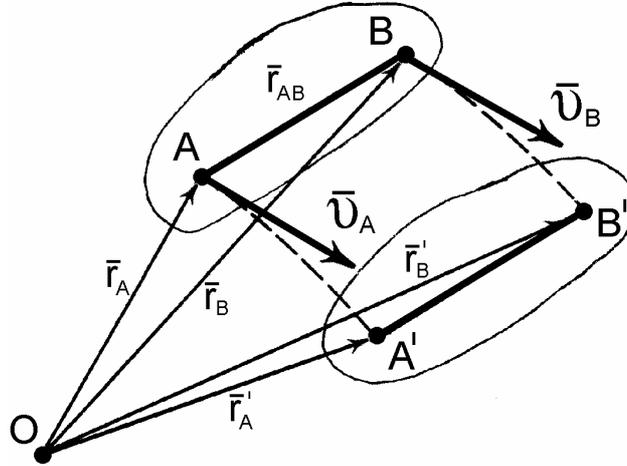


Рис. 2.11.

Згідно визначення поступального руху тіла вектор \vec{r}_{AB} , який з'єднує точки A і B і переміщується паралельно самому собі є сталим вектором, тому що точки A і B належать твердому тілу:

$$\vec{r}_{AB} = \overline{AB} = const.$$

Тобто, при поступальному русі тіла радіуси – вектори \vec{r}_A і \vec{r}_B довільних точок A і B , змінюючись за напрямком, будуть відрізнятися згідно (2.33) на один і той же самий сталий вектор \vec{r}_{AB} .

Отже, з цього випливає, що траєкторію руху точки B можна одержати, змістивши траєкторію точки A у напрямку вектора \vec{r}_{AB} на відстань AB , і тому ці траєкторії будуть тотожними, конгруентними (суміщаються при накладанні).

Визначимо швидкості точок A і B тіла. Для цього продиференціюємо за часом вираз (2.33.):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\vec{r}_{AB})}{dt}.$$

Друга складова правої частини цього виразу дорівнює нулю і, оскільки $\vec{r}_{AB} = const$, то остаточно маємо:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt},$$

а це є швидкості точок A і B :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A. \quad (2.34)$$

Таким чином, швидкості точок A і B тіла, що рухається поступально,

рівні за величиною і мають однаковий напрямок, оскільки вони розташовані на дотичних до однакових траєкторій руху і спрямовані в одну і ту же сторону.

Визначимо прискорення точок A і B . Після другого диференціювання за часом виразу (2.33) маємо:

$$\frac{d^2 r_B}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2} + \frac{d^2 r_{AB}}{dt^2}.$$

Як і у попередньому випадку, маємо $\frac{d^2(\bar{r}_{AB})}{dt^2} = 0$, оскільки $\bar{r}_{AB} = const$. Тоді остаточно:

$$\frac{d^2 r_B}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2},$$

або

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt},$$

і

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A. \quad (2.35)$$

Таким чином, поступальний рух тіла цілком визначається рухом будь-якої однієї його точки.

Остаточно можна зробити такий висновок: визначення поступального руху твердого тіла зводиться до визначення руху тільки однієї його точки, оскільки всі точки тіла рухаються однаково. При цьому швидкість і прискорення, які є загальними для всіх точок тіла, називаються швидкістю і прискоренням поступального руху тіла, а рівняння руху будь-якої його точки є рівнянням поступального руху тіла.

Таким чином, внаслідок повної тотожності руху всіх точок тіла, що рухається поступально, більшість задач з кінематики такого руху тіла вирішується методами кінематики матеріальної точки.

2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Закон обертального руху

Крім поступального руху твердого тіла до найпростіших відноситься обертальний рух. Обертальний рух тіл найбільш широко використовується у техніці. Розглянемо його сутність і спочатку сформулюємо його визначення.

Обертальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються по колах, центри яких розміщені на одній прямій, яка називається віссю обертання.

Вісь обертання може знаходитись, як всередині самого тіла, так і зовні його.

Для того, щоб здійснити обертальний рух твердого тіла, необхідно закріпити нерухомо дві будь-які точки цього тіла, наприклад, у підшипниках, тоді пряма, яка проходить крізь ці точки буде віссю обертання і залишається при обертанні тіла нерухомою.

Визначимо положення тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Уявимо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.12). Проведемо через вісь обертання z дві півплощини, одна з яких π_1 є нерухомою, а друга півплощина π_2 незмінно поєднана з тілом і обертається разом з ним. Тоді положення тіла у будь-який момент часу t однозначно визначається двограним кутом φ між півплощинами π_1 і π_2 , взятим з відповідним знаком, який називається кутом повороту тіла φ .

При обертанні тіла навколо нерухомої осі z кут повороту φ є неперервною і однозначною функцією часу:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.36)$$

Вираз (2.36) називається законом обертального руху тіла або кінематичним рівнянням обертального руху.

Якщо маємо цю функцію, то положення тіла буде однозначно і повністю визначено. Тобто кожному значенню параметра часу t маємо у відповідність лише єдину величину кута φ .

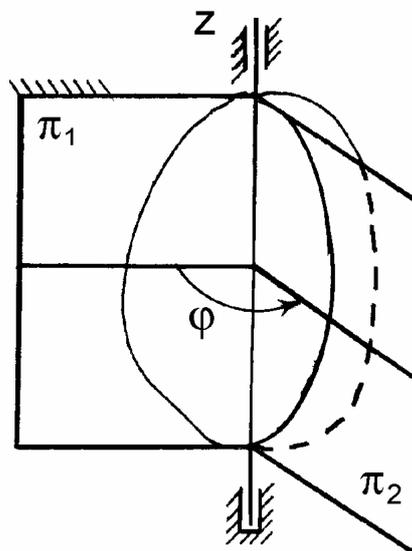


Рис. 2.12.

Кут повороту φ тіла навколо нерухомої осі має знак. Так, кут φ буде додатним ($\varphi > 0$), якщо дивитися з додатного кінця осі z і бачити обертання рухомої площини π_2 у напрямку проти руху годинникової стрілки.

І навпаки, буде від'ємним ($\varphi < 0$), якщо, дивлячись з додатного кінця осі z , можна бачити обертання рухомої площини π_2 за напрямком руху годинникової стрілки.

Кут повороту тіла вимірюється у радіанах або обертах. Як відомо, один оберт дорівнює 2π рад. А тому зв'язок між кутом повороту φ , що вимірюється у радіанах, і кутом повороту N , що вимірюється в обертах, буде таким:

$$\varphi = 2\pi N,$$

де N – кількість обертів тіла.

2.2.1. Кутова швидкість та кутове прискорення обертового тіла

Кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначимо ці кінематичні характеристики.

Кутова швидкість.

Кутова швидкість ω характеризує зміну кута повороту тіла φ за одиницю часу, або показує, як швидко тіло обертається.

Якщо за деякій проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло здійснює поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то середня кутова швидкість ω_c тіла за цей проміжок часу буде дорівнювати такому відношенню:

$$\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Для знаходження кутової швидкості ω тіла у будь-який момент часу t необхідно ω_c представити у вигляді границі, до якої наближається його значення, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.37)$$

Таким чином, кутова швидкість тіла у будь-який момент часу дорівнює першій похідній від кута повороту за часом.

Знак ω визначає напрямок обертання тіла і, у свою чергу, визначається знаком кута повороту φ . Якщо $\omega > 0$, то тіло в даний момент часу обертається в додатному напрямку, і, навпаки, якщо $\omega < 0$, то тіло обертається у від'ємному напрямку.

Одиниця виміру кутової швидкості ω : $\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$, $\left[\frac{1}{\text{с}} \right]$, $\left[\text{с}^{-1} \right]$.

Кутове прискорення.

Кутове прискорення ε тіла, що обертається навколо нерухомої осі, характеризує зміну кутової швидкості ω за одиницю часу.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то середнє кутове прискорення ε_c тіла за цей проміжок часу буде чисельно дорівнювати:

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Для знаходження кутового прискорення ε тіла у будь-який момент часу t необхідно ε_c представити у вигляді границі, до якої наближається його значення, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

або

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.38)$$

Таким чином, кутове прискорення тіла у будь-який момент часу чисельно дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту за часом.

Одиниця виміру кутового прискорення ε : $\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right]$, $\left[\frac{1}{\text{с}^2} \right]$, $\left[\text{с}^{-2} \right]$.

З вище наведеного випливає, що якщо модуль кутової швидкості ω з часом зростає ($\varepsilon > 0$), то обертання тіла буде прискореним, а якщо зменшується ($\varepsilon < 0$), то обертальний рух буде сповільненим.

Слід також зауважити, що обертання тіла навколо осі буде прискореним, якщо знаки перед кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε будуть однаковими, і навпаки – сповільненим, якщо знаки перед вказаними величинами будуть різними.

2.2.2. Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі

В залежності від того, які кінематичні характеристики має тіло при обертанні навколо нерухомої осі, можливі деякі випадки. Розглянемо їх.

1. Рівномірне обертання.

Якщо кутова швидкість тіла залишається за весь період часу руху тіла сталою, то таке обертання називається рівномірним. При такому русі кутова швидкість $\omega = \text{const}$, а $\varepsilon = 0$. Кут повороту тіла можна визначати за такою формулою

$$\varphi = \omega \cdot t, \quad (2.39)$$

або кутова швидкість буде дорівнювати

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

У техніці швидкість рівномірного обертання тіл найчастіше визначають частотою обертання n , яка вимірюється у обертах за хвилину $\left[\frac{\text{об.}}{\text{хв.}} \right]$.

Встановимо зв'язок між вказаними кінематичними характеристиками. Так, відомо, що при одному оберті тіло повернеться на кут 2π , а при n обертах – на кут $2\pi n$. Тепер, якщо цей поворот (на кут $2\pi n$) відбувається за одну хвилину, або 60 сек , то зв'язок між кутовою швидкістю тіла ω і частотою обертання тіла n виражається такою залежністю:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n.$$

2. Рівномірнозмінний обертальний рух.

У такому випадку обертання тіла навколо нерухомої осі кутове прискорення $\varepsilon = \text{const}$, тобто кутова швидкість тіла ω за рівні проміжки часу змінюється на одну і ту ж величину.

Визначимо кінематичні характеристики рівномірнозмінного обертального руху. Оскільки $\varepsilon = \text{const}$, а згідно (2.38) $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, то звідси є

можливість визначити кутову швидкість руху тіла:

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt. \quad (2.40)$$

Кутова швидкість ω знаходиться під знаком диференціала, а тому для її знаходження необхідно взяти інтеграли від лівої та правої частин виразу (2.40). Використовуємо для цього визначені інтеграли, для яких задаємо верхню та нижню границі зміни змінних величин:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t,$$

або

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.41)$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість тіла.

Далі використаємо вираз (2.37), згідно якого $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Маємо можливість з нього визначити кут φ :

$$d\varphi = \omega \cdot dt. \quad (2.42)$$

Замість ω підставимо у вираз (2.42) його значення (2.41):

$$d\varphi = \omega_o \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt. \quad (2.43)$$

Як і у попередньому випадку, знайдемо кут повороту тіла φ , взявши визначені інтеграли від лівої і правої частин виразу (2.43). Також задаємо верхні та нижні границі зміни величин. Матимемо:

$$\int_{\varphi_o}^{\varphi} d\varphi = \int_o^t \omega_o dt + \int_o^t \varepsilon t dt. \quad (2.44)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\varphi - \varphi_o = \omega_o t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$

Остаточно матимемо:

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.45)$$

де φ_o – початковий кут повороту тіла.

Таким чином, при рівнозмінному обертальному русі твердого тіла кутова швидкість ω та кут повороту φ визначаються за допомогою формул (2.41) та (2.45). Слід зауважити, що знаки у правих частинах цих формул (перед ε) показують характер рівнозмінного обертального руху. Так, якщо вони додатні, то рух є рівноприскореним, а якщо від'ємні, то рівносповільненим.

Приклад.

Привідний вал силосорізки починає обертатись із стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon = 7,5 \text{ рад/с}^2$. Визначити кутову швидкість вала у кінці 15 секунди. Визначити також, на скільки обертів повернеться вал за ці 15 секунд.

Розв'язання.

За умовою прикладу кутове прискорення вала є стала додатна величина, а тому його обертальний рух буде рівноприскореним. Для визначення кутової швидкості ω і кута повороту φ вала можна скористатись виразами (2.41) і (2.45) відповідно, що використовують при розгляді рівноприскореного руху:

$$\omega = \omega_o + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Слід відразу зауважити, що, оскільки вал починає обертатись зі стану спокою, то його початкова кутова швидкість дорівнює нулю. Початковий кут повороту дорівнює нулю, оскільки суміщаємо початок відліку кута

повороту з початком руху:

$$\omega_0 = 0,$$

$$\varphi_0 = 0.$$

Підставимо далі у вираз для кутової швидкості значення кутового прискорення ε і часу $t_1 = 15$ с. Тоді кутова швидкість ω після п'ятнадцятої секунди буде дорівнювати:

$$\omega = \varepsilon t_1 = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \text{ рад/с.}$$

Підставимо у вираз для кута повороту φ вала відомі величини, отримуємо його значення за 15 секунд:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7,5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{ рад.}$$

Для знаходження загального числа обертів вала скористаємось таким виразом:

$$\varphi = N \cdot 2\pi.$$

Звідси число обертів N вала за 15 с дорівнює:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} = 134 \text{ об.}$$

2.2.3. Кінематичні характеристики точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Крім загальних кінематичних характеристик тіла, що обертається навколо нерухомої осі, кутової швидкості ω та кутового прискорення ε , розглянемо кінематичні характеристики окремих точок обертального тіла. До цих характеристик відносяться лінійні або колові швидкості точок та лінійні або колові прискорення точок тіла.

Лінійна швидкість.

Розглянемо тіло, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.13). Напрямок обертання показаний стрілкою. Виберемо в тілі будь-яку точку M , яка розміщується на відстані R від осі обертання z . При обертанні тіла точка M описує коло радіуса R , площина якого перпендикулярна осі z

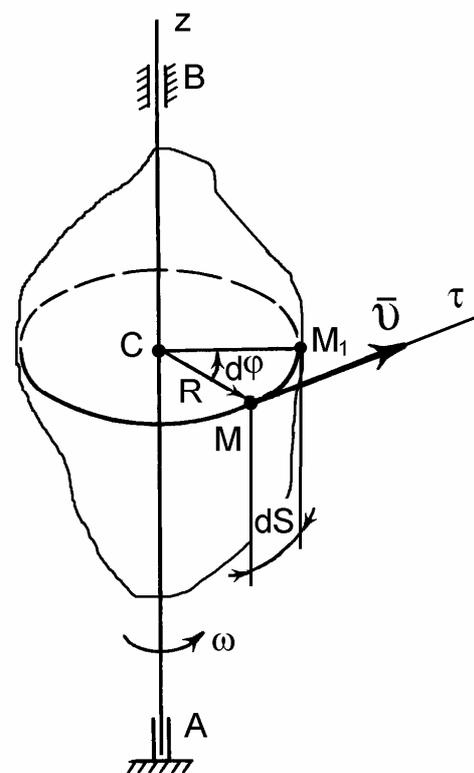


Рис. 2.13.

обертання, а центр C розташований на самій осі z .

За деякій проміжок часу dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, при цьому точка M здійснить уздовж своєї траєкторії переміщення в положення M_1 на таку величину:

$$dS = R d\varphi.$$

Визначимо лінійну швидкість точки M . За відомим виразом (2.22) вона буде дорівнювати

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R d\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

тобто

$$v = \omega R. \quad (2.46)$$

Ця швидкість носить назву лінійної або колової швидкості точки, що належить тілу, яке обертається навколо нерухомої осі.

Таким чином, лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання (відстань від даної точки до осі обертання).

Напрямок вектора лінійної швидкості \vec{v} – по дотичній $\vec{\tau}$ до кола (перпендикулярно радіусу обертання), яке описується точкою M під час руху і завжди спрямований у напрямку обертання.

Оскільки для всіх точок тіла кутова швидкість ω у даний момент часу має одне і те ж саме значення, то лінійні швидкості точок тіла, що обертається, пропорційні їх відстаням до осі обертання.

Якщо маємо тіло, що обертається навколо осі, яка перпендикулярна площині рисунка, то для діаметра KL буде мати місце еюра розподілу швидкостей точок, яка має лінійний характер (рис. 2.14).

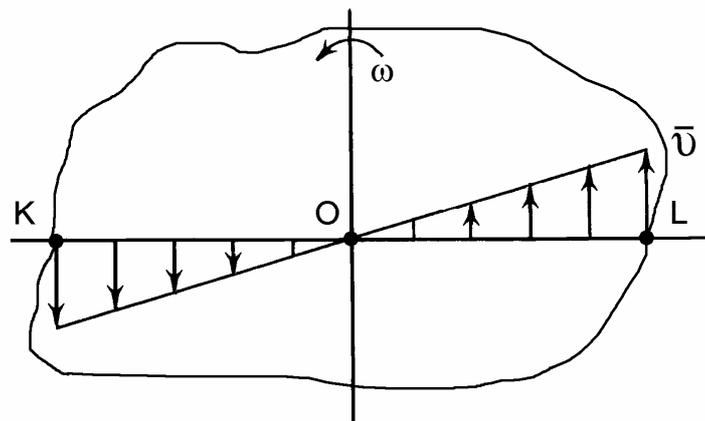


Рис. 2.14.

Лінійне прискорення.

Визначимо далі прискорення точки M , що належить тілу, яке обертається навколо нерухомої осі (див. рис. 2.14). Для цього можна скористатися отриманими раніше рівняннями (2.29) і (2.31):

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt},$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

В даному випадку $\rho = R$, тоді, підставляючи значення (2.46), матимемо значення обертального, дотичного прискорення

$$a_{\tau} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad (2.47)$$

та доцентрового, нормального прискорення

$$a_n = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2. \quad (2.48)$$

Напрямки векторів отриманих складових прискорень будуть спрямовані так. Дотичне прискорення \bar{a}_{τ} завжди спрямоване по дотичній до траєкторії руху точки M , тобто перпендикулярно радіусу R . Причому, якщо обертання тіла буде прискореним, то напрямок \bar{a}_{τ} спрямований у бік вектора швидкості \bar{v} , якщо сповільнене – то проти. Нормальне прискорення \bar{a}_n завжди додатне і його вектор спрямований до центра кола, по якому рухається точка M .

Визначимо повне прискорення a точки M . Воно буде дорівнювати геометричній сумі складових дотичного a_{τ} і нормального a_n прискорень. За модулем це прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4} \quad (2.49)$$

або

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.50)$$

Визначимо напрямок вектора повного прискорення \bar{a} , для цього розглянемо рух матеріальної точки M по колу з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε , що здійснюється у площині рисунка, напрямки яких показані на рисунку 2.15. Покажемо напрямки векторів дотичного \bar{a}_{τ} , нормального \bar{a}_n і повного \bar{a} прискорень. Тоді відхилення вектора повного прискорення \bar{a} від нормалі n до траєкторії руху точки визначається кутом φ , який може бути обчислений за таким виразом:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|a_{\tau}|}{a_n} = \frac{|R\varepsilon|}{R\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (2.51)$$

Слід зауважити, що оскільки кутова швидкість ω і кутове прискорення ε мають у даній момент часу для всього тіла одне і те ж саме значення, то з виразів (2.50) для повного прискорення \bar{a} та (2.51) для кута відхилення φ випливає, що прискорення усіх точок тіла, що обертається навколо

нерухомої осі, пропорційні їх відстаням від осі обертання і утворюють однаковий кут φ з радіусами кіл, що описують різні точки тіла, який дорівнює

$$\varphi = \arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2},$$

не залежить від радіуса і в даний момент однаковий для всіх точок тіла.

Безумовно, що лінійні швидкості і лінійні прискорення точок, що розташовані на осі обертання, дорівнюють нулю.

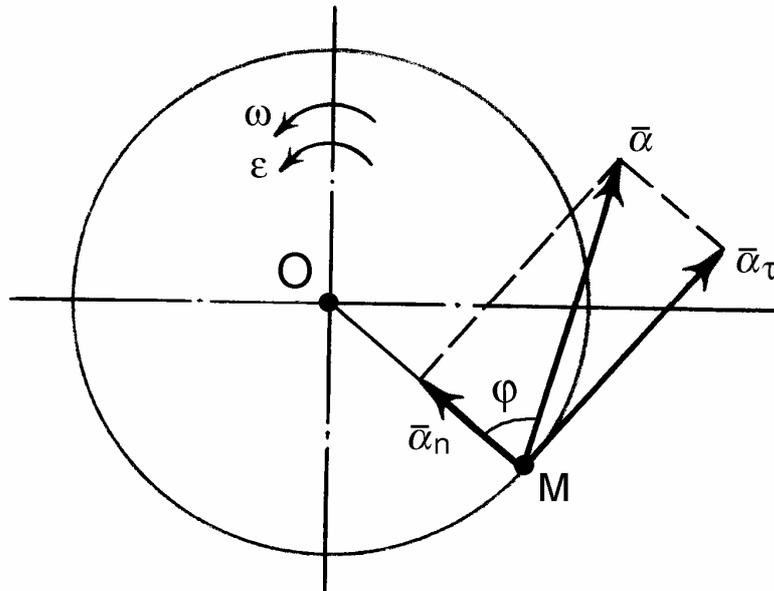


Рис. 2.15.

2.2.4. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла

Кутову швидкість ω обертового тіла можна уявити, як вектор.

Вектор кутової швидкості обертового тіла розташований на осі обертання і спрямований так, що, дивлячись з його кінця, можна бачити обертання тіла проти напрямку руху годинникової стрілки.

Це так зване "правило свердлика".

Кутове прискорення ε обертового тіла також можна уявити як вектор.

Вектор кутового прискорення обертового тіла розташований на осі обертання і спрямований у той же бік, що і вектор кутової швидкості якщо обертання прискорене, і в напрямку, яке протилежне напрямку вектора кутової швидкості, якщо обертання сповільнене.

Якщо розглядати різні випадки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі та різне їх спрямування, то напрямки векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ будуть такими, як це показано на рисунку 2.16.

Як легко побачити, можуть бути два варіанти, коли вектори кутової швидкості $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ спрямовані у один бік (рис. 2.16, а), і два варіанти, коли вказані вектори спрямовані у різні боки (рис. 2.16, б). Напрямки обертання тіла показані стрілками.

Вектори кутової швидкості $\vec{\omega}$ і кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ є векторами ковзними, а це означає, що за їх початок можна взяти будь-які точки, що розміщені на осі обертання.

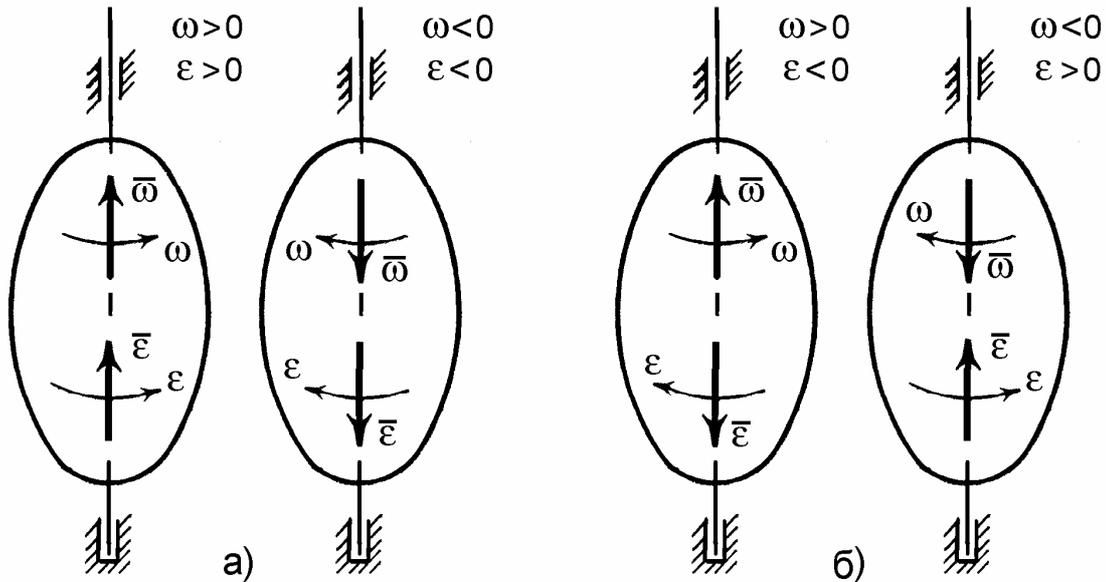


Рис. 2.16.

Задання векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ повністю характеризує і визначає обертальний рух тіла, напрям обертання, а також чисельні значення кутової швидкості і кутового прискорення, враховуючи довжину векторів і масштабні коефіцієнти.

2.2.5. Векторний вираз лінійної швидкості точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Лінійну швидкість точки обертального тіла можна представити у вигляді векторного добутку. Доведемо це.

Уявляємо тіло, що обертається навколо нерухомої осі z в напрямку, що показаний стрілкою (рис. 2.17). Візьмемо у тілі довільну точку M і покажемо траєкторію її руху і радіус R . Покажемо далі на осі обертання z з будь-якої довільної точки O вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ і з цієї ж точки проведемо радіус – вектор \vec{r} , який визначає положення даної точки M тіла.

Загально відомо, що векторним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} , кут між якими складає α є третій вектор \vec{c} ($\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), модуль якого дорівнює:

$$c = a \cdot b \sin \alpha.$$

Спрямований цей вектор \vec{c} перпендикулярно до площини, в якій розташовані вектори \vec{a} і \vec{b} , у той бік, звідки найкоротший поворот вектора \vec{a} до вектора \vec{b} відбувається проти напрямку ходу годинникової стрілки.

Тепер визначимо модуль лінійної швидкості v точки M . На підставі (2.46) матимемо:

$$v = \omega R.$$

Зі схеми рисунку 2.17 бачимо, що

$$R = r \sin \alpha,$$

тоді

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot r \sin \alpha, \quad (2.52)$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки M відносно центра O ; α – кут між векторами $\vec{\omega}$ і \vec{r} .

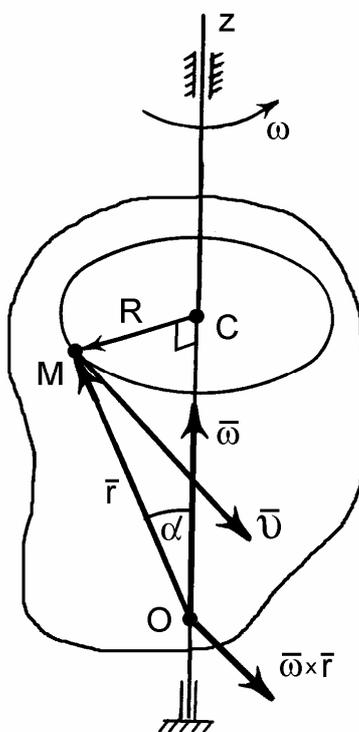


Рис. 2.17

Якщо порівняти вираз (2.52) з векторним добутком двох векторів, то за модулем маємо третій вектор, яким і є вектор \vec{v} .

Покажемо напрямок вектора \vec{v} лінійної швидкості точки M , який буде розташований на дотичній до кола, що утворене траєкторією руху точки M , або по перпендикуляру до площини трикутника OMC .

Далі визначимо модуль векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha. \quad (2.53)$$

Напрямок векторного добутку, як результуючого вектора, показаний на рисунку 2.17, він також перпендикулярний площині $\triangle OMC$. Із цього можна

зробити висновок, що не тільки співпадають модулі лінійної швидкості і векторного добутку, але збігаються і їх напрямки. Звідси:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.54)$$

Таким чином, лінійна швидкість будь-якої точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку двох векторів: кутової швидкості і радіуса-вектора цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Визначимо лінійну швидкість точки M тіла, вісь обертання якого довільно розташована у просторі відносно декартової системи відліку $Oxyz$ (рис. 2.18). Координати точки M – x, y, z , проекції вектора кутової швидкості $\bar{\omega} - \omega_x, \omega_y, \omega_z$; проекції радіуса-вектора \bar{r} – такі ж самі координати x, y, z .

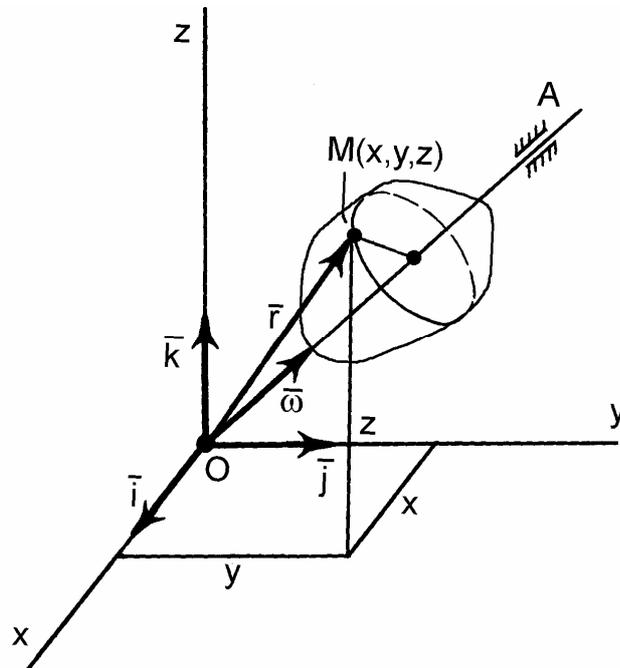


Рис. 2.18.

Виразимо лінійну швидкість \bar{v} за допомогою визначника векторного добутку:

$$\begin{aligned} \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= (\omega_y z - \omega_z y) \bar{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \bar{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \bar{k}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Як відомо, вектор \bar{v} можна записати через його проекції:

$$\bar{v} = \bar{i} v_x + \bar{j} v_y + \bar{k} v_z.$$

Тоді, порівнюючи останні два вирази, проекції лінійної швидкості \bar{v} на осі координат дорівнюють:

$$\begin{aligned}v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\v_z &= \omega_x y - \omega_y x.\end{aligned}\tag{2.56}$$

Вирази (2.54), (2.56) одержані Ейлером в 1765 р.

Для випадку на рисунку 2.17: $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$, звідки, користуючись виразом (2.56), будемо мати:

$$\begin{aligned}v_x &= -\omega y, v_y = \omega x, v_z = 0, \\v &= \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R.\end{aligned}$$

Приклад.

Обертання маховика двигуна у пусковий період визначається рівнянням $\varphi = \frac{t^3}{3}$, де t – в секундах, φ – в радіанах. Визначити модуль і напрям прискорення точки, яка розташована на відстані 50 см від осі обертання, в момент, коли її швидкість дорівнює $v_1 = 8$ м/с.

Розв'язання.

Для визначення прискорення руху матеріальної точки можна використати вираз (2.50):

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Кутові швидкість та прискорення руху маховика двигуна визначимо використавши вирази (2.37) і (2.38):

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\left(\frac{t^3}{3}\right)}{dt} = t^2, \\ \varepsilon &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t.\end{aligned}$$

Визначимо момент часу, в який потрібно визначити прискорення точки. Для цього, на підставі виразу (2.46), визначимо кутову швидкість обертання маховика:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{8}{0,5} = 16 \text{ c}^{-1}.$$

Оскільки визначена раніше кутова швидкість дорівнює $\omega = t^2$, то можемо визначити час t_1 :

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4 \text{ c}.$$

У визначене вище кутове прискорення, яке дорівнює $\varepsilon = 2t$, підставимо значення часу t_1 і отримаємо його значення

$$\varepsilon_1 = 2t_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ с}^{-2}.$$

Підставимо остаточно значення ω_1 і ε_1 у вираз для повного прискорення, матимемо шуканий результат

$$a = 0,5\sqrt{8^2 + 16^4} = 128,0 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора \bar{a} визначимо згідно виразу (2.51):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32},$$

звідки

$$\varphi = 1^{\circ}48',$$

де φ - кут між радіусом обертання і вектором прискорення \bar{a} .

2.2.6. Векторний вираз нормального і тангенціального прискорень

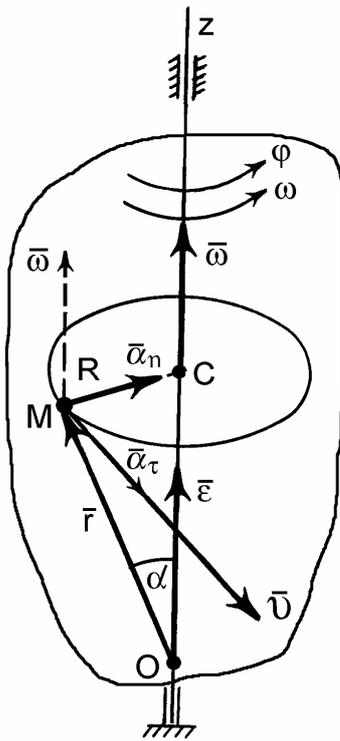


Рис. 2.19.

Для визначення векторного виразу лінійної швидкості довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, складемо розрахункову схему (рис. 2.19). Також, як і у випадку векторного виразу лінійної швидкості точки тіла, розглядаємо довільну точку M на тілі, що обертається навколо нерухомої осі z . Напрямок обертання тіла показаний стрілкою. Точка M рухається вздовж траєкторії, що утворена колом з центром C , розташованим на осі обертання z і радіусом R . З довільної точки O на осі обертання z проведений до точки M радіус – вектор \bar{r} . Оскільки обертання тіла навколо осі z є прискореним, то з точки O відкладені вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ і кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$. З точкою M пов'язаний вектор лінійної швидкості \bar{v} , який спрямований по дотичній, що проведена крізь

точку M до кола, утвореного траєкторією її руху. На цій же дотичній показаний вектор дотичної \bar{a}_t складової лінійного прискорення точки M , спрямований у той же бік, що й вектор \bar{v} . Вздовж радіуса R кола, що описується траєкторією руху точки M , показаний вектор \bar{a}_n нормальної складової лінійного прискорення.

Для отримання векторних формул нормального і тангенціального прискорень візьмемо похідну за часом від виразу (2.6), підставляючи в нього вираз (2.54):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.57)$$

Аналізуючи вираз (2.57) і розглядаючи рис. 2.19, можна записати, що $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення, який спрямовується аналогічно вектору кутової швидкості $\bar{\omega}$, а

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \text{ – вектор лінійної швидкості.}$$

Підставимо останні значення у вираз (2.57), отримаємо

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.58)$$

Вираз (2.58) називають формулою Ривальса. Проведемо аналіз цього виразу.

Модуль першого векторного добутку буде дорівнювати:

$$|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon r \sin \alpha.$$

Модуль тангенціального прискорення буде дорівнювати:

$$a_{\tau} = \varepsilon R = \varepsilon r \sin \alpha.$$

Як легко побачити з останніх виразів, співпадають не тільки їх модулі, але і напрямки ($\perp \Delta OMC$), тому

$$\bar{a}_{\tau} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}. \quad (2.59)$$

Тангенціальне прискорення точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутового прискорення на радіус-вектор цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Модуль нормального прискорення (2.48) буде дорівнювати:

$$a_n = \omega^2 R = \omega v.$$

Модуль векторного добутку $|\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega v \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}}) = \omega v$, оскільки $(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}}) = 90^\circ$ і $\bar{v} \perp \bar{\omega}$.

Порівнюючи значення модулів векторів \bar{a}_n , $\bar{\omega} \times \bar{v}$ і їхні напрямки, можна зробити висновок, що

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.60)$$

Нормальне прискорення точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості на вектор лінійної швидкості цієї точки.

2.2.7. Передача обертального руху

Передача обертального руху здійснюється за допомогою зубчастих, пасових, ланцюгових передач, коліс тертя та т. ін.

Розглянемо передачу обертального руху за допомогою зубчастої передачі (або фрикційної передачі) (рис. 2.20), яка складається з двох коліс, що обертаються навколо нерухомих осей. Назвемо перше колесо (меншого діаметра) ведучим. Напрямок його обертання показано стрілкою. Воно має такі фізичні та кінематичні параметри: радіус – r_1 , кількість зубів – z_1 , кутова швидкість – ω_1 , частота обертання – n_1 . Друге колесо, яке є веденим, має такі параметри: радіус – r_2 , кількість зубів – z_2 , кутова швидкість – ω_2 , частота обертання – n_2 . Напрямок обертання другого колеса також показано стрілкою.

Тепер, якщо передача обертального руху здійснюється без проковзування у місці контакту коліс, то лінійна швидкість точки контакту (точка A), яка належить одночасно двом колесам, повинна бути однаковою. Знайдемо лінійні швидкості точки A спочатку для першого колеса, а потім – для другого колеса і прирівняємо їх. Лінійна швидкість точки A для першого колеса дорівнює:

$$v_A = \omega_1 \cdot r_1, \quad (2.60)$$

а лінійна швидкість точки A для другого колеса буде дорівнювати:

$$v_A = \omega_2 \cdot r_2. \quad (2.61)$$

Прирівнявши вирази (2.60) та (2.61), будемо мати:

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2. \quad (2.62)$$

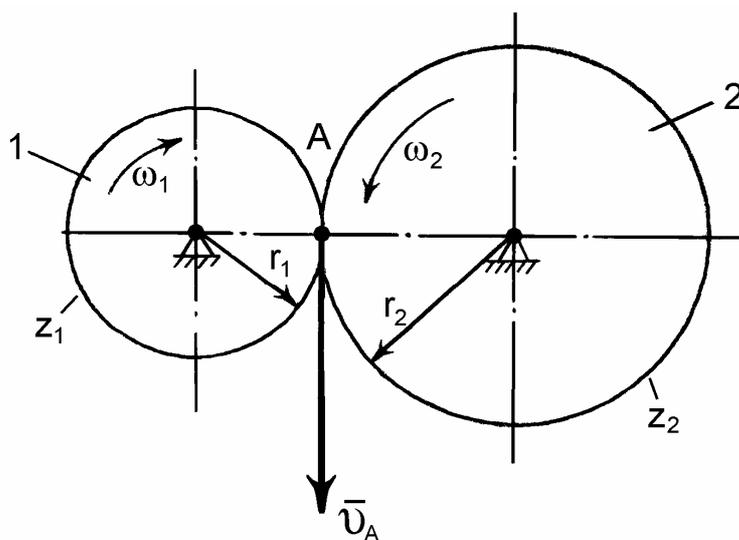


Рис. 2.20.

Перетворимо вираз (2.62) таким чином:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.63)$$

Якщо вважати, що передаточне відношення, це відношення кутових швидкостей $\frac{\omega_1}{\omega_2} = u$, то можна остаточно написати:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.64)$$

Таким чином, передаточне відношення, це відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса, яке дорівнює відношенню радіуса (або числа зубів) веденого колеса до радіуса ведучого колеса.

У техніці є таке поняття, як передаточне число.

Передаточне число – це відношення більшої кутової швидкості до меншої, тобто в напрямку енергетичного потоку.

Вказані основні положення про передачу обертального руху між двома колесами повністю придатні для визначення передаточного відношення для пасової або ланцюгової передач. На рис. 2.21 показана схема пасової (ланцюгової) передачі із вказівкою фізичних та кінематичних параметрів. Для визначення передаточного відношення цієї передачі необхідно використати вираз (2.64).

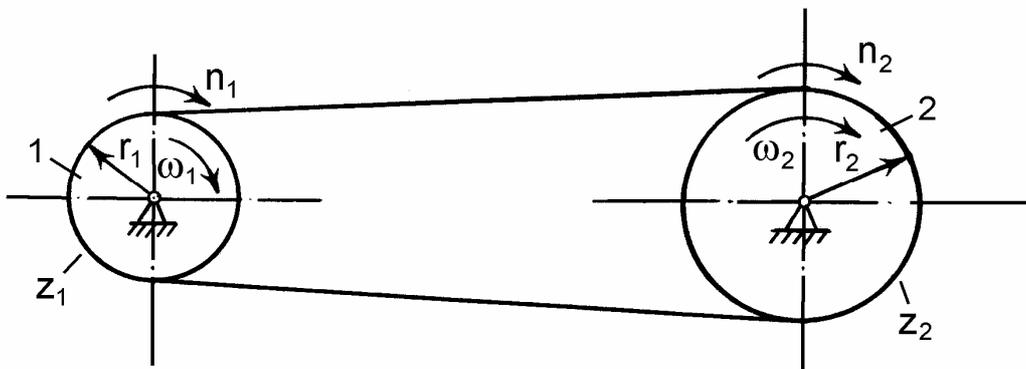


Рис. 2.21.

Передаточне відношення може бути більшим від одиниці або меншим.

Якщо передача обертального руху здійснюється за допомогою, так званої, черв'ячної передачі (рис. 2.22), то передаточне відношення визначається формулою:

$$u = \frac{z_k}{h}, \quad (2.65)$$

де z_k – число зубців черв'ячного колеса; h – число заходів черв'яка.

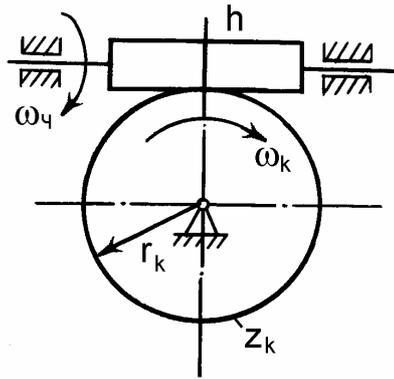


Рис. 2.22.

Питання для самоконтролю

1. Надайте означення і приклади поступального руху тіла?
2. Чи дорівнюють величини швидкостей і прискорень точок тіла, яке рухається поступально?
3. Як визначити положення обертового тіла?
4. Означте кутові швидкості і прискорення обертового тіла, назвіть їхні одиниці виміру.
5. Назвіть формули рівнозмінного обертання тіла.
6. Як спрямовані вектори лінійних швидкостей та прискорень точок обертового тіла?
7. Напишіть формулу Ейлера для швидкості точки обертового тіла.
8. Що таке передаточне відношення?
9. Яка залежність між кутовою швидкістю і частотою обертання?
10. Які існують механізми передачі обертального руху, а також його перетворення у поступальний?

2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Як було вже відмічено, найпростішими рухами твердого тіла є поступальний та обертальний. Плоскопаралельний рух – це більш складний рух твердого тіла, але він має широке розповсюдження у техніці і його вивчення має велике значення.

Сформулюємо визначення цього руху.

Плоскопаралельним або плоским називається такий рух твердого тіла, при якому кожна точка тіла рухається в одній і тій же площині, що паралельна деякій заданій нерухомій площині, яку називають напрямною. Або інакше: рух, при якому всі точки тіла рухаються в паралельних площинах.

На рисунку 2.23 показано тіло, яке рухається плоскопаралельно. Позначимо у тілі дві точки A і B і виберемо нерухому площину π . Проекції даних точок на площину π будуть відповідно a і b . Згідно визначення плоскопаралельного руху за весь час руху тіла відстані Aa і Bb завжди залишаються сталими.

Розглянемо більш докладно вказаний рух твердого тіла. Нехай маємо тверде тіло, що здійснює плоскопаралельний рух, при якому всі точки тіла рухаються паралельно деякій нерухомій площині π (рис. 2.24).

Якщо перетнути тіло площиною xOy , яка паралельна нерухомій площині π , то у перерізі отримаємо плоску фігуру S . Фігура S при русі тіла буде переміщуватися, але буде залишатись весь час у площині xOy . При плоскопаралельному русі всі точки перпендикуляра AA' до площини фігури рухаються однаково, як і точка "а" перерізу, маючи однакові швидкості і прискорення, тому що цей перпендикуляр рухається поступально. Якщо взяти на перерізі другу точку "b" та провести перпендикуляр BB' , то і всі його точки будуть мати однакові швидкості і прискорення. Але загалом $\bar{v}_A \neq \bar{v}_B$ і $\bar{a}_a \neq \bar{a}_b$. Якщо на перерізі тіла (фігура S) взяти будь-яку кількість точок, то рух перерізу S може повністю визначати плоскопаралельний рух всього тіла.

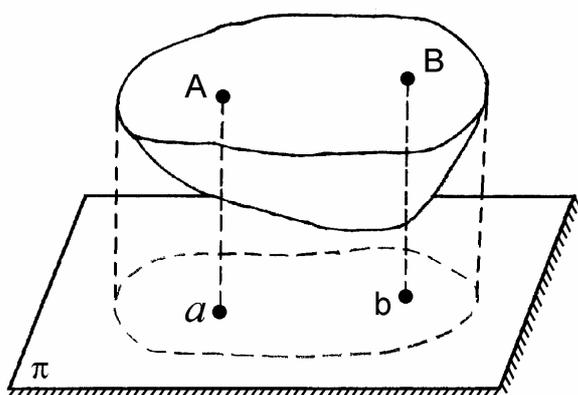


Рис. 2.23.

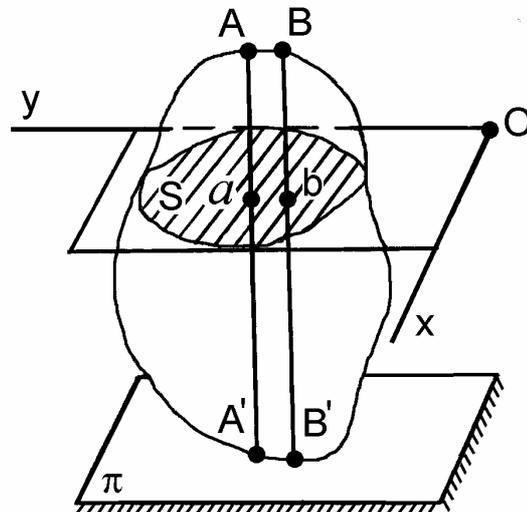


Рис. 2.24.

