ВІДОКРЕМЛЕНИЙ ПІДРОЗДІЛ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ
"НІЖИНСЬКИЙ АГРОТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Кафедра природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін

Майбородіна Н.В.

ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт

для студентів спеціальності 073 "Менеджмент"

Ніжин – 2021

УДК 519.85 (072)
З 15

Рекомендовано до друку рішенням науково-методичної ради факультету інженерії та енергетики Відокремленого підрозділу Національного університету біоресурсів і природокористування України "Ніжинський агротехнічний інститут"
(*Протокол № 3 від 01 жовтня 2021 р.*)

Укладач:
Майбородіна Н.В., кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін ВП НУБіП України "Ніжинський агротехнічний інститут".

Рецензенти:
Дворник І.В., кандидат економічних наук, старший викладач кафедри менеджменту та аграрної економіки ВП НУБіП України "Ніжинський агротехнічний інститут";
Чернишова Е.О., кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та аналізу даних Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя.

Майбородіна Н.В.
Задачі лінійного програмування: методичні рекомендації до виконання практичних робіт для студентів спеціальності 073 "Менеджмент" / Майбородіна Н.В. – Ніжин: ПП Лисенко М.М., 2021. – 132 с.

Методичні рекомендації призначені для виконання завдань практичних занять з дисципліни "Економіко-математичне моделювання". Наведено теоретичні відомості для задач лінійного програмування, приклади розв’язання основних типів задач, завдання для аудиторної і самостійної роботи, запитання для самоконтролю, завдання для індивідуальні роботи.

Для студентів спеціальності 073 "Менеджмент" денної форми навчання.

УДК 519.85 (072)

ЗМІСТ

ВСТУП

Розвиток економіки вимагає аналізу економічних процесів на основі залучення сучасних математичних методів.

Лінійне програмування можна застосувати у різноманітних галузях науки, зокрема в економіці і бізнесі. Задачі лінійного програмування довели свою корисність у моделюванні різних типів проблем у плануванні та маршрутизації.

Метою даних методичних рекомендацій є надання допомоги студентам при самостійному вивченні таких розділів дисципліни "Економіко-математичне моделювання":

- оптимізаційні економіко-математичні моделі;
- загальна задача лінійного програмування та методи її розв'язування;
- симплексний метод розв’язування оптимізаційних задач;
- метод штучного базису розв’язування оптимізаційних задач;
- теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач;
- постановка транспортної задачі, методи розв’язування та аналізу.

Методичні рекомендації укладено відповідно до програми курсу: "Економіко-математичне моделювання" для студентів освітнього ступеня "Бакалавр" зі спеціальності 073 "Менеджмент". Кожна тема у в методичних рекомендаціях має короткі теоретичні відомості, приклади розв’язання типових задач, завдання для аудиторної, самостійної та індивідуальної роботи студентів.

КОРОТКА ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Історія предмета включає в себе, з одного боку, історію математичних джерел та методів, а з другого – історію застосування цих методів у прикладних галузях, насамперед в економіці.

Як найпершу економічну модель, що містила деякі найпростіші ідеї лінійного програмування, слід назвати „Економічні таблиці” лейб-медика короля Людовика XV Ф. Кене, складену ним близько 1758 р., в якій було запропоновано кількісну модель національної економіки. У цій праці він поділив економіку Франції на три частини:

1) виробничий сектор, включаючи великих власників землі;

2) сектор торгівлі, що складався із купців та ремісників;

3) сектор нерухомості, що включав майно дворянства, церкви та королів.

Математичні моделі використовувались з ілюстративними і дослідницькими цілями також А. Смітом (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі).

З відомих математичних робіт методу лінійного програмування – симплексному – передували праці Ш. Фур’є (1823 р.), який розглядав задачу визначення найменшого максимального відхилення в розв’язках систем рівнянь. Він звів цю задачу до знаходження найнижчої точки многогранника n-вимірного простору, яку визначали послідовним перебором усіх вершин многогранника. Ідея Фур’є і лягла в основу симплексного методу.

У XIX сторіччі великий внесок у моделювання ринкової економіки внесла математична школа (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Еджворт). В 1874 р. Л. Вальрас запропонував складну математичну модель економіки, що містила технологічні коефіцієнти.

У XX сторіччі математичні методи моделювання застосовувались дуже широко, з їх використанням зв’язані практично всі роботи, визначені Нобелевською премією в економіці (Д. Хігс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуєльсон). Розвиток мікроекономіки, макроекономіки, прикладних дисциплін зв’язано з усе більш високим рівнем їх формалізації. Основу для цього заклав прогрес в області прикладної математики – теорії ігор, математичного програмування, математичної статистики.

У 1926 р. в СРСР був опублікований баланс народного господарства, що містив усі основні ідеї і риси моделі міжгалузевого балансу, яка є методом математичного аналізу міжгалузевих економічних зв’язків.

Ґрунтуючись на цих ідеях, американський економіст В. Леонтьєв створив кількісну модель американської економіки, яка давала можливість простежити вплив урядової політики і тенденції у сфері закупок на цілий ряд промислових галузей, тісно взаємозв’язаних між собою.

Вперше задачу оптимізації плану перевезень з метою мінімізації їх сумарного кілометражу було поставлено в роботі радянського економіста А. Н. Толстого в 1930 р.

Угорський математик Б. Егерварі в 1931 р. сформулював задачу оптимального вибору і дав метод її розв’язування, що дістав назву угорського методу.