З вище наведеного випливає, що для визначення плоскопаралельного руху твердого тіла достатньо знати рух плоскої фігури S , одержаної перерізом тіла площиною xOy , яка паралельна заданій нерухомій площині π . Але рух плоскої фігури у площині, у свою чергу, визначається рухом відрізка на цій фігурі. Таким чином, плоскопаралельний рух тіла фактично зводиться до розглядання руху відрізка у площині.

2.3.1. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний

Маємо плоску фігуру S , яка рухається у площині Oxy і за деякий малий проміжок часу переміщується із положення I у положення II (рис. 2.25). Виберемо на фігурі S дві точки A і B і з'єднаємо їх прямою. Прослідкуємо за рухом відрізка AB .

Уявимо, що переміщення фігури S та незмінно пов'язаного з нею відрізка AB можна вважати складеним із поступального і обертального рухів.

Дійсно, переміщення AB у положення $A'B'$ можна розглядати, як поступальне переміщення у положення $A'B''$ і наступне обертання навколо точки A' (яку приймаємо за полюс) на деякий кут φ . Або, як поступальне переміщення в положення $B'A''$ і наступне обертання на той же кут φ навколо точки B' (останню в цьому разі приймаємо за полюс).

Як можна побачити з рисунку 2.25, кут φ повороту фігури S навколо полюса A' дорівнює куту повороту навколо полюса B' . Однаковий буде і напрям обертання – за напрямком повороту годинникової стрілки. Таким чином, кут повороту φ і напрям обертання фігури не залежать від вибору полюса.

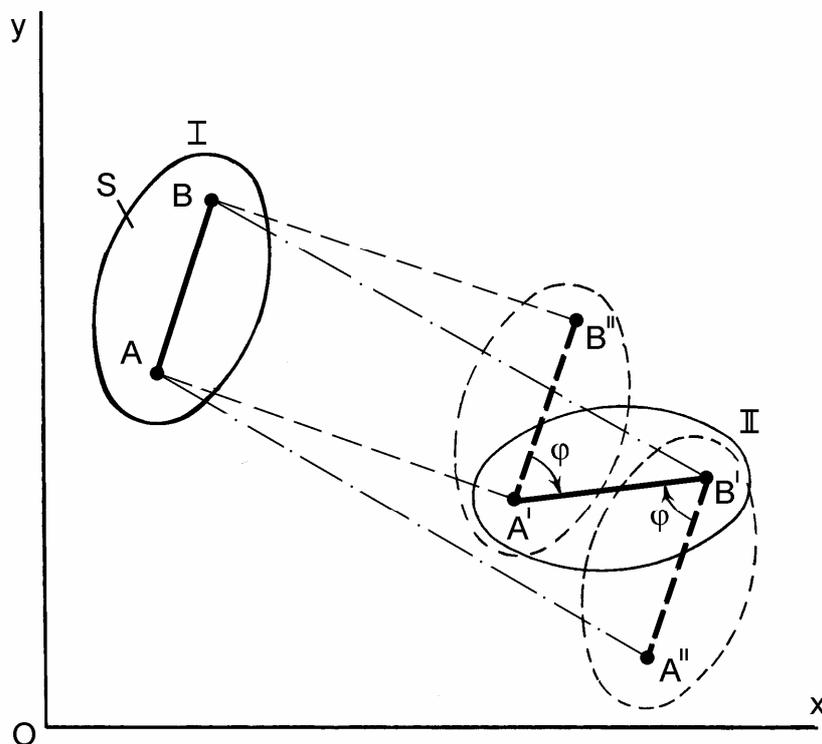


Рис. 2.25.

Слід зазначити, що такого ж самого ж кінцевого результату можна досягнути, якщо розглядати спочатку обертальний рух тіла, а потім – поступальний.

Таким чином, переміщення фігури S у її площині із одного положення у друге, нескінченно близьке до першого, у границі можна замінити двома елементарними простими плоскими переміщеннями – поступальним і обертальним.

2.3.2. Аналітичне дослідження плоскопаралельного руху тіла

Для визначення рівнянь плоскопаралельного руху твердого тіла розглянемо у площині руху фігури S систему координат Oxy , яка є нерухомою по відношенню до цієї площини (рис. 2.26).

Візьмемо на фігурі S будь-яку точку A , вважаючи її полюсом і цю ж точку приймемо за початок рухомої системи координат $Ax'y'$, яка жорстко зв'язана з фігурою S . Положення рухомої системи координат $Ax'y'$, як і усієї плоскої фігури S , буде визначатися положенням полюса (точка A) і кутом повороту φ осі x' по відношенню до нерухомої осі x .

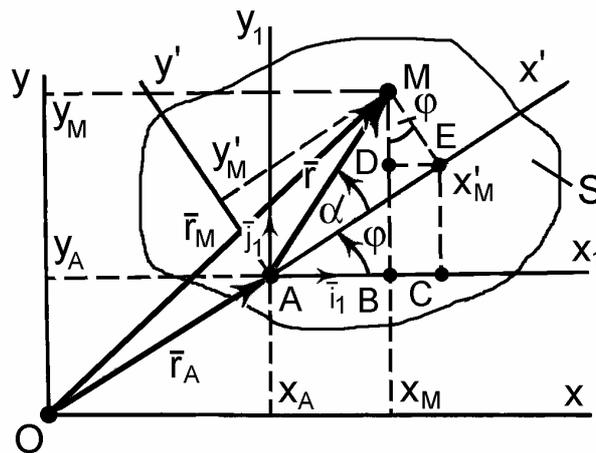


Рис. 2.26.

Протягом часу координати полюса (точка A) і кут φ змінюються і, як однозначні функції часу, їх можна описати системою рівнянь:

$$\begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ці рівняння є рівняннями руху плоскої фігури або кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху тіла.

Якщо відомі у будь-який момент часу координати полюса A і кут повороту φ , то можна визначити і положення будь-якої довільної точки M тіла у площині її руху. Якщо з'єднати точку M з полюсом A радіусом-вектором \bar{r} , то у рухомій системі координат $Ax'y'$ її координати будуть x'_M і y'_M , а кут нахилу α визначатиме нахил радіуса-вектора \bar{r} до осі x' .

Як можна побачити з рисунку 2.26, координати x_M і y_M точки M у нерухомій системі координат Oxy будуть відповідно дорівнювати:

$$x_M = x_A + r \cos(\alpha + \varphi), \quad (2.67)$$

$$y_M = y_A + r \sin(\alpha + \varphi).$$

Але відомо, що

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \varphi,$$

і

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Враховуючи, що

$$r = \frac{x'_M}{\cos \alpha}, \quad r = \frac{y'_M}{\sin \alpha}$$

і підставляючи у (2.67) отримані вище величини, матимемо:

$$x_M = x_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \sin \varphi,$$

$$y_M = y_A + \frac{x'_M}{\cos \alpha} \cos \alpha \cdot \sin \varphi + \frac{y'_M}{\sin \alpha} \sin \alpha \cdot \cos \varphi.$$

Після відповідних скорочень остаточно отримаємо:

$$x_M = x_A + x'_M \cos \varphi - y'_M \sin \varphi, \quad (2.68)$$

$$y_M = y_A + x'_M \sin \varphi + y'_M \cos \varphi.$$

Рівняння (2.68) і є кінематичними рівняннями руху довільної точки тіла (фігури) у її площині.

Координати точки M в нерухомій системі координат Oxy можна легко визначити і без додаткового кута α :

$$x_M = x_A + AB = x_A + AC - BC = x_A + x'_M \cos \varphi - y'_M \sin \varphi,$$

$$y_M = y_A + MB = y_A + BD + DM = y_A + x'_M \sin \varphi + y'_M \cos \varphi,$$

де

$$x'_M = AE; \quad y'_M = ME; \quad \angle DME = \varphi.$$

Як можна побачити, останні рівняння повністю співпадають з рівняннями (2.68), тобто є кінематичними рівняннями руху довільної точки M при плоскопаралельному русі тіла (фігури).

2.3.3. Визначення швидкості точок плоскої фігури

Для визначення швидкостей довільної точки M фігури, що здійснює плоскопаралельний рух, введемо систему координат Ax_1y_1 , яка рухається

поступально відносно нерухомої системи координат (рис. 2.26). Перепишемо рівняння руху (2.68) точки M в функції часу:

$$x_M(t) = x_A(t) + x'_M \cos \varphi(t) - y'_M \sin \varphi(t),$$

$$y_M(t) = y_A(t) + x'_M \sin \varphi(t) + y'_M \cos \varphi(t).$$

Визначимо швидкість точки M через її проєкції, взявши похідну за часом від рівнянь руху, враховуючи, що координати x'_M і y'_M точки відносно рухомої системи $Ax'y'$ є сталими величинами:

$$v_{Mx} = \frac{d x_M(t)}{dt} = \dot{x}_A - x'_M \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - y'_M \cos \varphi \cdot \dot{\varphi},$$

$$v_{My} = \frac{d y_M(t)}{dt} = \dot{y}_A + x'_M \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} - y'_M \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

В інших позначках перепишемо ці рівняння:

$$v_{Mx} = v_{Ax} - (x'_M \sin \varphi + y'_M \cos \varphi) \cdot \omega, \quad (2.69)$$

$$v_{My} = v_{Ay} + (x'_M \cos \varphi - y'_M \sin \varphi) \cdot \omega.$$

де v_{Ax} , v_{Ay} – проєкції швидкості полюса A на осі x і y нерухомої системи координат Oxy ; $\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ – кутова швидкість обертальної частини руху.

Знаючи проєкції (2.69) швидкості точки M на осі координат, неважко визначити і повну швидкість.

З другого боку рівнянням (2.69) можна надати відповідність векторної форми. Відносно центра O у нерухомій системі координат Oxy позначимо радіуси-вектори: полюса A – \bar{r}_A і точки M – \bar{r}_M . Радіус-вектор точки M відносно полюса A позначимо через \bar{r} (рис. 2.26). При плоскопаралельному русі фігури завжди зберігається векторна рівність:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}. \quad (2.70)$$

Диференціюючи за часом (2.70), маємо:

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.71)$$

У виразі (2.71): $\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \bar{v}_M$; $\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$.

Доданок $\frac{d\bar{r}}{dt}$ є швидкістю точки M відносно рухомої системи координат Ax_1y_1 , яку позначимо:

$$\bar{v}_{MA} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Рух фігури тіла відносно системи координат Ax_1y_1 є обертанням фігури навколо осі Az_1 , спрямованої перпендикулярно площині креслення (на рисунку 2.26 не показана). Таким чином, швидкість \bar{v}_{MA} є швидкістю точки M при обертанні тіла навколо осі Az_1 , для визначення якої маємо формулу Ейлера (2.54):

$$\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість обертання фігури відносно точки A , яку прийняли за полюс і яка, як відомо, не залежить від вибору полюса.

Тоді вираз (2.71) приймає вигляд:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.72)$$

Таким чином, швидкість довільної точки M плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса A і відносної швидкості точки M при обертанні фігури навколо полюса A .

Аналітичний вираз в проєкціях (2.69) і векторний вираз (2.72) відповідають один одному. Перші доданки в даних виразах визначають поступальний рух фігури разом із полюсом, другі доданки – обертальну швидкість точки навколо полюса.

Дійсно, якщо розкрити другий доданок (2.72), як формулу Ейлера, через визначник по елементах першого рядка, то отримаємо повну відповідність другим доданкам виразу (2.69):

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -\bar{i}\omega y_{1M} + \bar{j}\omega x_{1M}. \quad (2.73)$$

У визначнику (2.73) перший рядок, це $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ – орти рухомої системи координат Ax_1y_1 (орт \bar{k}_1 відповідає вісі z_1 , яка на рис. 2.26 не показана). Другий рядок визначника – проєкції вектора кутової швидкості $\bar{\omega}$ на осі координат. Оскільки вектор $\bar{\omega}$ перпендикулярний площини креслення, то $\omega_x = \omega_y = 0$; $\omega_z = \omega = \dot{\varphi}$. Третій рядок визначника (2.73) є координатами точки M відносно рухомих осей координат Ax_1y_1 (вираз (2.68)):

$$x_{1M} = x'_M \cos \varphi - y'_M \sin \varphi,$$

$$y_{1M} = x'_M \sin \varphi + y'_M \cos \varphi.$$

Підставляючи ці координати у вираз (2.73) отримаємо при ортах \bar{i} і \bar{j} проєкції v_{MA}^x і v_{MA}^y , тобто другі доданки у виразах (2.69).

Оскільки

$$\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \overline{AM},$$

то модуль швидкості

$$v_{MA} = \omega \cdot AM,$$

оскільки вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярний площині креслення.

Вектор \vec{v}_{MA} перпендикулярний також \overline{AM} : $\vec{v}_{MA} \perp \overline{AM} \perp \vec{r}$, він спрямований у напрямку обертання фігури S .

Якщо необхідно визначити швидкість іншої точки, наприклад, точки B (рис. 2.27), то вираз (2.72) запишеться так:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

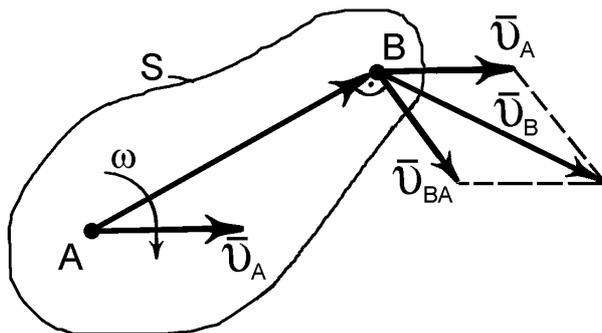


Рис. 2.27.

На рисунку 2.27 показано графічне розв'язання останнього векторного рівняння.

2.3.4. Теорема про проекції швидкостей двох точок на лінію, що їх з'єднує

На підставі одержаних раніше виразів розглянемо теорему про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на лінію, що їх з'єднує.

“Проекції швидкостей двох довільних точок плоскої фігури на пряму лінію, що з'єднує ці точки, дорівнюють”.

Нехай є тіло, що рухається плоскопаралельно. Візьмемо дві точки A і B плоскої фігури тіла і розглянемо їх швидкості (рис. 2.28). Як і в попередньому випадку покажемо швидкості точок A і B . Вважаємо першу точку A полюсом, навколо якого у відносному русі обертається друга точка B .

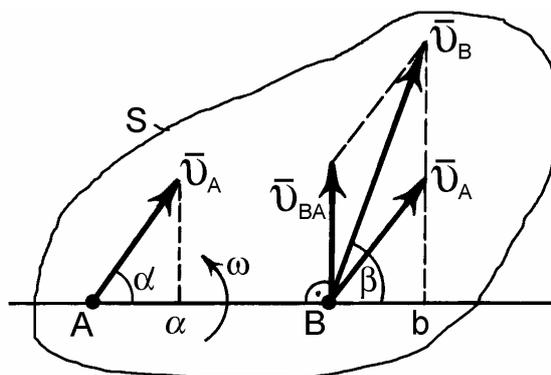


Рис. 2.28.

Згідно тільки що доведеної теореми швидкість точки B буде дорівнювати:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Далі розглянемо проекції швидкостей \bar{v}_A та \bar{v}_B на пряму, яка з'єднує точки A і B . Як і для кожного вектора, проекція вектора швидкості \bar{v}_A на пряму AB дорівнює:

$$np_{\cdot AB} \bar{v}_A = |Aa| = v \cdot \cos \alpha.$$

Відповідно проекція вектора швидкості \bar{v}_B на пряму AB дорівнює:

$$np_{\cdot AB} \bar{v}_B = np_{\cdot AB} \bar{v}_A + np_{\cdot AB} \bar{v}_{BA} = |Bb|,$$

але $np_{\cdot AB} \bar{v}_{BA} = 0$, оскільки $\bar{v}_{BA} \perp AB$.

Отже, $|Bb| = np_{\cdot AB} \bar{v}_A = |Aa|$, тобто $|Bb| = |Aa|$, або

$$v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \beta.$$

Знаючи модуль v_A швидкості даної точки A і кут нахилу α вектора цієї швидкості, а також напрямок вектора шуканої швидкості будь-якої іншої точки B (кут β), можна визначити її модуль, тобто

$$v_B = \frac{v_A \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

2.3.5. Визначення прискорення точки плоскої фігури

Для визначення прискорення довільної точки M плоскої фігури S , що здійснює плоскопаралельний рух, візьмемо похідну за часом від векторного виразу (2.72):

$$\frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right).$$

В цьому виразі такі позначення:

$$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \bar{a}_A \text{ — прискорення полюса } A;$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon} \text{ — кутове прискорення в обертальному русі фігури } S \text{ відносно}$$

полюса A ;

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \bar{r} \text{ — відносна обертальна швидкість точки } M \text{ навколо}$$

полюса A .

Отже, вираз для прискорення точки M можна переписати так:

$$a_M = a_A + (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad (2.74)$$

де $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_{MA}^{\tau}$ – обертальне прискорення точки M відносно полюса A ;
 $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_{MA}^n$ – доцентрове прискорення точки M відносно полюса A .

Повне відносне прискорення (рис. 2.29) дорівнює:

$$\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^n.$$

За модулем складові останнього виразу дорівнюють:

$$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AM, \text{ і } a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM.$$

Модуль повного відносного прискорення точки M відносно полюса A :

$$a_{MA} = AM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

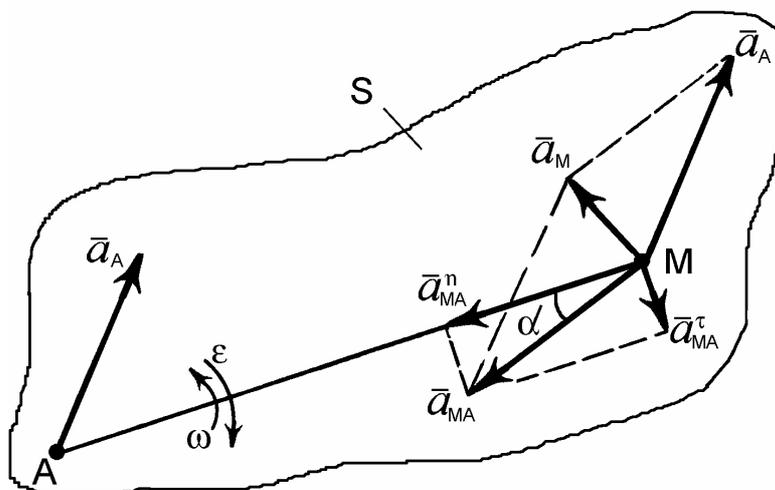


Рис. 2.29.

Остаточно, прискорення довільної точки M плоскої фігури S , що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^n. \quad (2.75)$$

Таким чином, прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса і відносного прискорення цієї точки у обертальному русі точки фігури навколо полюса.

Напрямки векторів зазначених прискорень:

– обертальне прискорення розташоване перпендикулярно прямій AM і спрямоване у бік кутового прискорення ε .

– доцентрове прискорення розташоване на прямій AM і спрямоване у бік полюса A .

– вектор повного прискорення \bar{a}_{MA} складає з прямою AM кут α (рис. 2.29), тангенс якого визначається так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Оскільки величини ω і ε відносяться до всієї фігури S , то кут α для всіх точок фігури один і той же. Відкладається кут завжди за напрямом кутової швидкості ω .

Питання для самоконтролю

1. Означте плоскопаралельний рух тіла, наведіть приклади з техніки.
2. На які два прості рухи розкладається плоскопаралельний рух?
3. Чи залежить обертальна частина плоскопаралельного руху від вибору полюса?
4. Які кінематичні рівняння плоскопаралельного руху тіла знаєте?
5. Як визначити швидкості і прискорення точок тіла, яке рухається плоскопаралельно?
6. Чому дорівнюють проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на лінію, що їх з'єднує?
7. Скільки ступенів вільності має тіло у плоскопаралельному русі?
8. Запишіть рівняння плоскопаралельного руху тіла.
9. Які прості види руху характеризують окремі рівняння плоского руху?
10. Запишіть через визначник обертальну частину плоского руху.

2.4. Графо-аналітичне дослідження плоскопаралельного руху тіла

2.4.1. Теорема про кінцеве переміщення плоскої фігури.

***Теорема.** Довільне переміщення плоскої фігури в її площині з одного положення в інше можна здійснити шляхом одного повороту в цій площині навколо точки P , яка є центром кінцевого обертання.*

Припустимо, що фігура, яка має відрізок AB , незмінно зв'язаний з нею, здійснює рух у площині рисунка, перейшла із першого положення в друге, а вказаний відрізок зайняв положення A_1B_1 (рис. 2.30).

З'єднаємо прямими лініями точки A і A_1 , а також B і B_1 . Поділимо навпіл відрізки AA_1 і BB_1 , отримуючи точки C і C_1 , через які поставимо перпендикуляри до прямих AA_1 і BB_1 . Перпендикуляри перетинаються у точці P . З'єднаємо з точкою P кінці відрізків AB і A_1B_1 і отримаємо на схемі два трикутника ABP і A_1B_1P . Доведемо, що вказані трикутники дорівнюють. Якщо розглядати трикутники AA_1P та BB_1P , то вони рівнобедрені, оскільки для них відстані CP і CP_1 є одночасно і висотою і медіаною. Крім цього дані трикутники мають спільну вершину – точку P .

Тому для рівнобедрених трикутників $AP = A_1P$, $BP = B_1P$. Якщо врахувати, що $AB = A_1B_1$ (один і той же відрізок), то легко побачити, що трикутник ABP дорівнює трикутнику A_1B_1P і якщо повернути трикутник ABP на кут φ , то він буде пристайним з трикутником A_1B_1P .

Таким чином, доведено, що з одного положення в друге фігура переведена шляхом одного повороту на кут φ .

Таким чином, доведена можливість існування та визначене положення центра кінцевого обертання, точки P .

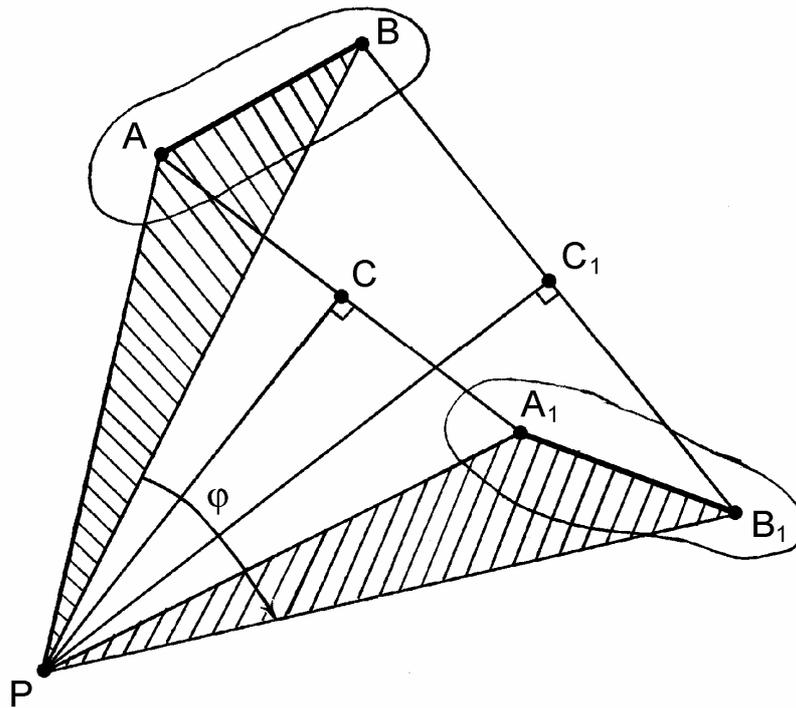


Рис. 2.30.

Виникає очевидне питання, а завжди існує така точка, яка буде центром кінцевого обертання. Цілком очевидно, що у випадку відсутності перетину показаних раніше перпендикулярів (точніше, якщо вони перетинаються в нескінченності), то центра кінцевого обертання немає (або він теж знаходиться у нескінченності). Це буде можливо у тому і тільки у тому випадку, якщо відрізки AB і A_1B_1 паралельні, і лінії, що з'єднують їх відповідні точки, взагалі не перетинаються.

2.4.2. Миттєвий центр швидкостей

Доведемо, що при плоскопаралельному русі тіла є одна точка перерізу, швидкість якою дорівнює нулю. Вказана точка може бути розташованою або на самій рухомій фігурі, або на її уявному продовженні.

Розглянемо фігуру S , яка здійснює плоскопаралельний рух (рис. 2.31). Покажемо у тілі дві точки A і B і з'єднаємо їх прямою. За деякій проміжок

часу Δt фігура переміститься у нове положення, а пряма AB займе положення A_1B_1 . Траєкторії руху точок A і B покажемо пунктирними лініями.

Оскільки положення відрізка AB є нескінченно близьким до положення A_1B_1 , то хорди AA_1 і BB_1 прямують до дотичних, уздовж яких і розташовані швидкості точок A і B цієї фігури, які відповідно дорівнюють \bar{v}_A і \bar{v}_B .

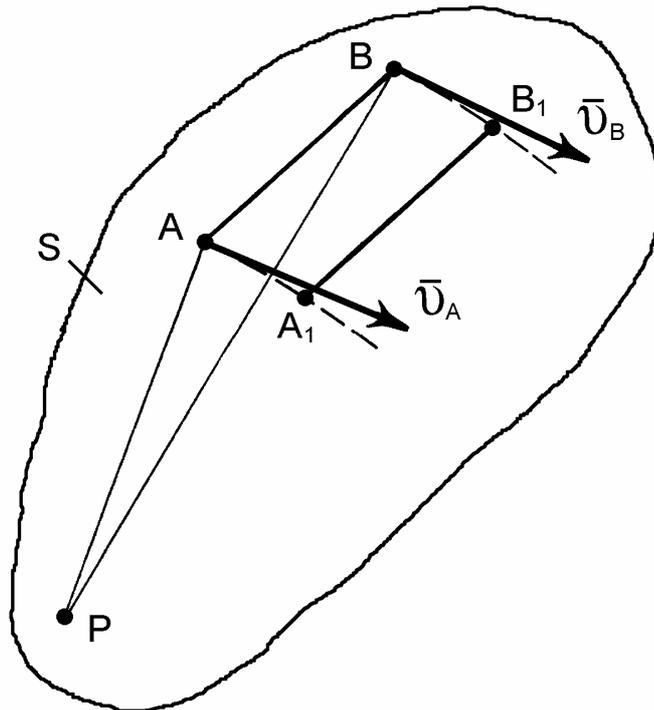


Рис. 2.31.

Поставивши перпендикуляри до векторів швидкостей \bar{v}_A і \bar{v}_B , отримаємо точку їх перетину P . Ця точка і буде миттєвим центром швидкостей. Швидкість точки P при такому русі тіла дорівнює нулю і все тіло в даний момент часу обертається навколо цієї точки.

Миттєвим центром швидкостей називається точка рухомої плоскості фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Для знаходження миттєвого центра швидкостей необхідно знати напрями швидкостей двох точок плоскості фігури. Тоді точка перетину перпендикулярів до векторів цих швидкостей і визначає положення миттєвого центра швидкостей.

Знання положення миттєвого центра швидкостей і величини швидкості однієї з точок надає можливість визначати величину і напрям швидкості будь якої іншої точки плоскості фігури.

2.4.3. Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

Розглянемо декілька окремих випадків визначення положення миттєвого центра швидкостей. При цьому можуть бути такі випадки (рис. 2.32):

1. Миттєвий центр швидкостей фігури розташований на перпендикулярі, який проведено до напрямку вектора швидкості деякої точки фігури (рис. 2.32, а).

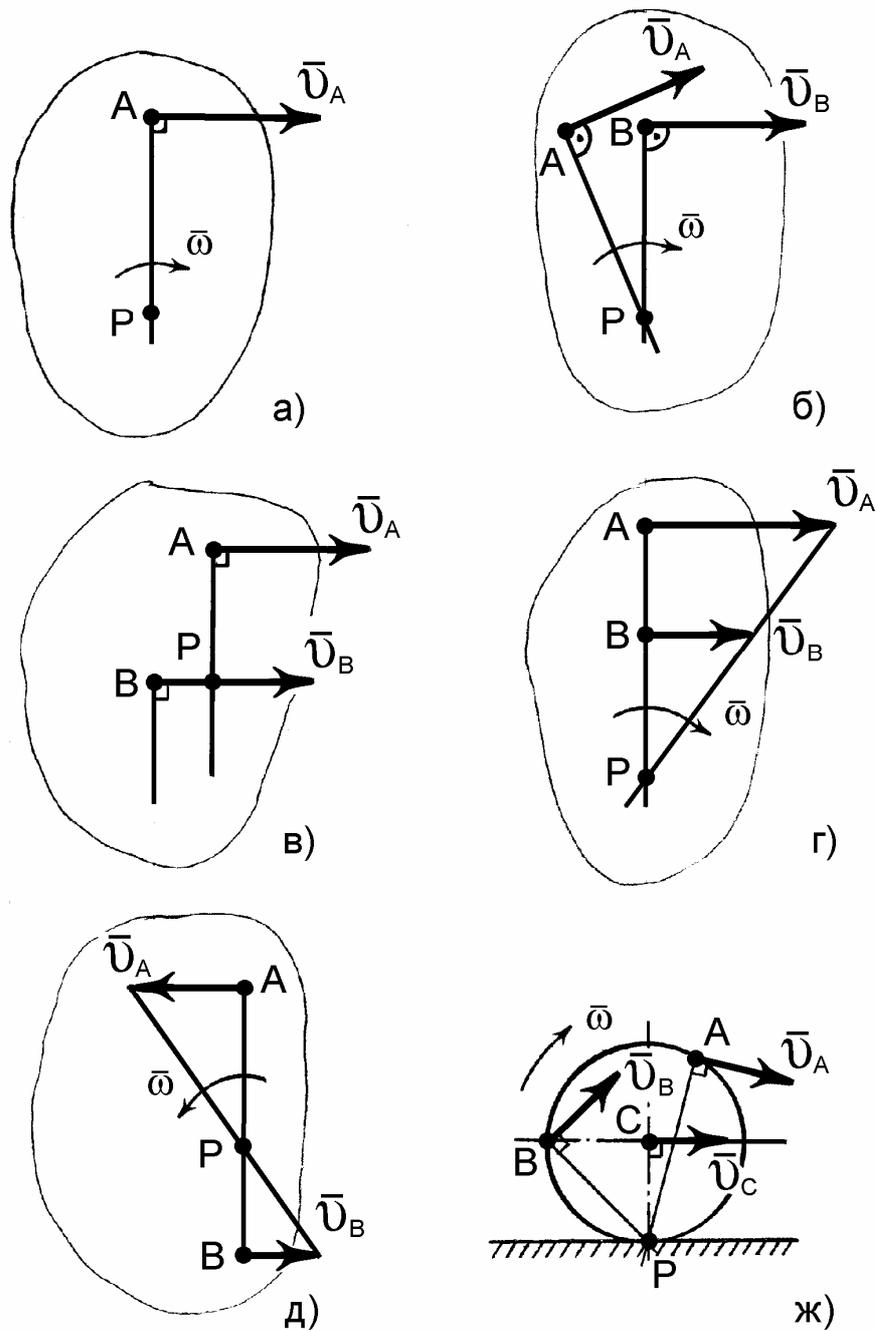


Рис. 2.32.

2. Миттєвий центр швидкостей фігури може бути знайдено як точку перетину двох перпендикулярів, які поставлені з двох точок фігури до напрямків векторів швидкостей цих точок (рис. 2.32, б).

3. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні (рис. 2.32, в), а самі точки не лежать на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей, то обертання в цей момент відсутнє і фігура здійснює в даний момент миттєво поступальний рух, а швидкості усіх точок фігури дорівнюють. Це ознака поступального руху тіла.

$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

4. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні і спрямовані у один і той же бік (рис. 2.32, г) і відкладені у певному масштабі, точки лежать на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей, а модулі швидкостей не однакові, то миттєвий центр швидкостей міститься у точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром.

Тоді, як легко побачити з (рис. 2.32, г), можна записати:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{v_A}{v_B}.$$

5. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні і спрямовані у різні боки (рис. 2.32, д) і відкладені у певному масштабі, точки лежать на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей (модулі швидкостей можуть бути однакові, або різні), то миттєвий центр швидкостей також міститься у точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей з вказаним вище перпендикуляром. В даному випадку співвідношення між швидкостями точок фігури і відстанями до миттєвого центру швидкостей, що визначено у попередньому випадку, зберігається.

6. При коченні фігури (наприклад, колеса) без ковзання по деякій нерухомій кривій миттєвим центром швидкостей буде точка дотику фігури з цією нерухомою кривою (рис. 2.32, ж), а швидкості всіх точок будуть обертальними навколо точки P . Причому $v_A \perp PA$; $v_B \perp PB$; $v_C \perp PC$.

Кутова швидкість фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню модуля швидкості будь-якої точки фігури до відстані від цієї точки до миттєвого центру швидкостей:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_C}{R}.$$

2.4.4. Визначення швидкостей точок фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей

Розглянемо деякі практичні випадки визначення швидкостей точок фігури, що здійснює плоскопаралельний рух. Вибираючи миттєвий центр

швидкостей за полюс і маючи на увазі, що швидкість його в даний момент часу дорівнює нулю, можна для будь-яких точок A і B даної фігури скласти такі співвідношення:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP} = \bar{v}_{AP},$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}.$$

Таким чином, швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює обертальній швидкості цієї точки навколо миттєвого центра швидкостей.

Якщо це так, то легко знайти модуль та напрям швидкості кожної точки фігури (якщо відомі положення миттєвого центра швидкостей та кутова швидкість фігури):

$$v_A = \omega \cdot AP,$$

$$v_B = \omega \cdot BP,$$

звідки можна записати таке співвідношення

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP}.$$

Таким чином, модулі швидкостей різних точок фігури в кожний момент часу пропорційні відстаням цих точок до миттєвого центра швидкостей.

Напрямки векторів швидкостей різних точок фігури перпендикулярні прямим, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей, і спрямовані у бік обертання фігури (рис. 2.32 ж).

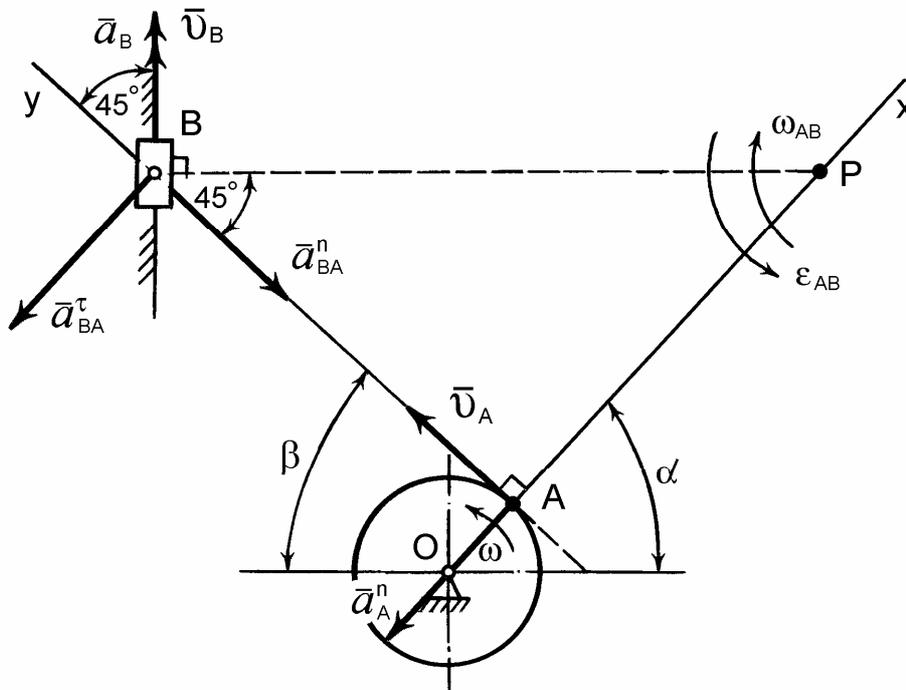


Рис. 2.33.

Таким чином, швидкості різних точок плоскої фігури в будь-який момент часу розподіляються так, як би фігура обертається в цей момент часу навколо миттєвого центра швидкостей.

Якщо розглядається тіло, яке здійснює плоскопаралельний рух, то обертання відбувається навколо так званої осі обертання, яка проходить через миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до площини, в якій цей рух здійснюється.

Приклад.

Кривошип OA довжиною 20 см обертається рівномірно з кутовою швидкістю $\omega = 10\text{ с}^{-1}$ і надає рух шатуну AB довжиною 100 см ; повзун B рухається по вертикалі. Знайти кутову швидкість і кутове прискорення шатуна, а також прискорення повзуна B у момент, коли кривошип і шатун взаємно перпендикулярні і утворюють з горизонтальною віссю кути $\alpha = 45^\circ$ і $\beta = 45^\circ$, (рис. 2.33).

Розв'язання.

Відповідно до заданого напрямку обертання кривошипа OA , визначимо спочатку модуль і напрямок швидкості точки A кривошипа:

$$v_A = \omega \cdot OA = 10 \cdot 20 = 200\text{ см/с} = 2,0\text{ м/с}.$$

Для визначення швидкості точки B скористаємося теоремою про проекції швидкостей двох точок на пряму, яка співпадає з AB . На підставі вихідних даних можемо записати:

$$v_A = v_B \cdot \cos 45^\circ.$$

Звідси знаходимо шукану швидкість

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{0,707} = 2,83\text{ м/с}.$$

Кутову швидкість шатуна AB визначимо за допомогою миттєвого центра швидкостей, положення якого в даний момент знаходиться на перетині перпендикулярів, поставлених до векторів \vec{v}_A і \vec{v}_B :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{2}{1} = 2,00\text{ с}^{-1},$$

де $PA = AB = 1\text{ м}$ – з трикутника ABP .

Якщо б з початку була визначена кутова швидкість ω_{AB} шатуна AB , то швидкість точки B можна було б знайти таким чином:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = 2 \cdot \sqrt{2} = 2,83\text{ м/с}.$$

Як бачимо, величина швидкості v_B , що визначена різними способами однакова.

Визначимо далі прискорення точки B і кутове прискорення шатуна AB . Запишемо векторне рівняння, яке визначає прискорення точки B :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^\tau + \bar{a}_{AB}^n,$$

де

$$a_A^\tau = 0, \text{ тому що кутова швидкість } \omega = const;$$

$a_A^n = \omega^2 \cdot AO = 10^2 \cdot 0,2 = 20 \text{ м/с}^2$ – нормальна складова прискорення точки A кривошипа OA , спрямована ця складова до центра O (рис. 2.33);

$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2$ – нормальна складова точки B у обертанні разом з шатуном відносно полюса A . Ця складова завжди спрямована до полюса A (рис. 2.33);

$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ – дотична складова прискорення точки B при обертанні разом з шатуном відносно полюса A . Для цього прискорення відомий тільки напрямок, тобто відомо, що вектор \bar{a}_{BA}^τ перпендикулярний до відрізка AB . Зобразимо його на рис. 2.33, у припущенні, що кутове прискорення ε_{AB} спрямоване проти ходу стрілки годинника.

Що стосується прискорення точки B , то для нього також відомий тільки напрямок. Очевидно, що вектор \bar{a}_B направлений вздовж напрямної повзуна B . Припускаємо, що спрямовано цей вектор догори (рис. 2.33).

Запишемо уточнене рівняння, яке визначає прискорення точки B :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Дане рівняння є векторним, і як векторна величина несе в собі подвійну інформацію – модулі і напрямки її складових. Це рівняння містить одну невідому векторну величину, тому це векторне рівняння має єдиний розв'язок, хоча в ньому невідомі модулі ще двох величин.

Перетворимо це рівняння з векторного в два алгебраїчних шляхом проектування цього рівняння на осі координат, вибравши їх раціонально, так щоб хоча б одне рівняння містило одну невідому. Наприклад, система координат Ax , як показано на рисунку 2.33, задовольняє зазначеним вимогам. Спроекуємо дане рівняння на осі Ax і Ay вибраної системи координат.

Проекція на вісь Ax дорівнює:

$$a_B \cdot \sin 45^\circ = -a_A^n - a_{BA}^\tau,$$

проекція на вісь Ay дорівнює:

$$a_B \cdot \cos 45^\circ = -a_{BA}^n.$$

Останнє рівняння однозначно розв'язується відносно a_B :

$$a_B = -\frac{a_{BA}^n}{\cos 45^\circ} = -\frac{4}{\cos 45^\circ} = -5,657 \text{ м/с}^2.$$

Знак “–” означає, що прискорення повзуна B спрямовано протилежно обраному раніше напрямку.

З першого рівняння визначимо a_{BA}^{τ} :

$$a_{BA}^{\tau} = -a_B \sin 45^\circ - a_A^n,$$

$$a_{BA}^{\tau} - (-5,657) \cdot \sin 45^\circ - 20 = -16,00 \text{ м/с}^2.$$

Отже, і дотична складова a_{BA}^{τ} спрямована протилежно прийнятому напрямку, оскільки вона також має знак “-”. Ця складова дорівнює:

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{BA} \cdot BA,$$

звідси визначимо кутове прискорення ε_{BA} :

$$\varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{BA} = \frac{-16}{1} = -16,0 \text{ с}^{-2}.$$

І як наслідок, кутове прискорення ε_{BA} (оскільки воно має знак “мінус”) спрямоване протилежно прийнятому на рисунку 2.33 напрямку.

2.4.5. Миттєвий центр прискорень

Якщо рух тіла є плоскопаралельним, то у його перерізі S у кожний момент часу знайдеться точка Q , прискорення якої дорівнює нулю.

Таким чином, миттєвим центром прискорень називається точка плоскої фігури, прискорення якої у даний момент часу дорівнює нулю.

Знайти положення миттєвого центра прискорень можна, якщо відоме прискорення якої-небудь точки A і величини кутової швидкості ω і кутового прискорення ε тіла.

Нехай прискорення точки A тіла дорівнює \bar{a}_A , а саме тіло повертається з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε . Напрямок обертання тіла показаний на схемі (рис. 2.34).

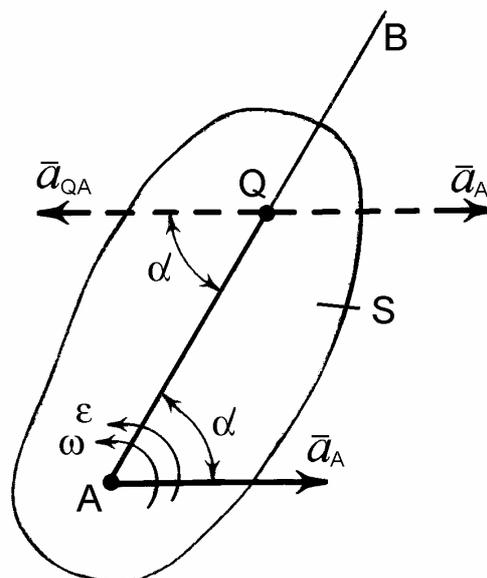


Рис. 2.34.

Тепер, якщо точку A прийняти за полюс і використати вирази для прискорення інших точок плоскої фігури, то є можливість визначити кут α , на який вектор прискорення \bar{a}_{QA} буде відхилений від прямої AB :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Через функцію арктангенса визначають величину кута α . Далі від точки A під кутом α до напрямку вектора прискорення \bar{a}_A необхідно провести пряму AB . При цьому вказана пряма AB повинна бути відхилена від напрямку вектора \bar{a}_A завжди у бік напрямку кутового прискорення ε (тобто у бік обертання тіла в разі, коли обертання є прискореним, або у бік, протилежний напрямку обертання, якщо цей рух є уповільненим). На рисунку 2.34 вибраний випадок прискореного обертання тіла навколо точки A .

Далі, на прямій AB необхідно відкласти відрізок AQ , який дорівнює:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Таким чином, на рисунку 2.34 отримана точка Q , яка і є миттєвим центром прискорень.

З іншого боку, якщо точку Q прийняти за полюс і ще раз використати вирази для прискорення точок плоскої фігури, то прискорення точки Q буде дорівнювати:

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA},$$

де

$$a_{QA} = QA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Якщо підставити величину відрізка QA у вираз для прискорення a_{QA} , то будемо мати:

$$a_{QA} = a_A.$$

Крім того, вектор \bar{a}_{QA} повинен відхилятися від прямої QA на кут α , тому, вектор \bar{a}_{QA} повинен бути паралельним вектору \bar{a}_A , але спрямованим у протилежний бік. А тому, у точці Q буде:

$$\bar{a}_{QA} = -\bar{a}_A$$

і остаточно матимемо:

$$\bar{a}_Q = 0,$$

що і треба було довести.

Якщо точку Q вибрати за полюс, то оскільки $\bar{a}_Q = 0$, прискорення будь-якої іншої точки M тіла буде дорівнювати:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ},$$

і

$$a_M = QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Таким чином, прискорення будь-якої точки тіла дорівнює її прискоренню у обертальному русі навколо миттєвого центра прискорень.

З наведених останніх виразів випливає, що:

$$\frac{a_M}{QM} = \frac{a_A}{QA} = \frac{a_C}{QC} = \dots$$

Тобто, прискорення точок тіла пропорційні їх відстаням від миттєвого центра прискорень.

Слід зауважити, що положення миттєвого центра прискорень Q і миттєвого центра швидкостей P у даний момент часу не співпадають.

2.4.6. Плани швидкостей та прискорень

Побудування планів швидкостей та прискорень – це один із способів графічного визначення швидкостей і прискорень точок плоскої фігури. При графічному визначенні швидкостей і прискорень точок плоского механізму розрізняють плани швидкостей і прискорень для окремої його ланки або для усього механізму в цілому.

Плани будуються на підставі теореми про швидкості і прискорення точок тіла, що рухається плоско паралельно (13.3.3 і 13.3.5; рис. 2.27 і 2.29).

План швидкостей.

Планом швидкостей називається графічне зображення векторів швидкостей, в якому з єдиного центра, полюса, відкладені в масштабі вектори абсолютних швидкостей точок тіла в даний момент часу, а вектори відносних швидкостей з'єднують кінці абсолютних швидкостей.

Маємо плоску фігуру S , для якої задані швидкості трьох її точок A , B , C , що відповідно дорівнюють \bar{v}_A , \bar{v}_B , \bar{v}_C (рис. 2.35, а).

Побудуємо план швидкостей для цієї фігури, для чого проведемо з довільного центра (точка P) вектори \bar{Pa} , \bar{Pb} , \bar{Pc} , які зображують у деякому прийнятому масштабі швидкості точок A , B , C . Таким чином, побудовано план швидкостей заданої фігури (рис. 2.35, б). Для визначення модулів швидкостей зазначених точок необхідно прийняти масштабний коефіцієнт плану швидкостей. Тоді шукані швидкості будуть дорівнювати:

$$\bar{v}_A = \bar{Pa},$$

$$\bar{v}_B = \bar{Pb},$$

$$\bar{v}_C = \bar{Pc}.$$

Розглянемо деякі властивості побудованого плану швидкостей. Так, з векторного трикутника Pab випливає, що:

$$\overline{Pb} = \overline{Pa} + \overline{ab},$$

або

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}.$$

Таким чином, з наведеної векторної рівності слід, що:

$$\overline{ab} = \overline{v}_{BA}.$$

Як легко побачити зі схеми (рис. 2.35 а), швидкість \overline{v}_{BA} буде перпендикулярною прямій AB , а тому $\overline{ab} \perp \overline{AB}$.

Цілком аналогічно можна одержати, що: $\overline{ac} \perp \overline{AC}$, $\overline{bc} \perp \overline{BC}$.

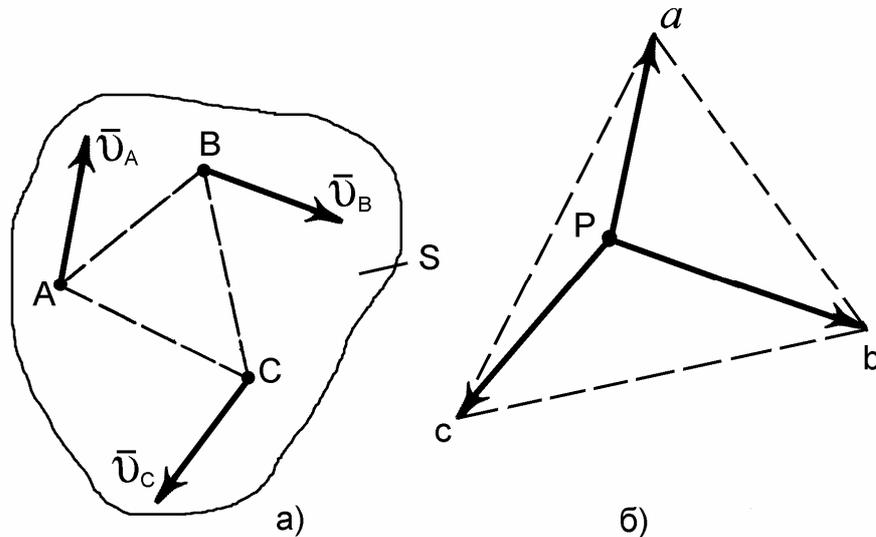


Рис. 2.35.

Таким чином, можна сформулювати першу властивість плану швидкостей:

“Відрізки, що з’єднують кінці векторів швидкостей на плані швидкостей, перпендикулярні відрізкам, які з’єднують відповідні точки тіла (план швидкостей повернутий на кут 90° у бік обертання тіла)”.

Знайдемо далі величини відносних швидкостей:

$$v_{BA} = \omega \cdot AB,$$

$$v_{CA} = \omega \cdot AC,$$

$$v_{CB} = \omega \cdot BC,$$

тобто відповідні відрізки на плані швидкостей (рис. 2.35 б):

$$ab = \omega \cdot AB,$$

$$ac = \omega \cdot AC,$$

$$bc = \omega \cdot BC.$$

З отриманих співвідношень можна скласти наступну пропорцію:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \omega.$$

На підставі цього можна сформулювати другу властивість плану швидкостей:

“Відрізки, що з’єднують кінці векторів швидкостей на плані швидкостей, пропорційні відповідним відрізкам тіла, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює кутовій швидкості обертальної складової руху тіла”.

Таким чином, трикутник ABC на тілі та Δabc на плані швидкостей подібні. Ця підстава дозволяє сформулювати третю властивість плану швидкостей:

“Одноіменні фігури на плані швидкостей та на тілі подібні і повернуті відносно одна одної на прямиий кут 90° у напрямку відносного обертання”.

Якщо будувати план швидкостей для плоского механізму, то слід вважати, що це буде сукупність планів швидкостей окремих ланок механізму з загальним полюсом P .

Більш докладно методика побудови плану швидкостей надається на конкретному прикладі плоского механізму.

План прискорень.

Планом прискорень називається сукупність векторів прискорень, у якому з довільного центра, полюса плану відкладені в масштабі прискорення точок в даний момент часу.

План прискорень може бути побудований, як для ланки механізму, так і для усього механізму, причому усі вектори відкладаються від загального полюса.

Побудова плану прискорень дещо подібна побудові плану швидкостей і зводиться до графічного розв’язування векторних рівнянь, які записують для кожної точки плоскої фігури, що рухається плоско паралельно. Якщо взяти за приклад плоску фігуру S (рис. 2.29) і вважати, що відоме прискорення точки A , яку приймемо за полюс, то для визначення прискорення точки B , необхідно скласти, а потім вирішити таке векторне рівняння:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

Таким чином, для побудови плану прискорень, тобто для визначення прискорення точки B необхідно визначити величини і напрямки векторів:

$$\bar{a}_A, \bar{a}_{BA}^n, \bar{a}_{BA}^\tau.$$

Після цього необхідно будувати план прискорень. Так, спочатку необхідно з полюсу плану прискорень (точка π) відкласти у масштабі

відоме за напрямком прискорення точки A – \bar{a}_A . Далі, до кінця цього вектора приєднати напрямок вектора \bar{a}_{BA}^n і відкласти його величину також у прийнятому масштабі і з врахуванням напрямку даного вектора (від точки B до точки A – якщо дивиться на фігуру S). До кінця вектора \bar{a}_{BA}^n необхідно приєднати напрямок вектора \bar{a}_A^r . Після цього з полюса π необхідно провести відомий напрямок прискорення точки B . Виконавши наведене, вважаємо, що побудований план прискорень для двох точок A і B . В даному випадку повністю розв’язано наведене векторне рівняння.

Докладно методику побудови плану прискорень для конкретного плоского механізму буде наведено нижче.

Слід підкреслити, що для плану прискорень зберігаються деякі властивості, які характерні і для плану швидкостей:

“Відрізки, що з’єднують кінці векторів прискорень на плані прискорень, пропорційні відповідним відрізкам тіла”.

2.4.7. Методика побудови планів швидкостей та прискорень

Розглянемо докладно методику побудови плану швидкостей і прискорень на прикладі простого кривошипно – повзунного механізму для положення, яке визначається кутом φ повороту кривошипа OA зображеного на схемі (рис. 2.36). Причому вважається заданими кутова швидкість ω , напрямок обертання кривошипа OA та лінійні розміри механізму.

В даному механізмі шатун ABC виготовлений у вигляді твердого трикутного тіла. Повзун B розташований на одній прямій з віссю обертання кривошипа (точка O).

Для побудови планів швидкостей та прискорень кінематична схема кривошипно–повзунного механізму повинна бути зображена у масштабі.

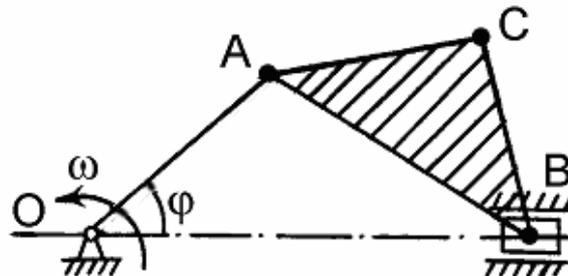


Рис. 2.36.

Необхідно визначити за допомогою планів швидкостей і прискорень швидкості та прискорення точок A , B і C , що належать різним ланкам механізму, а також кутові швидкість та прискорення шатуна ABC .

Відразу слід зауважити, що у кривошипно – повзунному механізмі кривошип OA здійснює обертальний рух, шатун ABC – плоскопаралельний, а повзун B – поступальний рух.

1. План швидкостей.

Починати побудову плану швидкостей необхідно з визначення швидкості точки A , що належить кривошипу. Чисельно вона буде дорівнювати:

$$v_A = \omega \cdot l_{OA},$$

де l_{OA} – довжина кривошипу OA .

Вектор швидкості \bar{v}_A буде розташований перпендикулярно радіусу OA і спрямований в бік обертання кривошипа. Для зображення цього вектору (як і інших векторів швидкостей) обираємо масштаб швидкостей і в цьому масштабі з деякого центра P відкладаємо вектор \bar{Pa} (рис. 2.37) довжиною:

$$Pa = \frac{v_A}{k_v},$$

де $k_v \left[\frac{m/c}{mm} \right]$ – масштабний коефіцієнт плану швидкостей.

Напрямок цього вектора беремо зі схеми механізму (рис. 2.36).

Переходимо далі до визначення швидкостей інших точок механізму. Так, швидкість наступної точки B можна знайти, якщо розглядати її на шатуні ABC , тоді, прийнявши точку A за полюс, можна скласти і далі графічно розв'язати таке рівняння:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA},$$

де \bar{v}_B – швидкість точки B (її напрям горизонтальний); \bar{v}_A – швидкість полюса A (її вектор перпендикулярний OA і вже зображений на плані швидкостей); \bar{v}_{BA} – швидкість точки B у відносному обертальному русі навколо полюса A (вектор цієї швидкості спрямований перпендикулярно шатуну AB). Вектор швидкості \bar{v}_B точки B завжди спрямований паралельно тим напрямним, в яких встановлено повзун B , тобто – горизонтально.

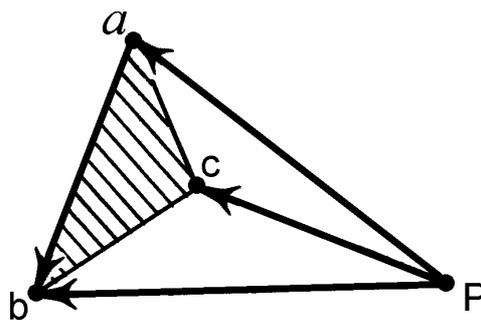


Рис. 2.37.

Розв'яжемо графічно наведене рівняння, для чого на плані швидкостей з полюса P проводимо пряму, яка паралельна напрямку швидкості \bar{v}_B , а з точки “ a ” – пряму, яка паралельна вектору \bar{v}_{BA} , до перетину з прямою Pb . Тоді вектор \bar{ab} в обраному масштабі є швидкістю точки u відносному обертальному русі навколо полюса A – \bar{v}_{BA} , а вектор \bar{Pb} – швидкість точки B в поступальному русі – \bar{v}_B .

Точка C належить шатуну ABC (тобто тілу), для якого вже знайдені швидкості двох точок, тому на плані швидкостей знаходимо швидкість v_C , використовуючи метод подібності, на підставі пропорції:

$$\frac{AB}{|ab|} = \frac{BC}{|bc|} = \frac{AC}{|ac|}.$$

У цій пропорції невідомими є відрізки $|bc|$ та $|ac|$, які можна визначити:

$$|bc| = \frac{BC \cdot |ab|}{AB},$$

$$|ac| = \frac{AC \cdot |ab|}{AB}.$$

Довжиною відрізків $|bc|$ і $|ac|$ відповідно з точок “ b ” і “ a ” плану швидкостей робимо засічки до їх перетину. Одержаний в результаті такої побудови Δabc буде подібним ΔABC . Але тут треба відмітити, що відкладання вказаних відрізків можна зробити як зліва від лінії ab , так і справа. Вірно буде тоді, коли послідовність літер при обході контуру ΔABC на схемі механізму і Δabc на плані швидкостей або прискорень буде ідентичною.

Якщо розставити вказаним чином на плані швидкостей стрілки, то бачимо, що план швидкостей кривошипно–шатунного механізму побудовано.

В останнє визначимо кутову швидкість ω_{ABC} шатуна ABC . Для цього необхідно використати співвідношення:

$$\omega_{ABC} = \frac{v_{BA}}{l_{AB}}.$$

З плану швидкостей (рис. 2.37) необхідно вимірити відрізок ba , помножити його на масштабний коефіцієнт k_v і тим самим знайти значення відносної швидкості v_{BA} .

2. План прискорень.

Також, як і при побудові плану швидкостей, план прискорень починаємо будувати з визначення прискорення точки A . Враховуємо, що

кривошип OA обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω , тому дотична складова його прискорення a_A^τ буде дорівнювати нулю, а повне прискорення дорівнює:

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot l_{AO}.$$

Вектор прискорення \bar{a}_A спрямований вздовж радіуса обертання кривошипа OA і буде спрямований до центра O . Обираємо масштаб

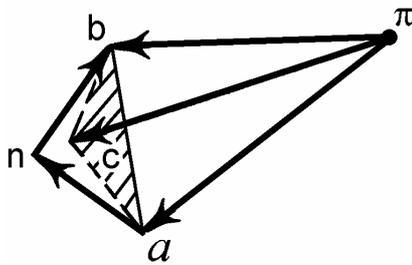


Рис. 2.38.

прискорень і в цьому масштабі з деякого центра (полюса) π відкладаємо (рис. 2.38) відрізок $\overline{\pi a}$:

$$\pi a = \frac{a_A}{k_a}$$

де $k_a \left[\frac{m/c^2}{mm} \right]$ – масштабний коефіцієнт

плану прискорень.

Далі визначаємо прискорення точки B . Як і в попередньому випадку розглядаємо точку B на шатуні ABC , який рухається плоскопаралельно. Приймаємо точку A за полюс, тому, для визначення прискорення точки B також необхідно скласти і графічно розв'язати таке векторне рівняння:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

де \bar{a}_B – прискорення точки B (має горизонтальний напрям, оскільки повзун рухається в горизонтальних напрямках); \bar{a}_A – прискорення полюса A (вже визначене і відкладене на плані прискорень); \bar{a}_{BA}^n – нормальне прискорення точки B у відносному обертальному русі навколо полюса A (спрямоване вдовж ланки AB до полюса A); \bar{a}_{BA}^τ – дотичне прискорення точки B навколо полюса A (спрямоване перпендикулярно нормальному).

Визначаємо складові наведеного векторного рівняння. Нормальне прискорення a_{BA}^n буде дорівнювати:

$$a_{BA}^n = \omega_{ABC}^2 \cdot AB.$$

На плані прискорень з полюса π проводимо пряму, яка паралельна напрямку прискорення \bar{a}_B . З точки “ a ” відкладаємо відрізок $|an|$, який дорівнює:

$$an = \frac{a_{BA}^n}{k_a},$$

розташований паралельно прямій AB (якщо дивиться на схему механізму) і спрямований за напрямком “від точки B до точки A ”. Далі з точки “ n ” поставимо перпендикуляр до $|an|$, тобто показуємо напрямком дотичного прискорення \bar{a}_{BA}^τ до перетину з прямою $|\pi b|$.

Вектор $\overline{\pi b}$ є прискоренням \bar{a}_B точки B в обраному масштабі, а вектор $|\overline{nb}|$ – у тому ж масштабі – прискорення \bar{a}_{BA}^τ .

Для знаходження прискорення точки C використаємо спосіб подібності, як це було зроблено при побудові плану швидкостей. Використовуючи значення лінійних розмірів механізму, а також відрізка ab , що у прийнятому масштабі є прискоренням a_{BA} , складемо пропорцію і визначимо відповідні відрізки.

$$\frac{AB}{|ab|} = \frac{BC}{|bc|} = \frac{AC}{|ac|}.$$

Аналогічно, як і при побудові плану швидкостей, використовуючи значення відрізків bc і ac на плані прискорень знаходимо положення точки c . З'єднавши точку c з полюсом π знаходимо величину і напрямок прискорення точки C кривошипно – повзунного механізму.

В даному разі Δabc буде подібним ΔABC .

В останнє знайдемо кутове прискорення ε_{ABC} шатуна ABC за допомогою співвідношення:

$$\varepsilon_{ABC} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB}.$$

З плану прискорень (рис. 2.38) необхідно вимірити відрізок nb , помножити його на масштабний коефіцієнт і тим самим знайти значення відносного дотичного прискорення \bar{a}_{BA}^τ .

Питання для самоконтролю

1. Що таке миттєвий центр швидкостей? Доведіть його існування.
2. Які способи для визначення положення миттєвого центру швидкостей знаєте?
3. Як визначити швидкість точки тіла за допомогою миттєвого центру швидкостей?
4. Що таке миттєвий центр прискорень? Доведіть його існування.
5. Що таке план швидкостей і як він будується?
6. Що таке план прискорень і як він будується?
7. Сформулюйте теорему про кінцевий поворот плоскої фігури.
8. Наведіть приклад плоского механізму і побудуйте план швидкостей і план прискорень.
9. Що таке правило подібності і як воно використовується при побудові планів швидкостей і прискорень?
10. Як визначаються кутові швидкості і кутові прискорення ланок плоского механізму і їхні напрямки?

2.5. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки (сферичний рух).

Рух тіла навколо нерухомої точки (центра) називається сферичним рухом. Сформулюємо визначення сферичного руху.

Обертанням твердого тіла навколо нерухомої точки називають такий рух, при якому одна точка тіла залишається весь час нерухомою, а всі інші точки рухаються по колах, які розташовані на поверхнях сфер, що описані із нерухомої точки.

Однією із головних задач при вивченні сферичного руху є знаходження величин, які характеризують цей рух: положення тіла, кутові швидкість та прискорення тіла, лінійні швидкість і прискорення точок тіла.

Розглянемо рух тіла навколо нерухомого центра O (рис. 2.39). Виберемо нерухому систему відліку $Ox_1y_1z_1$, відносно якої будемо вивчати рух тіла, та рухому – $Oxyz$, яку жорстко зв'яжемо з тілом, що рухається. Початок обох систем координат розташуємо у нерухомому центрі.

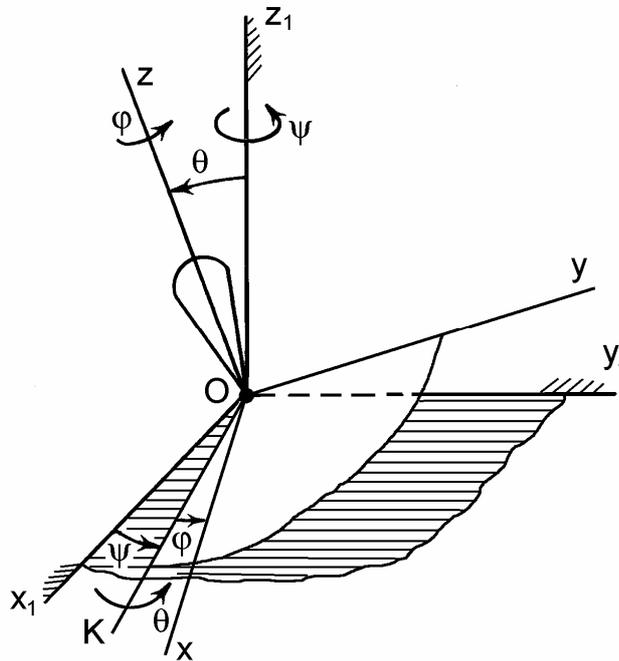


Рис. 2.39.

Для визначення положення обертового тіла відносно нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ необхідно задати відносно цієї системи координат положення іншої, рухомої системи координат $Oxyz$, що скріплена з рухомим тілом. Для цього Ейлер запропонував наступну теорему:

“Довільне переміщення твердого тіла навколо нерухомої точки можна виконати трьома послідовними поворотами тіла навколо трьох осей, що проходять через нерухому точку”.

Згідно цієї теореми положення тіла, що обертається навколо нерухомої точки, визначається трьома кутами. Лінія OK , вдовж якої перетинаються площини Oxy та Ox_1y_1 називається лінією вузлів. Тоді положення рухомих осей координат x, y, z (рис. 2.39) по відношенню до нерухомої системи відліку $Ox_1y_1z_1$ можна визначити трьома кутами:

$$\psi = \angle x_1OK,$$

$$\theta = \angle zOz_1,$$

$$\varphi = \angle KOx.$$

Ці кути носять назву кутів Ейлера і мають такі найменування:

1. ψ – кут прецесії, зміна якого означає обертання тіла навколо осі Oz_1 , яка називається віссю прецесії;
2. θ – кут нутації, зміна якого характеризує обертання тіла навколо лінії вузлів OK , яка є віссю нутації;
3. φ – кут власного обертання, зміна якого означає обертання тіла навколо осі Oz , яка є віссю власного обертання.

Перший кут ψ , кут прецесії, якій визначає положення лінії вузлів OK відносно нерухомої координатної осі Ox_1 , вважається додатним, якщо він відраховується при повороті лінії вузлів OK проти годинникової стрілки, якщо дивитися назустріч осі Oz_1 .

Другим кутом Ейлера є кут нутації θ , кут між координатними площинами x_1Oy_1 і xOy , який можна вимірювати між перпендикулярами до вказаних площин – Oz_1 і Oz . Додатний напрямок кута θ – поворот проти годинникової стрілки осі Oz навколо точки O , якщо дивитися назустріч лінії вузлів OK . Кут відраховується від осі Oz_1 .

Для повного визначення положення даного тіла відносно нерухомої системи $Ox_1y_1z_1$ необхідно задати кут між рухомою віссю Ox і додатним напрямом лінії вузлів OK – кут власного обертання φ . Цей кут вважається додатним, якщо він змінюється проти годинникової стрілки, дивлячись назустріч осі Oz .

При зміні кута φ тіло обертається навколо осі власного обертання Oz , яка перпендикулярна площині, де розташовані прямі OK і Ox , що утворюють цей кут. Таким чином, кут φ визначає положення рухомої координатної осі Ox відносно лінії вузлів OK .

Кути Ейлера широко застосовуються в теорії гіроскопа. Рух гіроскопа, симетричного тіла з нерухомою точкою на осі симетрії, яке дуже швидко

(30 ÷ 40 тисяч об/хв.) обертається навколо цієї осі, можна уявити складеним із трьох рухів, які визначаються кутами ψ , θ , φ . Зміна кутів ψ і θ має швидкість на 1-2 порядки нижче, ніж кута власного обертання φ .

При обертанні тіла навколо нерухомої точки в загальному випадку змінюються всі три кути Ейлера: ψ , θ , φ . Ці кути є незалежними параметрами, які визначають положення тіла при сферичному русі відносно нерухомої системи координат. Задання трьох кутів Ейлера, як функцій часу, є необхідними і достатніми умовами для повного опису сферичного руху.

Отже, для визначення положення тіла з однією нерухомою точкою в будь-який момент часу необхідно задати кути Ейлера як однозначні і неперервні функції часу:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi(t), \\ \theta &= \theta(t), \\ \varphi &= \varphi(t).\end{aligned}\tag{2.76}$$

Рівняння (2.76) є кінематичними рівняннями обертання твердого тіла навколо нерухомої точки. Якщо ці рівняння задані, то в довільний момент часу може бути визначено положення твердого тіла відносно нерухомої системи координат.

Дійсно, відкладемо спочатку в площині $x_1 O y_1$ від осі Ox_1 кут прецесії ψ проти годинникової стрілки, якщо він додатний, і визначимо положення лінії вузлів OK . Далі відкладемо кут θ від осі Oz_1 , площина якого перпендикулярна лінії вузлів OK , і визначимо положення осі z власного обертання. І нарешті, відкладемо у площині $x O y$ кут φ від лінії вузлів проти годинникової стрілки, якщо він додатний, і визначимо положення осі Ox . Положення тіла визначено однозначно.

2.5.1. Теорема Ейлера – Даламбера

Довільне елементарне переміщення тіла, яке має одну нерухому точку, може здійснюватись за одним елементарним поворотом навколо деякої спеціально вибраної миттєвої осі обертання, що проходить через цю нерухому точку.

Припустимо, що положення тіла, яке обертається навколо точки O , визначається кутами ψ , θ , φ (як це показано на рисунку 2.39).

Тоді його переміщення за елементарний проміжок часу можна уявити, як сукупність поворотів на кути $d\psi$, $d\theta$, $d\varphi$ навколо осі Oz_1 , лінії вузлів OK і осі Oz відповідно. Додаючи ці три елементарні повороти, можна отримати одне дійсне елементарне переміщення тіла.

Спочатку розглянемо, яким буде результат додавання поворотів навколо осей Oz і Oz_1 , (рис. 2.40). При повороті на кут $d\varphi$ будь-яка точка тіла, що розміщена у площині Ozz_1 (всередині кута zOz_1), одержить елементарне переміщення, яке перпендикулярне цій площині і чисельно дорівнює $h_1 d\varphi$, де h_1 – відстань від точки до осі Oz . Одночасно, при повороті навколо осі Oz_1 та ж точка одержить протилежне переміщення, яке чисельно дорівнює $h_2 d\psi$.

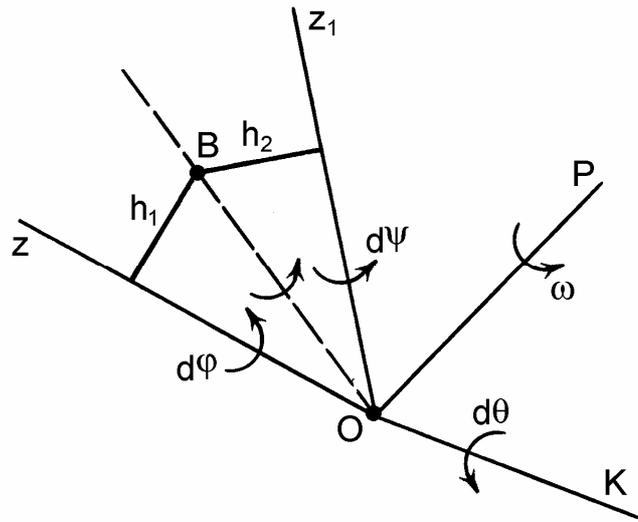


Рис. 2.40.

Всередині кута zOz_1 обов'язково знайдеться така точка B , для якої $h_1 d\varphi = h_2 d\psi$. Це означає, що переміщення цієї точки дорівнює нулю, і точка B буде нерухомою. Таким чином, маємо дві нерухомі точки O і B , отже, і нерухому вісь OB , навколо якої відбувається те саме елементарне обертання, яке становить суму обертань навколо осей Oz і Oz_1 .

Якщо тепер розглядати обертання навколо осі OB і лінії вузлів OK , то після аналогічних міркувань прийдемо до висновку, що елементарні повороти навколо осей OB і OK еквівалентні елементарному повороту навколо деякої осі OP , що проходить через точку O .

Таким чином, вісь OP , елементарним поворотом навколо якої тіло переміщується із даного положення в сусіднє, нескінченно близьке даному, носить назву миттєвої осі обертання.

Теорему доведено.

Слід зауважити, що від нерухомої миттєва вісь обертання відрізняється тим, що її положення змінюється, як відносно системи відліку $Ox_1y_1z_1$, так і відносно рухомої системи координат $Oxyz$. Кожне наступне обертання відбувається навколо своєї миттєвої осі обертання, яка, безумовно, завжди перетинає нерухому точку O .

Тобто, рух твердого тіла навколо нерухомої точки складається з серії послідовних елементарних поворотів навколо миттєвих осей обертання, які перетинають нерухому точку.

Геометричне місце миттєвих осей обертання відносно нерухомої системи відліку називається нерухомим аксоїдом. Нерухомий аксоїд є конічною поверхнею з вершиною у нерухомій точці тіла, тому що всі миттєві осі перетинають нерухому точку.

Геометричне місце миттєвих осей в обертовому тілі називають рухомим аксоїдом, який є також конічною поверхнею. Для кожного руху твердого тіла навколо нерухомої точки маємо пару аксоїдів. Отже, під час сферичного руху рухомий аксоїд котиться по нерухомому без ковзання, оскільки загальна твірна цих аксоїдів у кожний момент часу править за миттєву вісь, навколо якої обертається тіло, тому всі точки осі нерухомі. Якщо рухомий аксоїд котиться без ковзання по нерухомому аксоїду, то відбувається рух тіла навколо нерухомої точки.

2.5.2. Кінематичні характеристики руху тіла навколо нерухомої точки

Кутова швидкість.

Зробимо спочатку визначення кутової швидкості тіла, що обертається навколо нерухомої точки.

Кутова швидкість, з якою відбувається елементарний поворот тіла навколо миттєвої осі обертання, називається кутовою швидкістю тіла в даний момент часу або миттєвою кутовою швидкістю тіла.

Згідно цього визначення, якщо тіло повернеться навколо миттєвої осі на деякий нескінченно малий кут $d\varphi$, то миттєвою кутовою швидкістю буде:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Кутову швидкість можна зобразити у вигляді вектора $\vec{\omega}$, спрямованого вздовж миттєвої осі OP (рис. 2.41).

Якщо врахувати те, що положення миттєвої осі OP безперервно змінюється, то вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ буде змінюватися протягом часу як за модулем, так і за напрямком, а кінець вектора буде описувати деяку довільну криву AB , яка є годографом вектора $\vec{\omega}$. На рисунку 2.41 показано різні положення миттєвої осі обертання OP , OP_1 , OP_2 і відповідно розташовані на них вектори кутової швидкості $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ і $\vec{\omega}_3$.

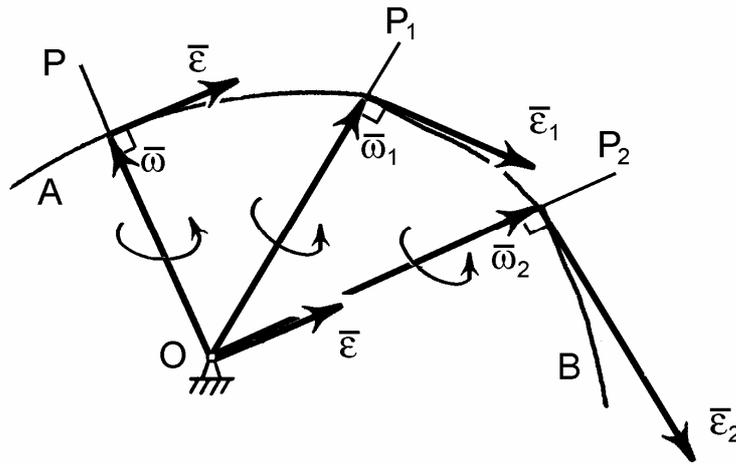


Рис. 2.41.

Кутове прискорення.

Другою кінематичною характеристикою тіла, що обертається навколо нерухомої точки є кутове прискорення.

Кутове прискорення тіла в даний момент часу або миттєве кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$, яке характеризує зміну протягом часу кутової швидкості $\bar{\omega}$ за модулем і за напрямом, є векторною величиною і чисельно дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Для знаходження положення вектора кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ можна використати таку аналогію. Як відомо, вектор швидкості \bar{v}_K довільної точки дорівнює похідній від радіус-вектора \bar{r}_K цієї точки за часом t і спрямований вздовж дотичної до траєкторії руху точки. У цьому випадку траєкторія точки є годографом кінців радіус-векторів \bar{r}_K .

За аналогією з цим, вектор кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ спрямований за дотичною до кривої AB у відповідній точці. Тобто, кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$ можна вважати, як швидкість руху кінця вектора $\bar{\omega}$.

Таким чином, вектор миттєвого кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ має напрям похідної по часу від вектора миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}$, він паралельний дотичній до годографа векторної функції $\bar{\omega}(t)$. Зобразити кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$ необхідно вектором, який паралельний дотичній до годографа векторів кутової швидкості $\bar{\omega}$ у даній точці, але прикладений до нерухомої точки O (рис. 2.41).

2.5.3. Швидкості і прискорення точок тіла у сферичному русі

Векторна формула Ейлера (2.54), яка одержана для обертального руху тіла навколо нерухомої осі, справедлива і для сферичного руху тіла.

У сферичному русі в кожен момент часу тіло обертається навколо миттєвої осі OP , яка перетинає нерухому точку O , з кутовою швидкістю

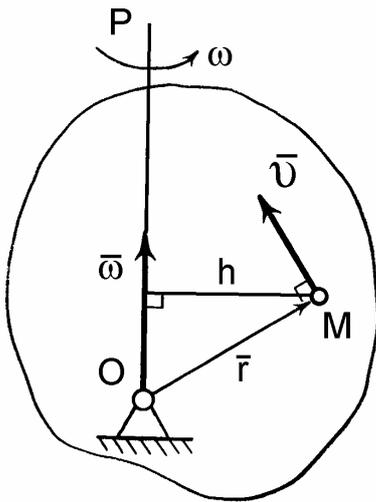


Рис. 2.42.

$\bar{\omega}$, вектор якої розташований на миттєвій осі. Точки тіла, які належать миттєвій осі OP , нерухомі в даний момент часу, як і у випадку нерухомої осі обертання.

Отже, швидкість \bar{v} довільної точки M тіла (рис. 2.42) визначається як векторний добуток $\bar{\omega}$ і \bar{r} :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де \bar{r} – радіус-вектор точки M відносно нерухомої точки O .

Модуль швидкості при цьому буде дорівнювати:

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin(\hat{\bar{\omega}, \bar{r}}) = \omega \cdot h,$$

де h – найкоротша відстань точки до миттєвої осі OP .

Таким чином, швидкості точок тіла у сферичному русі пропорційні відстаням від цих точок до миттєвої осі. Напрямок вектора швидкості перпендикулярний площині, в якій розташовані вектори $\bar{\omega}$ і \bar{r} , тобто відстані h , і спрямований у напрямку обертання.

Як відомо, швидкість точки є першою похідною від радіус-вектора \bar{r} цієї точки за часом (2.4):

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

В той же час, за векторною формулою (2.54) швидкість дорівнює $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.77)$$

Довжина радіуса-вектора \bar{r} , як відстань між двома точками твердого тіла, є сталою величиною при русі цього тіла. Отже, рівняння (2.77) можна розглядати, як формулу для обчислення похідної за часом від вектора, модуль якого сталий, а зміна його відбувається лише внаслідок обертання з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ разом з тілом навколо нерухомої точки.

Якщо жорстко скріпити рухому систему координат $Oxyz$ з тілом, що обертається навколо нерухомої точки з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$, то для одиничних векторів \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , які спрямовані по цих осях, модулі яких стали, на підставі (2.77) маємо:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i},$$

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad (2.78)$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}.$$

Вирази (2.78) називають формулами Пуассона.

Для визначення прискорення точки тіла, яке здійснює сферичний рух, візьмемо похідну за скалярним аргументом t (час) від векторної функції швидкості (2.7):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Оскільки

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon},$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v},$$

то остаточно маємо:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.79)$$

На відміну від (2.58), тут $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ – кутові швидкість і прискорення навколо миттєвих осей, перший доданок – обертальне прискорення:

$$\bar{a}_{ob} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r},$$

другий доданок – доосьове прискорення:

$$\bar{a}_{oc} = \bar{\omega} \times \bar{v}.$$

2.6. Рух вільного твердого тіла

Розглянемо найбільш загальний випадок руху твердого тіла – вільний рух тіла, коли воно може як завгодно перемішуватись відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$ (рис. 2.43).

Як відомо з аналітичної геометрії, положення твердого тіла у просторі можна визначити трьома точками, що не розташовані на одній прямій і незмінно пов'язані з тілом.

На дев'ять координат цих точок накладено три обмеження, які виражають незмінність відстаней між точками, тому що вони належать твердому тілу. Отже, незалежних параметрів або степенів вільності тіла буде шість.

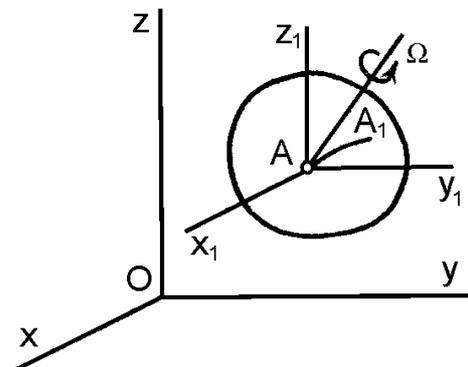


Рис. 2.43.

Дивлячись з другого боку, при визначенні положення твердого тіла можна задати три координати однієї його точки, наприклад, точки A , яку назовемо полюсом з координатами x_A, y_A, z_A , і вибрати ще три параметри, які характеризують обертання тіла навколо полюса. Останні параметри можуть бути кутами Ейлера ψ, θ і φ (на рисунку 2.43 не показані). Сукупність шести скалярних функцій часу, які однозначно визначають положення вільного твердого тіла у будь-який момент часу, є законом його руху:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ z_A &= f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), \\ \theta &= f_5(t), \\ \varphi &= f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

Три перші рівняння визначають рух полюса і разом з ним поступальний рух твердого тіла. Останні три рівняння визначають рух тіла відносно системи координат $Ax_1y_1z_1$ (тобто відносно точки A , як нерухомої).

Таким чином, з геометричної точки зору елементарне переміщення вільного тіла складається із поступального переміщення разом із полюсом, при якому полюс переходить у сусіднє положення A_1 , і із деякого переміщення по відношенню до осей $Ax_1y_1z_1$.

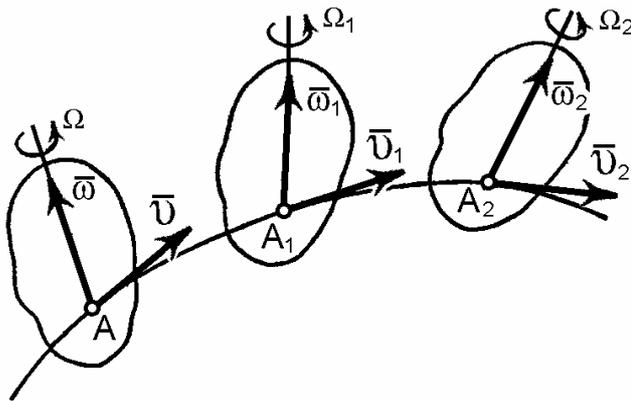


Рис. 2.44.

Останнє переміщення згідно теореми Ейлера–Даламбера є поворотом навколо миттєвої осі обертання $A\Omega$, яка проходить крізь точку A (рис. 2.44).

Оскільки рухом тіла є сукупність елементарних переміщень, то можна його означити таким чином:

“Вільний рух тіла в загальному випадку складається із поступального руху, при якому всі точки тіла рухаються як довільно вибраний полюс A зі швидкістю полюса \bar{v}_A , і ряду елементарних поворотів з кутовою швидкістю ω навколо миттєвих осей обертання, які проходять крізь полюс”

Вільно рухаються кинутий камінь, снаряд, некерована ракета тощо.

Основними кінематичними характеристиками руху є швидкість \bar{v}_A і прискорення \bar{a}_A полюса, які визначають швидкість і прискорення поступальної частини руху, а також кутова швидкість ω і кутове прискорення ε обертання навколо полюса. Значення величин цих характеристик можна визначити за рівняннями (2.80).

В окремому випадку рух вільного тіла може бути плоскопаралельним. Тоді вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$ буде завжди перпендикулярний площині руху. При цьому, як в загальному випадку, так і в окремому, обертальна частина руху, як і значення кутової швидкості ω , від вибору полюса не залежить.

Визначимо швидкості і прискорення точок вільного тіла.

Як і у випадку плоскопаралельного руху, можна уявити, що швидкість і прискорення точки вільного тіла складається геометрично із швидкості прискорення векторів полюса і відносної швидкості (прискорення) точки навколо полюса (останні отримує точка M при русі разом з тілом навколо полюса A):

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}, \quad (2.81)$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA},$$

де $\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}$; $\bar{a}_{MA} = (\varepsilon \times \overline{AM}) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AM})$; \overline{AM} – радіус-вектор точки M відносно полюса A ; \bar{v}_{MA} – швидкість точки M відносно полюса A ; \bar{a}_{MA} – прискорення точки M відносно полюса A ; ε – кутове прискорення тіла.

Питання для самоконтролю

1. Що таке сферичний рух тіла, означте його? Чому він так називається? Наведіть другу назву.
2. Як визначається положення тіла в сферичному русі?
3. Як спрямовуються додатні напрямки кутів Ейлера?
4. Що таке миттєва вісь обертання, яку швидкість мають точки цієї осі?
5. Як визначити кутові швидкість і прискорення тіла у сферичному русі?
6. Запишіть формули для визначення швидкості і прискорення точок тіла у сферичному русі?
7. Назвіть формули Пуассона для швидкості кінця одиничного вектора?
8. Скільки степенів вільності має тіло при сферичному русі?
9. На які прості рухи можна розкласти вільний рух тіла?
10. Запишіть кінематичні рівняння вільного руху тіла.

3. СКЛАДНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи точки

Складний рух матеріальної точки – це такий рух, при якому точка може одночасно приймати участь у двох і більше рухах.

Для уявлення про складний рух наведемо такий приклад. Якщо людину прийняти за матеріальну точку, то її рух по палубі корабля буде складним, коли цей рух розглядати відносно палуби і відносно берега (поверхні Землі). Рух людини відносно палуби є відносним, разом з кораблем – переносним, а рух відносно поверхні Землі – абсолютним.

При складному русі можна розглядати точку, тіло переносу або рухомий переносний простір, з яким пов'язана рухома система координат, і нерухому систему координат, яка скріплена з поверхнею Землі.

Рух точки відносно тіла переносу або рухомої системи відліку називається відносним, а швидкість і прискорення точки в цьому русі – відносними швидкістю і прискоренням, вони позначаються латинськими літерами \bar{v}_r , \bar{a}_r (*relative* – відносний).

Рух точки разом з рухотим простором, а точніше разом з тією точкою рухомого простору, з якою в дану мить співпадає задана точка, називається переносним рухом, а швидкість і прискорення точки в цьому русі – переносними швидкістю і прискоренням, вони позначаються \bar{v}_e , \bar{a}_e (*exporter* – захопити).

Рух матеріальної точки відносно нерухомої системи координат називається абсолютним, а швидкість і прискорення – абсолютними, вони позначаються \bar{v} , \bar{a} .

3.2. Теорема про додавання швидкостей у складному русі матеріальної точки

Абсолютна швидкість матеріальної точки при складному її русі дорівнює геометричній сумі її переносної і відносної швидкостей:

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (2.82)$$

Доведемо це. Виберемо матеріальну точку M (рис. 2.45), що рухається незалежно за своїм законом відносно рухомої системи відліку $Oxyz$, яка жорстко зв'язана з тілом S , і разом з ним переміщується відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$. Початок рухомої системи координат $Oxyz$ (центр O) вибрано у тілі S довільно, на відповідних осях

координат показано одиничні вектори (орти) \bar{i} , \bar{j} і \bar{k} .

Визначимо положення матеріальної точки M відносно вибраних осей координат. Так, відносно рухомої системи координат $Oxyz$ її положення визначається радіусом-вектором \bar{r} . Положення точки M відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ визначається радіусом-вектором \bar{R} .

Положення початку (центр O) рухомої системи координат $Oxyz$ відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ визначається радіусом-вектором \bar{R}_0 .

Як легко побачити з утвореного на рисунку 2.45 векторного трикутника OO_1M , завжди зберігається векторне співвідношення:

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{r}, \quad (2.83)$$

або, якщо представити радіус-вектор \bar{r} у проєкціях на осі координат $Oxyz$ з урахуванням одиничних векторів \bar{i} , \bar{j} і \bar{k} :

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (2.84)$$

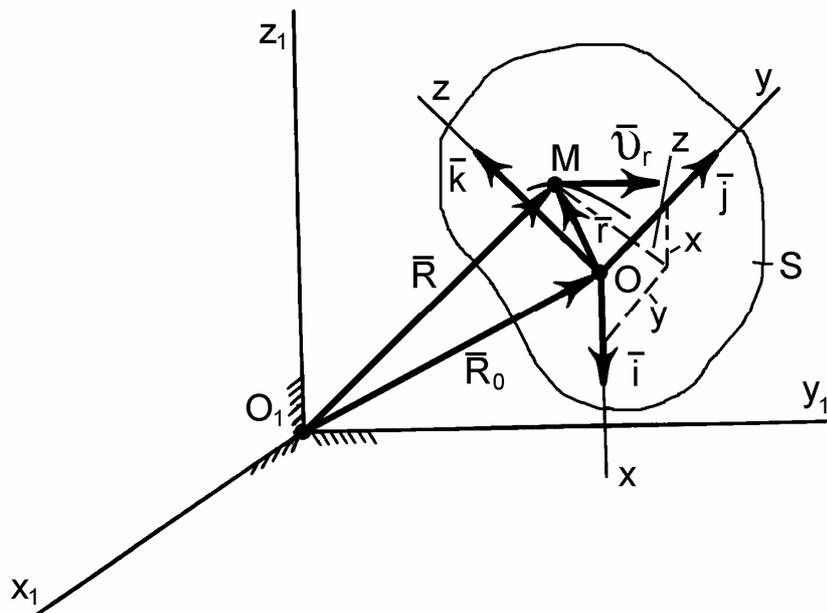


Рис. 2.45.