Проте, справжнім початком математичного (лінійного програмування) в його сучасному вигляді слід вважати праці радянського математика академіка Л. В. Канторовича, який у 1939 р., зайнявшись плануванням роботи агрегатів фанерної фабрики, розв’язав декілька задач: про найкраще завантаження обладнання, про розкрій матеріалів з най-меншими втратами, про вантажі по декільком видам транспорту та ін. Л.В. Канторович сформулював новий клас умовно-екстремальних задач і запропонував універсальний метод їх розв’язування, що поклало початок новому напряму прикладної математики – лінійному програмуванню.

Значний внесок у формування і розвиток математичного програмування внесли зарубіжні вчені Р. Акоф, Р. Белман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Сааті, Р. Черчмен, А. Кофман. Так, наприклад, амери-канський математик Р. Белман заклав основи динамічного програмування (1954).

У 1960 – 80-і роки економіко-математичний напрямок на Україні був пов’язаний в основному зі спробами формально описати „систему оптимального функціонування соціалістичної економіки”. Будувалися багаторівневі системи моделей народногосподарського планування, оптимізаційні моделі галузей і підприємств. Зараз важливою задачею є моделювання процесів перехідного періоду.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1.1. Основні теоретичні відомості

Системою m ***лінійних рівнянь з*** n ***невідомими*** x_1, x_2, ..., x_n називається сукупність рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Числа a_{ij} називаються ***коефіцієнтами***, а числа b_j – ***вільними членами*** системи (1.1) , де $\left(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\right)$.

Упорядкований набір n чисел (β_1, β_2, ..., β_n) називається ***розв'язком системи*** (1.1), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих x_1, x_2, ... , x_n кожне рівняння системи перетворюється в тотожність.

Система рівнянь (1.1) називається ***однорідною***, якщо $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, і ***неоднорідною*** у супротивному випадку. Зауважимо, що однорідна система завжди має розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, який називається ***тривіальним***.

Система (1. 1) називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку. Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має більше, ніж один розв'язок. Дві системи лінійних рівнянь, що мають однакові розв'язки, називаються ***еквівалентними***.

Основною матрицею системи називають матрицю

$$\boxed{\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}}. \qquad \textbf{(1.1)}$$

Розширеною матрицею системи називають матрицю

$$\boxed{\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Виділимо в матриці A довільні k рядків і k стовпців $(k \le \min(m,n))$. Визначник складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається ***мінором** k-того порядку* матриці A.

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Усі мінори матриці, що мають найвищий порядок, називається ***базисними***.

Знаходження рангу матриці безпосередньо за означенням часто пов'язане з необхідністю обчислити значну кількість визначників. На практиці, ранг матриці шукають, попередньо виконавши над матрицею ***елементарні перетворення***, що не змінюють її ранг, а саме:

– переставити місцями два рядки (стовпці);

– помножити всі елементи рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;

– додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число;

– відкинути рядок (стовпець), який містить тільки нульові елементи.

Обчисливши ранг $r(A)$ основної та ранг $r(\widetilde{A})$ розширеної матриці системи можна дати відповідь на питання про її сумісність, користуючись таким критерієм.

Критерій сумісності

1. Якщо $\boxed{r(A) \ne r(\widetilde{A})}$ – система **несумісна**;

2. Якщо $\boxed{r(A) = r(\widetilde{A}) = r = n}$ – система **визначена**, має єдиний розв'язок;

3. Якщо $\boxed{r(A) = r(\widetilde{A}) = r < n}$ – система **невизначена**, має безліч розв'язків.

При цьому число r називають ***рангом системи***.

Для розв'язування визначених СЛАР застосовують методи Крамера та матричний, які є ефективними у випадку систем з невеликою кількістю рівнянь та невідомих ($m = n \le 4$). В інших випадках використовується метод Гаусса, що базується на послідовному виключенні невідомих, з метою зведення СЛАР до еквівалентної східчастої системи. Однак існує більш досконалий алгоритм, ніж метод Гаусса, що дозволяє безпосередньо відшукувати значення невідомих при розв'язуванні систем лінійних рівнянь, знаходити ранг матриці та обернену матрицю, обчислювати визначники і, більше того, він лежить в основі симплексного методу розв'язування задач лінійного програмування. Це метод ***Жордана-Гаусса***.

Алгоритм метод Жордана-Гаусса

1. Випишемо стартову розрахункову таблицю, що складається з елементів розширеної матриці системи (табл. 0).

2. Виконаємо ітерацію (крок) методу Жордана-Гаусса. Для цього у поточній таблиці виберемо відмінний від нуля елемент a_{qp} і назвемо його ***ключовим***, причому q-й рядок називатиметься ***ключовим рядком***, а p-й стовпчик – ***ключовим стовпчиком*** (в розрахунковій таблиці ключовий елемент для зручності виділяється квадратом.) Переходимо до наступної розрахункової таблиці, елементи якої розраховуються за **правилами**:

– усі елементи q-го рядка ділимо на ключовий елемент a_{qp};

– у p-му стовпці елемент $a'_{qp} = 1$, інші елементи стовпця – нулі;

– усі інші елементи (коефіцієнти та вільні члени) перераховуються за ***правилом прямокутника***; подумки виділяємо в таблиці прямокутник, у двох протилежних вершинах якого знаходяться елемент a_{ij}, що перераховується, та ключовий елемент a_{qp}. Тоді у двох інших вершинах цього прямокутника знаходитимуться елементи a_{ip} та a_{qj}, тобто

$$\begin{matrix} a_{ij} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{qj} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{qp} \end{matrix}$$