Використовуючи вираз (2.84) визначимо абсолютну швидкість \bar{v} матеріальної точки M . При довільному переносному русі тіла орти \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} змінюють свій напрям і тому є змінними векторами. Тоді всі члени, які входять у вираз (2.84), вважаються змінними величинами. На підставі формули (2.4) шукана швидкість буде дорівнювати:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}_0}{dt} + \frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k} + x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt}. \quad (2.85)$$

Перегрупуємо праву частину виразу (2.85) і перепишемо його:

$$\bar{v} = \left(\frac{d\bar{R}_o}{dt} + x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \left(\frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k} \right). \quad (2.86)$$

Розглянемо докладно вираз (2.86). Так, у останній дужці можна зробити такі позначення:

$$\frac{dx}{dt} = v_{rx},$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{ry},$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{rz}.$$

$\bar{v}_r = v_{rx} \cdot \bar{i} + v_{ry} \cdot \bar{j} + v_{rz} \cdot \bar{k}$ – відносна швидкість точки.

Розглянемо далі першу дужку у виразі (2.86), де

$\frac{d\bar{R}_o}{dt} = \bar{v}_o$ – швидкість початку рухомої системи координат $Oxyz$ або

швидкість полюса O .

За формулами Пуассона (2.78) інші складові першої дужки виразу (2.86) можна представити так:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{i}, \\ \frac{d\bar{j}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{j}, \\ \frac{d\bar{k}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{k}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

де $\bar{\omega}_e$ – кутова швидкість переносного руху, або швидкість обертання рухомих осей координат і незмінно зв'язаних з ними ортів \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} .

Підставимо (2.87) у першу дужку виразу (2.86):

$$\begin{aligned} x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt} &= x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \\ &= \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}. \end{aligned}$$

Тоді вираз (2.86) остаточно буде мати такий вигляд:

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} + \bar{v}_r.$$

Сума $\bar{v}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{v}_e$ є швидкістю переносного руху, де \bar{v}_o – швидкість полюса або початку відліку рухомої системи координат.

Оскільки переносний рух у загальному випадку є складним, то він розкладається на поступальний разом з полюсом (точкою O) і обертальний навколо полюса.

Остаточно маємо:

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Що і необхідно було довести.

Вираз (2.82) називають паралелограмом швидкостей.

Якщо кут $(\bar{v}_e, \bar{v}_r) = 90^\circ$, то модуль абсолютної швидкості дорівнює:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}.$$

Якщо $(\bar{v}_e, \bar{v}_r) \neq 90^\circ$, то модуль абсолютної швидкості v руху матеріальної точки визначається за теоремою косинусів:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + v_e \cdot v_r \cdot \cos(\bar{v}_e, \bar{v}_r)}. \quad (2.88)$$

3.3. Теорема Коріоліса про додавання прискорень

Сформулюємо дану теорему.

Абсолютне прискорення матеріальної точки при довільному переносному русі дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і додаткового прискорення, яке називається поворотним прискоренням або прискоренням Коріоліса.

Отже:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k,$$

де \bar{a} – абсолютне прискорення матеріальної точки; \bar{a}_e – переносне прискорення; \bar{a}_r – відносне прискорення; \bar{a}_k – прискорення Коріоліса.

Припустимо, що матеріальна точка M має складний рух. Вважаємо, що вона рухається відносно рухомої системи координат $Oxyz$, яка сама довільним чином переміщується відносно іншої – нерухомої системи $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 2.45). Покажемо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти рухомої системи координат $Oxyz$. Координати точки M у рухомій системі відліку – x, y, z .

Як і в попередньому випадку, визначимо положення матеріальної точки M . Так, положення точки M у рухомій системі координат $Oxyz$ визначається радіусом-вектором \bar{r} . Її положення відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ визначається радіусом-вектором \bar{R} . Положення точки O (початку відліку рухомої системи координат $Oxyz$) у нерухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$ визначається радіусом-вектором \bar{R}_o .

Абсолютне прискорення матеріальної точки M дорівнює похідній за часом від абсолютної швидкості (2.86):

$$\begin{aligned}
\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = & \left(\frac{d^2\bar{R}_o}{dt^2} + x \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \right. \\
& \left. + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \\
& \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \bar{k} + \right. \\
& \left. + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right).
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Проведемо перетворення і аналіз виразу (2.89). У першій дужці складова

$$\frac{d^2\bar{R}_o}{dt^2} = \bar{a}_o - \text{прискорення полюса } O.$$

Перетворимо далі вираз першої дужки, користуючись формулами Пуассона (2.78):

$$\begin{aligned}
x \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} &= x \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z \frac{d}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \\
&= x \left[\left(\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{i}}{dt} \right) \right] + y \left[\left(\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{j}}{dt} \right) \right] + \\
&+ z \left[\left(\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} \right) + \left(\bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{k}}{dt} \right) \right] = x \left\{ (\bar{\varepsilon}_e \times \bar{i}) + \left(\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) \right) \right\} + \\
&+ y \left\{ (\bar{\varepsilon}_e \times \bar{j}) + \left(\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) \right) \right\} + z \left\{ (\bar{\varepsilon}_e \times \bar{k}) + \left(\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) \right) \right\} = \\
&= \left[\bar{\varepsilon}_e \times (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) \right] + \left\{ \bar{\omega}_e \times \left[\bar{\omega}_e \times (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) \right] \right\} = \\
&= \left(\bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} \right) + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{r} \right) = \bar{a}_e^o.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

\bar{a}_e^o – прискорення точки у переносному сферичному русі тіла навколо полюса.

У другій дужці

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \bar{k} = a_{rx} \cdot \bar{i} + a_{ry} \cdot \bar{j} + a_{rz} \cdot \bar{k} = \bar{a}_r - \text{відносне прискорення точки.}$$

У рівнянні (2.89) маємо ще такі два вирази, які також треба перетворити:

У рівнянні (2.89) маємо ще такі два вирази, які також треба перетворити:

$$2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \right) = 2 \left(\frac{dx}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + \frac{dy}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + \frac{dz}{dt} (\bar{\omega}_e \times \bar{k}) \right) = 2 \bar{\omega}_e \times \left(\frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k} \right) = 2 (\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = \bar{a}_k. \quad (2.91)$$

\bar{a}_k – прискорення Коріоліса або поворотне прискорення.

Враховуючи зроблені перетворення, остаточно запишемо:

$$\bar{a} = \bar{a}_o + \bar{a}_e^o + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (2.92)$$

Що і треба було довести.

В остаточному виразі (2.92) теореми Коріоліса переносне прискорення для загального руху тіла переносу S складається із двох доданків:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_o + \bar{a}_e^o,$$

де \bar{a}_o – прискорення початку рухомої системи координат (полюса O) і незалежного сферичного руху тіла навколо полюса, що виражається складовою прискорення \bar{a}_e^o .

Питання для самоконтролю

1. Що таке складний рух точки? Яка основна задача цього руху?
2. З яких складових складається абсолютний рух точки?
3. Що таке паралелограм швидкостей?
4. Як визначається швидкість точки в абсолютному русі?
5. З яких складових утворюється абсолютне прискорення точки?
6. Сформулюйте теорему Коріоліса, запишіть математичний вираз теореми.

3.4. Модуль, напрямок і фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса

Розглянемо докладно прискорення Коріоліса і його властивості. Воно, згідно (2.91), має такий вигляд:

$$\bar{a}_k = 2 (\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r).$$

Прискорення Коріоліса дорівнює подвійному векторному добутку векторів переносної кутової швидкості і відносної швидкості точки.

Як відомо, модуль векторного добутку дорівнює:

$$a_k = 2 \omega_e \cdot v_r \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}). \quad (2.93)$$

З виразу (2.93) легко побачити, що модуль прискорення Коріоліса дорівнює нулю ($a_k = 0$) в таких випадках:

1. $\omega_e = 0$ – переносний рух не є обертальним, тому прискорення Коріоліса називають також *поворотним* прискоренням;
2. $v_r = 0$ – рух точки в даний момент часу не є складним;
3. $(\overline{\omega}_e, \overline{v}_r) = 0^\circ$ або $(\overline{\omega}_e, \overline{v}_r) = 180^\circ$ – вектори переносної кутової швидкості і відносної швидкості паралельні.

Модуль прискорення Коріоліса буде максимальним, якщо кут між векторами $\overline{\omega}_e$ і \overline{v}_r складає 90° або 270° , в цьому випадку:

$$a_k = 2\omega_e \cdot v_r.$$

Напрямок прискорення Коріоліса можна відшукати за двома методами: математичним – за визначенням векторного добутку двох векторів і фізичним – за способом Жуковського.

Розглянемо перший метод.

Припустимо, що тіло S обертається навколо осі z проти напрямку ходу годинникової стрілки. Це є тіло переносу і вектор $\overline{\omega}_e$ спрямований вгору вздовж осі z (рис. 2.46). Незалежно по тілу S за своєю траєкторією рухається точка M зі швидкістю \overline{v}_r (вектор \overline{AM}). Перенесемо умовно вектор $\overline{\omega}_e$ у точку M . Вектор прискорення Коріоліса \overline{a}_k , як підсумковий вектор векторного добутку, перпендикулярний площині, яку утворюють ці вектори (паралелограм $MABC$). Залишається визначити, чи до нас цей вектор спрямований, чи від нас. У даному випадку (рис. 2.47) вектор \overline{a}_k спрямований до нас, тому що найкоротший перехід від вектора $\overline{\omega}_e$ до вектора \overline{v}_r відбувається проти напрямку ходу годинникової стрілки.

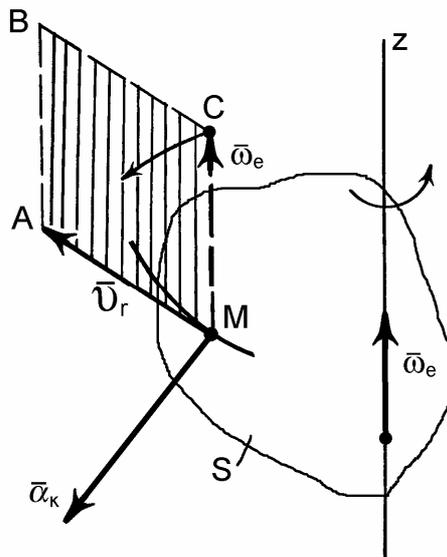


Рис. 2.46.

Таким чином, вектор прискорення Коріоліса є перпендикулярним площині, яку утворюють вектори переносної кутової швидкості і відносної швидкості, і спрямований у ту сторону, звідки можна побачити, що найкоротший перехід від вектора кутової швидкості до вектора відносної швидкості відбувається проти ходу годинникової стрілки.

Переходимо до розгляду визначення напрямку вектора прискорення Коріоліса за методом Жуковського.

Для визначення напрямку вектора прискорення Коріоліса цим методом необхідно вектор відносної швидкості \bar{v}_r спроектувати на площину π , яка перпендикулярна осі переносного обертання ($\pi \perp \bar{\omega}_e$), потім повернути проекцію \bar{v}'_r у площині π на кут 90° у напрямку переносного обертання (рис. 2.47).

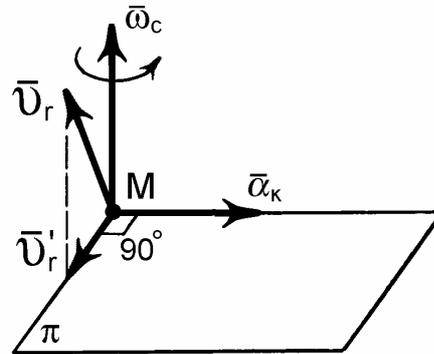


Рис. 2.47.

Неважко зрозуміти, що у плоских механізмах, які є об'єктом курсового проекту з теорії механізмів і машин, вектор \bar{v}_r завжди буде розташований у площині руху механізму. А тому для визначення напрямку прискорення Коріоліса досить повернути вектор \bar{v}_r на 90° у напрямку переносного повороту ω_e .

Розглянемо далі фізичні причини виникнення поворотного прискорення або прискорення Коріоліса.

Нехай по пластині, що розташована у площині рисунка і рівномірно обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю $\bar{\omega}_e$ (напрямок обертання показаний стрілкою), рухається прямолінійно уздовж її радіуса матеріальна точка M зі сталою відносною швидкістю \bar{v}_r (рис. 2.48). За деякий час пластина повернеться на кут φ і точка M опиниться у положенні M_1 на більшій відстані від осі обертання O . В результаті цього повернеться вектор \bar{v}_r внаслідок переносного обертання, збільшиться за модулем і повернеться вектор переносної швидкості \bar{v}_e .

З вище наведеного можна сформулювати дві фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса:

– за рахунок зміни напрямку вектора відносної швидкості матеріальної точки внаслідок переносного обертання;

– за рахунок зміни модуля і напрямку вектора переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху; це видно з наступних виразів переносної швидкості руху для різних її положень M і M_1 (відстань $OM < OM_1$):

$$v_M^e = \omega_e \cdot OM,$$

$$v_{M_1}^e = \omega_e \cdot OM_1.$$

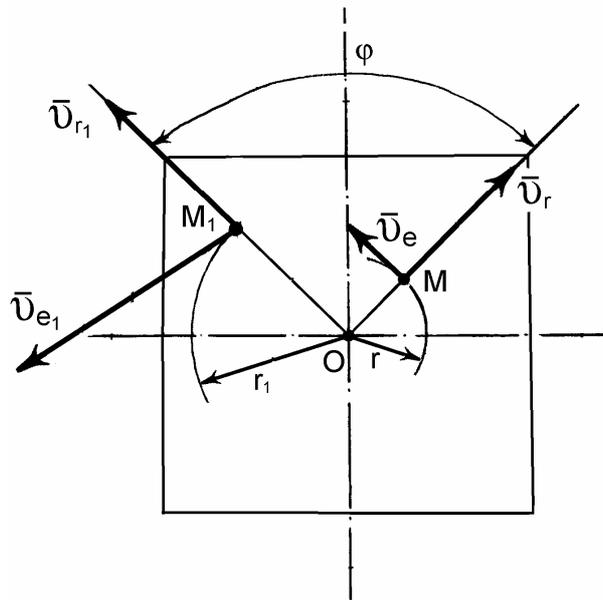


Рис. 2.48.

Отже, прискорення Коріоліса – це новий кінематичний ефект, який виникає внаслідок взаємодії, взаємовпливу векторів відносної і переносної швидкостей при обертальному переносному русі.

Вплив прискорення Коріоліса спостерігається у природі і техніці.

Так, за рахунок сил інерції мас води, які формуються цим прискоренням, розмиваються праві береги річок, які течуть вздовж меридіана. Тому праві береги у північній півкулі є завжди крутими. У південній півкулі – навпаки, ліві береги є крутими.

У техніці прискорення Коріоліса виникає у так званих кулісних механізмах (куліса – це рухома напрямна). Відносно куліси рухається кулісний камінь, а переносним рухом є поворот куліси відносно нерухомого центра.

3.5. Методика розв'язування задач на складний рух матеріальної точки

1. З'ясувати, який рух точки є відносним, який є переносним, проаналізувати закони руху й умову задачі.

2. Для визначення характеристик відносного руху необхідно умовно зупинити переносний рух. Відшукати положення точки в заданий момент часу на траєкторії відносного руху.

3. Для визначення характеристик переносного руху необхідно умовно зупинити відносний рух і розглянути рух точки, що належить тілу переносу, яка співпадає в даний момент з даною точкою.

4. Для визначення параметрів абсолютного руху точки необхідно вибрати систему координат з початком у самій точці, потім методом проєкцій визначити проєкції абсолютних швидкості і прискорення і, нарешті, повні швидкості і прискорення.

Приклад.

Кільцева трубка (рис. 2.49) радіуса 16 см обертається навколо горизонтального діаметра OA за законом $\varphi = 2 + 0,25t^3$ рад. Всередині трубки рухається рідина згідно рівняння $OM = S_r = 3\pi t^2$ см. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення частинки M рідини в момент часу $t_1 = 2$ с, якщо в початковий момент частинка була в точці O .

Розв'язання.

Визначаємо положення точки M в момент часу t_1 . Положення точки M зручно визначити кутом α . Визначимо його за допомогою такого виразу:

$$\alpha = \frac{S_r}{R} = \frac{3\pi \cdot 2^2}{16} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад},$$

$$\alpha = 135^\circ.$$

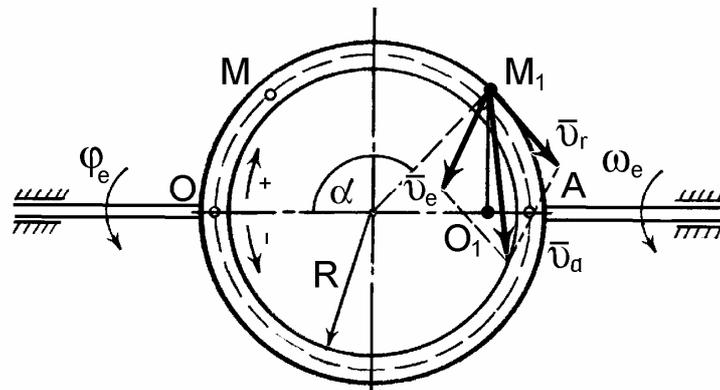


Рис. 2.49.

Точка M у заданий момент часу зображена на рис. 2.49. Виберемо рухому систему координат, яка жорстко зв'язана з кільцевою трубкою.

Виділяємо переносний рух точки M . Для цього скріплюємо точку M з рухомою системою координат. У цьому випадку точка M буде описувати коло у площині, яка перпендикулярна до діаметра OA , радіус якого дорівнює:

$$O_1M_1 = h = R \cos 45^\circ = 8\sqrt{2} = 11,28 \text{ см},$$

Обчислимо переносну швидкість точки M , як швидкість обертання даної точки навколо осі OA :

$$v_e = \omega_e h.$$

Визначимо кутову швидкість обертання трубки.

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 0,75t^2 \text{ с}^{-1}.$$

Вектор кутової швидкості спрямований уздовж осі обертання.

Переносна швидкість v_e точки M дорівнює:

$$v_e = 0,75t^2 \cdot 11,28 = 8,45t^2 \text{ см/с}.$$

Для моменту часу $t_1 = 2 \text{ с}$ маємо таке значення переносної швидкості точки M :

$$v_e = 8,45 \cdot 4 = 33,80 \text{ см/с}.$$

Вектор переносної швидкості спрямований перпендикулярно до площини креслення в напрямку обертання.

Відносний рух точки M – це рух рідини відносно трубки. У цьому випадку точка M буде рухатися по колу діаметром OA .

Обчислюємо відносну швидкість точки M . Вона дорівнює:

$$v_r = \frac{dS_r}{dt} = 6\pi t \text{ см/с}.$$

Для моменту часу $t_1 = 2 \text{ с}$ знаходимо значення відносної швидкості руху v_r :

$$v_r = 6\pi \cdot 2 = 12\pi = 37,68 \text{ см/с}.$$

Направляємо вектор відносної швидкості v_r по дотичній до згаданого кола в точці M в сторону додатних значень дугової координати.

Вектори переносної \bar{v}_e і відносної \bar{v}_r швидкостей зображені на рис. 2.49.

Враховуючи, що вектори \bar{v}_r і \bar{v}_e взаємно перпендикулярні, знаходимо абсолютну швидкість точки M . Вона дорівнює:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 50,62 \text{ см/с}.$$

Абсолютне прискорення точки M буде дорівнювати:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_k.$$

Знаходимо переносне нормальне прискорення точки M :

$$a_e^n = \omega_e^2 h = 0,5625t^4 \cdot 11,28 = 6,345t^4 \text{ см/с}^2.$$

При $t_1 = 2 \text{ с}$ значення переносного нормального прискорення дорівнює:

$$a_e^n = 6,345 \cdot 16 = 101,52 \text{ см/с}^2.$$

Спрямований вектор переносного нормального прискорення \bar{a}_e^n по перпендикуляру до осі обертання OA (рис. 2.50).

Переносне дотичне прискорення a_e^τ точки M дорівнює:

$$a_e^\tau = \varepsilon_e h.$$

Визначимо кутове прискорення трубки. Воно буде дорівнювати:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 1,5t \text{ c}^{-2}.$$

Кутове прискорення ε_e додатне, отже, обертання трубки є прискореним.

Обчислюємо переносне дотичне прискорення a_e^τ точки M :

$$a_e^\tau = 1,5t \cdot 11,28 = 16,92t \text{ см/с}^2.$$

Для $t_1 = 2 \text{ c}$ маємо значення цього прискорення:

$$a_e^\tau = 16,92 \cdot 2 = 33,84 \text{ см/с}^2.$$

Спрямоване переносне дотичне прискорення \bar{a}_e^τ точки M так само, як і переносна швидкість v_e , перпендикулярно до площини трубки.

Знаходимо відносне дотичне прискорення a_r^τ точки M . Воно дорівнює:

$$a_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = 6\pi = 18,84 \text{ см/с}^2.$$

Вектор відносного дотичного прискорення \bar{a}_r^τ збігається з напрямком вектора відносної швидкості \bar{v}_r , тому що відносний рух є прискореним, знак у дотичного прискорення a_r^τ - додатний.

Обчислимо відносне нормальне прискорення a_r^n :

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{36\pi^2 t^2}{16} = 2,25\pi^2 t^2 \text{ см/с}^2.$$

Для моменту часу $t_1 = 2 \text{ c}$ маємо таке значення цього прискорення:

$$a_r^n = 2,25 \cdot \pi^2 \cdot 4 = 9\pi^2 = 88,74 \text{ см/с}^2.$$

Спрямований вектор нормального відносного прискорення \bar{a}_r^n по радіусу до центра кільця трубки.

Знаходимо прискорення Коріоліса a_k . Воно буде дорівнювати:

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin 45^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 37,68 \cdot 0,71 = 160,52 \text{ см/с}^2.$$

Спрямовано прискорення Коріоліса перпендикулярно до площини, у якій розміщені вектори $\bar{\omega}_e$ і \bar{v}_r , таким чином, що якщо подивитися з додатного кінця цього вектора, то поворот від $\bar{\omega}_e$ до \bar{v}_r на найменший кут відбувається проти ходу годинникової стрілки. Таким чином, вектор прискорення Коріоліса \bar{a}_k спрямований по одній прямій з вектором

переносного дотичного прискорення \bar{a}_e^τ , але має протилежний напрямок.

Вектори відносного, переносного і прискорення Кориоліса зображені на рис. 2.50.

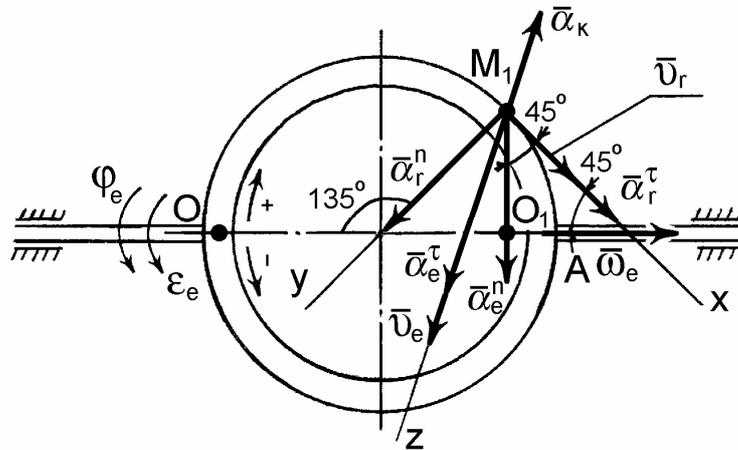


Рис. 2.50.

Для знаходження абсолютного прискорення \bar{a} виберемо систему координат, як показано на рис. 2.50, і спроектуємо векторну рівність, що визначає абсолютне прискорення точки M , на осі даної системи координат:

$$a_x = a_r^\tau + a_e^n \cos 45^\circ = 90,92 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a_r^n + a_e^n \cos 45^\circ = 160,82 \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = a_e^\tau - a_k = -126,68 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного прискорення \bar{a} дорівнює:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 224,00 \text{ см/с}^2.$$

Питання для самоконтролю

1. Визначте модуль прискорення Кориоліса. Коли його модуль дорівнює нулю?

2. Як спрямувати вектор прискорення Кориоліса?

3. Назвіть фізичні причини виникнення прискорення Кориоліса?

4. Як визначити напрямок прискорення Кориоліса методом Жуковського?

5. Як виявляється дія прискорення Кориоліса у природі?

6. Розкажіть про методу розв'язування задач на складний рух точки.

7. Чому прискорення Кориоліса має ще і другу назву – поворотне?

8. Яким методом визначається абсолютне прискорення точки по його складових?

9. Як легко знайти напрямок прискорення Кориоліса для плоскої задачі або плоского механізму?

4. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Якщо тверде тіло рухається відносно рухомих осей координат $Oxyz$, а ці осі одночасно здійснюють переносний рух по відношенню до нерухомих осей координат $Ox_1y_1z_1$, то підсумковий рух тіла є складним.

Складний рух твердого тіла може складатись тільки з поступальних або обертальних рухів, а також може бути результатом складання поступального і обертального рухів. Тому, основною задачею цього розділу кінематики є встановлення співвідношень між характеристиками абсолютного руху тіла і різними типами його відносних рухів.

4.1. Додавання поступальних рухів твердого тіла

Розглянемо випадок, коли відносний рух тіла є поступальним зі швидкістю \bar{v}_r , а переносний рух – теж поступальний зі швидкістю \bar{v}_e . Оскільки і відносний і переносний рухи є поступальними, то усі точки тіла мають однакові швидкості. Таким чином, згідно теореми про додавання швидкостей при складному русі матеріальної точки всі точки тіла в абсолютному його русі будуть мати одну і ту ж швидкість. Таким чином, підсумковий рух тіла буде також поступальним зі швидкістю:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2,$$

де v_1 – відносний рух тіла; v_2 – переносний рух тіла.

Тобто, задача додавання швидкостей в даному випадку зводиться, фактично, до задачі кінематики матеріальної точки в складному її русі.

4.2. Додавання обертань тіла навколо двох паралельних осей

При розгляданні інших випадків складного руху тіла найбільш поширеним є випадок, при якому відносний і переносний рухи тіла є обертальними. Проте, і в даному разі такі рухи можуть бути у вигляді обертань навколо паралельних осей або осей, що перетинаються, напрямки обертань можуть бути спрямовані в один бік або – в різні. Може бути випадок, коли виникає необхідність додавання поступального і обертального рухів твердого тіла.

Розглянемо деякі випадки обертальних рухів твердого тіла. Характерним прикладом такого руху тіла є обертання диска з кутовою швидкістю ω_1 навколо осі aa' , який встановлено на кривошипі ba , що, у свою чергу, обертається з кутовою швидкістю ω_2 навколо осі bb' , яка паралельна осі aa' (рис. 2.51, а). Тут обертання диска навколо власної осі

aa' є відносним рухом тіла, а його обертання разом з кривошипом ba буде переносним рухом диска навколо осі bb' .

В даному випадку рух тіла буде плоскопаралельним по відношенню до площини, яка перпендикулярна до названих осей. Але обертальні рухи можуть бути спрямовані в один бік, в різні боки з різними кутовими швидкостями і в різні боки, але з однаковими кутовими швидкостями. Послідовно розглянемо вказані випадки складного руху твердого тіла.

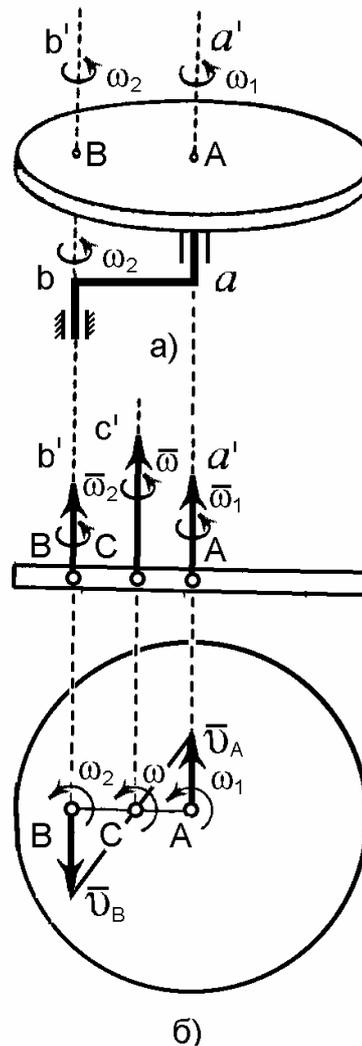


Рис. 2.51.

4.2.1. Додавання обертань, спрямованих в одну сторону

Зробимо переріз обертового тіла площиною, що перпендикулярна осям aa' , bb' і визначимо лінійні швидкості його точок A і B, які утворені від перетину осей обертання aa' і bb' з диском (рис. 2.51, б). Зі схеми можна побачити, що швидкість точки A, яка розміщена на осі aa' , є результатом обертання тільки навколо осі bb' і дорівнює:

$$v_A = \omega_2 \cdot AB.$$

Таким же чином визначимо лінійну швидкість точки B :

$$v_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Покажемо вектори цих швидкостей на схемі. Вектори \bar{v}_A і \bar{v}_B паралельні один одному (оскільки вони розташовані перпендикулярно прямій AB), але спрямовані у різні сторони. З'єднаємо прямою кінці векторів швидкостей \bar{v}_A і \bar{v}_B , тоді на лінії AB знайдеться така точка C , швидкість якої дорівнює нулю ($v_C = 0$), тобто точка C є миттєвим центром обертання з кутовою швидкістю ω . Пряма Cc' буде паралельною осям aa' і bb' і є миттєвою віссю обертання тіла.

Знайдемо кутову швидкість ω підсумкового обертання тіла навколо осі Cc' і положення цієї осі, тобто точки C на обертовому тілі.

Використовуючи отримані раніше поняття і залежності, що торкались миттєвого центру швидкостей і вважаючи, що точка C і є миттєвим центром швидкостей у даному випадку, можна записати таку пропорцію:

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}.$$

Використовуючи властивості пропорції (так із рівності деяких відношень $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ слід, що $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}$) можна записати:

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{AC + BC} = \frac{v_B + v_A}{AB}.$$

Якщо підставити отримані раніше значення кутових швидкостей ($v_B = \omega_1 \cdot AB$ і $v_A = \omega_2 \cdot AB$) в останню рівність, то остаточно знайдемо кутову швидкість підсумкового обертання тіла:

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{AB} = \frac{\omega_1 \cdot AB + \omega_2 \cdot AB}{AB} = \omega_1 + \omega_2.$$

Таким чином, якщо тіло одночасно приймає участь у двох спрямованих в одну сторону обертальних рухах навколо осей, що паралельні, то його підсумковий рух буде обертальним з кутовою швидкістю $\omega = \omega_1 + \omega_2$ навколо осі, що паралельна заданим.

Знайдемо місце розташування осі Cc' . Якщо $\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}$, то підставляючи в нього значення швидкостей v_B і v_A будемо мати:

$$\omega = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BC} = \frac{\omega_2 \cdot AB}{AC}.$$

Поділимо дану рівність на AB і остаточно отримаємо пропорцію, з якої можна знайти відстань до осі Cc' від точок A і B :

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC}.$$

Слід зауважити, що з плином часу вісь обертання Cc' буде змінювати своє положення на тілі, описуючи циліндричну поверхню.

4.2.2. Додавання обертань, спрямованих у різні сторони

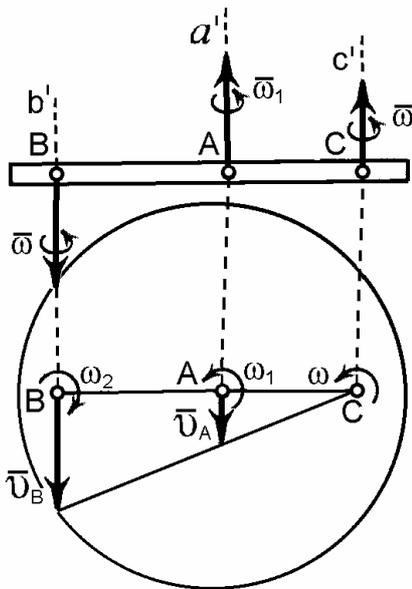


Рис. 2.52.

Використовуючи вихідну схему (рис. 2.51, а) задамо різні напрямки обертання тіла (диска) і кривошипа ba . Відразу припустимо, що $\omega_1 > \omega_2$.

Зробимо переріз обертового тіла площиною, що перпендикулярна осям aa' і bb' (рис. 2.52). Як і в попередньому випадку, спочатку знайдемо швидкості точок A і B :

$$v_A = \omega_2 \cdot AB,$$

$$v_B = \omega_1 \cdot AB.$$

В цьому випадку ці швидкості паралельні одна одній та спрямовані в одну сторону. Точка C осі миттєвого

центра обертань буде розміщена вже не всередині відрізка AB , а на його продовженні.

Кутова швидкість підсумкового руху буде дорівнювати:

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC},$$

або, як і в попередньому випадку враховуючи властивості пропорції:

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{BC - AC} = \frac{v_B - v_A}{AB} = \frac{v_B}{AB} - \frac{v_A}{AB} = \omega_1 - \omega_2,$$

або:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2.$$

Таким чином, якщо тіло одночасно приймає участь у двох спрямованих у різні сторони обертальних рухах навколо осей, що паралельні, то його підсумковий рух буде обертальним з кутовою швидкістю $\omega = \omega_1 - \omega_2$ навколо осі, що паралельна заданим.

Знайдемо місце розташування осі Cc' . Якщо $\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}$, то підставляючи в нього значення швидкостей v_B і v_A будемо мати:

$$\omega = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BC} = \frac{\omega_2 \cdot AB}{AC}.$$

Поділимо дану рівність на AB і остаточно отримуємо пропорцію, з якої можна знайти відстань до осі Cc' від точок A і B :

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC}.$$

4.2.2. Пара обертань

Використовуючи вихідну схему (рис. 2.51, *a*) задамо різні напрямки обертання тіла (диска) і кривошипа ba , однак за модулем кутова швидкість диска навколо власної осі і кутова швидкість його обертання навколо осі кривошипа дорівнюють. Тобто, $\omega_1 = \omega_2$. Така сукупність обертань називається парою обертань,

Як і у двох попередніх випадках зробимо переріз обертового тіла площиною, що перпендикулярна осям aa' і bb' (рис. 2.53). Вектори $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$ утворюють пару кутових швидкостей. Далі знайдемо швидкості точок A і B :

$$v_A = \omega_2 \cdot AB,$$

$$v_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Оскільки $\omega_1 = \omega_2$, то швидкості точок A і B будуть дорівнювати:

$$v_A = v_B.$$

Тоді миттєвий центр швидкостей перебуває у нескінченності і усі точки тіла у даний момент часу мають однакові швидкості \bar{v} .

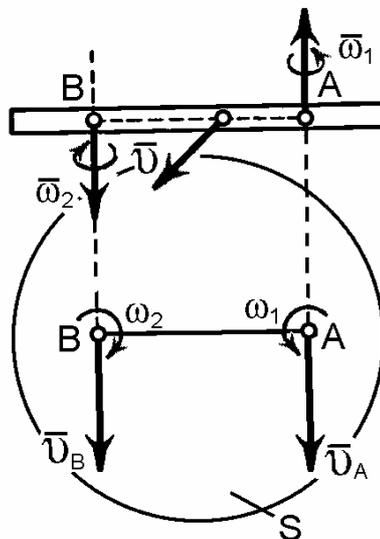


Рис. 2.53.

Отже, підсумковий рух тіла буде миттєво поступальним із швидкістю \bar{v} , яка дорівнює $\omega_1 \cdot AB$ і спрямована перпендикулярно площині, яка проходить крізь вектори $\bar{\omega}_1$ та $\bar{\omega}_2$ у сторону, звідки обертання пари кутових швидкостей можна бачити проти руху стрілки годинника (рис. 2.53).

Таким чином, пара обертання еквівалентна поступальному (або миттєво поступальному) руху зі швидкістю \bar{v} , що дорівнює $v = \omega_1 \cdot AB$.

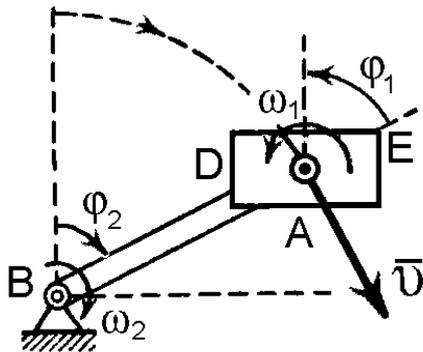


Рис. 2.54.

Прикладом названого руху є поступальний рух педалі велосипеда, відносно його рами (рис. 2.54).

Вважаємо, що сама педаль DE , яка встановлена на кривошипі BA , одночасно здійснює відносний обертальний рух навколо осі A з кутовою швидкістю ω_1 і переносний обертальний рух разом з кривошипом

BA навколо осі B з кутовою швидкістю ω_2 .

Кутові швидкості ω_1 і ω_2 обох обертальних рухів дорівнюють за модулем, оскільки у довільний момент часу кут повороту педалі ϕ_1 відносно кривошипа BA буде дорівнювати куту ϕ_2 самого кривошипа.

Поступальний підсумковий рух педалі велосипеда буде здійснюватись у напрямку вектора \bar{v} і за модулем швидкість дорівнює:

$$v = \omega_2 \cdot BA.$$

4.3. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються

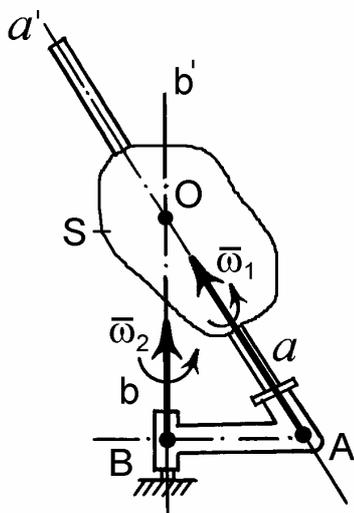


Рис. 2.55.

Характерним прикладом такого руху є обертання тіла S з кутовою швидкістю ω_1 навколо осі $a'a$, яку встановлено на кривошипі AB , що обертається з кутовою швидкістю ω_2 навколо осі $b'b$. Причому вісі $a'a$ і $b'b$ перетинаються під деяким кутом у точці O (рис. 2.55). Обертання тіла S навколо осі $a'a$ є відносним рухом, а його обертання на кривошипі AB буде переносним рухом навколо осі $b'b$.

Очевидно, в цьому випадку швидкість точки O , що належить одночасно двом осям, дорівнює нулю ($v_C = 0$). Отже, підсумковий рух тіла є рухом навколо нерухомої точки O , і для кожного елементарного проміжку часу цей рух є елементарним поворотом з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ навколо миттєвої осі (OC), що проходить через цю точку O . Для знаходження підсумкової кутової швидкості ω необхідно перенести у точку O вектори $\bar{\omega}_1$ та $\bar{\omega}_2$ і додати їх геометрично, побудувавши на цих векторах, як на сторонах, паралелограм. Діагональ цього паралелограму визначає новий вектор $\bar{\omega}$, який і є геометричною сумою згаданих векторів $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$ (рис. 2.56).

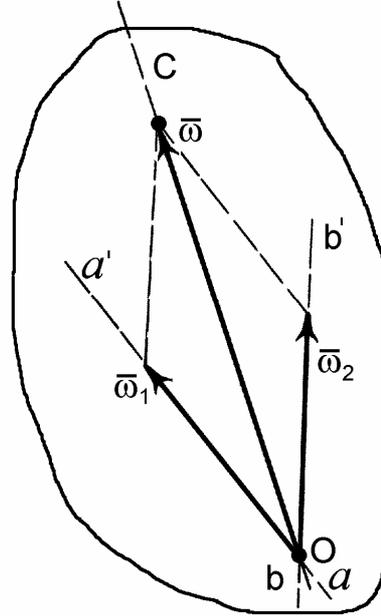


Рис. 2.56.

Доведемо, що таким чином отриманий вектор $\bar{\omega}$ як раз і буде кутовою швидкістю підсумкового обертального руху навколо миттєвої осі обертання OC .

З цією метою обчислимо швидкість якої-небудь точки M тіла, радіус-вектор якої $\overline{OM} = \bar{r}$ (рис. 2.57).

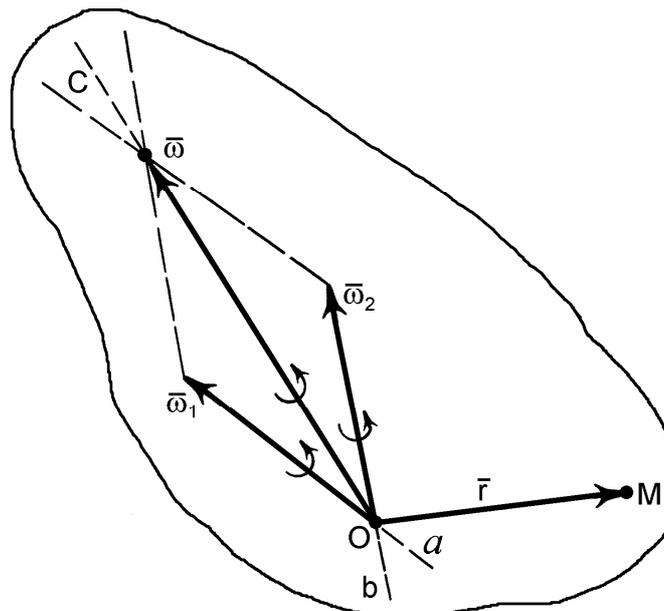


Рис. 2.57.

Визначимо швидкість точки M , розглядаючи її послідовно у кожному з рухів тіла. Так, у відносному русі навколо осі Oa точка M має швидкість:

$$\bar{v}_r = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}.$$

А у переносному русі навколо осі Ob точка M має швидкість:

$$\bar{v}_e = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}.$$

Додамо геометрично вектори відносної \bar{v}_r і переносної \bar{v}_e швидкостей. Тоді абсолютна швидкість точки M дорівнює:

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e = (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) + (\bar{\omega}_2 \times \bar{r}) = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r}.$$

Проте, оскільки підсумковий рух тіла є миттєвим обертанням навколо миттєвої осі OC , то швидкість точки M буде

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Такий же самий результат можна отримати, розглядаючи і решту інших точок тіла, тобто результат не залежить від \bar{r} . Таким чином, остаточно:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \quad (2.85)$$

що і треба було довести.

Таким чином, при додаванні обертань навколо двох осей, що перетинаються в точці O , підсумковий рух тіла буде миттєвим обертанням навколо осі OC , що проходить через точку O , при цьому кутова швидкість $\bar{\omega}$ цього обертання дорівнює геометричній сумі векторів відносної та переносної кутових швидкостей.

В даному випадку з плином часу вісь обертання OC буде змінювати своє положення, описуючи конічну поверхню (аксоїд) з вершиною в точці O .

4.4. Додавання поступального і обертального рухів

Розглянемо складний рух твердого тіла, який складається з поступального і обертового рухів. Прикладом такого руху твердого тіла може бути спеціальний автомобіль, на платформі якого встановлена під кутом ємність для перевезення бетонного розчину, яка обертається навколо власної осі під час руху автомобіля (для запобігання згущення розчину). На рисунку 2.58 наведена схема цього прикладу, з якої можна побачити, що тіло здійснює відносний обертальний рух з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ навколо осі Aa . Вісь Aa нахилена під кутом α до напрямку руху автомобіля. Кузов автомобіля здійснює переносний поступальний рух зі швидкістю \bar{v} .

В залежності від значень кута α між напрямками векторів $\bar{\omega}$ і \bar{v} можуть бути три випадки. Розглянемо їх.

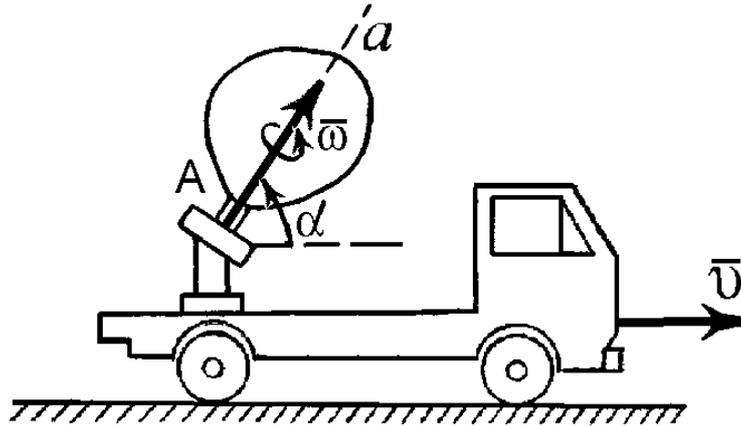


Рис. 2.58.