Для знаходження нового елемента a'_{ij} нової таблиці слід із елемента a_{ij}, що перераховується, відняти добуток елементів a_{ip} та a_{qj}, розташованих у протилежних вершинах прямокутника, поділений на ключовий елемент a_{qp}, тобто виконати **перерахунок за формулами**:

$$\boxed{a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip}a_{qj}}{a_{qp}}} \text{ – для коефіцієнтів при невідомих;} \quad \textbf{(1.4)}$$

$$\boxed{b'_i = b_i - \frac{a_{ip} \cdot b_q}{a_{qp}}} \text{ (i} \neq \text{q) – для вільних членів.} \quad \textbf{(1.5)}$$

В результаті виконання ітерації отримаємо нову розрахункову таблицю. При цьому СЛАР, що їй відповідає, еквівалентна вихідній.

3. Наступну ітерацію виконуємо над елементами щойно перерахованої таблиці. При цьому корисно мати на увазі наступні **рекомендації**:

– за ключовий елемент доцільно обирати одиницю;

– якщо у ключовому стовпці є нулі, то відповідні їм рядки, переписуються без змін;

– якщо у ключовому рядку є нулі, то відповідні їм стовпці переписується без змін;

– якщо є два пропорційних рядки, то один з них можна закреслити;

– ключовий елемент слід обирати з того рядка і того стовпця, що ще не вибирався;

– ні в якому разі не обирати ключовий елемент серед вільних членів!

Після виконання r ітерацій, де r – ранг системи, можливі такі **випадки**:

1. При перетворенні одержали рівняння, у якого усі коефіцієнти при невідомих – нулі, а права частина не дорівнює нулю, тоді $r(A) \neq r(\widetilde{A})$ і вихідна система несумісна .

2. Шляхом перестановки рядків основну матрицю системи можна звести до одиничної, тоді $r = n$ і система має єдиний розв'язок, який легко можна виписати з останньої розрахункової таблиці.

3. Шляхом перестановки рядків та стовпчиків в основній матриці системи можна виділити одиничну підматрицю, і сама система матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + \ldots \quad + \alpha_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \quad x_2 + \ldots + \alpha_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \quad \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \quad\quad x_r + \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r. \end{cases} \qquad \textbf{(1.6)}$$

В такому випадку говорять, що вихідну СЛАР зведено до базисного вигляду, або в системі виділено одиничний базис. При цьому змінні x_1, ..., x_r називають ***базисними***, а x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n – ***вільними***. Зрозуміло, що досліджувана система невизначена, оскільки $r \leq m < n$. Виразивши базисні невідомі через вільні отримаємо ***загальний розв'язок*** вихідної системи у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{2n}x_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r - \alpha_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn}x_n. \end{cases} \qquad \textbf{(1.7)}$$

Із загального розв'язку (1.7) можна отримати безліч ***частинних розв'язків*** системи, надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи відповідні значення базисних невідомих.

Базисним розв'язком називають частинний розв'язок системи, у якого всі вільні невідомі покладені рівними нулю, тобто

$$\boxed{\vec{x}_{баз} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r, 0, 0, ..., 0)}. \qquad \textbf{(1.8)}$$

Якщо в процесі розв'язування, деякий j-й стовпець обирався ключовим, то відповідна йому змінна x_j стає базисною. Змінні із стовпців, що не обиралися ключовими, виявляються вільними. Тому сумісна система може мати r базисних і $n-r$ вільних змінних.

У визначеній системі (де $n = r$) всі змінні базисні. Число різних базисних розв'язків дорівнює кількості комбінацій із n елементів по r, тобто може бути обчислене за формулою

$$\boxed{C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}}, \text{ де } \boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n}. \qquad \textbf{(1.9)}$$

Щоб перейти від одного базисного розв'язку до іншого слід ввести до базису деяку вільну змінну, натомість вилучивши з нього базисну. Таку операцію називають ***заміщенням***. Наприклад, щоб ввести вільну змінну x_{r+j} до базису, оберемо в останній розрахунковій таблиці ключовий елемент в $(r+j)$-му стовпці і виконаємо у ній одну ітерацію метода Жордана-Гаусса. Натомість вільною стане змінна x_i, що має 1 в ключовому рядку.

Будь-який невід'ємний базисний розв'язок називається ***опорним***. Оскільки у задачах лінійного програмування усі змінні підпорядковані умові невід'ємності, розв'язки таких задач слід шукати саме серед опорних. Тому дуже важливо вміти знаходити початковий опорний розв'язок і здійснювати перехід між ними. Звичайно, для цього можна знайти усі базисні розв'язки системи, а потім серед них обрати невід'ємні. Однак, така операція є дуже громіздкою.

Алгоритм переходу до опорного розв'язку

Для цього треба вихідну систему перетворити так, щоб праві частини її рівнянь були додатніми, після чого розв'язувати її методом Жордана-Гаусса обираючи ключовий елемент з таких міркувань:

– ключовий стовпчик містить принаймні один додатній елемент;

– ключовий рядок відповідає найменшому з відношень елементів стовпчика вільних членів до додатніх елементів обраного ключового стовпця.

§ 1.2. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. 1. Дослідити систему на сумісність:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0{,}5. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з 4 невідомими. Для перевірки її сумісності необхідно порівняти ранг $r(A)$ основної матриці та ранг $r(\widetilde{A})$ розширеної матриці заданої системи.

Випишемо розширену матрицю системи, яку отримуємо шляхом дописування справа до основної матриці стовпця з вільних членів, який відділимо вертикальною рискою

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -0{,}5 \end{array}\right).$$

Перейдемо до еквівалентної матриці більш простого виду, виконавши елементарні перетворення, що не змінюють рангу, над рядками та стовпцями матриці $\widetilde{A}$, а отже одночасно і матриці A:

~ елементи першого рядка, помножені на (-1), додамо до елементів другого та третього рядків;

~ елементи другого рядка, помножені на (–1,5), додамо до елементів третього рядка, а потім поміняємо місцями другий та третій стовпчики:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Враховуючи, що викреслення рядка з нулів не змінює рангу матриці, маємо остаточно

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ та } \widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Для кожної з матриць можна виписати ненульовий мінор 2-го порядку, наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 0 \cdot (-1) = -2 \neq 0.$$

Очевидно, що ненульових мінорів більш високого порядку не існує.

Отже $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$, тоді ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці. Згідно з критерієм сумісності СЛАР задана система сумісна.

Відповідь: система сумісна.

Приклад 1. 2. Дослідити систему на сумісність:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над нею елементарні перетворення:

~ перший рядок матриці, помножений на (-1), додамо до усіх інших її рядків;

~ другий рядок додамо до третього, а потім, помноживши на 2, додамо до четвертого рядка;

~ третій та четвертий рядки поміняємо місцями

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Враховуючи, що викреслення рядка з нулів не змінює рангу матриці, маємо остаточно

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ та } \widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Для кожної з матриць можна виписати ненульовий мінор 2-го порядку, наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Очевидно, що ненульових мінорів порядку вищого, ніж 2-й, для матриці A не існує, отже, ранг цієї матриці $r(A) = 2$. Однак, для матриці $\widetilde{A}$ можна виписати ненульовий мінор 3-го порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7(9-2) = 49 \neq 0, \; r(\widetilde{A}) = 3.$$

Отже ранг розширеної матриці системи $r(\widetilde{A}) = 3$.

Таким чином, ранг основної матриці системи не дорівнює рангу розширеної $r(A) \neq r(\widetilde{A})$ і задана система несумісна.

Відповідь: система несумісна.

Приклад 1.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса. Знайти загальний розв'язок системи. Скільки базисних розв'язків має система? Знайти будь-які два з них.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розрахункову таблицю, що складається з елементів розширеної матриці системи (табл.0). Для контролю правильності проведених розрахунків введемо контрольний стовпчик Σ, в якому запишемо суму елементів відповідних рядків таблиці. Виконаємо ітерації метода Жордана-Гаусса за наведеним вище алгоритмом.

№ табл.	№ рядка	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	$\sum$
0	*1*	$\boxed{1}$	1	1	1	1	7	12
	2	3	2	1	1	-3	-2	2
	3	0	1	2	2	0	23	34
	4	5	4	3	3	-1	12	26
I	*1*	**1**	1	1	1	1	7	12
	~~*2*~~	~~**0**~~	~~-1~~	~~-2~~	~~-2~~	~~-6~~	~~-23~~	~~-34~~
	3	**0**	$\boxed{1}$	2	2	6	23	34
	~~*4*~~	~~**0**~~	~~-1~~	~~-2~~	~~-2~~	~~-6~~	~~-23~~	~~-34~~
II	*1*	**1**	**0**	-1	-1	-5	-16	-22
	3	**0**	**1**	2	2	6	23	34

Пояснення до таблиць.

Табл.0. Обираємо ключовий елемент. Для простоти обчислень в якості ключового доцільно обрати елемент, що дорівнює 1, наприклад, елемент, що стоїть у першому рядку і у першому стовпчику. Виконаємо перерахунки, результати яких запишемо у табл. I. Далі

– усі елементи ключового рядка ділимо на ключовий елемент;

– усі елементи ключового стовпця, окрім ключового, замінюємо нулями;

– елементи третього рядка переписуємо без змін, оскільки, відповідний елемент ключового стовпця нульовий;

– елементи не заповнених ще клітин, включаючи контрольний стовпчик, перераховуємо за правилом прямокутника:

$$a_{22} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} = \frac{1\cdot 2 - 1\cdot 3}{1} = -1 \qquad a_{42} = \frac{a_{11}a_{42} - a_{12}a_{41}}{a_{11}} = \frac{1\cdot 4 - 1\cdot 5}{1} = -1;$$

;

$$a_{23} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}} = \frac{1\cdot 1 - 1\cdot 3}{1} = -2 \qquad a_{43} = \frac{a_{11}a_{43} - a_{13}a_{41}}{a_{11}} = \frac{1\cdot 3 - 1\cdot 5}{1} = -2;$$

;

$$a_{24} = \frac{a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}}{a_{11}} = \frac{1\cdot 1 - 1\cdot 3}{1} = -2 \qquad a_{44} = \frac{a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41}}{a_{11}} = \frac{1\cdot 3 - 1\cdot 5}{1} = -2;$$

;

$$a_{25} = \frac{a_{11}a_{25} - a_{15}a_{21}}{a_{11}} = \frac{1\cdot (-3) - 1\cdot 3}{1} = - \qquad a_{45} = \frac{a_{11}a_{45} - a_{15}a_{41}}{a_{11}} = \frac{1\cdot (-1) - 1\cdot 5}{1} = -$$

;

$$c_2 = \frac{a_{11}c_2 - c_1a_{21}}{a_{11}} = \frac{1\cdot (-2) - 7\cdot 3}{1} = -23 \qquad c_4 = \frac{a_{11}c_4 - c_1a_{41}}{a_{11}} = \frac{1\cdot 12 - 7\cdot 5}{1} = 23;$$

Для контролю правильності перерахунків, після їх проведення, виконаємо перевірку: отримане значення з контрольного стовпчика має дорівнювати сумі елементів відповідного рядка.