4.4.1. Вектор поступальної швидкості перпендикулярний до осі обертання

В даному випадку ($\bar{v} \perp \bar{\omega}$), тобто складний рух тіла складається із обертального руху навколо осі Aa з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ і поступального руху зі швидкістю \bar{v} , яка перпендикулярна до $\bar{\omega}$ (рис. 2.59). Легко побачити, що цей рух по відношенню до площини π є плоскопаралельним рухом, який раніше детально розглянутий. Якщо вважати точку A за полюс, то цей рух дійсно складається із поступального зі швидкістю $\bar{v}_A = \bar{v}$ і із обертального навколо осі Aa , яка проходить крізь полюс.

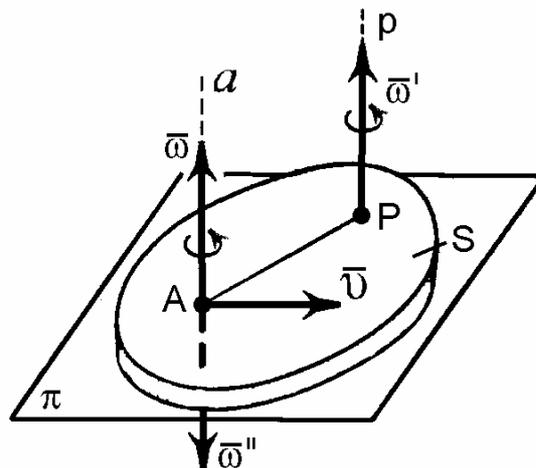


Рис. 2.59.

Вектор \bar{v} можна замінити парою кутових швидкостей $\bar{\omega}'$, $\bar{\omega}''$ (див. пара обертань), таких, що $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$, $\bar{\omega}'' = -\bar{\omega}$. Плече пари AP визначимо із рівності $v = \omega' \cdot AP$, звідки, враховуючи, що $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$, отримуємо:

$$AP = \frac{v}{\omega}. \quad (2.)$$

При додаванні векторів $\bar{\omega}$ і $\bar{\omega}'$ отримуємо нуль, а тому підсумковий рух можна розглядати, як миттєве обертання навколо осі Pp з кутовою швидкістю $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$. Легко побачити, що точка P для тіла S є миттєвим центром швидкостей ($v_P = 0$). Тут можна ще раз пересвідчитись, що поворот тіла навколо осей Aa і Pp відбувається з однією і тією ж кутовою швидкістю $\bar{\omega}$, тобто обертальна частина руху не залежить від зміни місця розташування полюса.

4.4.2. Гвинтовий рух

В даному випадку ($\bar{v} // \bar{\omega}$), тобто, розглянемо складний рух тіла: обертальний навколо осі Aa з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ і поступальний – зі швидкістю \bar{v} , вектор якої спрямований паралельно осі Aa (рис. 2.60). Такий рух називається гвинтовим.

Вісь Aa називають віссю гвинта. Якщо вектори \bar{v} і $\bar{\omega}$ спрямовані в один бік, то гвинт буде правим, коли в різні – лівим.

Відстань, на яку переміщується будь-яка точка осі за час одного оберту, називається кроком h гвинта. Якщо величини \bar{v} і $\bar{\omega}$ є сталими величинами, то і крок гвинта буде сталим. Позначаючи час одного оберту через T , отримуємо:

$$v \cdot T = h, \quad \omega \cdot T = 2\pi, \quad h = 2\pi \frac{v}{\omega}.$$

При сталому кроці будь-яка точка M тіла, яка не співпадає з віссю гвинта Aa , описує гвинтову лінію. Швидкість точки M , яка розташована на відстані \bar{r} від осі гвинта Aa , геометрично складається із поступальної швидкості \bar{v} і перпендикулярної до неї швидкості $\bar{\omega}\bar{r}$, яку точка M отримує від обертального руху:

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

Напрямок вектора швидкості \bar{v}_M – по дотичній τ до гвинтової лінії. Якщо циліндричну поверхню, по якій рухається точка M , перерізати вздовж твірної і розвернути, то гвинтові лінії перетворяться у прямі, які нахилені до основи циліндра під кутом α , величина якого визначається через тангенсом кута:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}.$$

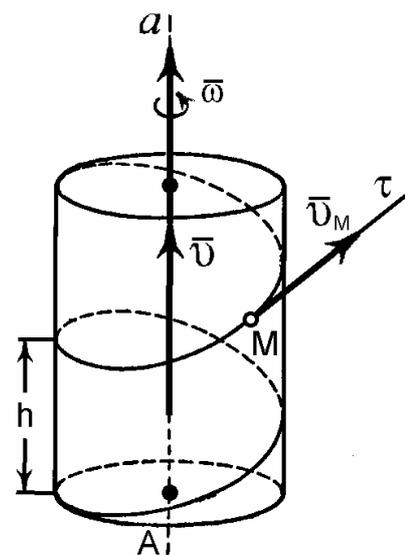


Рис. 2.60.

4.4.3. Вектор швидкості поступального руху утворює довільний кут з віссю обертання

Складний рух у цьому випадку є рухом вільного твердого тіла.

Розкладемо вектор \bar{v} (рис. 2.61, а) на складові: \bar{v}' , яка спрямована вздовж вектора $\bar{\omega}$ і дорівнює:

$$v' = v \cos \alpha,$$

і \bar{v}'' , яка перпендикулярна до вектора $\bar{\omega}$ і дорівнює:

$$v'' = v \sin \alpha.$$

Швидкість \bar{v}'' можна замінити парою кутових швидкостей $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ і $\bar{\omega}'' = -\bar{\omega}$. Тоді вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\omega}'$ можна відкинути. Відстань AC можна знайти за формулою:

$$AC = \frac{v''}{\omega} = \frac{v \cdot \sin \alpha}{\omega}.$$

Тоді у тіла залишається обертання з кутовою швидкістю $\bar{\omega}'$ і поступальний рух зі швидкістю \bar{v}' . Таким чином, розподіл швидкостей точок тіла в даний момент часу буде таким, як при гвинтовому русі навколо осі Cc з кутовою швидкістю $\omega' = \omega$ і поступальною швидкістю $v' = v \cdot \cos \alpha$.

За допомогою наведених операцій (рис. 2.61, б) зроблено перехід від полюса A до полюса C . Результат показує, що і в загальному випадку руху кутова швидкість тіла при заміні полюса не змінюється ($\bar{\omega}' = \bar{\omega}$), а змінюється тільки поступальна швидкість ($\bar{v}' \neq \bar{v}$).

Оскільки при русі вільного тіла величини \bar{v} , $\bar{\omega}$ і α весь час змінюються, то буде невпинно змінюватись і положення осі Cc , яка буде миттєвою гвинтовою віссю. Таким чином, рух вільного твердого тіла можна уявити, як серію миттєвих гвинтових рухів навколо гвинтових осей, положення яких невпинно змінюється у просторі.

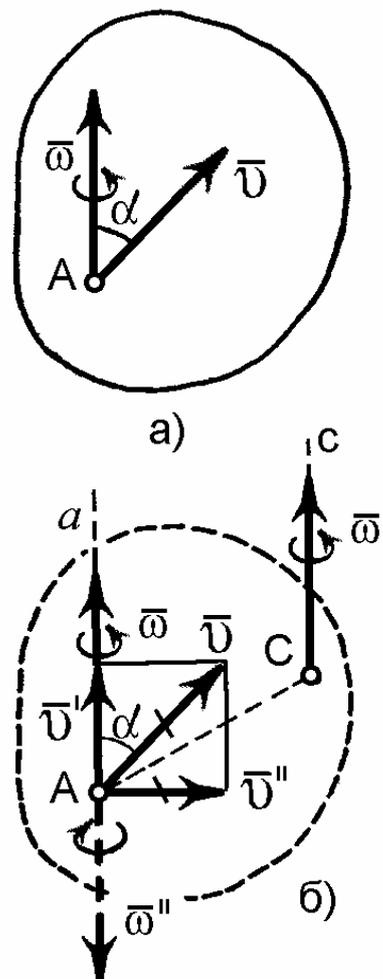


Рис. 2.61

Питання для самоконтролю

1. Наведіть приклади з техніки про складний руху тіла.
2. Який результат отримаємо при додаванні обертань тіла навколо паралельних осей?
3. Що таке пара обертань?
4. Чому дорівнює вектор підсумкового обертання, якщо вісі відносного і переносного обертань перетинаються в одній точці?
5. Де прикладений вектор цього підсумкового обертання?
6. Як додати поступальний і обертальний рухи, якщо вектор швидкості поступального руху перпендикулярний до осі обертання?
7. . Що таке гвинтовий рух?
8. Як додати поступальний і обертальний рухи, якщо вектор швидкості поступального руху утворює довільний кут з віссю обертання?

5. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ ІЗ КІНЕМАТИКИ

Короткі теоретичні відомості, методика і алгоритми розв'язування задач

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух тіл з геометричної точки зору, тобто без урахування їх мас і діючих сил.

Рух тіл у кінематиці розглядають по відношенню до деякої системи координат, що пов'язана з іншим тілом, тілом відлік у, на якому встановлений годинник.

Основна задача кінематики полягає в тому, що за рівняннями, які визначають закон руху даного тіла, треба знайти всі кінематичні характеристики руху тіла (траєкторії різних точок, їх швидкості та прискорення, кутові швидкості і прискорення тіл).

Кінематика ділиться на *кінематику точки* і *кінематику твердого тіла*.

У навчальному посібнику розглядаються *наступні теми кінематики*:

- Кінематика точки.
- Поступальний рух тіла.
- Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі.
- Плоский рух тіла.
- Складний рух точки.

На вивчення цих тем відводиться вісім занять.

5.1. Тема 1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

ЗАНЯТТЯ №1

Координатний спосіб визначення руху

Зміст

- 5.1.1. Траєкторія і рівняння руху точки.
- 5.1.2. Визначення швидкості і прискорення точки при координатному способі визначення її руху.
- 5.1.3. Порядок розв'язування задач з кінематики точки.
- 5.1.4. Контрольні запитання.
- 5.1.5. Приклади розв'язання задач.

5.1.1. Траєкторія і рівняння руху точки

Визначити рух точки – вказати правило, за яким в будь-який момент часу t можна знайти положення точки у просторі.

Надається три способи визначення руху точки: *координатний*; *векторний*; *натуральний*.

Координатний спосіб визначення руху точки

Положення точки M у просторі при координатному способі визначення руху задається трьома координатами: x , y , z (рис.1.1).

Якщо точка рухається, то ці координати з часом безперервно змінюються.

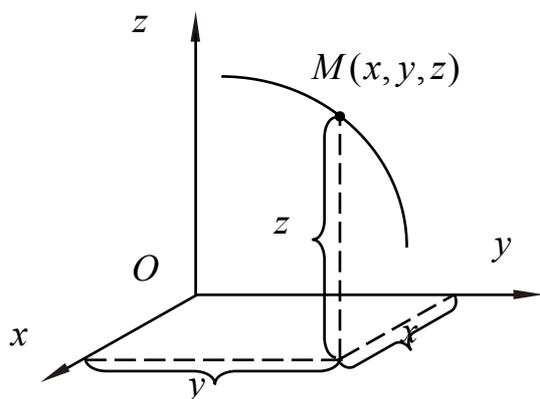


Рис. 1.1.

Таким чином, для визначення руху точки достатньо задати функціональні залежності координат від параметру часу:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) називаються *рівняннями руху* точки в прямокутних координатах.

Рух точки на *площині* Oxy визначається двома рівняннями руху:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (1.2)$$

Для визначення *прямолінійного руху* точки вздовж осі Ox , достатньо одного рівняння:

$$x = f_1(t). \quad (1.3)$$

Визначення траєкторії точки при координатному способі

Траєкторією точки називають геометричне місце точок, через які послідовно вона проходить під час руху в даній системі відліку.

Траєкторія – одна із основних характеристик, яка дає уявлення про рух у цілому. Першою ознакою, за якою розподіляються різні види рухів, є траєкторія.

Визначення траєкторії є однією із важливих задач механіки.

В залежності від форми траєкторії рух відносять до *прямолінійного* або *криволінійного руху*.

Рівняння руху точки (1.1) ÷ (1.3) можна розглядати як рівняння траєкторії в параметричній формі.

Для того, щоб отримати рівняння траєкторії в звичайній формі, треба з рівнянь руху виключити час t . Так, виключивши t з рівнянь руху (1.2), дістанемо одне рівняння виду:

$$F(x, y) = 0, \quad (1.4)$$

яке є рівнянням лінії на площині Oxy .

Якщо виключити час t з рівнянь руху (1.1), то дістанемо рівняння просторової кривої, як лінії перетину цих поверхонь:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \quad (1.5)$$

5.1.2. Визначення швидкості і прискорення точки при координатному способі

Швидкість точки – векторна величина, яка характеризує зміну положення точки у просторі з часом.

Прискорення точки – векторна величина, яка характеризує зміну вектора швидкості з часом.

У випадку **координатного способу** визначення руху точки за відомими залежностями для координат точки (1.1) спочатку визначають проекції вектора швидкості на координатні осі, як похідні за часом від координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt}, \quad (1.6)$$

а потім модуль швидкості точки:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (1.7)$$

Напрямок вектора швидкості \vec{V} визначається через функції напрямних косинусів кутів з відповідними осями координат:

$$\cos(\hat{x}, \vec{V}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\hat{y}, \vec{V}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(\hat{z}, \vec{V}) = \frac{V_z}{V}. \quad (1.8)$$

Аналогічно, за похідними від проекцій швидкостей визначають проекції вектора прискорення на координатні осі:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \\ a_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Модуль вектора прискорення визначається за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.10)$$

Напрямок вектора прискорення \bar{a} також визначається через функції напрямних косинусів кутів з відповідними осями координат:

$$\cos(\hat{x}, \bar{a}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\hat{y}, \bar{a}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\hat{z}, \bar{a}) = \frac{a_z}{a}. \quad (1.11)$$

5.1.3. Порядок розв'язування задач з кінематики точки

Розв'язування задач на визначення закону руху точки та рівняння її траєкторії виконується в такій послідовності:

1. Обирається нерухома система координат, початок якої визначають, виходячи з умов задачі.
2. За умовами задачі в обраній системі координат складають рівняння руху точки, тобто знаходять залежність координат точки від часу.
3. Із складених рівнянь руху точки можна визначити її положення в будь-який момент часу, встановити напрям її руху, знайти траєкторію, тощо.

Якщо за умовою задачі треба визначити швидкість і прискорення точки, то краще дотримуватись такої послідовності:

1. Обрати систему координат.
2. В обраній системі координат скласти рівняння руху (іноді вони задані в умовах задачі).
3. За рівняннями руху точки визначити проекції швидкості на осі системи координат, величину швидкості та її напрям.
4. Визначити проекції прискорення точки на осі системи координат, величину прискорення та його напрям.

5.1.4. Контрольні запитання

4. Що називається траєкторією?
5. Як за рівняннями руху точки в координатній формі визначити її траєкторію?
6. Що називається швидкістю та прискоренням точки?
7. Як визначити проекції векторів швидкості та прискорення точки на нерухомі осі прямокутної системи координат?
8. Як визначити напрями векторів швидкості та прискорення при координатному способі завдання руху?

5.1.5. Приклади розв'язування задач

Задача № 1

Закон руху точки на площині визначається рівняннями:

$$x = 5 \sin 10t; \quad y = 3 \cos 10t.$$

Визначити рівняння траєкторії і напрям руху точки.

Розв'язання. Рівняння траєкторії задано в параметричній формі, координати x і y залежать від параметра часу t .

Щоб отримати рівняння траєкторії в координатній формі, тобто у вигляді залежності $y = f(x)$, необхідно виключити з обох рівнянь руху час t .

Піднесемо до квадрату ліві та праві частини рівнянь руху:

$$x^2 = 5^2 \sin^2 10t; \quad y^2 = 3^2 \cos^2 10t,$$

або

$$\frac{x^2}{5^2} = \sin^2 10t, \quad \frac{y^2}{3^2} = \cos^2 10t.$$

Додамо ці рівняння:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \sin^2 10t + \cos^2 10t.$$

Оскільки $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

Рівнянням траєкторії точки є еліпс з центром в початку системи координат, велика піввісь якого дорівнює 5-ти одиницям довжини (вздовж осі Ox), а мала (вздовж осі Oy) – 3-ом одиницям довжини (рис.1.2).

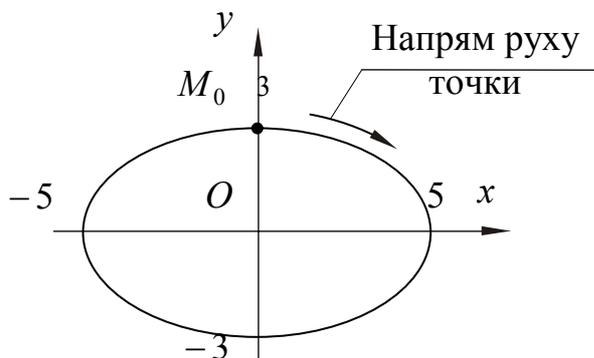


Рис. 1.2.

В початковий момент часу $t = 0$ точка знаходиться в положенні M_0 з координатами:

$$x_0 = 5 \sin(10 \cdot 0) = 0;$$

$$y_0 = 3 \cos(10 \cdot 0) = 3.$$

В початковий момент руху (при зростанні часу t) координата x почне збільшуватися, а координата y – зменшуватися. Таким чином, точка буде рухатися за ходом годинникової стрілки.

Відповідь: а) рівняння траєкторії $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$; б) точка рухається за ходом годинникової стрілки.

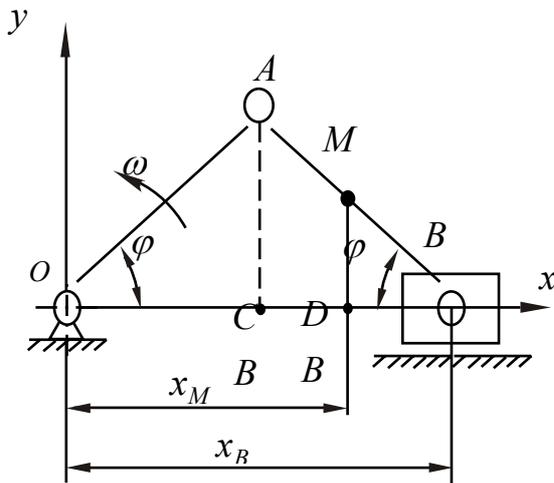
Задача №2

Рис. 1.3.

У механізмі (рис.1.3) кривошип OA обертається навколо нерухомого шарніра O , а повзун B рухається зворотнопоступально вздовж осі Ox . Точка A тіла шатуна AB рухається за траєкторією точки A кривошипа, а точка B – за траєкторією повзуна.

Визначити рівняння руху і траєкторію середньої точки M шатуна та рівняння руху повзуна B , якщо в початковий момент повзун знаходився в крайньому правому положенні; а кривошип OA обертався зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$ і $OA = AB = 0,8 \text{ м}$.

Розв'язання. Для визначення траєкторії точки M зобразимо механізм у довільному положенні та складемо рівняння її руху в координатній формі.

З рисунка 1.3 можна побачити, що:

З рисунка 1.3 можна побачити, що:

$$x_M = OC + CD; \quad y_M = MD.$$

Оскільки трикутник OAB рівнобедрений ($OA=AB$), то кути ABC і AOC рівні між собою і дорівнюють $\varphi = \omega \cdot t$.

З трикутника OAC знайдемо відстань OC :

$$OC = OA \cos \varphi,$$

а з трикутника MBD відстані CD і MD :

$$CD = DB = MB \cos \varphi = \frac{AB}{2} \cos \varphi;$$

$$MD = MB \sin \varphi = \frac{AB}{2} \sin \varphi$$

Тоді:

$$x_M = OA \cos \varphi + \frac{AB}{2} \cos \varphi; \quad y_M = \frac{AB}{2} \sin \varphi$$

Якщо урахувати числові дані, то рівняння руху точки M набудуть вигляду:

$$x_M = 0,8 \cos 10t + 0,4 \cos 10t = 1,2 \cos 10t;$$

$$y_M = 0,4 \sin 10t.$$

Для знаходження траєкторії точки M піднесемо рівняння руху до квадрату і додамо:

$$\frac{x_M}{1,2} = \cos 10t ; \quad \frac{y_M}{0,4} = \sin 10t ;$$

$$\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = \cos^2 10t + \sin^2 10t.$$

Враховуючи, що $\cos^2 10t + \sin^2 10t = 1$, дістанемо вираз для рівняння траєкторії:

$$\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = 1.$$

Таким чином, траєкторією точки буде еліпс, одна піввісь якого вздовж осі Ox , складає $1,2$ м, а друга вздовж осі Oy , – $0,4$ м.

Визначимо координати точки B :

$$x_B = OC + CB = OA \cos \varphi + AB \cos \varphi ;$$

$$x_B = 0,8 \cos 10t + 0,8 \cos 10t = 1,6 \cos 10t.$$

Таким чином, рівняння руху повзуна B буде мати вигляд:

$$x_B = 1,6 \cos 10t.$$

Відповідь: $\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = 1; \quad x_B = 1,6 \cos 10t.$

Задача №3

Закон руху точки M задано рівняннями:

$$x = 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}, \quad y = 10 \sin 2\pi \frac{t}{5},$$

де x, y – в метрах; t – в секундах.

Визначити траєкторію точки, величину і напрям швидкості та величину і напрям прискорення в момент часу $t = \frac{5}{6}$ с.

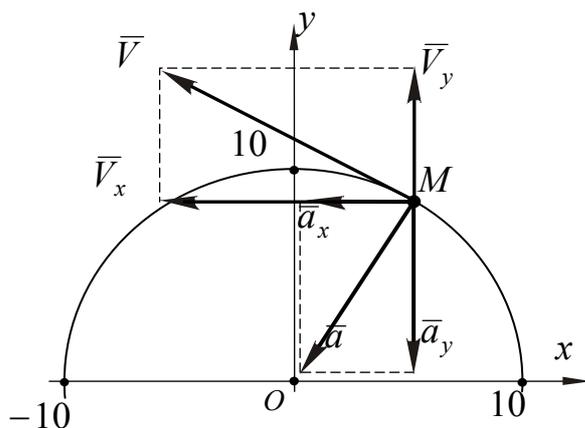


Рис. 1.4.

Розв'язання. Для визначення траєкторії точки M піднесемо до квадрату ліві і праві частини рівнянь руху та додамо їх:

$$x^2 = 10^2 \cos^2 2\pi \frac{t}{5}; \quad y^2 = 10^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{5};$$

$$x^2 + y^2 = 10^2 \left(\cos^2 2\pi \frac{t}{5} + \sin^2 2\pi \frac{t}{5} \right) = 10^2.$$

Таким чином, рівняння траєкторії буде мати вигляд:

$$x^2 + y^2 = 10^2.$$

Отже, траєкторією точки M є коло радіусом 10 м з центром у початку системи координат.

Проекції вектора швидкості на осі координат дорівнюють:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(10 \cos 2\pi \frac{t}{5} \right) = -10 \frac{2\pi}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5} = -4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5},$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(10 \sin 2\pi \frac{t}{5} \right) = 10 \frac{2\pi}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5} = 4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5}.$$

Модуль вектора швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(-4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5} \right)^2 + \left(4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5} \right)^2} = 4\pi \frac{m}{c}.$$

Проекції вектора прискорення на осі координат дорівнюють:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5} \right) = -\frac{8\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5};$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5} \right) = -\frac{8\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5}.$$

Модуль вектора прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(-8 \frac{\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5} \right)^2 + \left(-8 \frac{\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5} \right)^2} = 1,6\pi^2 \frac{m}{c^2}.$$

З отриманих залежностей випливає, що модулі швидкості та прискорення не залежать від часу, а їх проекції на осі є функціями часу.

Визначимо для моменту часу $t = \frac{5}{6} c$ положення точки на траєкторії та величини проекцій швидкості і прискорення.

При $t = \frac{5}{6} c$ кут під знаками косинуса і синуса в рівняннях проекцій дорівнює:

$$2\pi \frac{t}{5} = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ.$$

З урахуванням знайденого кута дістанемо:

$$x = 10 \cos 60^\circ = 5 \text{ м};$$

$$y = 10 \sin 60^\circ = 8,66 \text{ м};$$

$$V_x = -4\pi \sin 60^\circ = -10,9 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_y = 4\pi \cos 60^\circ = 6,28 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$a_x = -\frac{8\pi^2}{5} \cos 60^\circ = -7,9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_y = -\frac{8\pi^2}{5} \sin 60^\circ = -13,7 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

На рис.1.4 показано траєкторію точки, положення точки в момент часу $t = 5/6 \text{ с}$ та складові векторів швидкості і прискорення.

Складові вектори \vec{V}_x , \vec{V}_y , \vec{a}_x та \vec{a}_y напрямлені проти напрямку відповідних осей, оскільки їх проекції на ці осі від'ємні.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 10^2$; $V = 4\pi \text{ м/с}$; $a = 1,6\pi^2 \text{ м/с}^2$.

Задача №4

Закон руху точки задано рівняннями:

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}); \quad y = a(e^{kt} - e^{-kt}),$$

де a і k – сталі величини.

Визначити рівняння траєкторії, швидкість та прискорення точки як функцію радіуса-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Рівняння траєкторії в координатній формі знайдемо, виключивши час з рівнянь руху точки.

Спочатку рівняння руху перетворимо:

$$\frac{x}{a} = e^{kt} + e^{-kt}; \quad \frac{y}{a} = e^{kt} - e^{-kt}.$$

Піднесемо записані рівняння до квадрату і віднімемо від першого друге:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = e^{2kt} + 2e^{kt} \cdot e^{-kt} + e^{-2kt} = 2e^{2kt} + 2;$$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = e^{2kt} - 2e^{kt} \cdot e^{-kt} + e^{-2kt} = 2e^{2kt} - 2;$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 2e^{2kt} + 2 - 2e^{2kt} + 2 = 4.$$

Таким чином, рівняння траєкторії точки буде мати вигляд:

$$x^2 - y^2 = 4a^2.$$

Визначимо проекції вектора швидкості на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[a(e^{kt} + e^{-kt}) \right] = a(ke^{kt} - ke^{-kt}) = ka(e^{kt} - e^{-kt});$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[a(e^{kt} - e^{-kt}) \right] = a(ke^{kt} + ke^{-kt}) = ka(e^{kt} + e^{-kt}).$$

Оскільки за умовою задачі:

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}); \quad y = a(e^{kt} - e^{-kt}),$$

то:

$$V_x = ky; \quad V_y = kx.$$

Тоді:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{k^2 y^2 + k^2 x^2} = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Визначимо проекції вектора прискорення на координатні осі:

$$a_x = Vx = ka(e^{kt} - e^{-kt})' = k^2 a(e^{kt} + e^{-kt}) = k^2 x;$$

$$a_y = Vy = ka(e^{kt} - e^{-kt})' = k^2 a(e^{kt} + e^{-kt}) = k^2 y;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{k^4 x^2 + k^4 y^2} = k^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Враховуючи, що $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то:

$$V = k \cdot r; \quad a = k^2 \cdot r.$$

Відповідь: $x^2 - y^2 = 4a^2; \quad V = k \cdot r; \quad a = k^2 \cdot r.$

Задачі, що рекомендуються для самостійної роботи: 11.2; 11.5; 12.13 [2].

5.2. Тема 1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ (продовження)

ЗАНЯТТЯ №2

Натуральний спосіб визначення руху точки

Зміст

- 5.2.1. Натуральний спосіб визначення руху точки .
- 5.2.2. Визначення швидкості і прискорення точки при натуральному способі.
- 5.2.3. Контрольні запитання.
- 5.2.4. 5.2.4. Приклади розв'язування задач.

5.2.1. Натуральний спосіб визначення руху точки

Натуральний спосіб визначення руху точки полягає в наступному.

1. Будь яким способом (рівнянням, графічно, вказівкою) задається траєкторія точки M_0B (рис.1.5) .

2. На траєкторії обирається деяка точка M_0 як початок відліку дуги і додатний напрям уздовж траєкторії (на рис. 1.5 зліва направо).

3. Положення точки M на траєкторії однозначно визначається довжиною дуги або дуговою координатою $S = M_0M$ з відповідним знаком. При русі точки по траєкторії кожному моменту часу t відповідає певне значення дугової координати S .

Таким чином, для визначення положення точки на траєкторії досить задати залежність:

$$S = f(t), \quad (1.12)$$

яка називається *рівнянням руху точки в натуральній формі*.

Натуральним способом визначення руху точки зручно користуватися в тому випадку, якщо відома траєкторія точки.

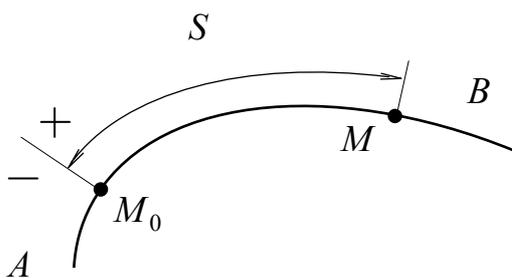


Рис. 1.5.

5.2.2. Визначення швидкості і прискорення точки при натуральному способі завдання її руху

У випадку *натурального способу* визначення руху точки за відомим рівнянням руху (1.12) модуль вектора швидкості знаходять, як похідну за часом від дугової координати або рівняння руху точки в натуральній формі (закон руху):

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (1.13)$$

Спрямований вектор швидкості – за дотичною до траєкторії точки в бік відліку координати S (рис.1.6), якщо $\frac{dS}{dt} > 0$, і в протилежний бік, якщо $\frac{dS}{dt} < 0$.

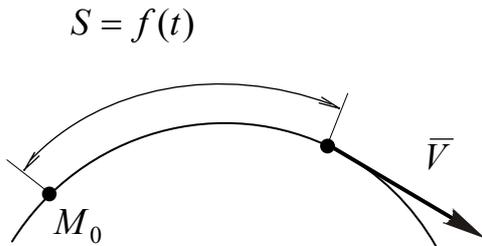


Рис. 1.6.

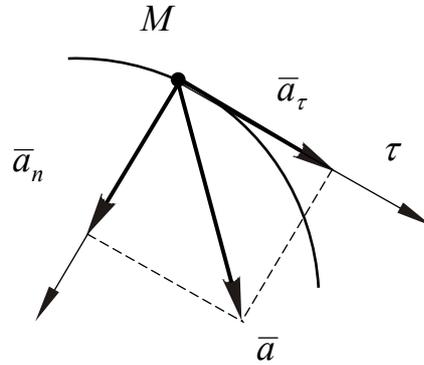


Рис. 1.7.

При визначенні прискорення з точкою M пов'язують рухому систему координат $M\tau n$ (рис.1.7): тангенціальну вісь $M\tau$ напрямляють за дотичною до траєкторії в бік швидкості точки; нормальну вісь Mn – за внутрішньою нормаллю до траєкторії (тобто, в бік центра її кривизни).

Прискорення \vec{a} розкладають на складові \vec{a}_τ і \vec{a}_n за осями обраної системи координат, які відповідно називають **дотичною** (тангенціальною) і **нормальною** (доцентровою) складовими прискорення.

За модулем ці прискорення, відповідно, дорівнюють:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (1.14)$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії.

Нормальне прискорення завжди спрямоване до центра кривизни (за напрямом осі Mn), а дотичне прискорення – за віссю $M\tau$, якщо $a_\tau > 0$ і в протилежний бік, якщо $a_\tau < 0$.

Нормальне прискорення характеризує зміну напрямку швидкості з плином часу.

Якщо траєкторією точки є пряма лінія, тобто $\rho = \infty$, то $a_n = 0$ і вектор швидкості не змінює свого напрямку.

Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною з плином часу.

Якщо точка рухається рівномірно ($V = V_0 = const$), то $a_\tau = 0$, а шлях, що пройдений точкою, визначають за формулою:

$$S = S_0 + V_0 t.$$

У випадку рівномірно прискореного руху точки ($a_\tau = \text{const}$) швидкість точки і шлях, який пройдено нею, визначають за формулами:

$$V = V_0 + a_\tau t; \quad S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2.$$

В наведених формулах V_0 і S_0 – початкові значення швидкості і пройденого шляху, а самі формули можна дістати інтегруванням залежності для a_τ (1.14).

5.2.3. Контрольні запитання

1. У чому полягає натуральний спосіб визначення руху точки?
2. Як визначити швидкість точки за модулем і за напрямом?
3. Що характеризують дотичне і нормальне прискорення точки?
4. Як визначити величину і напрям дотичного прискорення?
5. Як визначити величину і напрям нормального прискорення?
6. При якому русі точки дорівнює нулю дотичне прискорення і при якому – нормальне прискорення?

5.2.4. Приклади розв'язування задач

Задача №1

Точка рухається по колу радіусом $R = 0,2 \text{ м}$. Закон її руху вздовж траєкторії:

$$S = 0,2 \sin \pi t,$$

де t – в секундах; S – в метрах.

Визначити величину та напрям швидкості, дотичне і нормальне прискорення точки в момент часу $t_1 = 5 \text{ с}$.

Розв'язання. Для визначення модуля швидкості знайдемо похідну від дугової координати S за часом:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(0,2 \sin \pi t) = 0,2\pi \cos \pi t.$$

В момент часу $t = t_1$:

$$V_1 = 0,2\pi \cos \pi t_1 = 0,2\pi \cos 5\pi = -0,2\pi \text{ м/с}.$$

Швидкість точки напрямлена за дотичною до кола в бік, який протилежний додатному напрямку відліку дуги S .

Визначимо величину дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(0,2\pi \cos \pi t) = -0,2\pi^2 \sin \pi t.$$

В момент часу $t = t_1$:

$$a_{\tau_1} = -0,2\pi^2 \cos \pi t_1 = -0,2\pi^2 \sin 5\pi = 0.$$

Обчислимо величину нормального прискорення в момент часу $t = t_1$:

$$a_{n_1} = \frac{V_1^2}{\rho} = \frac{V_1^2}{R} = \frac{(-0,2\pi)^2}{0,2} = 0,2\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $V_1 = -0,2\pi \text{ м/с}$; $a_1 = a_{n_1} = 0,2\pi^2 \text{ м/с}^2$.

Задача №2

Точка рухається вздовж кола радіусом $R = 4 \text{ м}$. Шлях в метрах, який проходить точка по траєкторії, в будь який момент часу визначається рівнянням (законом руху вздовж траєкторії):

$$S = 4,5t^3.$$

Визначити величину прискорення точки і кут α , який утворюють поміж собою вектори швидкості і прискорення в момент часу, коли величина швидкості дорівнює 6 м/с .

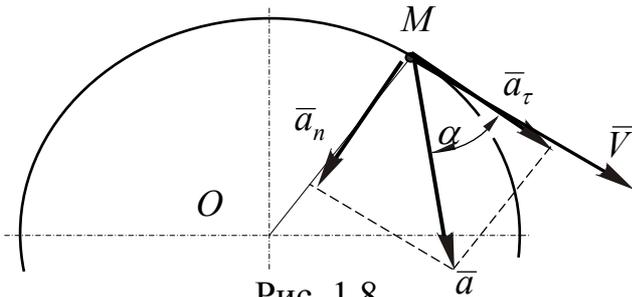


Рис. 1.8.

Розв'язання. Зобразимо траєкторію з точкою M у довільному положенні (рис.1.8). Швидкість \vec{V} спрямуємо за дотичною до кола, нормальне прискорення \vec{a}_n – до центра кола, а дотичне \vec{a}_τ – за вектором швидкості, приймаючи, що воно додатне.

Кут α між векторами швидкості \vec{V} і повного прискорення \vec{a} буде дорівнювати:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Знайдемо величину нормального прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{6^2}{4} = 9 \text{ м/с}^2.$$

Функціональні залежності для швидкості та дотичного прискорення знайдемо за рівнянням руху точки, як відповідні похідні:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(4,5t^3) = 13,5t^2;$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(13,5t^2) = 27t.$$

Оскільки для обчислення дотичного прискорення треба знати час, коли швидкість буде дорівнювати 6 м/с , то з першого рівняння дістанемо:

$$t = \sqrt{\frac{V}{13,5}} = \sqrt{\frac{6}{13,5}} = \frac{2}{3} \text{ с.}$$

Величина дотичного прискорення:

$$a_\tau = 27t = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{18} = 0,5; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(0,5) = 26^\circ 30'.$$

Повне прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{9^2 + 18^2} = 9\sqrt{5} \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $a = 9\sqrt{5} \text{ м/с}^2$; $\alpha = 26^\circ 30'$.

Задача №3

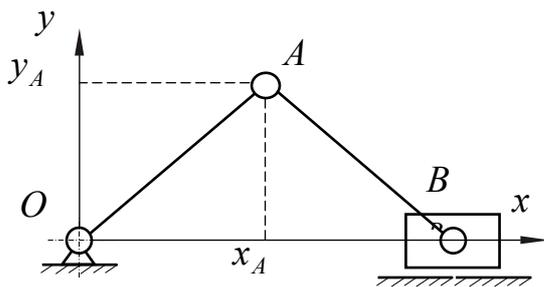


Рис. 1.9.

Рівняння руху пальця шарніра A кривошипно-повзунного механізму (рис.1.9) під час його пуску мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_A &= 0,75 \cos 4t^2; \\ y_A &= 0,75 \sin 4t^2, \end{aligned} \quad (1)$$

де x_A, y_A – в метрах;
 t – в секундах.

Визначити швидкість, дотичне і нормальне прискорення пальця.

Розв'язання. Рівняння для визначення дотичного і нормального прискорень мають вигляд:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Таким чином, для визначення a_τ і a_n необхідно знати радіус кривизни траєкторії ρ і залежність швидкості V від часу t .

Для обчислення V знайдемо проекції швидкості на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx_A}{dt} = \frac{d}{dt}(0,75 \cos 4t^2) = -4 \cdot 2 \cdot 0,75t \sin 4t^2 = -6t \sin 4t^2;$$

$$V_y = \frac{dy_A}{dt} = \frac{d}{dt}(0,75 \sin 4t^2) = 4 \cdot 2 \cdot 0,75t \cos 4t^2 = 6t \cos 4t^2.$$

Швидкість пальця кривошипа буде дорівнювати:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-6t \sin 4t^2)^2 + (6t \cos 4t^2)^2} = 6t.$$

Обчислимо величину дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(6t) = 6 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення радіуса кривизни траєкторії знайдемо її рівняння. Щоб виключити параметр t з рівнянь руху (1), піднесемо до квадрату праві і ліві частини рівнянь, а потім їх додамо:

$$\begin{aligned} x_A^2 &= 0,75^2 \cos^2 4t^2; & y_A^2 &= 0,75^2 \sin^2 4t^2; \\ x_A^2 + y_A^2 &= 0,75^2 (\cos^2 4t^2 + \sin^2 4t^2); \\ x_A^2 + y_A^2 &= 0,75^2. \end{aligned}$$

Таким чином, траєкторією пальця буде коло радіусом $\rho = 0,75 \text{ м}$.

Величина нормального прискорення a_n дорівнюватиме:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(6t)^2}{0,75} = 48t^2.$$

Відповідь: $V = 6t$; $a_\tau = 6 \text{ м/с}^2$; $a_n = 48t^2$.

Задача №4

Рівняння руху матеріальної точки мають вигляд:

$$x = \alpha t; \quad y = \beta t - \frac{gt^2}{2},$$

де α , β , g – сталі величини.

Визначити дотичне і нормальне прискорення точки.

Розв'язання. Дотичне прискорення точки визначається за формулою:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

При координатному способі визначення руху швидкість точки через проекції дорівнює:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Підставимо вираз для V в рівняння для a_τ :

$$a_\tau = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2} \right) = \frac{2V_x \frac{dV_x}{dt} + 2V_y \frac{dV_y}{dt}}{2\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V},$$

де V_x, V_y – проекції швидкості на координатні осі;

a_x, a_y – проекції прискорення на координатні осі.

Проекції швидкості та прискорення на координатні осі визначимо за формулами для координатного способу означення руху:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha t) = \alpha;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\beta t - g \frac{t^2}{2} \right) = \beta - gt;$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2};$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha) = 0;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta - gt) = -g;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g.$$

Тоді дотичне прискорення точки буде дорівнювати:

$$a_\tau = \frac{\alpha \cdot 0 + (\beta - gt) \cdot (-g)}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2}} = \frac{-g(\beta - gt)}{V}.$$

Для визначення нормального прискорення скористаємося повним прискоренням точки, яке вже було знайдене, виходячи з формул координатного способу означення руху.

Оскільки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g,$$

то:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^2(\beta - gt)^2}{V^2}} = \frac{g}{V} \sqrt{V^2 - (\beta - gt)^2}.$$

Підставивши під корінь вираз для V , дістанемо:

$$a_n = \frac{g}{V} \sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2 - (\beta - gt)^2} = \frac{g\alpha}{V}.$$

Відповідь: $a_\tau = -\frac{g(\beta - gt)}{V}, a_n = \frac{g\alpha}{V}.$

Задача №5.

Точка M рухається по колу радіусом $R = 1/3$ м таким чином, що повне прискорення увесь час пропорційне квадрату швидкості і напрямлене під тупим кутом до неї. Рух починається з початковою швидкістю $V_0 = 2$ м/с і початковим прискоренням $a_0 = 20$ м/с².

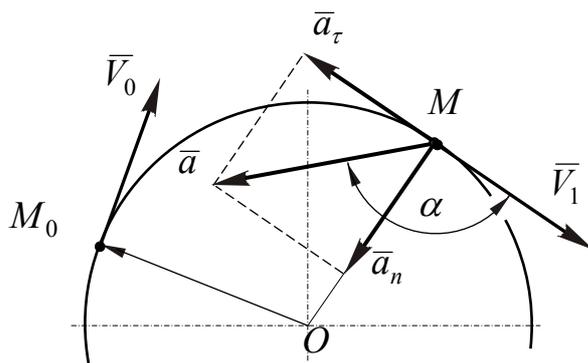


Рис. 1.10.

Визначити, за який час швидкість точки зменшиться вдвічі, і який шлях при цьому вона пройде.

Розв'язання. Зобразимо траєкторію з точкою M в довільному положенні (рис.1.10).

Швидкість \vec{V} напрямимо за дотичною до траєкторії, а повне прискорення \vec{a} під кутом $\alpha > 90^\circ$ до швидкості.

Повне прискорення \vec{a} розкладемо на нормальне \vec{a}_n і дотичне \vec{a}_τ за правилом паралелограма.

За умовою задачі:

$$a = kV^2,$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки ця рівність повинна виконуватися і в початковий момент часу $t_0 = 0$, то:

$$a_0 = kV_0^2.$$

Звідки:

$$k = \frac{a_0}{V_0^2} = \frac{20}{2^2} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, закон зміни повного прискорення точки під час руху буде мати вигляд:

$$a = 5V^2.$$

Визначимо функціональні залежності від швидкості для нормального і дотичного прискорень точки:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{1/3} = 3V^2;$$

$$a_{\tau} = \sqrt{a - a_n^2} = \sqrt{(5V^2)^2 - (3V^2)^2} = -4V^2.$$

В рівнянні для a_{τ} було взяте від'ємне значення кореня, оскільки повне прискорення утворює тупий кут з напрямом швидкості (рис.1.10), тобто дотичне прискорення буде спрямоване протилежно швидкості і рух точки буде сповільнений.

Для визначення часу руху та пройденого точкою шляху скористаємося залежністю для дотичного прискорення:

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = -4V^2.$$

Відокремимо змінні і проінтегруємо цей вираз:

$$-\int \frac{dV}{V^2} = \int 4dt; \quad \frac{1}{V} = 4t + C_1,$$

де C_1 – стала інтегрування.

Сталу інтегрування C_1 знайдемо з початкових умов, коли $t_0 = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с.

Звідки:

$$\frac{1}{V_0} = 4 \cdot 0 + C_1; \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

Функціональна залежність для швидкості буде мати вигляд:

$$\frac{1}{V} = 4t + \frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad V = \frac{2}{1+8t}.$$

За умовою задачі в кінцевий момент часу $t = t_1$ швидкість точки зменшиться вдвічі, тобто:

$$V = V_1 = 0,5V_0 = 1 \text{ м/с}.$$

Тоді час руху точки буде дорівнювати:

$$V_1 = \frac{2}{1+8t_1}; \Rightarrow 1 = \frac{2}{1+8t_1}; \Rightarrow t_1 = \frac{1}{8} \text{ с}.$$

Для визначення пройденого точкою шляху скористаємося рівняннями:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{2}{1+8t}.$$

Відокремимо змінні і проінтегруємо:

$$\int dS = \int \frac{2}{1+8t} dt \Rightarrow S = \frac{1}{4} \ln(1+8t) + C_2,$$

де C_2 – стала інтегрування.