Табл.I. Перш, ніж перейти до вибору ключового елемента, помічаємо, що другий, третій та четвертий рядки пропорційні, тому можна викреслити будь-які два з них, наприклад, другий та четвертий. Третій рядок ще не обирався ключовим, тому розв'язування необхідно продовжити, виконавши ітерацію методу Жордана-Гаусса. Оберемо ключовим елемент, що стоїть у третьому рядку та у другому стовпчику і виконаємо перерахунки, результати яких запишемо у таблиці II.

Табл. II. За дві ітерації розширена матриця системи зведена до еквівалентної, у якій можна виділити одиничну підматрицю (з коефіцієнтів при невідомих x_1 x_2

$r = 2$. Базисними невідомими є x_1 та x_2, вільні невідомі - x_3, x_4, x_5. Випишемо загальний розв'язок заданої системи виразивши базисні невідомі через вільні:

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases}$$

Надаючи вільним невідомим довільні значення і знаходячи відповідні значення базисних змінних можна отримати безліч частинних розв'язків заданої системи. Зокрема, поклавши усі вільні невідомі рівними нулю, отримаємо базисний розв'язок

$\vec{x}^{1}_{баз}$= (-16, 23, 0, 0, 0). Оскільки, серед стовпців в останній розрахунковій таблиці II є такі, що ще не обиралися ключовими, обравши ключовий елемент в одному з них та провівши операцію заміщення, можна перейти до іншого базису і виписати інший базисний розв'язок. За формулою 1.1.3 обчислимо скільки різних базисних розв'язків має задана система. В нашому випадку кількість невідомих $n = 5$, ранг системи $r = 2$, отже

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 10,$$

тобто, система має 10 різних базисних розв'язків.

Знайдемо ще один, базисний розв'язок. Введемо до базису, наприклад, змінну x_3. Для цього ключовий елемент оберемо у третьому стовпчику таблиці II. Нехай це буде елемент $\alpha_{13} = -1$. Тоді з базису буде виведена змінна x_1, що має 1 у ключовому рядку. Виконаємо ітерацію методу Жордана-Гаусса, результати якої заносимо у наступну таблицю III.

№ табл.	№ рядка	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	$\sum$
II	*1*	**1**	**0**	$\boxed{-1}$	-1	-5	-16	-22
	3	**0**	**1**	2	2	6	23	34
III	*1*	-1	**0**	**1**	1	5	16	22
	3	2	**1**	**0**	0	-4	-9	-10

Тепер базисними невідомими є x_2 та x_3, вільні невідомі - x_1, x_4, x_5. Випишемо загальний розв'язок виразивши базисні невідомі через вільні:

$$\begin{cases} x_3 = 16 + x_1 - x_4 - 5x_5, \\ x_2 = -9 - 2x_1 + 4x_5. \end{cases}$$

Відповідний базисний розв'язок $\vec{x}^{2}_{баз}$= (0, -9, 16, 0, 0).

Зазначимо, що жоден із знайдених базисних розв'язків не є опорним, оскільки в них присутні від'ємні компоненти.

Приклад 1. 4. Знайти опорний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 7, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = -6. \end{cases}$$

Розв'язання.

Згідно з наведеним вище алгоритмом для обчислення опорного розв'язку ключовий елемент обирається з урахуванням наступних міркувань:

- ключовий стовпчик містить принаймі один додатній елемент;
- ключовий рядок відповідає найменшому відношенню елементів стовпця з вільних членів до додатного елемента ключового стовпця.

Після чого у таблиці слід виконати перерахунки за методом Жордана-Гаусса. Усі обчислення наведемо у таблиці, попередньо помноживши останнє рівняння на (-1):

№ табл.	Базисний елемент	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Відношення
0		1	2	-1	2	3	7	7/1=7
		-3	4	2	3	-1	5	
		$\boxed{1}$	-4	-1	3	-1	6	6/1=6 – min
I		**0**	6	0	-1	$\boxed{4}$	1	
		0	-8	-1	12	-4	23	
	x_1	**1**	-4	-1	3	-1	6	
II	x_5	**0**	3/2	0	-1/4	**1**	1/4	
		0	-2	-1	$\boxed{11}$	**0**	24	24/11 – min
	x_1	**1**	-5/2	-1	11/4	**0**	25/4	$\frac{25/4}{11/4}=\frac{25}{11}$
III	x_5	**0**	16/11	-1/44	**0**	**1**	35/44	
	x_4	**0**	-2/11	-1/4	**1**	**0**	24/11	
	x_1	**1**	-2	-3/4	**0**	**0**	1/4	

Вихідну СЛАР зведено до еквівалентного базисного вигляду, де невідомі x_1, x_4 та x_5 – базисні, інші невідомі x_2, x_3, x_4 – вільні.

Із останньої таблиці легко виписати базисний розв'язок, поклавши усі вільні невідомі рівними нулю: $\vec{x}_{баз}$ = (1/4, 0, 0, 24/11, 35/44). Оскільки серед його компонент немає від'ємних – цей розв'язок є опорним.

Питання для самоконтролю

1. Що називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)?

2. Що таке розв’язок СЛАР? Яку систему називають сумісною, несумісною, визначеною та невизначеною?

3. Що називають основною та розширеною матрицями системи?

4. Що таке ранг матриці, ранг системи, як їх знайти?

5. Назвіть елементарні перетворення, що не змінюють рангу.

6. Сформулюйте критерій сумісності СЛАР.

7. Які методи розв’язування СЛАР ви знаєте?

8. Сформулюйте алгоритм методу Жордана-Гаусса?

9. Які рекомендації ви можете дати щодо спрощення розрахунків під час розв’язування системи методом Жордана-Гаусса?

10. Як за допомогою методу Жордана-Гаусса визначити чи є система несумісною, сумісною, визначеною чи невизначеною?

11. Який розв’язок системи називається загальним, частинним, базисним, опорним?

12. Скільки різних базисних розв’язків може мати СЛАР?

13. У чому полягає операція заміщення і коли вона застосовується?

14. Яка методика пошуку опорного розв’язку СЛАР?

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1.1. Дослідити на сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

1.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -8. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 - 2x_5 = -3. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 = -16, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

1.2. Методом Жордана-Гаусса знайти розв'язок систем лінійних рівнянь:

7.
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

1.3. Розв'язати системи рівнянь методом Жордана-Гаусса. Знайти:
1)загальний розв'язок системи;
2)скільки базисних розв'язків має система?
3)знайти будь-які два базисні розв'язки.

17.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21 \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -6. \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

21.
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 7. \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

24.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

1.4. Знайти опорні розв'язки систем лінійних рівнянь:

25.
$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 - 8x_5 = -1/2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

26.
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5 = -3, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

27.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

29.
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = -9, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 6. \end{cases}$$

30.
$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 1. \end{cases}$$

Завдання для індивідуальної роботи

1.1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса:

1. $\begin{cases} x-4y+z=1, \\ 2x+3y-z=4, \\ x+y-z=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-2y+z=1, \\ x-y+3z=2, \\ x-y+z=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y-z=0, \\ -x+2y-z=-4, \\ x+2y-z=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+z=2, \\ 2x-3y-z=1, \\ -x+3y-z=-2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+y-z=-1, \\ x-y+z=1, \\ x-2y+z=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+y-z=-2, \\ -x+2y-z=2, \\ x-y+z=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -2x+y+z=-1, \\ -x+y+z=0, \\ 2x-y+2z=-2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 3x+y-z=2, \\ 2x-y+z=3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x-3y+z=4, \\ x+y-z=0, \\ 2x-y+z=6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x-y-z=0, \\ x-y+z=0, \\ 2x+y-2z=3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x-y+3z=3, \\ -x+2y+3z=-3, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -2x+y-z=2, \\ 3x-y+z=-1, \\ -x+y-z=3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x+2y-z=-1, \\ -2x+y+z=1, \\ x+2y-z=1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} -x+y-z=0, \\ x+y-2z=0, \\ 2x-y+z=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x-y+2z=3, \\ x-y-z=0, \\ x-2y+3z=2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ x+y-z=0, \\ x-y+z=4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x+y+2z=1, \\ x-2y+z=-1, \\ x-y+2z=-1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x-2y+z=-2, \\ -x+y-2z=2, \\ 2x+y+z=2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x-2y+z=-2, \\ 2x+y+z=3, \\ 3x-3y+z=1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x-2y+z=-1, \\ -x+y-z=0, \\ x+y+z=2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x-y+z=0, \\ -x+2y-z=1, \\ 2x+3y-z=-4. \end{cases}$

8.
$$\begin{cases} 2x - y + z = 4, \\ -x + 2y - z = -3, \\ x + y - z = -1. \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ x + y - 3z = -2, \\ x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} -2x - 2y + z = -3, \\ x + y - 2z = 3, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + y - z = 3. \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} x - y + z = -3, \\ -x + y - 2z = 2, \\ -x + y - z = 3. \end{cases}$$

29.
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1, \\ -x + y + 2z = 0, \\ x + 2y + 3z = -2. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x - y + 3z = 5, \\ -x + 2y - z = -2, \\ -x + y + z = -1. \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 2, \\ -x + 2y - z = 0, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

30.
$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 3x + y - 2z = 4, \\ x + y - z = 2. \end{cases}$$

1.2. Розв’язати системи лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса. Знайти:

1) загальний розв’язок системи;
2) скільки базисних розв’язків має система і вказати два з них.

1.
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 2. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 19, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 15. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 7. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -3, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -4. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -7, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

14.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 6x_4 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = -8, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 8x_4 = 4. \end{cases}$$

15.

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 + 6x_4 = -2, \\ 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 12x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 11. \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = -12, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = -10. \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

23.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 8x_4 = 27, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -9. \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

28

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 3. \end{cases}$$

29.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -3, \\ -8x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

30.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 = 2. \end{cases}$$

1.3. Знайти опорні розв’язки систем лінійних рівнянь:

1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 - 3x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 3. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 8. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_4 + 4x_5 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 5. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_5 = 4, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8. \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 3. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 8. \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 21, \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -1, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 11. \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 5. \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

21.
$$\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3+x_4+x_5=2, \\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4=-8, \\ -x_2+2x_3+4x_4-x_5=5. \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ -x_1+2x_2-2x_3+x_4-2x_5=-1, \\ x_2+3x_3-x_4+x_5=4. \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} x_2-x_3+2x_4+x_5=5, \\ -x_1+4x_2+x_3-2x_4-x_5=-3, \\ 2x_1+3x_2+x_4=6. \end{cases}$$