Оскільки в початковий момент $t_0 = 0$, $S = 0$, то:

$$0 = \frac{1}{4} \ln(1 + 8 \cdot 0) + C_2; \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким чином, для шляху S дістанемо наступну залежність:

$$S = \frac{1}{4} \ln(1 + 8t).$$

За проміжок часу $t_1 = 1/8$ с шлях, пройдений точкою, буде складати:

$$S_1 = \frac{1}{4} \ln(1 + 8t_1) = \frac{1}{4} \ln(1 + 8 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \ln 2 = 0,16 \text{ м.}$$

Відповідь: $t_1 = 1/8$ с; $S = 0,16$ м.

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи:

12.17; 12.19; 12.20 [2].

5.3. Тема 2. ПОСТУПАЛЬНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ ВИДИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

ЗАНЯТТЯ №3

Зміст

- 2.1. Поступальний рух твердого тіла.
- 2.2. Обертальний рух твердого тіла.
- 2.3. Рівномірний та рівнозмінний обертальний рух тіла.
- 2.4. Швидкість та прискорення точок тіла, що обертається.
- 2.5. Контрольні запитання.
- 2.6. Приклади розв'язування задач.

5.3.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, що незмінно пов'язана з тілом, увесь час залишається паралельною своєму початковому положенню.

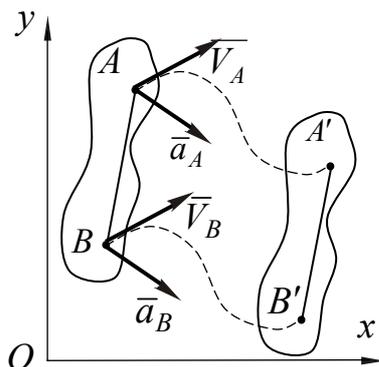


Рис. 2.1.

Для твердого тіла (рис.2.1) пряма AB , що з'єднує дві довільні його точки, під час поступального руху не змінюється ні за довжиною, ні за напрямом. Це означає, що при поступальному русі точки A та B тіла мають однакові траєкторії (при накладанні збігаються) і в кожний момент часу однаковими будуть їх швидкості і прискорення, тобто:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B; \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Таким чином, поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом будь-якої однієї точки цього тіла, тобто задача визначення кінематичних характеристик поступального руху твердого тіла зводиться до задачі кінематики точки.

5.3.2. Обертальний рух твердого тіла

Обертальним рухом називається такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки тіла залишаються нерухомими.

Якщо закріпити дві точки тіла O_1 і O_2 (рис.2.2), то будуть нерухомими всі точки прямої O_1O_2 , яка називається **віссю обертання**.

Траєкторіями усіх інших точок тіла, наприклад M , є кола з центрами на осі обертання.

Проведемо через вісь обертання zz (рис.2.3) дві площини: одну нерухому – A , а другу площину B жорстко пов'яжемо з тілом, що обертається. Двогранний кут φ між цими двома площинами однозначно визначає положення тіла, що обертається.

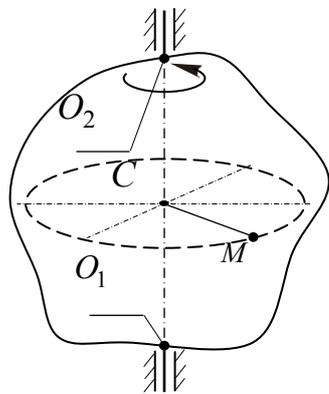


Рис. 2.2.

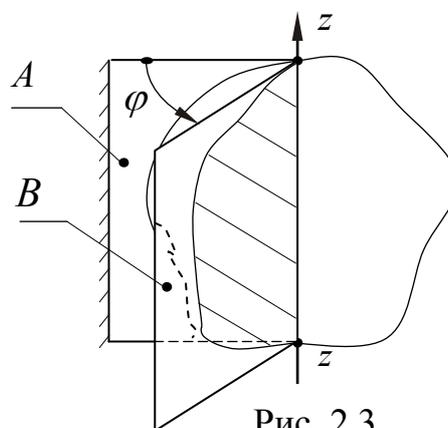


Рис. 2.3.

Для визначення знака кута φ на осі обертання zz обирають додатний напрям (на рис.2.3 – вгору). Кут вважається **додатним**, якщо з додатного напрямку осі обертання кут відносно нерухомої площини відкладений проти ходу годинникової стрілки і **від'ємним**, якщо за ходом стрілки.

Коли тіло обертається, кут φ безперервно змінюється з часом. Таким чином, для повної характеристики обертального руху треба задати рівняння виду:

$$\varphi = f(t). \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називається **рівнянням обертального руху тіла або законом обертання**.

Зміну кута повороту тіла з плином часу характеризує **кутова швидкість** ω .

Миттєва кутова швидкість ω є першою похідною від кута повороту за часом:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.2)$$

Одиницею вимірювання кутової швидкості є радіан за секунду і позначається як p/c , або c^{-1} , або $1/c$.

Спрямована кутова швидкість в бік миттєвого обертання тіла та $\omega > 0$, якщо збігається з напрямом відліку кута φ , і $\omega < 0$, якщо протилежна напрямку відліку φ .

В техніці кут повороту пропорційний кількості обертів N , що зробило тіло за деякий проміжок часу. В цьому випадку кут повороту тіла φ в радіанах можна знайти за залежністю:

$$\varphi = 2\pi N. \quad (2.3)$$

Кутову швидкість обертання тіла часто задають числом обертів за одну хвилину n (об/хв), це частота обертання.

Кутову швидкість ω в цьому випадку визначають за формулою:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \text{ p/c}, \quad (2.4)$$

де n – підставляють в об/хв.

Зміну кутової швидкості з плином часу характеризує **кутове прискорення** ε .

Миттєве кутове прискорення ε визначається як перша похідна від кутової швидкості за часом, або друга похідна від кута повороту тіла:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.5)$$

Одиницею вимірювання кутового прискорення є радіан, поділений на секунду в квадраті, і позначається p/c^2 , або $1/\text{c}^2$, або c^{-2} .

Спрямоване кутове прискорення – за напрямом кутової швидкості, якщо знаки ω та ε збігаються, і проти напрямку кутової швидкості, якщо знаки ω та ε різні.

5.3.3. Рівномірний та рівнозмінний обертальний рух тіла

У випадку **рівномірного** обертального руху тіла його кутова швидкість буде сталою ($\omega = \text{const}$), а кутове прискорення дорівнює нулю ($\varepsilon = 0$).

Кут повороту тіла в цьому випадку обчислюється за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t, \quad (2.6)$$

де φ_0 – початковий кут повороту тіла при $t = 0$.

У випадку **рівномірно - змінного** обертального руху тіла його кутове прискорення буде сталим ($\varepsilon = \text{const}$).

Кутова швидкість і кут повороту тіла в цьому випадку обчислюються за формулами:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad (2.7)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (2.8)$$

де φ_0 , ω_0 – відповідно кут повороту тіла і кутова швидкість в момент часу $t = 0$.

5.3.4. Швидкість та прискорення точок тіла, що обертається

Якщо для тіла, що обертається, відомі кутова швидкість ω і кутове прискорення ε , то можна знайти швидкість \vec{V} і прискорення \vec{a} будь якої його точки.

Швидкість точки тіла, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від точки до осі обертання:

$$V = \omega \cdot R. \quad (2.9)$$

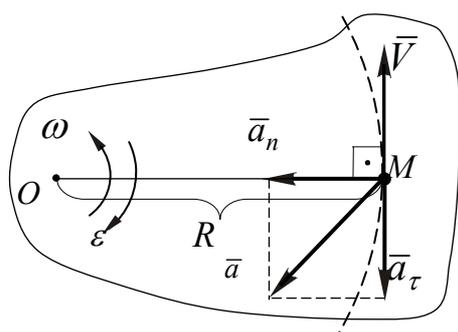


Рис. 2.4.

Вектор швидкості точки \vec{V} спрямований під прямим кутом до радіуса обертання OM (рис.2.4) в бік обертання тіла (в бік кутової швидкості ω).

Оскільки точка тіла, що обертається, рухається по криволінійній траєкторії (колу з радіусом кривизни R), то прискорення точки \vec{a} можна розкласти на дві складові: тангенціальну (дотичну) \vec{a}_τ і нормальну (доцентрову) \vec{a}_n (рис.2.4).

Підставивши в формули для \vec{a}_τ і \vec{a}_n (1.14) вираз для \vec{V} (2.9), дістанемо :

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R; \quad (2.10)$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (2.11)$$

Нормальне прискорення \vec{a}_n напрямлене від точки вздовж радіуса до центра обертання. Дотичне прискорення \vec{a}_τ напрямлене перпендикулярно до радіуса в бік кутового прискорення ε .

Повне ж прискорення точки дорівнює:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\varepsilon R)^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.12)$$

5.3.5. Контрольні запитання

1. Який рух твердого тіла називається поступальним?
2. Який рух твердого тіла називається обертальним навколо нерухомої осі?
3. За якими формулами визначаються модулі кутової швидкості і кутового прискорення?

4. Як спрямований вектор лінійної швидкості точки тіла, що обертається?

5. Як визначити величину та напрям дотичного і нормального прискорення точки тіла, що обертається?

5.3.6. Приклади розв'язування задач

Задача №1

Вал починає обертатися зі сталим прискоренням із стану спокою. За перші 5 секунд вал здійснює 12,5 обертів.

Визначити кутову швидкість вала в кінці проміжку часу, що розглядається.

Розв'язання. При рівноприскореному обертанні тіла кутова швидкість ω змінюється за законом:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t .$$

Оскільки за умовою задачі $\omega_0 = 0$, то

$$\omega = \varepsilon t .$$

Таким чином, для визначення кутової швидкості вала треба знайти його кутове прискорення ε .

Кут повороту тіла при рівноприскореному обертанні визначається за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

Оскільки $\varphi_0 = 0$ і $\omega_0 = 0$, то

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

Кут повороту вала за кількістю обертів N дорівнює:

$$\varphi = 2\pi N .$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{t^2} .$$

Підставивши вираз для ε в формулу для ω дістанемо:

$$\omega = \varepsilon t = \frac{4\pi N}{t^2} t = \frac{4\pi N}{t} .$$

З урахуванням числових даних:

$$\omega = \frac{4\pi \cdot 12,5}{5} = 10\pi \text{ рад/с} .$$

Відповідь: $\omega = 10\pi \text{ рад/с} .$

Задача № 2

Шків пасової передачі починає обертатися із стану спокою зі сталим кутовим прискоренням і через 10 хвилин від початку руху має кутову швидкість, яка відповідає 120 об/хв.

Визначити кількість обертів N , які зробив шків за 10 хвилин.

Розв'язання. Число обертів N можна визначити, якщо відомий кут φ , на який повернувся шків за 10 хвилин.

Оскільки $\varphi = 2\pi N$, то $N = \frac{\varphi}{2\pi}$.

Кут повороту тіла при рівноприскореному обертанні дорівнює:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Оскільки $\varphi_0 = 0$ і $\omega_0 = 0$, то $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Таким чином:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}.$$

Для визначення кутового прискорення ε скористаємося формулою для кутової швидкості при рівноприскореному обертанні тіла:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Оскільки $\omega_0 = 0$, то $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$.

З іншого боку, через число обертів за хвилину

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{\pi n}{30t}.$$

Якщо підставити ε в формулу для N , дістанемо:

$$N = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = \frac{\pi n t^2}{30t \cdot 4\pi} = \frac{nt}{120}.$$

При $n = 120$ об/хв і $t = 600$ с, знайдемо:

$$N = \frac{120 \cdot 600}{120} = 600 \text{ об.}$$

Відповідь: $N = 600$ об.

Задача №3

Колесо радіусом $R = 0,2$ м починає обертатися із стану спокою зі сталим прискоренням. Через $t = 10$ с від початку руху точка, що лежить на ободі колеса, має лінійну швидкість $V = 10$ м/с.

Визначити швидкість, нормальне і дотичне прискорення точок обода колеса в момент часу $t_1 = 15 \text{ c}$ від початку руху.

Розв'язання. Для визначення V_1 , a_{n_1} і a_{τ_1} скористаємося залежностями обертового руху:

$$V_1 = \omega_1 R; \quad a_{n_1} = \omega_1^2 R; \quad a_{\tau_1} = \varepsilon R.$$

Таким чином, для визначення V_1 , a_{n_1} і a_{τ_1} треба знайти кутову швидкість і кутове прискорення колеса в момент часу $t_1 = 15 \text{ c}$.

Визначимо кутову швидкість в момент часу $t = 10 \text{ c}$. Оскільки при $t = 10 \text{ c}$ швидкість точки обода колеса $V = 10 \text{ м/с}$, то:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{10}{0,2} = 50 \text{ рад/с}.$$

При рівноприскореному обертанні тіла ($\varepsilon = \text{const}$) кутова швидкість змінюється за законом: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

Оскільки $\omega_0 = 0$, то

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{50}{10} = 5 \text{ рад/с}.$$

В момент часу $t_1 = 15 \text{ c}$ кутова швидкість тіла дорівнюватиме:

$$\omega_1 = \varepsilon t_1 = 5 \cdot 15 = 75 \text{ рад/с}.$$

Тоді:

$$V_1 = \omega_1 R = 75 \cdot 0,2 = 15 \text{ м/с};$$

$$a_{n_1} = \omega_1^2 R = 75^2 \cdot 0,2 = 1125 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\tau_1} = \varepsilon R = 5 \cdot 0,2 = 1 \text{ м/с}^2.$$

На рис. 2.5. показані напрями визначених векторів.

Оскільки $\omega > 0$ і $\varepsilon > 0$, то напрями \vec{V}_1 і \vec{a}_{τ_1} збігаються. Нормальне ж прискорення \vec{a}_{n_1} напрямлене до центра обертання шків.

Відповідь: $V_1 = 15 \text{ м/с}$; $a_{n_1} = 1125 \text{ м/с}^2$;
 $a_{\tau_1} = 1 \text{ м/с}^2$.

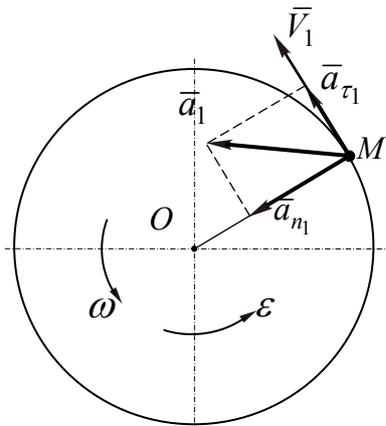


Рис. 2.5.

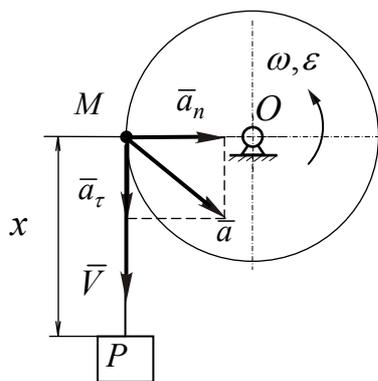


Рис. 2.6.

Задача №4

Обертовий рух вала радіусом $R = 0,1 \text{ м}$ викликається вантажем P , що підвішений на нитці, яка намотана на вал (рис.2.6). Вантаж P рухається вертикально за законом $x = t^2$, де x – відстань від тіла до точки збігу нитки з поверхні вала в метрах, t – час в секундах.

Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε вала та повне прискорення \bar{a} точки на поверхні вала в довільний момент часу t .

Розв'язання. Величина швидкості \bar{V} точки M обода вала дорівнює швидкості точок нитки, що змотується з поверхні вала при опусканні вантажу P , а також швидкості вантажу P . Швидкість же вантажу P визначимо шляхом похідної за часом від закону руху:

$$V = V_P = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t.$$

Дотичне прискорення \bar{a}_τ точки M дорівнює прискоренню вантажу P , оскільки з цим прискоренням збігає нитка з поверхні вала:

$$a_\tau = a_P = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2 \text{ м/с}^2.$$

За відомими лінійною швидкістю і дотичним прискоренням точки M поверхні вала можна визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε вала:

$$V = \omega \cdot R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{V}{R} = \frac{2t}{0,1} = 20t;$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ рад/с}^2.$$

Тоді, нормальне прискорення точки M буде дорівнювати:

$$a_n = \omega^2 R = (20t)^2 \cdot 0,1 = 40t^2.$$

Для повного прискорення точки M , що лежить на поверхні вала, дістанемо:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(2)^2 + (40t^2)^2} = 2\sqrt{1 + 400t^4}.$$

$$\text{Відповідь: } \omega = 20t; \quad \varepsilon = 20 \text{ рад/с}^2; \quad a = 2\sqrt{1 + 400t^4}.$$

Задача №5

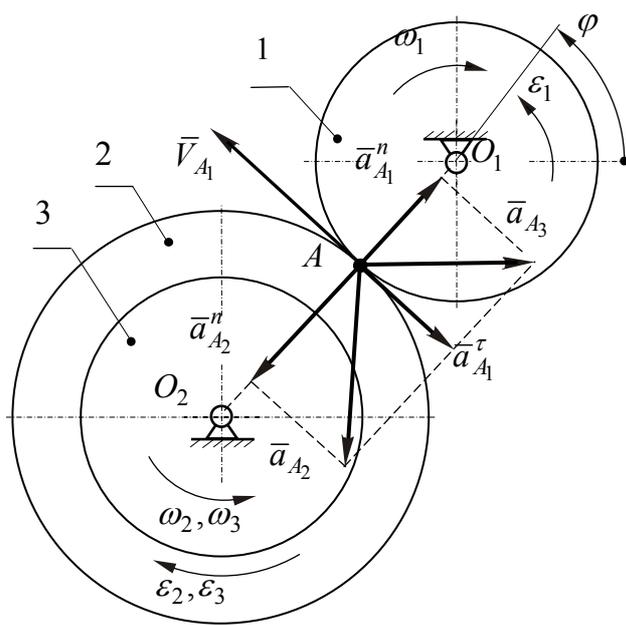


Рис. 2.7.

Передача складається із трьох шківів : 1, 2 і 3 (рис.2.7). Передача обертального руху від першого шківів на другий відбувається за рахунок сил тертя в точці A дотику шківів. Причому, обертання відбувається без проковзування одного шківів відносно другого. Другий і третій шківів жорстко насаджені на один вал (вісь вала O_2). Кут повороту першого шківів змінюється за законом: $\varphi = t^2 - 10t$.

Визначити кутові швидкості і кутові прискорення шківів передачі та швидкості і прискорення точок дотикання шківів в момент часу $t = 3$ с, якщо радіуси шківів:

$$r_1 = r_3 = 0,2 \text{ м}; \quad r_2 = 0,4 \text{ м}.$$

Розв'язання. Визначимо кутову швидкість і кутове прискорення шківів 1:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 10t) = 2t - 10;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 10) = 2 \text{ рад/с}^2.$$

В момент часу $t = 3$ с:

$$\omega_1 = 2 \cdot 3 - 10 = -4 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_1 = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Знак мінус при значенні ω_1 вказує на те, що напрям кутової швидкості в момент часу $t = 3$ с в протилежний бік від додатного напрямку відліку кута φ . Оскільки знаки ω_1 і ε_1 різні, то кутове прискорення спрямоване в протилежний бік від кутової швидкості.

На рис 2.7 додатний напрям відліку кута φ обрано проти ходу годинникової стрілки. Тоді напрям ω_1 буде за ходом годинникової стрілки, а ε_1 проти ходу годинникової стрілки. За модулем же ω_1 і ε_1 відповідно дорівнюють: $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_1 = 2 \text{ рад/с}^2$.

Швидкість та прискорення точки A дотику першого шківів визначимо за формулами:

$$V_{A_1} = \omega_1 r_1 = 4 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ м/с};$$

$$a_{A_1}^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{A_1}^n = \omega_1^2 r_1 = 0,2 \cdot 4^2 = 3,2 \text{ м/с}^2.$$

Швидкість \vec{V}_{A_1} спрямована (рис 3.7) перпендикулярно до радіуса AO_1 за напрямом кутової швидкості ω_1 . Дотичне прискорення $\vec{a}_{A_1}^\tau$ спрямоване теж перпендикулярно до AO_1 , але за напрямом ε_1 . Нормальне прискорення $\vec{a}_{A_1}^n$ спрямоване вздовж радіуса AO_1 до центра обертання O_1 .

Оскільки шківів 1 та 2 обертаються без проковзування в точці дотику, то швидкість і дотичне прискорення точки A другого шківа будуть дорівнювати швидкості і дотичному прискоренню точки A першого шківа, тобто:

$$\vec{V}_{A_1} = \vec{V}_{A_2}; \quad \vec{a}_{A_1}^\tau = \vec{a}_{A_2}^\tau.$$

Тоді:

$$\omega_2 = \frac{V_{A_2}}{r_2} = \frac{V_{A_1}}{r_2} = \frac{0,8}{0,4} = 2 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{A_2}^\tau}{r_2} = \frac{a_{A_1}^\tau}{r_2} = \frac{0,4}{0,4} = 1 \text{ рад/с}^2.$$

Обчислимо нормальне прискорення точки A другого шківа:

$$a_{A_2}^n = \omega_2^2 r_2 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

Спрямоване нормальне прискорення точки A другого шківа вздовж радіуса AO_2 до центра обертання O_2 .

Напрямок кутової швидкості другого шківа визначається напрямом швидкості точки A , тобто – проти ходу годинникової стрілки. Напрямок же кутового прискорення визначається напрямом дотичного прискорення, тобто – за ходом годинникової стрілки.

Повні прискорення точок дотику шківів:

$$a_{A_1} = \sqrt{a_{A_1}^{\tau 2} + a_{A_1}^{n 2}} = \sqrt{(0,4)^2 + (3,2)^2} = 3,225 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{A_2} = \sqrt{a_{A_2}^{\tau 2} + a_{A_2}^{n 2}} = \sqrt{(0,4)^2 + (1,6)^2} = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки шківів 2 та 3 жорстко насаджені на один вал, то їх кутові швидкості і кутові прискорення будуть однаковими, тобто:

$$\omega_3 = \omega_2 = 2 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 1 \text{ рад/с}^2.$$

Відповідь: $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}; \omega_2 = \omega_3 = 2 \text{ рад/с}; V_A = 0,8 \text{ м/с};$

$$a_{A_1} = 3,225 \text{ м/с}^2; a_{A_2} = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 13.11; 13.16; 13.19 [2].

5.4. Тема 3. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

ЗАНЯТТЯ № 4

Зміст

- 5.4.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи точки.
- 5.4.2. Відносні, переносні та абсолютні швидкості і прискорення.
- 5.4.3. Додавання швидкостей та прискорень при складному русі точки.
- 5.4.4. Прискорення Коріоліса.
- 5.4.5. Контрольні запитання.
- 5.4.6. Приклади розв'язування задач.

5.4.1. Відносний, переносний і абсолютний рух точки

При дослідженні руху точки обирають деяку систему відліку (теми 1 і 2), відносно якої розглядають рух точки.

В деяких випадках доводиться розглядати рух точки відносно двох різних систем відліку. Наприклад, рух пасажирів в потязі можна розглядати як по відношенню до потяга, так і по відношенню до Землі.

При цьому рух однієї і тієї ж точки відносно двох різних систем відліку буде різним. Наприклад, точка ободу колеса залізничного вагона, що рухається, відносно Землі пише циклоїду, а відносно вагона – коло.

При розгляді руху точки по відношенню до двох систем відліку та система, яка в даній задачі умовно прийнята за нерухому, називається **основною системою відліку (нерухомою)**, а система, яка рухається відносно основної, називається **рухомою системою відліку**.

Рух точки відносно основної системи відліку називається **абсолютним рухом**, а її рух відносно рухомої системи відліку – **відносним рухом**.

Рух же рухомої системи відліку відносно основної системи відліку, який може бути або поступальним, або обертальним, або плоским, називається **переносним рухом**.

Нехай є дві системи координат $Oxyz$ і $O'x'y'z'$ та деяка рухома точка M (рис.3.1).

Оберемо систему координат $Oxyz$ за основну. Тоді рух системи $O'x'y'z'$ відносно системи $Oxyz$ O' буде **переносним**. Рух точки M відносно системи

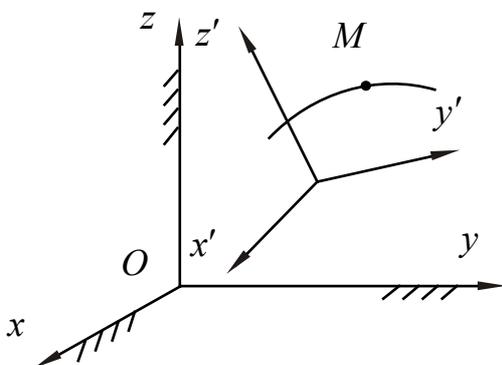


Рис. 3.1.

$O'x'y'z'$ буде *відносним*, а рух точки M відносно системи $Oxyz$ буде *абсолютним*.

Треба зауважити, що переносним рухом є рух не самої точки M , а того тіла, з яким пов'язана рухома система координат $O'x'y'z'$, тоді як відносний і абсолютний рух є рухом самої точки M , який розглядається відповідно відносно рухомої і основної систем відліку. В переносному русі рухома система координат може мати будь-який вид руху.

Основна задача цього розділу полягає в тому, щоб за відомими відносним і переносним рухами визначити абсолютний рух точки (рух точки M відносно системи відліку $Oxyz$).

Вибір основної та рухомої систем відліку, а відповідно, і поділ руху точки на абсолютний та відносний залежить від постановки конкретної задачі. У більшості випадків за основну систему відліку приймають систему, яку пов'язано з Землею.

5.4.2. Відносні, переносні і абсолютні швидкості та прискорення

Відносною швидкістю $\bar{V}_{\text{від}}$ **точки** називається її швидкість у відносному русі, тобто по відношенню до рухомої системи відліку.

Абсолютною швидкістю $\bar{V}_{\text{абс}}$ **точки** називається її швидкість в абсолютному русі, тобто по відношенню до основної системи відліку.

Переносною швидкістю $\bar{V}_{\text{пер}}$ називається швидкість відносно основної системи відліку тієї точки рухомої системи відліку, з якою в даний момент часу збігається точка, що рухається.

Аналогічно введемо поняття **відносного, абсолютного та переносного прискорення точки**.

Відносним прискоренням $\bar{a}_{\text{від}}$ **точки** називається її прискорення у відносному русі, тобто по відношенню до рухомої системи відліку.

Абсолютним прискоренням $\bar{a}_{\text{абс}}$ **точки** називається її прискорення в абсолютному русі, тобто по відношенню до основної системи відліку.

Переносним прискоренням $\bar{a}_{\text{пер}}$ називається прискорення відносно основної системи відліку тієї точки рухомої системи відліку, з якою в даний момент часу збігається точка, що рухається.

Звернемо увагу на те, що переносний рух – це рух усієї рухомої системи відліку, тобто деякого тіла, з яким пов'язана рухома система координат, а переносна швидкість і переносне прискорення – це швидкість і прискорення конкретної точки цього тіла.

5.4.3. Додавання швидкостей та прискорень при складному русі точки

Залежність між абсолютною, переносною та відносною швидкостями точки визначається **теоремою додавання швидкостей**, згідно якій *абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі переносної та відносної швидкостей*:

$$\bar{V}_{abc} = \bar{V}_{від} + \bar{V}_{пер}, \quad (3.1)$$

де \bar{V}_{abc} – абсолютна швидкість точки;
 $\bar{V}_{від}$ – відносна швидкість точки;
 $\bar{V}_{пер}$ – переносна швидкість.

Для визначення відносної швидкості точки достатньо подумки зупинити переносний рух і знайти за правилами кінематики швидкість точки відносно системи відліку, яка була рухомою.

Для визначення переносної швидкості – достатньо подумки зупинити відносний рух і знайти переносну швидкість як швидкість тієї точки рухомої системи відліку, з якою в даний момент часу збігається точка, що рухається.

Залежність між абсолютним, відносним і переносним прискоренням точки при **поступальному русі** рухомої системи відліку виражається векторним рівнянням:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{від} + \bar{a}_{пер}, \quad (3.2)$$

де \bar{a}_{abc} – абсолютне прискорення точки;
 $\bar{a}_{від}$ – відносне прискорення точки;
 $\bar{a}_{пер}$ – переносне прискорення точки.

Якщо переносним рухом є **обертальний**, або складний, то теорема про додавання прискорень набуває вигляду:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{від} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_K, \quad (3.3)$$

де \bar{a}_K – прискорення Кориоліса (поворотне прискорення точки).

5.4.4. Прискорення Коріоліса

Вектор коріолісового прискорення визначається як подвоєний векторний добуток кутової швидкості $\vec{\omega}$ переносного обертання на відносну швидкість $\vec{V}_{від}$ точки :

$$\vec{a}_K = 2 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{V}_{від}). \quad (3.4)$$

Модуль коріолісового прискорення дорівнює:

$$a_K = 2 \cdot \omega \cdot V_{від} \cdot \sin(\hat{\vec{\omega}, \vec{V}_{від}}),$$

де $\hat{\vec{\omega}, \vec{V}_{від}}$ – кут між векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_{від}$.

Прискорення Коріоліса характеризує:

- зміну модуля і напрямку переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху;
- зміну напрямку відносної швидкості точки внаслідок обертального переносного руху.

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю в трьох випадках:

- якщо $\omega = 0$, тобто у випадку поступального переносного руху або в момент, коли кутова швидкість не поступального переносного руху набуває нульового значення;
- якщо $V_{від} = 0$, тобто у випадку, коли точка знаходиться в стані спокою по відношенню до рухомої системи відліку;

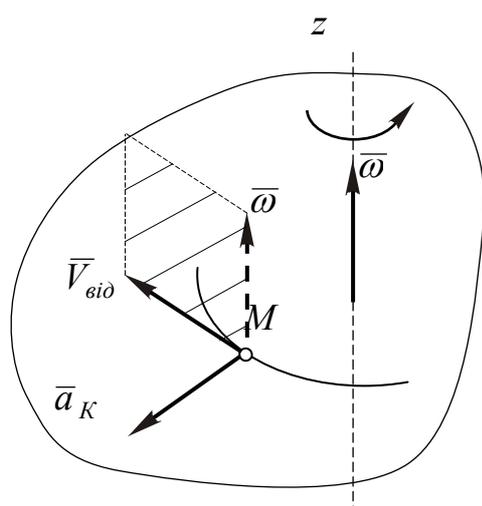


Рис. 3.2.

- якщо $\sin(\hat{\vec{\omega}, \vec{V}_{від}}) = 0$, тобто у випадку, коли відносна швидкість точки паралельна осі переносного обертання.

Напрямок прискорення Коріоліса визначається, як напрям вектора векторного добутку $(\vec{\omega} \times \vec{V}_{від})$.

Нехай точка M (рис.3.2) рухається з швидкістю $\vec{V}_{від}$ відносно тіла, яке обертається навколо осі z з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Якщо побудувати в точці M крім $\vec{V}_{від}$ вектор $\vec{\omega}$, то вектор векторного добутку $(\vec{\omega} \times \vec{V}_{від})$, тобто вектор коріолісового при-

скорення \vec{a}_K , буде спрямований перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_{від}$ в той бік, звідки поворот вектора $\vec{\omega}$ до вектора

відносної швидкості $\vec{V}_{від}$ на найменший кут видно проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення напрямку коріолісового прискорення зручно користуватися **правилом Жуковського**: щоб знайти напрям коріолісового прискорення треба спроектувати відносну швидкість точки $\vec{V}_{від}$ на площину, що перпендикулярна до осі переносного обертання, і повернути в цій площині отриману проекцію на 90° в бік переносного обертання (рис. 3.3).

Дійсно, отриманий напрям \vec{a}_K (рис. 3.3) перпендикулярний до площини трикутника, який утворений відносною швидкістю $\vec{V}_{від}$ і її проекцією $\vec{V}'_{від}$, а ця площина збігається з площиною векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_{від}$, до якої повинен бути перпендикулярним вектор коріолісового прискорення.

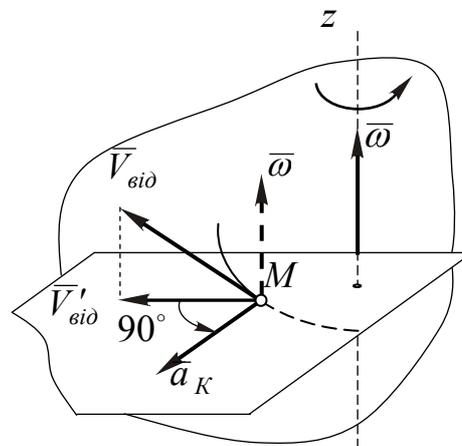


Рис. 3.3.

Якщо вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярний до $\vec{V}_{від}$, тобто $\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{від} = 90^\circ$ і відповідно $\sin(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{від}) = 1$, то величина коріолісового прискорення буде дорівнювати:

$$a_K = 2\omega V_{від}. \quad (3.5)$$

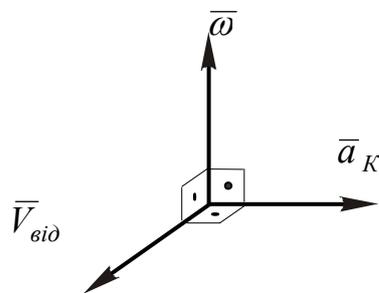


Рис. 3.4.

Такий випадок можливий, якщо відносний рух точки відбувається в площині, яка є перпендикулярною до осі переносного обертання. В цьому випадку вектори $\vec{V}_{від}$, $\vec{\omega}$ і \vec{a}_K взаємно перпендикулярні (рис. 3.4).

Розглянемо два приклади визначення модуля і напрямку коріолісового прискорення.

Приклад 1. Диск обертається навколо осі, яка перпендикулярна до його площини, проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\omega = 20 \text{ p/c}$. По хорді диска від точки K до L рухається точка M .

Визначити модуль і напрям коріолісового прискорення точки M в зображеному на рис. 3.5 положенні, якщо відносна швидкість $V_{від} = 5 \text{ м/с}$.

Точка M рухається в площині диска, яка перпендикулярна до осі обертання, тобто кут між векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_{від}$ складає 90° . Враховуючи, що

$\sin(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{від}) = 1$, модуль прискорення Коріоліса дорівнює:

$$a_K = 2\omega \cdot V_{\text{від}} = 2 \cdot 20 \cdot 5 = 200 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки вектор відносної швидкості розміщений в площині, що є перпендикулярною до осі обертання, то для визначення напрямку прискорення Кориоліса згідно правила Жуковського треба повернути вектор $\vec{V}_{\text{від}}$ за напрямом кутової швидкості ω переносного руху на кут 90° (рис.3.5).

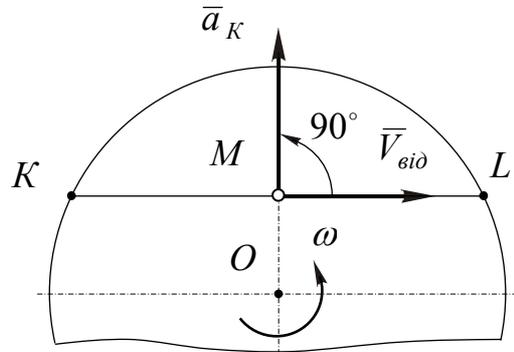


Рис. 3.5.

Приклад 2. Визначити модуль і напрям коріолісового прискорення точки M , яка рухається по твірній BN кругового конуса від вершини B до точки N . Конус обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega = 10 \text{ р/с}$ в напрямі, показаному на рис.3.6, кут нахилу твірної до осі конуса $\angle ABN = \alpha = 30^\circ$, відносна швидкість точки $V_{\text{від}} = 5 \text{ м/с}$.

Відкладемо вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ переносного обертального руху по осі обертання в бік, з якого обертання видно проти ходу годинникової стрілки. Відносну швидкість $\vec{V}_{\text{від}}$ спрямуємо від точки M до точки N . Тоді кут між векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_{\text{від}}$ (рис.3.6) складе:

$$(\vec{\omega}, \vec{V}_{\text{від}}) = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Модуль прискорення Кориоліса точки M дорівнює:

$$a_K = 2\omega \cdot V_{\text{від}} \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{V}_{\text{від}}) = 2\omega \cdot V_{\text{від}} \cdot \sin(180 - \alpha) =$$

$$= 2\omega \cdot V_{\text{від}} \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 50 \text{ м/с}^2.$$

Щоб знайти напрям прискорення Кориоліса (рис.3.6), спроектуємо вектор відносної швидкості $\vec{V}_{\text{від}}$ на площину S , яка перпендикулярна до осі обертання конуса.

Проекція відносної швидкості $\vec{V}'_{\text{від}}$ спрямована по прямій MK , яка є продовженням радіуса CM .

Якщо повернути проекцію $\vec{V}'_{\text{від}}$ в напрямі обертання конуса на кут 90° , то можна встановити, що вектор \vec{a}_K коріолісового прискорення спрямований за дотичною до кола радіусом CM в бік обертання конуса.

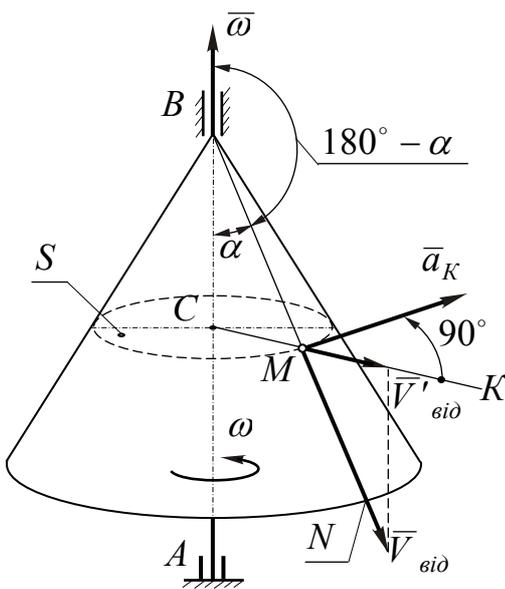


Рис. 3.6.

5.4.5. Контрольні запитання

1. Що називається відносним і абсолютним рухом точки?
2. Що називається переносним рухом?
3. Які швидкості точки називаються відсною і абсолютною?
4. Як визначити абсолютну швидкість точки при складному русі?
5. Як визначити абсолютне прискорення точки при складному русі?
6. Яка причина виникнення коріолісового прискорення?
7. Як знайти модуль і напрям коріолісового прискорення?
8. В яких випадках коріолісове прискорення точки дорівнює нулю?

5.4.6. Приклади розв'язування задач

Задача №1

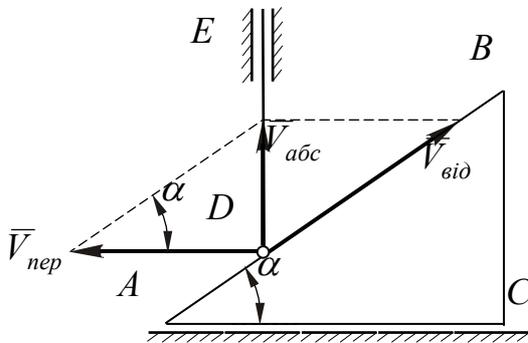


Рис. 3.7.

Клин ABC (рис.3.7) з кутом нахилу робочої поверхні α , який рухається поступально по горизонтальній поверхні з швидкістю \bar{u} , піднімає стрижень DE , що має рухатися в вертикальному напрямі.

Знайти абсолютну швидкість стрижня DE .

Розв'язання. Враховуючи, що стрижень DE в вертикальному напрямі рухається прямолінійно і по-

ступально, то достатньо визначити швидкість будь якої його точки.

Розглянемо рух точки D стрижня.

Оскільки точка D стрижня під час руху торкається клина ABC , то розглянемо її рух як складний: відносний – до клина і переносний – разом з клином.

По відношенню до клина точка D стрижня може рухатися тільки вздовж робочої поверхні AB . Таким чином, відносна швидкість \bar{V}_{vid} спрямована вздовж AB .

Клин ABC рухається поступально по горизонтальній поверхні, тобто швидкості всіх його точок однакові. Таким чином, переносна швидкість $\bar{V}_{пер}$ точки D стрижня, яка збігається з точкою D клина, дорівнює \bar{u} .

Абсолютну швидкість точки D стрижня визначимо з векторного рівняння:

$$\bar{V}_{abs} = \bar{V}_{vid} + \bar{V}_{пер} . \quad (1)$$

Для розв'язання векторного рівняння (1) побудуємо паралелограм на векторах $\bar{V}_{пер}$ і \bar{V}_{vid} (рис.3.7). При побудові треба врахувати, що \bar{V}_{abs} , як діагональ паралелограма, повинна мати напрям вертикалі.

Оскільки кут між векторами \vec{V}_{nep} і \vec{V}_{abc} прямий, то дістанемо:

$$V_{abc} = V_{nep} \cdot \operatorname{tg} \alpha = u \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Відповідь: $V_{abc} = u \cdot \operatorname{tg} \alpha$

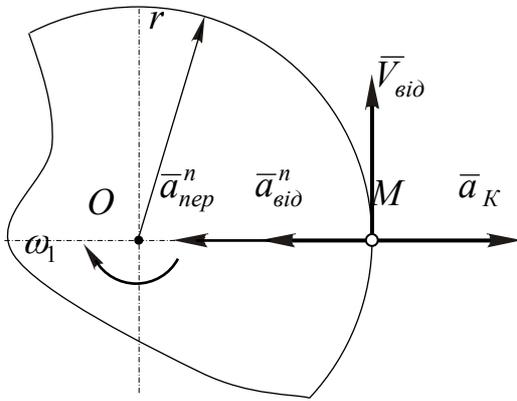


Рис. 3.8.

навколо центра O , а відносним – рух точки M по колу.

Абсолютне прискорення точки M , враховуючи, що переносним є обертальний рух, дорівнює:

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{vid} + \vec{a}_{nep} + \vec{a}_K .$$

Оскільки переносний рух є обертальним, то переносне прискорення точки круга, з якою збігається точка M , має нормальну \vec{a}_{nep}^n і тангенціальну \vec{a}_{nep}^{τ} складові.

Враховуючи, що при рівномірному обертанні кутове прискорення $\varepsilon = 0$, то тангенціальна складова переносного прискорення

дорівнює: $a_{nep}^{\tau} = \varepsilon \cdot r = 0$.

Величину переносного нормального прискорення a_{nep}^n визначимо з формули:

$$a_{nep}^n = \omega_1^2 r ,$$

де $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$ – кутова швидкість круга.

Спрямоване це прискорення вздовж радіуса від точки M до точки O (рис.3.8).

Враховуючи те, що точка M по колу радіуса r рухається рівномірно, то модуль відносного прискорення має теж тільки одну нормальну складову a_{vid}^n :

$$a_{vid}^n = \omega_2^2 \cdot r ,$$

Задача № 2

Круг радіусом r (рис.3.8) рівномірно обертається в своїй площині навколо центра O за ходом годинникової стрілки і робить n_1 обертів за хвилину. По колу радіуса r рівномірно у протилежному напрямі рухається точка M і робить n_2 обертів за хвилину.

Знайти абсолютне прискорення точки M .

Розв'язання. Рух точки M розглянемо, як складний. Переносним рухом є обертання круга разом з точкою M навколо центра O , а відносним – рух точки M по колу.

де $\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}$ – кутова швидкість обертання точки M по криву.

Спрямоване це прискорення від точки M до точки O (рис.3.8).

Оскільки точка M рухається в площині, що перпендикулярна до осі обертання, то прискорення Кориоліса визначається за формулою:

$$a_K = 2\omega_1 \cdot V_{від}.$$

Враховуючи, що $V_{від} = \omega_2 \cdot r$, дістанемо:

$$a_K = 2\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot r.$$

Для визначення напрямку коріолісового прискорення повернемо вектор відносної швидкості $\vec{V}_{від}$, який спрямований за дотичною до кола, в напрямі переносної кутової швидкості ω_1 на 90° (рис.3.8). Таким чином, це прискорення спрямоване вздовж радіуса від центра обертання O .

Оскільки всі прискорення напрямлені вздовж однієї прямої, то їх можна додати алгебраїчно:

$$a_{abc} = a_{пер}^n + a_{від}^n - a_K,$$

або з урахуванням виразів для $a_{пер}^n$, $a_{від}^n$ та a_K :

$$a_{abc} = \omega_1^2 r + \omega_2^2 r - 2\omega_1 \omega_2 r = r(\omega_1^2 - 2\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) = r(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

Підставивши залежності для кутових швидкостей ω_1 і ω_2 , дістанемо:

$$a_{abc} = r \left(\frac{\pi n_1}{30} - \frac{\pi n_2}{30} \right)^2 = \frac{\pi^2}{900} r (n_1 - n_2)^2.$$

Відповідь: $a_{abc} = \frac{\pi^2}{900} r (n_1 - n_2)^2.$

Задача №3

Вздовж хорди AB диска, що обертається, від точки A до точки B рухається точка M , згідно рівнянню $S = 4t^2$, кут повороту диска змінюється за законом $\varphi = 8t$.

Визначити абсолютні швидкості та прискорення точки M в момент часу, коли вона знаходиться на відстані $h = 0,2$ м від осі обертання диска (рис.3.9).

Розв'язання. У даній задачі переносним рухом є обертання диска за законом $\varphi = 8t$, а відносним – рух точки вздовж хорди AB за законом $S = 4t^2$.

Запишемо рівняння для визначення абсолютної швидкості точки M :

$$\vec{V}_{abc} = \vec{V}_{від} + \vec{V}_{пер}.$$

Для визначення відносної швидкості зупинимо переносне обертання диска і будемо розглядати рух точки по відношенню до нерухомого диска.

Оскільки закон відносного руху $S = 4t^2$, то величина відносної швидкості визначається як перша похідна від шляху за часом:

$$V_{від} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2) = 8t.$$

Вектор відносної швидкості напрямлений по хорді AB (рис. 3.9) від точки A до точки B .

Переносною швидкістю $\vec{V}_{пер}$ точки M є швидкість тієї точки диска, з якою в даний момент збігається точка M . За умовою задачі точка M в даний момент часу знаходиться посередині хорди AB на відстані h від осі обертання диска.

Переносна швидкість обертального руху визначається за формулою:

$$V_{пер} = \omega \cdot h,$$

де ω – кутова швидкість переносного обертального руху.

Кутову швидкість переносного обертального руху знайдемо, як першу похідну від кута повороту φ за часом:

$$\omega_{пер} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ p/c}.$$

Таким чином, переносна швидкість обертального руху дорівнює:

$$V_{пер} = 8 \cdot 0,2 = 1,6 \text{ м/с}.$$

Вектор переносної швидкості спрямований перпендикулярно радіусу OM в бік обертання диска.

Оскільки вектори $\vec{V}_{від}$ і $\vec{V}_{пер}$ напрямлені вздовж однієї прямої в різні боки (рис. 3.9), то для визначення абсолютної швидкості від операції векторного додавання швидкостей можна перейти до їх алгебраїчного додавання.

Тоді:

$$V_{абс} = V_{пер} - V_{від} = 1,6 - 8t.$$

В залежності від абсолютних значень швидкостей $\vec{V}_{пер}$ і $\vec{V}_{від}$, вектор $\vec{V}_{абс}$ буде напрямлений або в бік $\vec{V}_{пер}$, або в бік $\vec{V}_{від}$.

Визначимо абсолютне прискорення точки M . Оскільки переносний рух є обертальним, то абсолютне прискорення точки дорівнює:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{від} + \vec{a}_K.$$

Модуль відносного прискорення визначимо, як похідну від відносної швидкості за часом:

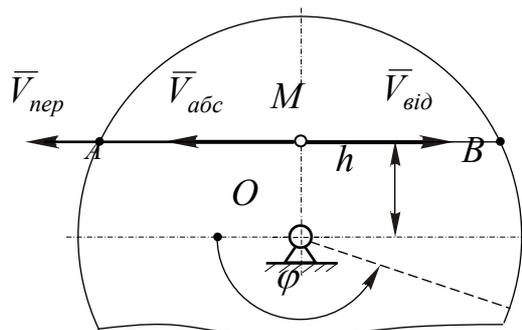


Рис. 3.9.

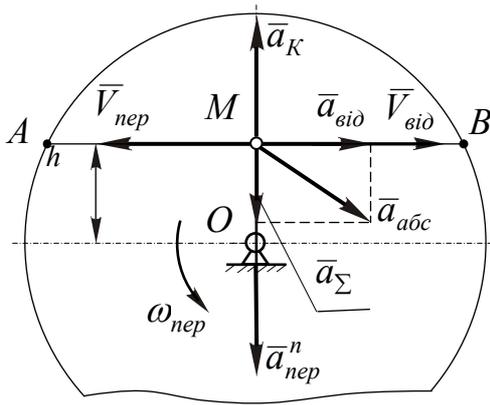


Рис. 3.10.

$$a_{\varepsilon id} = \frac{dV_{\varepsilon id}}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ м/с}^2.$$

Спрямований вектор $\bar{a}_{\varepsilon id}$ вздовж хорди AB від точки A до точки B (рис.3.10).

Переносне прискорення \bar{a}_{nep} точки диска, яка збігається з точкою M , враховуючи, що вона рухається по колу радіусом h , складається із переносного тангенціального (дотичного) прискорення \bar{a}_{nep}^{τ} і і

переносного нормального прискорення \bar{a}_{nep}^n :

$$\bar{a}_{nep} = \bar{a}_{nep}^{\tau} + \bar{a}_{nep}^n.$$

Обчислимо модулі нормального \bar{a}_{nep}^n і тангенціального \bar{a}_{nep}^{τ} прискорень:

$$a_{nep}^n = \omega^2 \cdot h = 8^2 \cdot 0,2 = 12,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{nep}^{\tau} = \varepsilon \cdot h = 0,$$

де $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(8) = 0$ – кутове прискорення переносного обертального руху.

Переносне нормальне прискорення спрямоване вздовж радіуса до центра обертання O (рис.3.10).

Оскільки рух точки M відбувається в площині, що перпендикулярна до осі обертання, то прискорення Коріоліса визначається за формулою:

$$a_K = 2\omega_{nep} \cdot V_{\varepsilon id} = 2 \cdot 8 \cdot 8t = 128t.$$

Для визначення напрямку прискорення Коріоліса (рис.3.10) необхідно вектор відносної швидкості $\bar{V}_{\varepsilon id}$ повернути на 90° в бік кутової швидкості ω_{nep} переносного обертального руху, тобто проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення величини і напрямку абсолютного прискорення \bar{a}_{abc} спочатку додамо вектори \bar{a}_{nep}^n і \bar{a}_K , які напрямлені вздовж однієї прямої в протилежні боки. Знайдена векторна сума $\bar{a}_{\Sigma} = \bar{a}_{nep}^n + \bar{a}_K$ напрямлена перпендикулярно до вектора $\bar{a}_{\varepsilon id}$ і за модулем дорівнює $a_{\Sigma} = 12,8 - 128t$.

Таким чином, абсолютне прискорення точки M дорівнює сумі векторів:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{\Sigma} + \bar{a}_{\varepsilon id}.$$

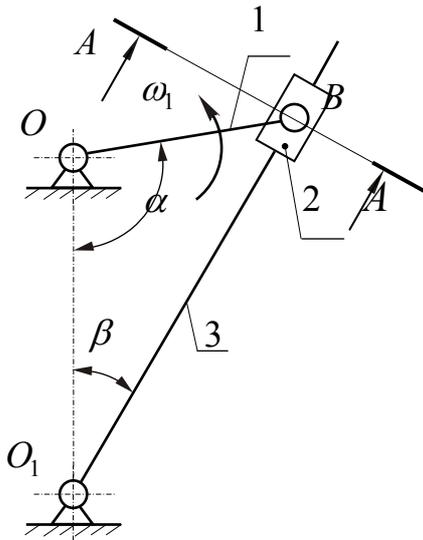


Рис. 3.11.

Оскільки вектор \vec{a}_{vid} перпендикулярний до вектора \vec{a}_Σ , то вектор \vec{a}_{abc} буде зображуватися діагоналлю прямокутника зі сторонами \vec{a}_{vid} і \vec{a}_Σ (рис.3.10).

Модуль абсолютного прискорення дорівнює:

$$a_{abc} = \sqrt{a_{vid}^2 + a_\Sigma^2} = \sqrt{64 + (12,8 - 128t)^2}.$$

Відповідь: $V_{abc} = 1,6 - 8t$;

$$a_{abc} = \sqrt{64 + (12,8 - 128t)^2}.$$

Задача №4

До складу механізму Вітворта (рис.3.11) входить: кривошип 1, повзун 2 і куліса 3. Кривошип $OB = 0,2$ м механізму обертається з сталою кутовою швидкістю $\omega_1 = 10$ p/c .

Визначити швидкість і прискорення точки B та кутову швидкість і кутове прискорення куліси 3 механізму в положенні, коли: $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Розв'язання. Особливість цього механізму полягає в тому, що в точці B між собою з'єднуються кривошип 1, повзун 2 і куліса 3 (рис.3.12).

Кривошип 1 і повзун 2 між собою з'єднані циліндричним шарніром, що дозволяє повзуну відносно кривошипа повертатися, а на кулісі 3 паралельно її осі зроблені напрямні, по яким повзун 2 може рухатися поступально.

При повороті кривошипа 1 повзун 2 ковзає по кулісі 3 і примушує її повертатися навколо точки O_1 . Відстань від точки O_1 до точки B на кулісі 3 з поворотом кривошипа 1 змінюється.

Перетин А-А

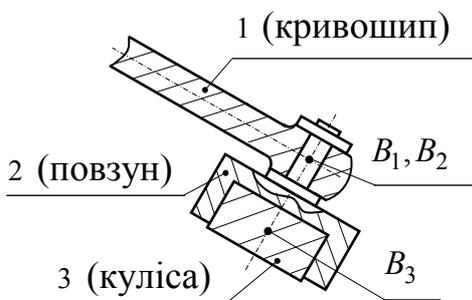


Рис. 3.12.

Такий механізм дозволяє перетворити обертальний рух кривошипа в коливальний рух куліси, якщо $OO_1 > O_1B$, або в обертальний, з іншим законом зміни кутової швидкості, ніж у кривошипа, рух куліси, якщо $OO_1 < O_1B$.

Таким чином, в точці B механізму (рис.3.12) будемо розглядати три різні точки: B_1 , що належить кривошипу 1; B_2 – повзуну 2 та B_3 – кулісі 3. Усі ці три точки розміщені одна під другою. (рис.3.12).

Перед розв'язуванням задачі в довільному масштабі побудуємо схему механізму (рис.3.13, а) для заданого положення кривошипа.

Першою визначимо швидкість точки B_1 , що належить кривошипу 1, який обертається навколо точки O з кутовою швидкістю ω_1 :

$$V_{B_1} = \omega_1 \cdot (OB) = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ м/с}.$$

Напрявлена швидкість \vec{V}_{B_1} перпендикулярно до OB в бік обертання кривошипа 1 (рис.3.13, а).

Швидкість точки B_2 , що належить повзуну 2, який з'єднаний з кривошипом 1 шарніром, дорівнює швидкості точки B_1 :

$$\vec{V}_{B_2} = \vec{V}_{B_1}.$$

Для визначення швидкості точки B_3 куліси 3, прийемо рух повзуна 2 за переносний. Тоді куліса 3 відносно повзуна 2 може рухатися поступально і швидкість точки B_3 куліси 3 відносно точки B_2 повзуна 2 буде напрямлена вздовж напрямних, тобто вздовж BO_1 .

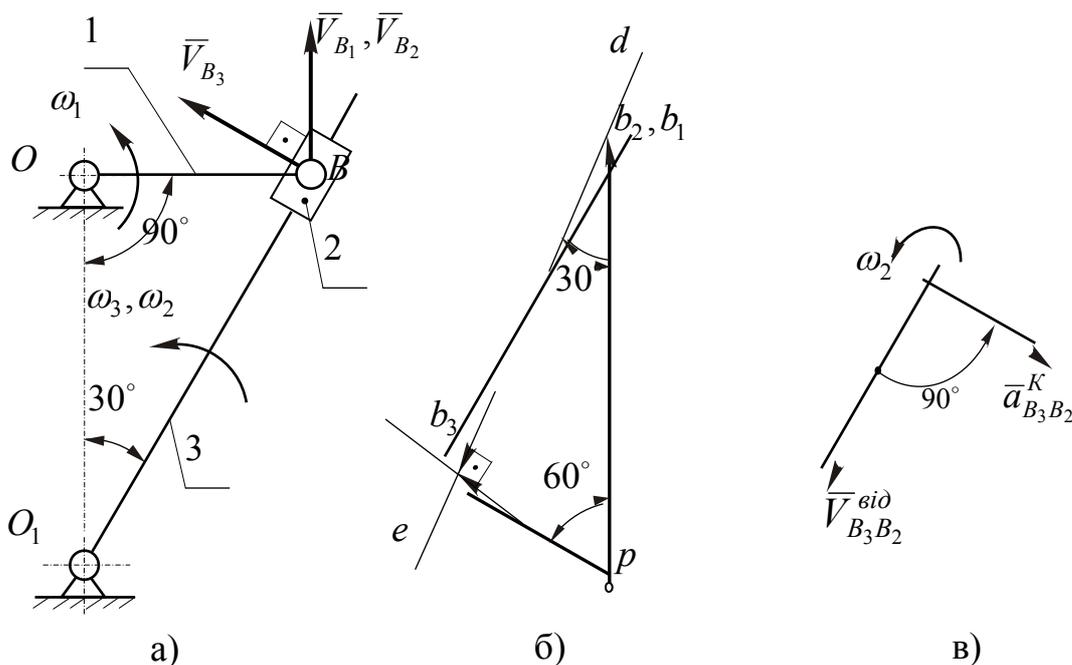


Рис. 3.13.

Запишемо рівняння для швидкостей при складному русі точки B_3 відносно B_2 :

$$\vec{V}_{B_3} = \vec{V}_{B_2} + \vec{V}_{B_3B_2}, \quad (1)$$

де \vec{V}_{B_2} – переносна швидкість точки B_2 повзуна, яка в даний момент часу збігається з точкою B_3 куліси. Ця швидкість уже визначена;

$\bar{V}_{B_3B_2}$ – відносна швидкість точки B_3 відносно B_2 . Спрямована ця швидкість вздовж BO_1 ;

\bar{V}_{B_3} – абсолютна швидкість точки B_3 куліси 3. Враховуючи, що куліса 3 обертається навколо нерухомої точки O_1 , то ця швидкість буде спрямована перпендикулярно до BO_1 .

Векторне рівняння (1) розв'яжемо шляхом побудови плану швидкостей.

Оскільки напрями швидкості в правій і в лівій частинах рівняння (1) відомі, то з полюса плану швидкостей спочатку побудуємо праву частину рівняння, а потім ліву.

Згідно правій частині рівняння (1) з полюса P (рис. 3.13, б) відкладаємо вектор $(\overline{pb_2})$ за напрямом \bar{V}_{B_2} (рис.3.13, а), який в масштабі буде зображати цю швидкість. (Оскільки $\bar{V}_{B_2} = \bar{V}_{B_1}$, то швидкості цих точок на плані будуть зображуватися одним вектором, тобто на плані швидкостей точки b_2 і b_1 збігаються). Через точку b_2 проведемо лінію ed паралельно O_1B , вздовж якої від точки b_2 буде напрямлений вектор, що буде зображати відносну швидкість $\bar{V}_{B_3B_2}$ (величина і напрям цієї швидкості невідомі).

Тепер побудуємо ліву частину рівняння (1). Оскільки абсолютна швидкість \bar{V}_{B_3} напрямлена перпендикулярно до BO_1 , то з полюса p за цим напрямом проводимо лінію до перетину в точці b_3 з лінією ed . Точка перетину b_3 буде розв'язком векторного рівняння (1).

Вектор $(\overline{pb_3})$ на плані швидкостей в масштабі зображає абсолютну швидкість \bar{V}_{B_3} , а вектор $(\overline{b_2b_3})$ – відносну швидкість $\bar{V}_{B_3B_2}$.

Оскільки на плані швидкостей вектор $(\overline{pb_2})$ перпендикулярний до OB , а $(\overline{pb_3})$ перпендикулярний до O_1B , то кут між цими векторами дорівнює куту між OB і O_1B на схемі механізму, тобто 60° .

Кут при вершині b_3 плану швидкостей буде прямим, оскільки лінія pb_3 перпендикулярна до O_1B , а лінія ed паралельна O_1B .

Таким чином трикутник pb_2b_3 на плані швидкостей прямокутний, з кутами при вершинах: $\angle p = 60^\circ$ і $\angle b_2 = 30^\circ$.

З плану швидкостей визначаємо:

$$(\overline{pb_3}) = (\overline{pb_2}) \sin 30^\circ, \text{ або } V_{B_3} = V_{B_2} \sin 30^\circ = 2 \cdot 0.5 = 1 \text{ м/с};$$

$$(b_2 b_3) = (p b_2) \sin 60^\circ ; \text{ або } V_{B_3 B_2} = V_{B_2} \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,886 = 1,72 \text{ м/с} .$$

Враховуючи те, що куліса 3 обертається навколо точки O_1 , то для кутової швидкості куліси ω_3 дістанемо:

$$\omega_3 = \frac{V_{B_3}}{(O_1 B)} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ рад/с} ,$$

де $(O_1 B)$ – довжина куліси для цього положення механізму. З $\triangle O B O_1$ (рис.3.13,а): $(O_1 B) = \frac{(OB)}{\sin 30^\circ} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 \text{ м} .$

Оскільки повзун 2 відносно куліси 3 рухається поступально, то $\omega_2 = \omega_3$.

Для визначення напрямку кутової швидкості ω_3 попередньо перенесемо вектор \vec{V}_{B_3} в точку B механізму (рис. 3.13, а). Кутова швидкість ω_3 напрямлена проти ходу годинникової стрілки.

Визначимо прискорення точок механізму.

Оскільки кривошип 1 обертається навколо центра O з сталою кутовою швидкістю ω_1 ($\varepsilon_1 = 0$), то прискорення точки B_1 має тільки нормальну складову:

$$z \text{ м/с}^2 .$$

Напрявлене прискорення точки B_1 вздовж кривошипа до центра обертання O (рис.3.14, а).

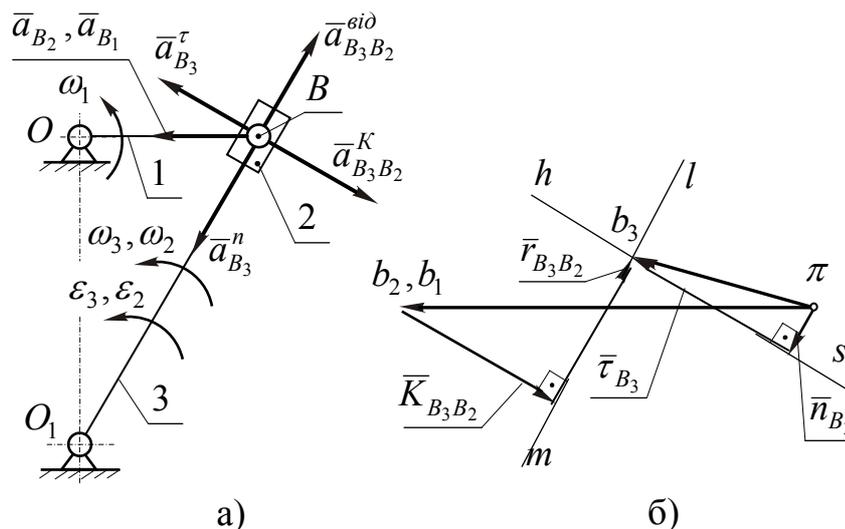


Рис. 3.14.

Прискорення точки B_2 повзуна 2, враховуючи, що кривошип і повзун з'єднані шарніром, дорівнює прискоренню точки B_1 :

$$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{B_1} .$$

Для прискорення точки B_3 куліси 3 запишемо векторне рівняння для складного руху точки, врахувавши при цьому, що рух повзуна 2 прийнято за переносний:

$$\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{B_2} + \bar{a}_{B_3B_2}^{oid} + \bar{a}_{B_3B_2}^K, \quad (2)$$

де \bar{a}_{B_3} – абсолютне прискорення точки B_3 ;

\bar{a}_{B_2} – переносне прискорення точки B_2 повзуна, яка в даний момент часу збігається з точкою B_3 куліси;

$\bar{a}_{B_3B_2}^{oid}$ – прискорення точки B_3 відносно B_2 , спрямоване по осі куліси O_1C ;

$\bar{a}_{B_3B_2}^K$ – коріолісове прискорення точки B_3 .

Оскільки відносний рух відбувається в площині, що є перпендикулярною до осі обертання повзуна 2, то коріолісове прискорення визначимо з формули:

$$a_{B_3B_2}^K = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{B_3B_2} = 2 \cdot 2,5 \cdot 1,73 = 8,65 \text{ м/с}^2.$$

де ω_2 – кутова швидкість обертального переносного руху повзуна 2,

$$\omega_2 = \omega_3 = 2,5 \text{ рад/с};$$

$V_{B_3B_2}$ – відносна швидкість точки B_3 відносно B_2 , $V_{B_3B_2} = 1,73 \text{ м/с}$.

Для визначення напрямку коріолісового прискорення необхідно вектор відносної швидкості $\bar{V}_{B_3B_2}$ повернути на 90° в бік переносного обертального руху, тобто в напрямі кутової швидкості ω_2 . Напрямок повернутого вектора (рис.3.13, в), який є перпендикулярним до осі куліси O_1B , відповідає напрямку коріолісового прискорення.

З іншого боку, точка B_3 належить кулісі 3, яка обертається навколо центра O_1 . Таким чином, прискорення \bar{a}_{B_3} буде мати дві складові:

$$\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{B_3}^n + \bar{a}_{B_3}^\tau, \quad (3)$$

де $\bar{a}_{B_3}^n$ – нормальне прискорення точки B_3 при її обертанні навколо точки O_1 , напрямлене по осі куліси від точки B до точки O_1 (рис.3.14, а) і за модулем дорівнює: $a_{B_3}^n = \omega_3^2 (O_1B) = 2,5^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м/с}^2$;

$\bar{a}_{B_3}^\tau$ – тангенціальне прискорення точки B_3 при її обертанні навколо точки O_1 , напрямлене перпендикулярно до осі куліси O_1B і за модулем дорівнює: $a_{B_3}^\tau = \varepsilon_3 (O_1B)$.

Розв'яжемо систему векторних рівнянь (2, 3) графічно, шляхом побудови плану прискорень.

Першим побудуємо векторне рівняння (2). З довільного полюса π (рис. 3.14, б) відкладемо напрямлений відрізок $(\overline{\pi b_2})$, який зображає прискорення $\overline{a_{B_2}} = \overline{a_{B_1}}$ і спрямований паралельно лінії BO від точки B до точки O .

Довжину відрізка (πb_2) оберемо $50_{\text{мм}}$. Тоді масштабний коефіцієнт плану прискорень буде рівний:

$$\mu_a = \frac{a_{B_2}}{(\pi b_2)} = \frac{20}{50} = 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}.$$

Від точки b_2 відкладемо вектор $\overline{K_{B_3B_2}}$, який зображує коріолісове прискорення $\overline{a_{B_3B_2}^K}$. Направлений цей вектор перпендикулярно до осі куліси BO_1 за визначеним раніш напрямом (рис. 3.13, в).

Довжина вектора $\overline{K_{B_3B_2}}$ дорівнює:

$$K_{B_3B_2} = \frac{a_{B_3B_2}^K}{\mu_a} = \frac{8,65}{0,4} = 21,62 \text{ мм}.$$

Через кінець вектора $\overline{K_{B_3B_2}}$ проводимо лінію ml , вздовж якої буде спрямований вектор $\overline{r_{B_3B_2}}$, який буде зображувати відносне прискорення $\overline{a_{B_3B_2}^{від}}$. Напрямок і довжина цього вектора невідомі.

Наступним побудуємо векторне рівняння (3). З полюса π відкладемо вектор $\overline{n_{B_3}}$, який зображає нормальне прискорення $\overline{a_{B_3}^n}$. Спрямований цей вектор паралельно осі куліси BO_1 від точки B до точки O_1 і має довжину:

$$n_{B_3} = \frac{a_{B_3}^n}{\mu_a} = \frac{2,5}{0,4} = 6,2 \text{ мм}.$$

Через кінець вектора $\overline{n_{B_3}}$ проводимо лінію sh , вздовж якої спрямований вектор $\overline{\tau_{B_3}}$, який буде зображувати тангенціальне прискорення $\overline{a_{B_3}^\tau}$.

Розв'язком системи (2, 3) буде точка перетину ліній ml і sh , а вектор $(\overline{\pi b_3})$ буде зображувати прискорення $\overline{a_{B_3}}$.

З плану прискорень визначаємо:

$$a_{B_3} = (\pi b_3) \mu_a = 22,4 \cdot 0,4 = 8,9 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B_3}^\tau = \tau_{B_3} \cdot \mu_a = 21,6 \cdot 0,4 = 8,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B_3B_2}^{vid} = r_{B_3B_2} \cdot \mu_a = 19 \cdot 0,4 = 7,6 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення куліси 3 і повзуна 2 визначимо через відоме тангенціальне прискорення $\bar{a}_{B_3}^\tau$:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{a_{B_3}^\tau}{(O_1B)} = \frac{8,6}{0,4} = 21,6 \text{ рад/с}^2.$$

Для визначення напрямку кутового прискорення ε_3 треба перенести в точку B механізму тангенціальне прискорення $\bar{a}_{B_3}^\tau$ (рис.3.14, а). Кутове прискорення ε_3 напрямлене проти ходу годинникової стрілки.

Відповідь: $V_{B_3} = 1 \text{ м/с}; \quad \omega_3 = 2,5 \text{ рад/с};$
 $a_{B_3} = 8,9 \text{ м/с}^2; \quad \varepsilon_3 = 21,6 \text{ рад/с}^2.$

5.5. Тема 4. ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА

ЗАНЯТТЯ № 5

Визначення швидкостей точок тіла

Зміст

- 5.5.1. Рівняння плоского руху.
- 5.5.2. Швидкості точок плоскої фігури. Миттєвий центр швидкостей.
- 5.5.3. Порядок розв'язування задач.
- 5.5.4. Контрольні запитання.
- 5.5.5. Приклади розв'язування задач.

5.5.1. Рівняння плоского руху

Плоским називається такий рух тіла, при якому траєкторії усіх його точок лежать в площинах, що паралельні до даної нерухомої площини.

При такому русі усі точки твердого тіла, що розміщені на перпендикулярі до цієї площини, мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Плоский рух фігури можна розглядати як складний рух, який включає поступальний рух разом з довільно обраною точкою A , що називається **поллюсом** (переносний рух), і на обертальний рух фігури навколо цієї точки (відносний рух).

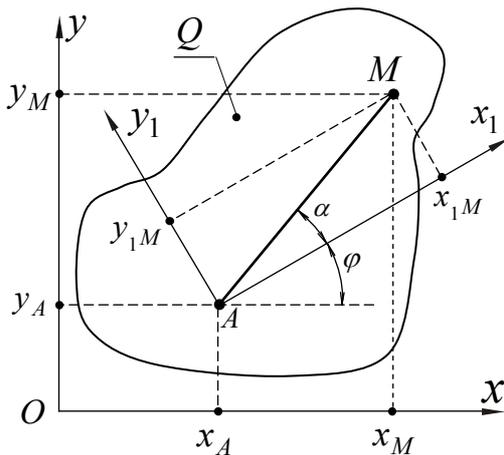


Рис. 4.1.

На рис. 4.1 з тілом Q пов'язана рухома система координат Ax_1y_1 . При русі тіла початок координат x_A , y_A і кут повороту φ рухомих системи координат відносно нерухомої системи Oxy з часом змінюються. Таким чином, щоб однозначно задати положення тіла при плоскому русі потрібно задати закон руху початку рухомих системи координат (поллюса A) і кут повороту рухомих системи відносно нерухомої системи координат, тобто:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) називаються **рівняннями плоского руху твердого тіла**.

При цьому, поступальна частина плоского руху описується двома рівняннями:

$$x_A = f_1(t);$$

$$y_A = f_2(t),$$

а відносна обертальна навколо полюса – третім рівнянням:

$$\varphi = f_3(t).$$

Координати будь якої точки M плоскої фігури Q (рис.4.1), якщо за полюс обрана точка A і заданий кут α , визначаються за рівняннями:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + (AM)\cos(\varphi + \alpha); \\ y_M &= y_A + (AM)\sin(\varphi + \alpha). \end{aligned} \quad (4.2)$$

5.5.2. Швидкості точок фігури. Миттєвий центр швидкостей

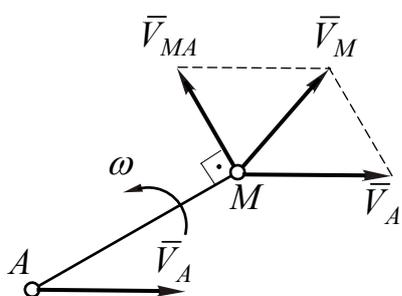


Рис. 4.2.

Оскільки плоский рух тіла складається з поступального разом з полюсом і обертального навколо нього, то швидкість будь-якої точки тіла M (рис. 4.2) геометрично складається з абсолютної швидкості \vec{V}_A точки A , яку прийнято за полюс, і відносної швидкості \vec{V}_{MA} у відносному обертальному русі точки M разом з тілом навколо полюса A :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \quad (4.3)$$

Вектор відносної швидкості \vec{V}_{MA} точки M у відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса A напрямлений перпендикулярно до AM у бік кутової швидкості.

Модуль і напрям абсолютної швидкості \vec{V}_M знаходиться побудовою відповідного паралелограма на векторах \vec{V}_A і \vec{V}_{MA} (рис. 4.2). Такий шлях розв'язування векторного рівняння, коли за записаним рівнянням будують векторну фігуру, називається *графоаналітичним*.

Відносна швидкість \vec{V}_{MA} у відносному обертальному русі точки M разом з тілом навколо полюса A за модулем дорівнює:

$$V_{MA} = \omega \cdot MA, \quad (4.4)$$

де ω – кутова швидкість обертання тіла навколо полюса.

Знайти швидкість будь-якої точки тіла можна також на основі теореми, яка свідчить:

Проекції швидкостей двох точок фігури на пряму, що з'єднує ці точки, рівні між собою.

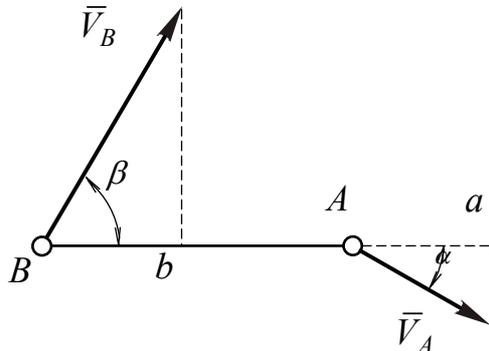


Рис. 4.3.

Згідно з цією теоремою (рис. 4.3) :

$$Aa = Bb,$$

або

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta .$$

Якщо відома швидкість \vec{V}_A точки A тіла, то :

$$V_B = V_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} . \quad (4.5)$$

При плоскому русі тіла в кожен момент часу існує точка тіла, швидкість якої дорівнює нулю. Ця точка називається **миттєвим центром швидкостей** і, як правило, позначається літерою P .

Якщо миттєвий центр швидкостей відомий, то легко можна знайти миттєве розподілення швидкостей усіх точок тіла (рис.4.4).

Оберемо за полюс поступального руху миттєвий центр швидкостей P . Тоді для точок A і B тіла можна записати векторні рівняння (4.3):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} ;$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP} ,$$

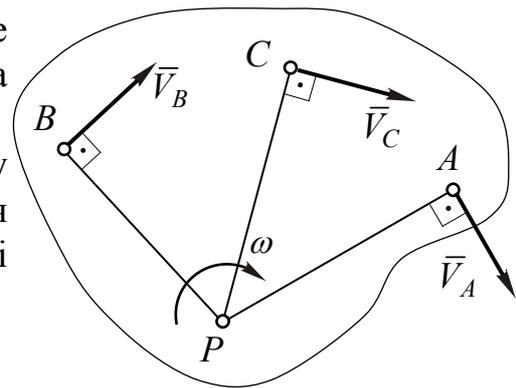


Рис. 4.4.

де \vec{V}_P – вектор абсолютної швидкості полюса P ;

\vec{V}_{AP} – вектор відносної швидкості точки A у відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса P , напрямлений перпендикулярно до AP ;

\vec{V}_{BP} – вектор відносної швидкості точки B у відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса P , напрямлений перпендикулярно до BP .

Оскільки швидкість обраного полюса P дорівнює нулю ($\vec{V}_P = 0$), то:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{AP} ; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{BP} .$$

За модулем швидкості обертання точок A і B навколо полюса P дорівнюють:

$$V_A = V_{AP} = \omega \cdot (PA) ; \quad V_B = V_{BP} = \omega \cdot (PB) .$$

Поділивши V_B на V_A дістанемо:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{\omega \cdot (PB)}{\omega(PA)} = \frac{PB}{PA}. \quad (4.6)$$

Таким чином, миттєве розподілення швидкостей точок тіла при його плоскому русі, таке ж, яке було б при його обертальному русі навколо миттєвого центра швидкостей.

Визначення положення миттєвого центра швидкостей

Існує декілька способів знаходження положення миттєвого центра швидкостей.

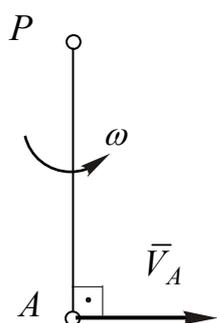


Рис. 4.5.

Випадок 1. Відома швидкість \vec{V}_A однієї точки A тіла і кутова швидкість його обертання ω (рис. 4.5).

Миттєвий центр швидкостей P лежить на перпендикулярі до швидкості \vec{V}_A точки A , на відстані:

$$AP = \frac{V_A}{\omega}. \quad (4.7)$$

Для знаходження напрямку перпендикуляру треба повернути вектор \vec{V}_A відносно точки A на кут 90° в бік кутової швидкості.

Випадок 2. Відомі напрями швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B двох точок A і B тіла (рис. 4.6).

Миттєвий центр швидкостей повинен лежати як на перпендикулярі до вектора \vec{V}_A , так і на перпендикулярі до вектора \vec{V}_B , тобто миттєвий центр швидкостей P лежить в точці перетину цих перпендикулярів.

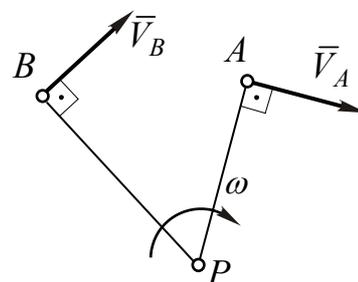


Рис. 4.6.

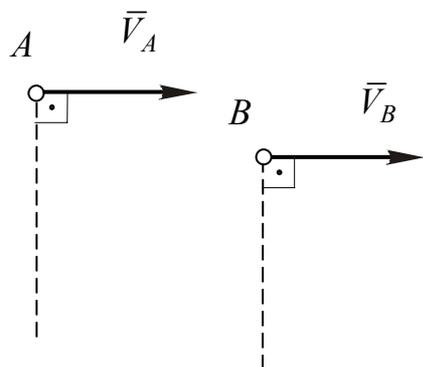


Рис. 4.7.

Випадок 3. Швидкості двох точок A і B тіла паралельні між собою, а перпендикуляри до них не співпадають (рис. 4.7).

Говорять, що в цьому випадку миттєвий центр швидкостей лежить на нескінченності. Кутова швидкість обертання дорівнює нулю, а швидкості усіх точок тіла геометрично рівні, тобто в даний момент часу тіло виконує поступальний рух.

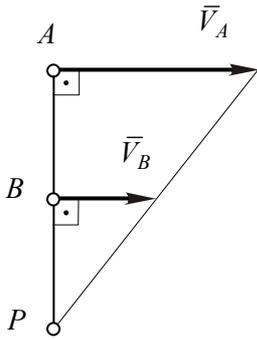


Рис. 4.8.

Випадок 4. Швидкості двох точок A і B паралельні, напрямлені в один бік і не рівні за модулем. Крім того, \vec{V}_A і \vec{V}_B перпендикулярні до відрізка AB (рис. 4.8).

Миттєвий центр швидкостей знаходиться на продовженні відрізка AB тієї точки, швидкість якої менша. Відстань від точки до миттєвого центра швидкостей можна знайти з пропорції (4.6):

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{PB}{PA} = \frac{PB}{PB + BA}$$

Розв'язавши це рівняння відносно PB , дістанемо:

$$PB = \frac{V_B(BA)}{V_A - V_B} \quad (4.8)$$

Таким чином, для визначення положення миттєвого центра швидкостей треба знати не тільки напрями швидкостей, а і їх величину.

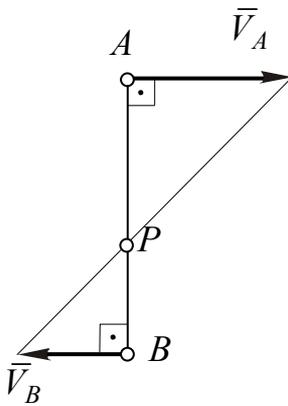


Рис. 4.9.

Випадок 5. Швидкості двох точок A і B тіла паралельні одна одній, перпендикулярні до відрізка AB , але напрямлені в різні боки (рис. 4.9).

Миттєвий центр швидкостей лежить на відрізку AB і ділить його на частини пропорційні швидкостям. Оскільки $BP = AB - AP$, то за формулою (4.6) можна записати:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP} = \frac{AP}{AB + AP}$$

Розв'язавши рівняння відносно AP , дістанемо:

$$AP = \frac{V_A(AB)}{V_A + V_B} \quad (4.9)$$

Таким чином, для знаходження положення миттєвого центра швидкостей треба знати величини і напрями швидкостей обох точок.

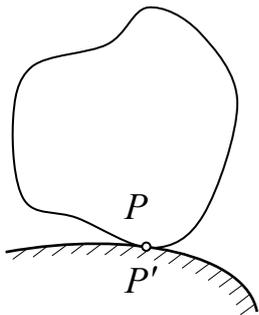


Рис. 4.10.

Випадок 6. Тіло котиться без проковзування по нерухомій поверхні (рис.4.10).

В цьому випадку миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P дотику тіла до поверхні. Дійсно, якщо відсутнє ковзання тіла відносно поверхні, то швидкості точок дотику тіла і поверхні повинні бути однаковими. Але швидкості точки P' , що належить нерухомій поверхні, дорівнює нулю.

Тоді і швидкість точки P , якою в даний момент часу рухоме тіло дотикається до нерухомої поверхні, теж дорівнює нулю.

5.5.3. Порядок розв'язування задач

а) *розв'язання графоаналітичним методом:*

- обрати за полюс ту точку тіла, швидкість якої відома за величиною і напрямом або легко визначається з умов задачі;
- знайти точку тіла, напрям швидкості якої відомий;
- користуючись формулами плоского руху, знайти швидкість цієї точки;
- визначити кутову швидкість тіла в даний момент часу;
- за відомою кутовою швидкістю і швидкістю полюса, користуючись формулами плоского руху, знайти швидкості інших точок тіла.

б) *розв'язання за допомогою миттєвого центра швидкостей:*

- визначити положення миттєвого центра швидкостей одним з відомих способів;
- визначити значення миттєвого радіуса тієї точки тіла, швидкість якої відома, та знайти кутову швидкість тіла;
- знайти швидкості інших точок тіла.

5.5.4. Контрольні запитання

1. Який рух тіла називають плоским?
2. Як визначити швидкість будь якої точки тіла при поступальному русі?
3. Яка точка називається миттєвим центром швидкостей?
4. Яким способом можна знайти положення миттєвого центра швидкостей?

5.5.5. Приклади розв'язування задач

ЗАДАЧА №1

Стрижень AB (рис.4.11) довжиною 2 м виконує плоский рух. Вектор швидкості точки A утворює кут 30° з віссю стрижня і в даний момент часу дорівнює 5 м/с . Вектор швидкості точки B у цей же момент часу утворює кут 60° з віссю стрижня.

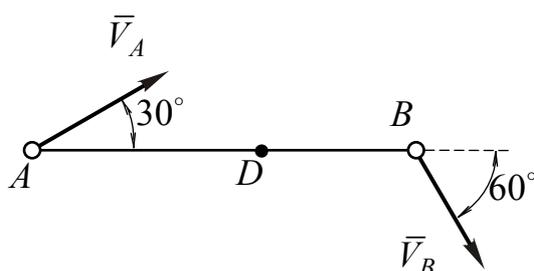


Рис. 4.11.

Визначити величину швидкості точки B , положення миттєвого центра швидкостей, кутову швидкість стрижня та швидкість точки D , яка лежить на середині стрижня.

Розв'язання задачі графоаналітичним способом.

1. За полюс оберемо точку A (рис.4.11), оскільки відомі напрям і величина швидкості цієї точки.

2. Використовуючи формулу розподілення швидкостей при плоскому русі, запишемо векторне рівняння для визначення швидкості точки B :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (1)$$

де \vec{V}_A – швидкість полюса точки A ;

\vec{V}_{BA} – відносна швидкість точки B у її відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса A .

Дане векторне рівняння можна розв'язати побудовою векторного трикутника швидкостей (рис. 4.12). Для цього з довільної точки площини O треба побудувати праву і ліву частину векторного рівняння (1).

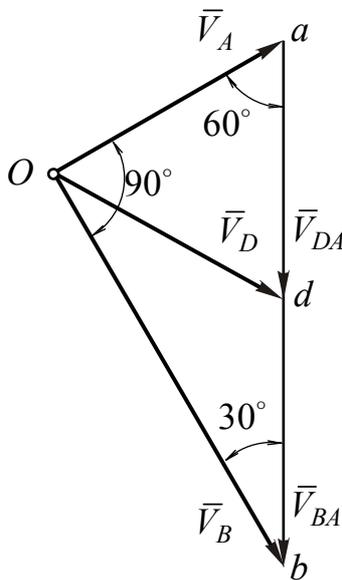


Рис. 4.12.

При побудові правої частини рівняння (1) з точки O в довільному масштабі відкладемо вектор швидкості \vec{V}_A , який є відомим і за величиною і за напрямом. До вектора \vec{V}_A треба додати вектор відносної швидкості \vec{V}_{BA} , напрям якого є відомим, оскільки швидкість точки B у її відносному обертальному русі навколо полюса A перпендикулярна до радіуса обертання, в даному випадку радіус обертання – відрізок AB . Величина вектора \vec{V}_{BA} невідома і тому через точку "a" проводиться тільки його напрям (пряма ab рис. 4.12).

Тепер з точки O побудуємо ліву частину рівняння (1). Напрямок швидкості точки B є відомим (за умовою задачі), але невідома її величина, і тому, з точки O проводимо лінію паралельну до \vec{V}_B .

Точка "b" перетину прямих, паралельних до \vec{V}_{BA} та \vec{V}_B , і буде рішенням даного векторного рівняння.

В результаті побудови отримали замкнений трикутник швидкостей, сторони якого в обраному масштабі визначають шукану швидкість точки B і відносну швидкість цієї ж точки при її обертанні разом з тілом навколо полюса A .

В цьому трикутнику відомі всі кути і одна сторона \vec{V}_A . З трикутника Oab знаходимо:

$$V_{BA} = \frac{V_A}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ м/с};$$

$$V_B = V_A \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} = 8,65 \text{ м/с}.$$

3. Визначимо кутову швидкість обертання стержня AB . Оскільки $V_{BA} = \omega \cdot (AB)$, то :

$$\omega = \frac{V_{BA}}{(AB)} = \frac{10}{2} = 5 \text{ рад/с}.$$

4. Знайдемо швидкість точки D , що лежить посередині відрізка AB . Для цього запишемо формулу для швидкості точки D відносно того ж самого полюса точки A :

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}, \quad (2)$$

де \vec{V}_A – швидкість полюса точки A ;

\vec{V}_{DA} – відносна швидкість точки D у її відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса A .

Швидкість \vec{V}_{DA} має той же напрям, що і \vec{V}_{BA} , а за модулем дорівнює:

$$V_{DA} = \omega(AD) = \omega \frac{(AB)}{2} = \frac{1}{2} V_{BA} = 5 \text{ м/с}.$$

Відклавши від точки "a" (рис.4.12) вектор \vec{V}_{DA} , рівний половині вектора \vec{V}_{BA} , отримаємо точку "d". Вектор, що проведений з точки початку побудови (точки O) в точку "d" зображає швидкість \vec{V}_D точки D .

Оскільки сторони Oa та ad трикутника Oad рівні між собою ($V_A = V_{DA} = 5 \text{ м/с}$) і кут між ними 60° , то трикутник рівносторонній. Таким чином: $V_D = 5 \text{ м/с}$.

Розв'язання задачі за допомогою миттєвого центра швидкостей

1. Визначимо положення миттєвого центра швидкостей. Для цього з точок A і B (рис. 4.13) проведемо перпендикуляри до швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B . Перетин цих перпендикулярів (точка P) буде миттєвим центром швидкостей.

2. Визначимо миттєві радіуси. Оскільки трикутник ABP прямокутний, то:

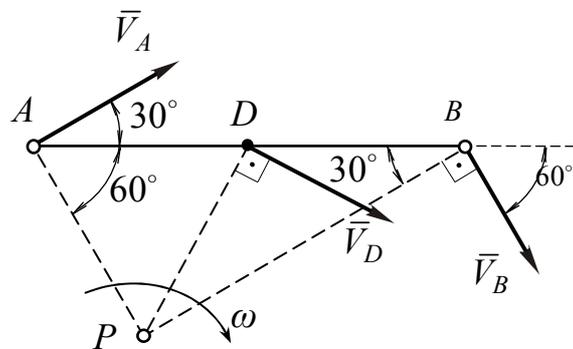


Рис. 4.13.

$$AP = (AB) \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м};$$

$$BP = (AB) \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ м.}$$

3. Обчислимо кутову швидкість обертання фігури навколо миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{V_A}{(AB)} = \frac{5}{1} = 5 \text{ рад/с.}$$

4. Знайдемо швидкості точок B і D :

$$V_B = \omega \cdot (BP) = 5 \cdot 1,73 = 8,65 \text{ м/с};$$

$$V_D = \omega(DP) = 5 \cdot 1 = 5 \text{ м/с},$$

де DP – миттєвий радіус точки B , оскільки трикутник ABP рівносторонній ($AD = AP$ і кут між ними 60°), то $DP = 1 \text{ м}$.