24.
$$\begin{cases} -2x_2+3x_3+x_5=-4, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=7, \\ 2x_1-x_2+4x_3+x_4-x_5=1. \end{cases}$$

25.
$$\begin{cases} -3x_1+x_3-x_4+2x_5=-3, \\ 2x_2+3x_3+x_4-x_5=2, \\ x_1+4x_2-x_3+3x_5=8. \end{cases}$$

26.
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_5=9, \\ -3x_2+x_3-x_4=-3, \\ x_1+x_2-x_3+3x_4+x_5=6. \end{cases}$$

27.
$$\begin{cases} 3x_2+x_3-x_4+4x_5=2, \\ -x_1+2x_2-2x_3+x_4=-3, \\ 3x_1-x_2-x_3+x_5=1. \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4=-3, \\ x_1+4x_2+3x_4+3x_5=2, \\ -x_1+x_2-2x_3+x_5=3. \end{cases}$$

29.
$$\begin{cases} 5x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ x_2-2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1+3x_2+4x_4=3. \end{cases}$$

30.
$$\begin{cases} 3x_2-2x_3+x_4+x_5=2, \\ -x_1+x_2-3x_3-2x_4=-1, \\ 2x_2+x_3-x_4+2x_5=4. \end{cases}$$

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

§ 2.1. Основні теоретичні відомості

Економіко-математичне моделювання – математична дисципліна, що використовує математичні моделі та методи для розв'язування оптимізаційних задач, до яких належать задачі раціонального розподілу обмежених ресурсів для ефективного досягнення поставленої мети. Такі проблеми виникають насамперед в економічній сфері діяльності людини: розподіл сировини, обладнання, праці, коштів при плануванні виробництва, розподілі та збуті готової продукції.

Основні етапи розв'язування оптимізаційних задач

1. побудова математичної моделі задачі;

2. знаходження оптимального розв'язку задач.

Математична модель – наближений опис реального явища засобами математичного апарату. В ній відображається суть ситуації, яка досліджується, і враховуються найбільш характерні риси, що можуть вплинути на результат. Іншими словами, скласти математичну модель задачі означає представити задачу у математичній формі.

Модель задачі математичного програмування містить:

$x_1, x_2, ..., x_n$	– ***шукані невідомі***, які належать деякій множині $X \subset R^n$;
$F(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$	– ***цільову функцію***, що підлягає максимізації чи мінімізації;
$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\geq \textit{або} = \textit{або} \leq\} b_i$, ($i$ = 1, 2, ... , m)	– ***умови-обмеження*** на ресурси, що можуть задаватися як у вигляді рівнянь, так і нерівностей різних знаків.

Елементи множини X, які задовольняють умовам обмежень, називаються ***допустимими розв'язками*** або ***допустимими планами***.

Сукупність допустимих розв'язків (планів) утворює ***область*** D ***допустимих розв'язків(планів)*** задачі. Допустимий розв'язок (план), при якому цільова функція $F(\vec{x})$ досягає максимуму (мінімуму), називається ***оптимальним розв'язком*** або ***оптимальним планом*** задачі математичного програмування.

Основними ознаками, за якими задачі математичного програмування (далі МП) поділяють на класи, є характер функцій у складі моделі, тип змінних, врахування фактору часу та випадкових факторів.

В залежності від характеру функцій, що входять до складу моделі, задачі МП можуть бути ***лінійними*** або ***нелінійними***.

За типом змінних розрізняють задачі з ***неперервними*** та ***дискретними*** змінними.

Останні створюють окремий клас задач ***дискретного*** програмування, підкласом якого є задачі ***цілочислового*** програмування.

За фактором часу задачі математичного програмування поділяють на ***статичні*** та ***динамічні***.

В залежності від того, якими є параметри моделі (постійними чи ймовірносними величинами), розрізняють ***детерміновані*** та ***стохастичні*** задачі МП.

В даній роботі будуть розглядатися статичні детерміновані задачі лінійного програмування з неперервними змінними.

Отже, в загальному випадку **модель задачі лінійного програмування (далі ЗЛП) формулюється так**:

Знайти екстремум (максимум або мінімум) лінійної функції

$$\boxed{F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max(\min)} \qquad \textbf{(2.1)}$$

за умов, що задаються у вигляді системи лінійних рівнянь та нерівностей різних знаків

$$\boxed{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\geq \textit{або} = \textit{або} \leq\} b_i} \left(\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}}\right). \qquad \textbf{(2.2)}$$

При цьому частина ***змінних є невід'ємними***, тобто

$$\boxed{x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,s} \quad (s \leq n)}\ . \qquad \textbf{(2.3)}$$

Надалі для компактності викладок під час запису моделі ЗЛП будемо користуватися переважно знаком суми $\sum$.

Побудова математичної моделі конкретної задачі передбачає виконання такої послідовності дій:

1) введення змінних, значення яких потрібно знайти;

2) формулювання критерію оптимальності тобто запис цільової функції через введені змінні;

3) визначення обмежень на ресурси і вираження цих умов через змінні.

Розглянемо деякі важливі економічні задачі, що належать до класу задач лінійного програмування.

§ 2.2. Задача про раціональне використання ресурсів

Для виробництва n видів продукції $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_n$ використовується m видів ресурсів $B_1,\ B_2,\ \ldots, B_m$ (сировина, обладнання, праця, тощо).

Відомо: b_i – запаси сировини B_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$;

a_{ij} – кількість одиниць ресурсу B_i, що використовується для виробництва одиниці продукції A_j $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$;

c_j – прибуток від реалізації одиниці продукції A_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Потрібно так спланувати виробництво продукції, щоб загальний прибуток від її реалізації був найбільшим.