Якщо треба було б визначити тільки величину швидкості \vec{V}_B , то можна було б скористатися теоремою про рівність проєкцій двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки:

$$V_A \cos 30^\circ = V_B \cos 60^\circ.$$

Тоді:

$$V_B = V_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 5 \frac{0,866}{0,5} = 8,65 \text{ м/с.}$$

Відповідь: $V_B = 8,65 \text{ м/с}$; $V_D = 5 \text{ м/с}$; $\omega = 5 \text{ рад/с}$.

Задача №2

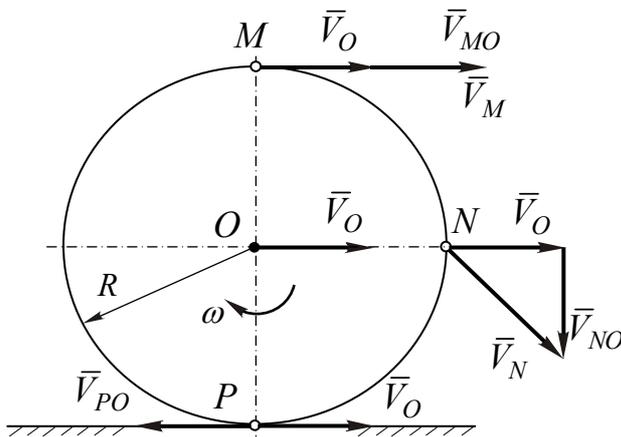


Рис. 4.14.

Колесо радіусом $R = 2 \text{ м}$ котиться по горизонтальній поверхні. В момент часу, що розглядається, швидкість центра $V_0 = 3 \text{ м/с}$ і кутова швидкість колеса $\omega = 2 \text{ рад/с}$ (рис. 4.14).

Визначити: швидкості точок M , P і N , які лежать на кінцях вертикального і горизонтального діаметрів.

Розв'язування.

1. В якості полюса оберемо точку O , напрям і величина швидкості якої відомі.

2. Використовуючи формулу розподілення швидкостей точок тіла при плоскому русі визначаємо швидкості інших точок колеса.

Для точки M колеса:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{V}_{MO}, \quad (1)$$

де \vec{V}_{MO} – відносна швидкість точки M у її відносному обертовому русі навколо полюса O .

За модулем V_{MO} дорівнює:

$$V_{MO} = \omega(OM) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Швидкість \vec{V}_{MO} напрямлена перпендикулярно до MO в бік кутової швидкості, тобто за напрямом \vec{V}_{MO} і \vec{V}_O будуть збігатися.

З точки M (рис.4.14) будемо рівняння (1): відкладаємо вектор \vec{V}_O , а з його кінця за тим же напрямом \vec{V}_{MO} .

Тоді:

$$V_M = V_O + V_{MO} = 3 + 4 = 7 \text{ м/с}.$$

Векторне рівняння для визначення швидкості точки P , буде мати вигляд:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{PO}, \quad (2)$$

де \vec{V}_{PO} – швидкість точки P у її обертовому русі навколо полюса O .

Ця швидкість паралельна швидкості \vec{V}_O , але буде напрямлена в протилежний бік, і за модулем дорівнює:

$$V_{PO} = \omega \cdot (OP) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

З точки P (рис.4.14) будемо векторне рівняння (2): відкладаємо вектор \vec{V}_O , а з його кінця в протилежний бік \vec{V}_{PO} .

Оскільки вектори колінеарні, то:

$$V_P = 3 - 4 = -1 \text{ м/с}.$$

Таким чином, швидкість точки P дорівнює 1 м/с і напрямлена в протилежний бік від \vec{V}_O . Колесо котиться з ковзанням по поверхні.

Складаємо векторне рівняння для визначення швидкості точки N :

$$\vec{V}_N = \vec{V}_O + \vec{V}_{NO}, \quad (3)$$

де \vec{V}_{NO} – відносна швидкість точки N у її відносному обертовому русі навколо полюса O .

За модулем \vec{V}_{NO} дорівнює:

$$V_{NO} = \omega \cdot (ON) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Швидкість \vec{V}_{NO} напрямлена перпендикулярно до NO в бік кутової швидкості ω , тобто вертикально униз.

З точки N (рис.4.14) будемо рівняння (3): відкладаємо вектор \vec{V}_O , а з його кінця вектор \vec{V}_{NO} вертикально униз. З'єднавши точку N з кінцем вектора \vec{V}_{NO} дістанемо вектор \vec{V}_N швидкості точки N .

Оскільки вектори \vec{V}_O і \vec{V}_{NO} між собою перпендикулярні, то вектор \vec{V}_N є гіпотенузою прямокутного трикутника:

$$V_N = \sqrt{V_O^2 + V_{NO}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $V_M = 7 \text{ м/с}$; $V_P = 1 \text{ м/с}$; $V_N = 5 \text{ м/с}$.

Задача №3

Колесо радіусом $R = 2 \text{ м}$ котиться без проковзування по горизонтальній поверхні з швидкістю центра колеса $V_O = 4 \text{ м/с}$.

Визначити: швидкості точок M , N , L (рис. 4.15).

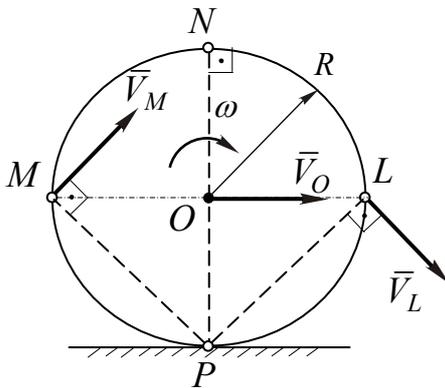


Рис. 4.15.

Розв'язування. Розв'яжемо задачу за допомогою миттєвого центра швидкостей.

1. Визначимо положення миттєвого центра швидкостей. Оскільки колесо котиться по нерухомій поверхні, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P дотику колеса до нерухомої поверхні.

2. Миттєвий радіус для точки O дорівнює OP . Тоді з формули (4.4) дістанемо кутову швидкість ω колеса:

$$\omega = \frac{V_O}{(OP)} = \frac{V_O}{R} = \frac{4}{2} = 2 \text{ п/с}.$$

Напрявлена кутова швидкість за ходом годинникової стрілки.

3. Визначимо величину і напрям швидкостей точок M , N , L .

З'єднаємо точки M , N , L з миттєвим центром швидкостей P . Вектори швидкостей \vec{V}_M , \vec{V}_N і \vec{V}_L будуть напрямлені перпендикулярно миттєвим радіусам MP , NP і LP , відповідно.

За модулем швидкості будуть дорівнювати:

$$V_M = V_L = \omega \cdot (MP) = 2\sqrt{2}R = 4\sqrt{2} \text{ м/с};$$

$$V_N = \omega \cdot (NP) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ м/с},$$

де

$$(MP) = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ м}; \quad (NP) = 2R = 4 \text{ м}.$$

Відповідь: $V_M = V_L = 4\sqrt{2} \text{ м/с}$; $V_N = 8 \text{ м/с}$.

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 16.2; 16.4; 16.11; 16.12 [2].

5.5. Тема 4. ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА (продовження)

ЗАНЯТТЯ № 6

Визначення прискорень точок тіла

Зміст

- 5.6.1. Прискорення точок плоскої фігури.
- 5.6.2. Порядок розв'язування задач.
- 5.6.3. Контрольні запитання.
- 5.6.4. Приклади розв'язування задач.

5.6.1. Прискорення точок плоскої фігури

Формула розподілення прискорень при плоскому русі тіла має вигляд:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \quad (4.10)$$

де \bar{a}_A – прискорення полюсу, точки A , в поступальному русі;

\bar{a}_{MA} – відносне прискорення точки M у її оберտальному русі разом з тілом навколо полюса A ;

\bar{a}_M – прискорення будь-якої точки M тіла.

Прискорення будь-якої точки M плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення точки, яку обрано за полюс, і прискорення точки M при її обертанні разом з тілом навколо цього полюса.

Графічне визначення прискорення точки M виконується наступним чином (рис.4.16):

- З точки M відкладають вектор \bar{a}_A , який дорівнює прискоренню полюса A ;
- Під кутом μ до AM проводять вектор \bar{a}_{MA} , відхилений в бік кутового прискорення ε , причому

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}; \quad a_{MA} = (MA) \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4.11)$$

- Модуль і напрям прискорення \bar{a}_M визначається діагоналлю паралелограма, який побудовано на векторах \bar{a}_A і \bar{a}_{MA} як на сторонах.

Обчислення величини прискорення точки M за допомогою розглянутого паралелограма ускладнює розрахунки, оскільки попередньо треба визначити кут між векторами \bar{a}_{MA} і \bar{a}_A .

Враховуючи те, що \bar{a}_{MA} являє собою відносно прискорення точки M у її відносному обертальному русі навколо полюса A , то це прискорення можна розкласти на відносну тангенціальну (дотичну) і відносну нормальну (доцентрову) складові:

$$\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^n, \quad (4.12)$$

де

$$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot (AM);$$

$$a_{MA}^n = \omega^2 \cdot (AM).$$

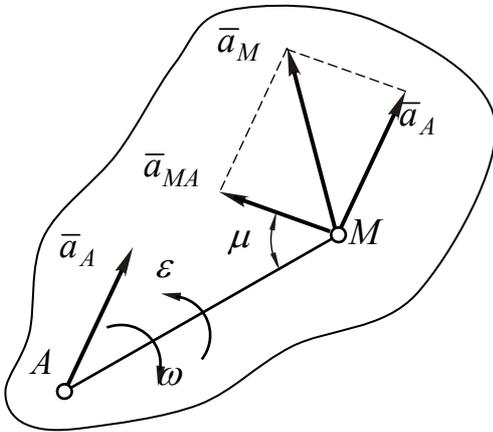


Рис. 4.16.

Вектор \bar{a}_{MA}^{τ} напрямлений перпендикулярно до AM в бік кутового прискорення, а вектор \bar{a}_{MA}^n завжди напрямлений від точки M до обраного полюса A (рис. 4.17).

Тоді рівняння (4.10) набуде вигляду:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^{\tau}. \quad (4.13)$$

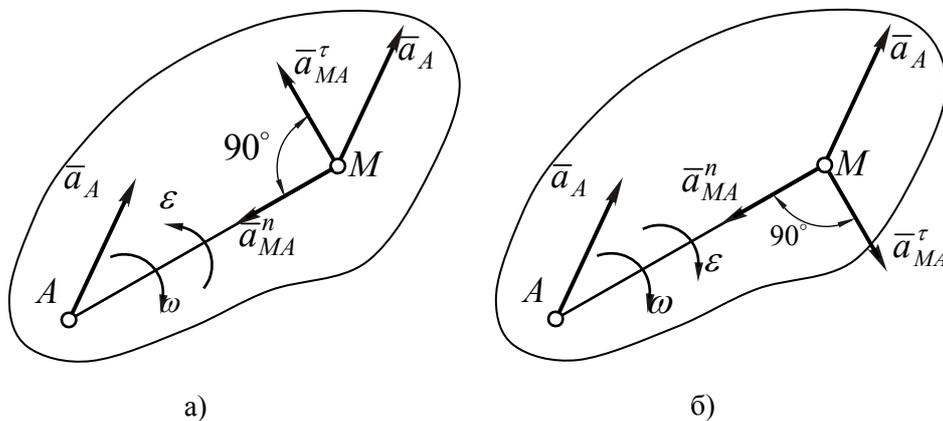


Рис. 4.17.

Якщо точка A , яка обрана за полюс поступального руху, рухається не прямолінійно, то її прискорення, в свою чергу, теж можна розкласти на тангенціальну \bar{a}_A^{τ} і нормальну \bar{a}_A^n складові:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^{\tau}.$$

5.6.2. Порядок розв'язування задач

1. Обрати точку, яка буде полюсом при запису рівняння плоского руху (як правило обирають точку, прискорення якої відоме).
2. Записати векторне рівняння розподілення прискорень.
3. Спроектувати рівняння розподілення прискорень на дві взаємно перпендикулярні осі, одна з яких збігається з нормальним прискоренням, а друга – з тангенціальним.
4. Визначити миттєве кутове прискорення плоскої фігури.
5. Знайти шукані прискорення точок за допомогою рівняння розподілення прискорень.

5.6.3. Контрольні запитання

1. Яку точку треба обирати за полюс для визначення прискорень точок плоскої фігури?
2. Запишіть формулу розподілення прискорень точок плоскої фігури.
3. Як обчислити модуль нормального прискорення?
4. Як обчислити модуль тангенціального прискорення?
5. Як напрямлений вектор нормального прискорення?
6. Як визначити напрям тангенціального прискорення?

5.6.4. Приклади розв'язування задач

ЗАДАЧА №1

Прямокутна (рис. 4.18, а) пластина $ABCD$ рухається в площині креслення. Прискорення точки A в даний момент часу дорівнює 2 м/с^2 і утворює з прямою AB кут 30° .

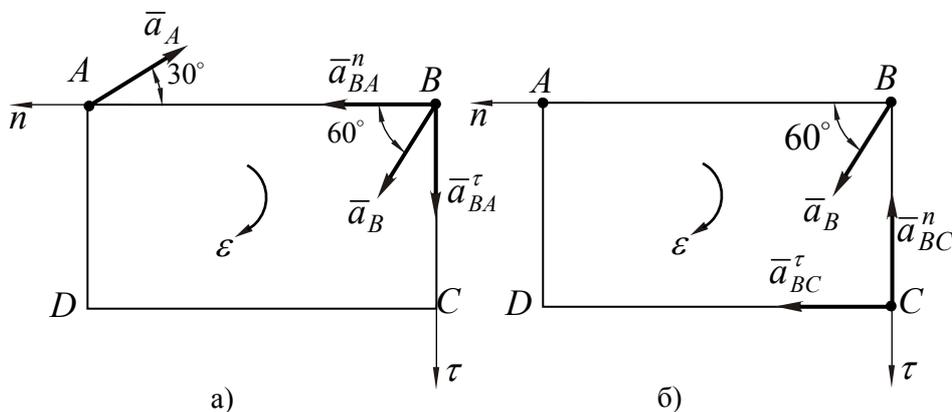


Рис. 4.18.

Прискорення точки B складає 6 м/с^2 і утворює кут 60° з прямою BA .

Визначити миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення пластини, та прискорення точки C , якщо $AB = 0,1 \text{ м}$, $BC = 0,05 \text{ м}$.

Розв'язування.

1. Оберемо за полюс точку A , оскільки її прискорення відоме (задано у вихідних даних).

2. Складемо векторне рівняння для прискорення точки B пластини:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (1)$$

де \bar{a}_{BA}^n – відносне нормальне прискорення точки B у її обертальному русі разом з тілом навколо точки A . Вектор цього прискорення напрямлений від точки B до точки A і за модулем дорівнює: $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot (AB)$;

\bar{a}_{BA}^τ – відносне тангенціальне (дотичне) прискорення точки B у її обертанні разом з тілом навколо точки A . Направлений вектор цього прискорення перпендикулярно до AB в бік кутового прискорення і за модулем дорівнює $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot (AB)$.

Оскільки напрям кутового прискорення невідомий, то напрямом \bar{a}_{BA}^τ на рис. 4.18,а задаємося.

3. Спроектуємо складене рівняння (1) на осі Bn і $B\tau$.

В проекції на вісь Bn дістанемо:

$$a_B \cos 60^\circ = -a_A \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (2)$$

В проекції на вісь $B\tau$:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A \cos 60^\circ + a_{BA}^\tau. \quad (3)$$

4. З рівняння (2) дістанемо величину нормального прискорення:

$$a_{BA}^n = a_A \cos 30^\circ + a_B \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,866 + 6 \cdot 0,5 = 4,73 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо миттєву кутову швидкість фігури:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{BA}^n}{(AB)}} = \sqrt{\frac{4,73}{0,1}} = 6,88 \text{ рад/с}.$$

5. З рівняння (3) дістанемо величину тангенціального прискорення:

$$a_{BA}^\tau = a_B \cos 30^\circ + a_A \cos 60^\circ = 6 \cdot 0,866 + 2 \cdot 0,5 = 6,2 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення фігури:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^\tau}{(AB)} = \frac{6,2}{0,1} = 62 \text{ рад/с}^2.$$

Оскільки величина \bar{a}_{BA}^{τ} додатна, то напрям тангенціального, а відповідно і кутового, прискорень обрано вірно.

6. Визначимо прискорення точки C .

Для обчислення прискорення точки C краще за полюс обрати точку B , оскільки прискорення цієї точки вже відоме і задана сторона BC прямокутника:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^{\tau}.$$

Напрямок векторів \bar{a}_{CB}^n і \bar{a}_{CB}^{τ} показано на рис. 4.18, б.

Спроектуємо записане рівняння на осі Bn і $B\tau$:

$$a_{Cn} = a_B \cos 60^\circ + a_{CB}^{\tau} = 6 \cdot 0,5 + 3,1 = 6,1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{C\tau} = a_B \sin 60^\circ - a_{CB}^n = 6 \cdot 0,866 - 2,36 = 2,84 \text{ м/с}^2,$$

де

$$a_{CB}^{\tau} = \varepsilon \cdot (CB) = 62 \cdot 0,05 = 3,1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CB}^n = \omega \cdot (CB) = 6,88^2 \cdot 0,05 = 2,36 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки C :

$$a_C = \sqrt{a_{Cn}^2 + a_{C\tau}^2} = \sqrt{6,1^2 + (2,84)^2} = 6,7 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $\omega = 0,69 \text{ рад/с}; \varepsilon = 0,62 \text{ рад/с}^2; a_C = 6,7 \text{ м/с}^2.$

ЗАДАЧА №2

Рівносторонній трикутник ABC рухається в площині креслення. Прискорення вершин A та B в даний момент часу дорівнюють 16 м/с^2 і напрямлені вздовж сторін трикутника (рис. 4.19).

Визначити прискорення вершини C .

Розв'язання. Якщо відомі прискорення двох точок плоскої фігури, наприклад A і B , то задачу рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

1. Розглядаючи першу точку A як полюс поступального руху, записати векторне рівняння розподілення прискорень при плоскому русі для точки B і спроектувати це рівняння на пряму AB , що з'єднує обидві точки.

2. З рівняння проєкцій визначити величину нормального прискорення a_{BA}^n і значення кутової швидкості фігури ω .

3. Спроектувати векторне рівняння розподілення прискорень при плоскому русі на пряму, яка перпендикулярна до AB , та визначити з рівняння проєкцій величину тангенціального прискорення \bar{a}_{BA}^{τ} і значення кутового прискорення фігури ε .

4. Якщо треба, то, використовуючи формулу розподілення прискорень при плоскому русі, визначити прискорення будь-якої іншої точки плоскої фігури.

Розв'яжемо задачу, дотримуючись наведеної послідовності.

1. Оберемо за полюс точку A . Для точки B трикутника можна записати:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (1)$$

де \bar{a}_{BA}^n – відносне нормальне прискорення точки B у її відносному обертальному русі навколо точки A , напрямлене вздовж BA від точки B до точки A ;

\bar{a}_{BA}^τ – відносне тангенціальне прискорення точки B в її відносному обертальному русі навколо точки A , напрямлене перпендикулярно до BA , напрямом задаємося (рис. 4.19).

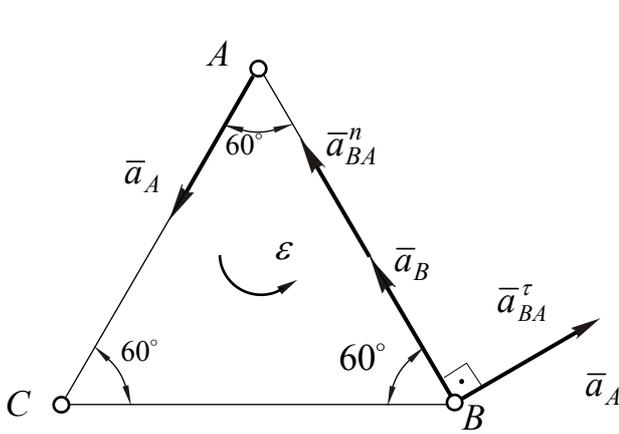


Рис. 4.19.

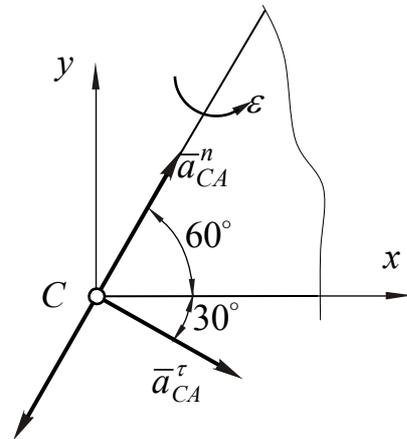


Рис. 4.20.

Спроекуємо записану рівність (1) на пряму AB :

$$-a_B = a_A \cos 60^\circ - a_{BA}^n + 0.$$

2. Звідки:

$$a_{BA}^n = a_B + a_A \cos 60^\circ = 16 + 16 \cdot 0,5 = 24 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot (BA)$, то:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{BA}^n}{(BA)}} = \sqrt{\frac{24}{(BA)}} \text{ рад/с}$$

3. Спроекуємо векторне рівняння на пряму, що перпендикулярна до AB :

$$0 = a_A \sin 60^\circ + 0 - a_{BA}^\tau.$$

Звідки:

$$a_{BA}^\tau = a_A \sin 60^\circ = 16 \cdot 0,866 = 13,86 \text{ м/с}^2.$$

Враховуючи те, що $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot (BA)$, отримаємо:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{\tau}}{(BA)} = \frac{13,86}{(BA)} \text{ рад/с}^2.$$

Оскільки величина тангенціального прискорення \bar{a}_{BA}^{τ} додатна, то його напрям на рис. 4.19 обрано вірно. Звідси випливає, що кутове прискорення направлене проти ходу годинникової стрілки.

4. Визначимо прискорення точки C , прийнявши за полюс точку A :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^{\tau}, \quad (2)$$

де \bar{a}_{CA}^n – відносне нормальне прискорення точки C у її відносному обертальному русі навколо точки A , направлене вздовж CA від точки C до точки A ;

\bar{a}_{CA}^{τ} – відносне тангенціальне прискорення точки C у її відносному обертальному русі навколо точки A , направлене перпендикулярно до CA в бік кутового прискорення фігури ε .

Враховуючи, що $CA = BA$, визначимо модулі відносного нормального і тангенціального прискорень:

$$a_{CA}^n = \omega^2 \cdot (CA) = \frac{24}{(BA)} \cdot (CA) = 24 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon \cdot (CA) = \frac{13,86}{(BA)} \cdot (CA) = 13,86 \text{ м/с}^2.$$

Від точки C (рис.4.20) відкладемо вектори прискорень, які складають праву частину рівняння (2).

Оберемо систему координат xCy , причому вісь Cx напрямимо вздовж сторони CB трикутника.

Спроектуємо рівність (2) на осі обраної системи координат:

$$a_{Cx} = -a_A \cos 60^\circ + a_{CA}^n \cos 60^\circ + a_{CA}^{\tau} \cos 30^\circ;$$

$$a_{Cy} = -a_A \sin 60^\circ + a_{CA}^n \sin 60^\circ - a_{CA}^{\tau} \sin 30^\circ.$$

Підставляючи числові дані, дістанемо:

$$a_{Cx} = -16 \cdot 0,5 + 24 \cdot 0,5 + 13,86 \cdot 0,866 = 16 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -16 \cdot 0,866 + 24 \cdot 0,866 - 13,86 \cdot 0,5 = 0.$$

Таким чином, прискорення вершини C трикутника дорівнює:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 16 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки проекція прискорення \bar{a}_C на вісь Cy дорівнює нулю і величина проекції на вісь Cx додатна, то вектор прискорення точки C буде напрямлений вздовж сторони CB трикутника від точки C до точки B .

Відповідь: $a_C = 16 \text{ м/с}^2$.

ЗАДАЧА № 3

В шарнірному механізмі (рис. 4.21) в даний момент часу кутова швидкість і кутове прискорення кривошипа OA дорівнюють $\omega_0 = \pi \text{ рад/с}$; $\varepsilon_0 = 0,2\pi \text{ рад/с}^2$. Точка B механізму рухається по дузі кола радіусом $O_1B = R = 0,3 \text{ м}$ і в момент часу, що розглядається, лежить на прямій OB .

Знайти прискорення точки B і миттєве кутове прискорення шатуна AB , якщо $AB = 0,4 \text{ м}$, $OA = 0,2 \text{ м}$.

Розв'язання. Швидкість точки A кривошипа, який обертається навколо точки O , дорівнює:

$$V_A = \omega_0 \cdot (OA) = 0,2\pi \text{ м/с}.$$

Напрявлена швидкість \bar{V}_A перпендикулярно до OA в бік кутової швидкості ω_0 (рис. 4.21).

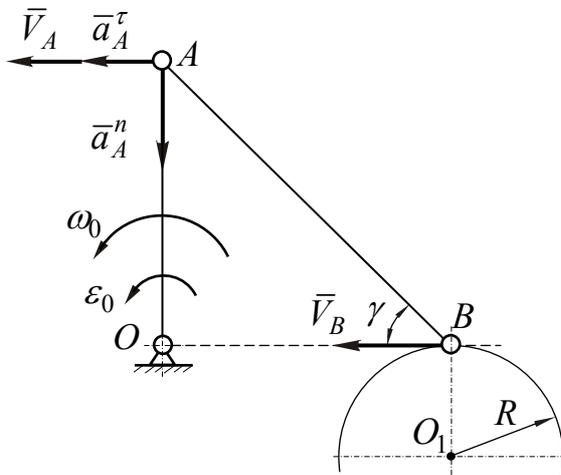


Рис.4.21.

Точка B шатуна обертається навколо центра O_1 і її лінійна швидкість напрямлена перпендикулярно до BO_1 .

Оскільки швидкості точок A та B шатуна паралельні, то миттєвий центр швидкостей шатуна лежить в нескінченності і миттєвий рух шатуна є поступальним, тобто

$$\omega_{AB} = 0 \quad \text{і} \quad \bar{V}_B = \bar{V}_A.$$

Прискорення точки A дорівнює геометричній сумі нормального і тангенціального прискорень:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau,$$

де

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot (AO) = 0,2\pi^2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot (AO) = 0,2 \cdot 0,2\pi = 0,04\pi \text{ м/с}^2.$$

Напрями прискорень \bar{a}_A^n і \bar{a}_A^τ показані на рис.4.21.

Оберемо точку A за полюс для шатуна AB . Тоді для точки B шатуна:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

або

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (1)$$

де \bar{a}_{BA}^n – відносне нормальне прискорення точки B у її відносному обертальному русі навколо точки A , напрямлене вздовж BA від точки B до точки A , $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot (BA) = 0$;

\bar{a}_{BA}^τ – відносне тангенціальне прискорення точки B у її відносному обертальному русі навколо точки A , напрямлене перпендикулярно до BA , напрямом задаємося (рис. 4.22), $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$.

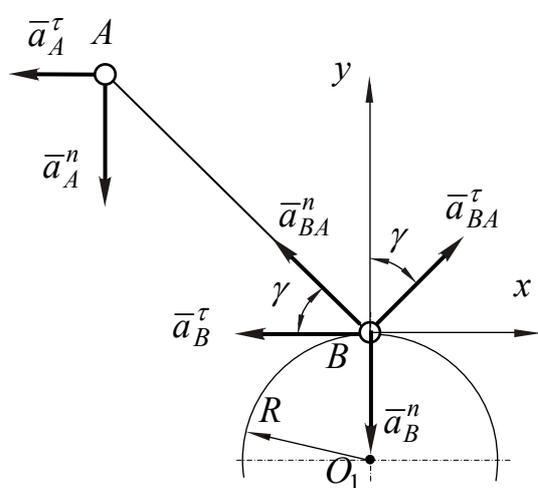


Рис. 4.22.

Пов'яжемо з точкою B прямокутну систему координат xBy (рис.4.22) і спроектуємо рівняння (1), пам'ятаючи, що $a_{BA}^n = 0$, на осі обраної системи координат:

$$a_{Bx} = -a_A^\tau + a_{BA}^\tau \cdot \sin \gamma; \quad (2)$$

$$a_{By} = -a_A^n + a_{BA}^\tau \cdot \cos \gamma. \quad (3)$$

З іншого боку, при русі точки B по дузі кола радіуса R , точка набуде прискорення \bar{a}_B :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau, \quad (4)$$

де \bar{a}_B^n – нормальне прискорення точки B у її обертальному русі навколо точки O_1 , напрямлене до центра обертання;

\bar{a}_B^τ – тангенціальне прискорення точки B у її обертальному русі навколо точки O_1 , напрямлене перпендикулярно до O_1B , напрямом задаємося (рис. 4.22).

За величиною нормальне \bar{a}_B^n і тангенціальне \bar{a}_B^τ прискорення відповідно дорівнюють:

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{R} = \frac{(0,2\pi)^2}{0,3} = \frac{0,4}{3} \pi^2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B^\tau = \varepsilon R.$$

Спроектуємо рівняння (4) на осі обраної системи координат:

$$a_{Bx} = -a_B^\tau; \quad (5)$$

$$a_{By} = -a_B^n = -\frac{0,4}{3}\pi^2 \quad \text{м/с}^2. \quad (6)$$

Підставимо в (3) усі обраховані величини:

$$-\frac{0,4}{3}\pi^2 = -0,2\pi^2 + a_{BA}^\tau \cos \gamma.$$

Оскільки

$$\sin \gamma = \frac{OA}{AB} = 0,5 \Rightarrow \gamma = 30^\circ \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

то

$$a_{BA}^\tau = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(0,2\pi^2 - \frac{0,4}{3}\pi^2 \right) = \frac{0,4\pi^2}{3\sqrt{3}} = 0,77 \quad \text{м/с}^2.$$

Додатне значення величини a_{BA}^τ вказує на те, що напрям \vec{a}_{BA}^τ був обраний вірно.

Кутове прискорення тіла AB дорівнює:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{(AB)} = \frac{0,4\pi^2}{3\sqrt{3} \cdot 0,4} = 0,192\pi^2 = 1,9 \text{ рад/с}^2.$$

Кутове прискорення ε_{AB} напрямлене в бік \vec{a}_{BA}^τ , тобто проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення тангенціального прискорення \vec{a}_B^τ в рівняння (2) підставимо \vec{a}_{Bx} з (5):

$$-a_B^\tau = -a_A^\tau + a_{BA}^\tau \sin \gamma.$$

Звідки

$$a_B^\tau = a_A^\tau + a_{BA}^\tau \sin \gamma = 0,04\pi - \frac{0,4\pi^2}{3\sqrt{3}} \cdot 0,5 = -0,254 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки величина a_B^τ від'ємна, то напрям тангенціального прискорення \vec{a}_B^τ обрано не в той бік.

Повне прискорення точки B :

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{0,77^2 + (-0,254)^2} = 0,81 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $a_B = 0,81 \text{ м/с}^2$; $\varepsilon_{AB} = 1,9 \text{ рад/с}^2$.

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 18.12; 18.14; 18.22 [2].

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика. – М.: Высшая школа, 1972. – 436 с.
4. Каплунова А.В., Михаловський В.А. та ін. Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки. – К.: Держсільгоспосвіта, 1961. – 365 с.
5. Савин Г.Н., Путьята Т.В., Фрадлин Б.Н. Теоретическая механика. – К.: Вища школа, 1971. – 359 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1972. – 258 с.
7. Дроннік Ю.М., Кучеренко С.І., Тіщенко А.М. Теоретична механіка. Курс лекцій. – Харків: Око, 2002. – 456 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под общ. ред. проф. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1978. – 326 с.
9. Булгаков В.М., Литвинов О.І., Войтюк Д.Г. Інженерна механіка. Частина 1. Теоретична механіка. Підручник. – Вінниця.: Нова книга, 2006. – 502 с.
10. Булгаков В.М., Литвинов О.І., Васьков В.І., Головач І.В., Войтюк Д.Г. Теоретична механіка. Курс лекцій. Частина I. – К.: НАУ, 2003. – 368 с.
11. Булгаков В.М., Литвинов О.І., Васьков В.І., Головач І.В., Войтюк Д.Г. Теоретична механіка. Курс лекцій. Частина II. – К.: НАУ, 2004. – 344 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Значення тригонометричних функцій кутів, що зустрічаються в схемах розрахунково-графічної роботи

Значення кута α , град	Тригонометрична функція		
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
12	0,208	0,978	0,213
15	0,259	0,966	0,268
20	0,3429	0,940	0,364
25	0,423	0,906	0,466
28	0,469	0,883	0,532
30	0,5	0,866	0,577
31	0,515	0,857	0,601
32	0,530	0,848	0,625
33	0,545	0,839	0,650
35	0,574	0,819	0,700
40	0,643	0,766	0,839
45	0,707	0,707	1,0
55	0,819	0,574	1,428
60	0,866	0,5	1,732
70	0,940	0,342	2,747
75	0,966	0,259	3,732
80	0,985	0,174	5,671
90	1,0	0	-

Додаток 2

I. Основні формули диференціювання за часом

1. $y = C$; $\dot{y} = 0$; (C – стала величина).

2. $y = t$; $\dot{y} = 1$; (t – час).

3. $y = t^n$; $\dot{y} = nt^{n-1}$.

4. $y = \sqrt{t}$; $\dot{y} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

5. $y = \frac{1}{t}$; $\dot{y} = -\frac{1}{t^2}$.

6. $y = a^t$; $\dot{y} = a^t \ln a$.

7. $y = e^t$; $\dot{y} = e^t$.

8. $y = \log_a t$; $\dot{y} = \frac{\log_a e}{t} = \frac{1}{t \ln a}$.

9. $y = \ln t$; $\dot{y} = \frac{1}{t}$.

10. $y = \sin t$; $\dot{y} = \cos t$.

11. $y = \cos t$; $\dot{y} = -\sin t$.

12. $y = \operatorname{tg} t$; $\dot{y} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$.

13. $y = \operatorname{ctg} t$; $\dot{y} = -\frac{1}{\sin^2 t} = -\operatorname{csc}^2 t$.

14. $y = \arcsin t$; $\dot{y} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

15. $y = \arccos t$; $\dot{y} = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

16. $y = \operatorname{arctg} t$; $\dot{y} = \frac{1}{1+t^2}$.

17. $y = \operatorname{arcctg} t$; $\dot{y} = -\frac{1}{1+t^2}$.

18. $y = \frac{1}{\sin t}$; $\dot{y} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}$.

$$19. y = \frac{1}{\cos t}; \quad \dot{y} = -\frac{\sin t}{\cos^2 t}.$$

II. Загальні правила диференціювання за часом

u, v – функції часу

1. $y = Cu; \quad \dot{y} = C\dot{u};$ (C – стала величина).
2. $y = u \pm v; \quad \dot{y} = \dot{u} \pm \dot{v}.$
3. $y = uv; \quad \dot{y} = \dot{u}v + u\dot{v}.$
4. $y = \frac{u}{v}; \quad \dot{y} = \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{v^2}.$
5. $y = \frac{C}{u}; \quad \dot{y} = -\frac{C}{u^2}\dot{u};$ (C – стала величина).
6. $y = u^n; \quad \dot{y} = nu^{n-1}\dot{u}.$

III. Таблиця інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C;$ (C – довільна стала).
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$ ($n \neq -1$).
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ ($a > 0; a \neq 1$).
6. $\int e^x dx = e^x + C.$
7. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
10. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

$$11. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$12. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$14. \int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{x^2+n}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+n} \right| + C.$$

IV. Правила інтегрування

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx; \quad (a \neq 0 - \text{стала величина}).$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ПО ВИВЧЕННЮ КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ	4
1. РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. Розділ "Статика"	6
2. ВСТУП. ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. СТРУКТУРА КУРСУ	8
3. СТАТИКА. АКсіОМИ СТАТИКИ. РЕАКЦІЇ В'ЯЗЕЙ	12
3.1. Предмет статички. Основні поняття і визначення	12
3.2. Задачі статички	12
3.3. АксіОМИ статички	14
3.4. Основні типи в'язей та їх реакції	17
3.5. Класифікація систем сил	20
4. ПЛОСКА СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ	21
4.1. Визначення рівнодійної системи збіжних сил. Геометричний спосіб додавання сил	21
4.2. Умова рівноваги плоскої системи збіжних сил у геометричній формі	22
4.3. Теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил	23
4.4. Проекція сили на вісь та на площину	24
4.5. Визначення сили за її проекціями	27
4.6. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь	28
4.7. Аналітичний спосіб додавання плоскої системи збіжних сил	29
4.8. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил в аналітичній формі	30
5. ТЕОРІЯ МОМЕНТІВ І ПАР СИЛ	32
5.1. Паралельні сили. Додавання двох паралельних сил	32
5.2. Момент сили відносно центра (точки). Алгебраїчна величина моменту сили	36
5.3. Момент сили відносно центра як вектор	38
5.4. Пара сил. Момент пари сил	41
5.5. Властивості пари сил	42

5.6. Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил, що розташовані в одній площині	43
6. ПЛОСКА СИСТЕМА ДОВІЛЬНИХ СИЛ	44
6.1. Теорема про паралельне перенесення сили	44
6.2. Зведення плоскої системи довільних сил до даного центра	45
6.2.1. Деякі випадки зведення плоскої системи довільних сил до даного центра	48
6.3. Теорема Варіньона про момент рівнодійної системи збіжних сил	48
6.4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил	51
6.5. Зосереджені сили та розподілені навантаження	53
6.6. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил	56
7. РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТІЛ	62
7.1. Статично означені та статично неозначені задачі	62
7.2. Методика розв'язування задач на рівновагу системи тіл	62
8. МЕТОДИКА ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ	66
9. ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА	87
9.1. Центр паралельних сил	87
9.2. Координати центра паралельних сил	89
9.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії	91
9.4. Визначення координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі	96
9.5. Способи визначення координат центра ваги тіла	100
9.5.1. Метод симетрії	100
9.5.2. Метод розбивання	101
9.5.3. Метод доповнення	102
9.5.4. Експериментальні способи	104
9.6. Центри ваги деяких однорідних тіл	106
9.6.1. Центр ваги дуги кола	106
9.6.2. Центр ваги трикутника	108
9.6.3. Центр ваги сектора	109
10. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ "ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА"	111
11. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ "ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ" ...	125

12. ТИПОВІ КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ПРИ ЗАХИСТІ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ 167

КІНЕМАТИКА

РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ. РОЗДІЛ КІНЕМАТИКА..... 170

1. ВСТУП. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ..... 171

1.1. Предмет кінематики..... 172

1.2. Кінематика матеріальної точки 175

1.2.1. Способи задання руху матеріальної точки 175

1.2.2. Векторний спосіб задання руху матеріальної точки..... 175

1.2.3. Координатний спосіб задання руху матеріальної точки .. 182

1.2.4. Траєкторія руху точки 183

1.2.5. Швидкість руху точки 186

1.2.6. Прискорення руху точки 189

Запитання для самоконтролю 191

1.2.7. Натуральний спосіб задання руху матеріальної точки 192

1.2.8. Перехід від координатного способу задання руху матеріальної точки до натурального способу..... 196

1.2.9. Натуральний тригранник 197

1.2.10. Кривизна кривої 198

1.2.11. Дотичне і нормальне прискорення точки у натуральних осях координат 201

1.2.12. Окремі випадки руху матеріальної точки 208

1. Прямолінійний рух 208

2. Рівномірний криволінійний рух 209

3. Рівнозмінний криволінійний рух 210

Запитання для самоконтролю 216

2. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА 218

2.1. Поступальний рух твердого тіла 218

2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Закон обертального руху 223

2.2.1. Кутова швидкість та кутове прискорення обертового тіла 225

2.2.2. Окремі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі ... 228

2.2.3. Кінематичні характеристики точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі 233

2.2.4. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення обертового тіла 239

2.2.5. Векторний вираз лінійної швидкості точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі 241

2.2.6. Векторний вираз нормального і тангенціального прискорень	248
2.2.7. Передача обертального руху	251
Запитання для самоконтролю	256
2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла	257
2.3.1. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний	259
2.3.2. Аналітичне дослідження плоскопаралельного руху тіла	262
2.3.3. Визначення швидкості точок плоскої фігури	265
2.3.4. Теорема про проекції швидкостей двох точок на лінію, що їх з'єднує	269
2.3.5. Визначення прискорення точки плоскої фігури.....	271
Запитання для самоконтролю	274
2.4. Графо-аналітичне дослідження плоскопаралельного руху тіла.....	275
2.4.1. Теорема про кінцеве переміщення плоскої фігури	275
2.4.2. Миттєвий центр швидкостей	278
2.4.3. Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей.....	280
2.4.4. Визначення швидкостей різних точок фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей.....	283
2.4.5. Миттєвий центр прискорень.....	290
2.4.6. Плани швидкостей та прискорень.....	294
2.4.7. Методика побудови планів швидкостей та прискорень ...	300
1. План швидкостей	301
2.План прискорень	305
Запитання для самоконтролю	308
2.5. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки (сферичний рух).....	309
2.5.1. Теорема Ейлера – Д'Аламбера.....	313
2.5.2. Кінематичні характеристики руху тіла навколо нерухомої точки	317
2.5.3. Швидкості і прискорення точок тіла у сферичному русі .	319
2.6. Рух вільного твердого тіла.....	323
Запитання для самоконтролю	327
3. СКЛАДНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	329
3.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи матеріальної точки.....	329

3.2. Теорема про додавання швидкостей у складному русі матеріальної точки.....	330
3.3. Теорема Коріоліса про додавання прискорень	334
Запитання для самоконтролю	338
3.4. Модуль, напрямок і фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса	339
3.5. Методика розв'язування задач на складний рух матеріальної точки.....	344
Запитання для самоконтролю	352
4. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	353
4.1. Додавання поступальних рухів твердого тіла.....	353
4.2. Додавання обертань тіла навколо двох паралельних осей	354
4.2.1. Додавання обертань, спрямованих в одну сторону.....	356
4.2.2. Додавання обертань, спрямованих в різні сторони.....	359
4.2.3. Пара обертань.....	361
4.3. Додавання обертань навколо осей, що перетинаються	365
4.4. Додавання поступального і обертального рухів.	369
4.4.1. Вектор швидкості руху і вісь обертання перпендикулярні	370
4.4.2. Гвинтовий рух	371
4.4.3. Вектор швидкості руху утворює довільний кут з віссю обертання.....	373
Запитання для самоконтролю	375
5. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ ІЗ КІНЕМАТИКИ	
Короткі теоретичні відомості. Методика і алгоритми розв'язування задач	377
5.1. Тема 1. Кінематика точки. Заняття №1. Координатний спосіб визначення руху	252
5.1.1. Траєкторія і рівняння руху точки.....	253
5.1.2. Визначення швидкості і прискорення точки при координатному способі.....	254
5.1.3. Порядок розв'язування задач із кінематики	255
5.1.4. Контрольні запитання	255
5.1.5. Приклади розв'язання задач	256
5.2. Тема 1. Кінематика точки (продовження). Заняття №2. Натуральний спосіб визначення руху точки.....	262
5.2.1. Натуральний спосіб завдання руху точки.....	262
5.2.2. Визначення швидкості і прискорення точки натуральним способом	262
5.2.3. Контрольні запитання	264
5.2.4. Приклади розв'язання задач	264

5.3. Тема 2. Поступальний та обертальний види рухів твердого тіла. Заняття №3	272
5.3.1. Поступальний рух твердого тіла	272
5.3.2. Обертальний рух твердого тіла	272
5.3.3. Рівномірний і рівнозмінний рух обертового тіла	274
5.3.4. Швидкість і прискорення точок тіла, що обертається	275
5.3.5. Контрольні запитання	275
5.3.6. Приклади розв'язання задач	276
5.4. Тема 3. Складний рух точки. Заняття №4	282
5.4.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи тіла	282
5.4.2. Відносні, переносні і абсолютні швидкості і прискорення при складному русі точок тіла	283
5.4.3. Додавання швидкостей і прискорень	284
5.4.4. Прискорення Коріоліса	285
5.4.5. Контрольні запитання	288
5.4.6. Приклади розв'язання задач	288
5.5. Тема 4. Плоскопаралельний рух тіла. Заняття №5. Визначення швидкості точок тіла	300
5.5.1. Рівняння плоскопаралельного руху	300
5.5.2. Швидкості точок плоскої фігури	301
5.5.3. Порядок розв'язування задач	305
5.5.4. Контрольні запитання	305
5.5.5. Приклади розв'язання задач	305
5.6. Тема 4. Плоскопаралельний рух тіла. (продовження). Заняття № 6. Визначення прискорень точок тіла	311
5.6.1. Прискорення точок плоскої фігури	311
5.6.2. Порядок розв'язування задач	313
5.6.3. Контрольні запитання	313
5.6.4. Приклади розв'язання задач	313
Додатки. Додаток 1	322
Додаток 2	323
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	321

Навчальне видання

Лукач Василь Степанович
Литвинов Олег Іванович
Василюк Володимир Іванович
Сипливець Олександр Олексійович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

СТАТИКА. КІНЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Редактор: Литвинов О.І.

Підписано до друку 31.10.2008 р. Формат 60x84/16
Гарнітура Computer modern. Ум. др. арк. 22,5
Зам. № 071

Папір офсетний.
Тираж 500 прим.

Віддруковано ПП Лисенко М.М.
м. Ніжин, вул. Шевченка, 26. Тел.: 8 (067) 4412124
E-mail: milanik@land.ru

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи
серія ДК №2776 від 26.02.2007 р.