Розв'язання. Дані задачі представимо у вигляді таблиці:

Види ресурсів	Види продукції						Запаси сировини
	A_1	A_2	...	A_j	...	A_n	
B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...
B_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...							
B_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_n
Прибуток від од. продукції	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	
План випуску	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	

Складемо *математичну модель задачі* за описаною схемою:

1) введемо шукані невідомі $x_1, x_2, ..., x_n$ – кількості одиниць випущеної продукції відповідно $A_1, A_2, ..., A_n$, виходячи з економічного змісту задачі невідомі можуть набувати лише невід'ємних значень, тобто $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $x_n \geq 0$;

2) цільова функція $F\left(x_j\right)$ – прибуток від випуску всієї продукції, що через введені змінні може бути виражена у вигляді $F = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$;

3) виразимо через змінні x_j

B_i на виробництво x_j одиниць продукції A_j становлять $a_{ij} \cdot x_j$ $\vec{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ випуску продукції повинен бути таким, щоб загальні витрати цього ресурсу не перевищували його запасу, отже отримаємо систему нерівностей-обмежень $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

Математичну модель ЗЛП.

$$\boxed{F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max}; \tag{2.4}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i}, \ i = \overline{1,m}; \tag{2.5}$$

$$\boxed{x_j \ge 0}, \ j = \overline{1,n}. \tag{2.6}$$

§ 2.3. Задача про оптимізацію перевезень (транспортна задача)

У пунктах постачання $A_1, A_2, ..., A_m$, міститься однорідна продукція, яку треба перевезти у пункти споживання B_1, B_2, …, B_n. Відомі запаси a_i продукції у кожному пункті відправлення A_i $\left(\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}}\right)$, попит b_j кожного споживача B_j $\left(\mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{n}}\right)$ і вартість c_{ij} перевезення продукції із пункту A_i в пункт B_j. Потрібно скласти такий план перевезення продукції з пунктів постачання в пункти споживання, при якому буде перевезена вся продукція, задоволені потреби кожного споживача і загальна вартість усіх перевезень буде мінімальною.

Дані транспортної задачі прийнято представляти у вигляді таблиці перевезень:

A_i \ B_j	B_1		B_2		. . .	B_n		Запаси a_i
A_1		c_{11}		c_{12}	. . .		c_{1n}	a_1
	x_{11}		x_{12}			x_{1n}		
A_2		c_{21}		c_{22}	. . .		c_{2n}	a_2
	x_{21}		x_{22}			x_{2n}		
. . .								. . .
A_m		c_{m1}		c_{m2}	. . .		c_{mn}	a_m
	x_{m1}		x_{m2}			x_{mn}		
Потреби b_j	b_1		b_2		. . .	b_n		

Нехай x_{ij} – кількість одиниць продукції, що планується перевезти з пункту постачання A_i в пункт споживання B_j. Невідомі x_{ij} будемо розглядати як компоненти матриці перевезень $X_{m\times n} = \left(x_{ij}\right)$. Вартість перевезення x_{ij} одиниць продукції становить $c_{ij} \cdot x_{ij}$.

Тоді загальна вартість усіх перевезень обчислюється за формулою

$$\boxed{F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}. \qquad \textbf{(2.7)}$$

при цьому:

а) вся продукція повинна бути вивезена, тобто

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i}, \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad \textbf{(2.8)}$$

б) забезпечений весь попит, тобто

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad \textbf{(2.9)}$$

причому

$$\boxed{x_{ij} \ge 0}. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Отже, маємо математичну модель ***транспортної задачі***: знайти мінімум цільової функції (2.7) за умов (2.8) – (2.10).

§ 2.4. Задача про суміш

Задача визначення оптимального складу суміші виникає тоді, коли з наявних видів сировини шляхом їх змішування необхідно отримати кінцевий продукт із заданими властивостями. До цієї групи завдань відносяться, наприклад, завдання отримання сумішей для різних марок бензину в нафтопереробній промисловості, сумішей для отримання бетону в будівництві, завдання про вибір дієти, складання кормового раціону в тваринництві та інше. При цьому потрібно, щоб вартість такої суміші була мінімальною.

Нехай є m видів сировини, запаси якого становлять відповідно d_1, $d_2,\ldots,$ d_m. З цієї сировини необхідно скласти суміш, яка містить n речовин, що визначають технічні характеристики суміші. Відомі величини визначають – кількість j-ї речовини в одиниці-го виду сировини, ціна якого дорівнює а такожнайменший допустимий кількість j-ї речовини в суміші.

Потрібно забрати суміш із заданими властивостями при найменших витратах на вихідні сировинні матеріали.

Для складання математичної моделі запишемо умови задачі у вигляді таблиці.

Вид речовини / Вид сировини	1	...	j	...	n	Обсяг сировини	Ціна сировини
1	a_{11}	. . .	a_{1j}	. . .	a_{1n}	d_1	c_1
…	…	…	…	…	…	…	…
i	a_{i1}	. . .	a_{ij}	. . .	a_{in}	d_i	c_i
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	. . .	a_{mj}	. . .	a_{mn}	d_m	c_m
Мінімальна кількість речовини в суміші	b_1	...	b_j	...	b_n		

Позначимо через x_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ – кількість сировини i-го виду, що входить у склад суміші.

Мета завдання (цільова функція) – мінімізувати сумарні витрати на сировину:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \min.$$

Система обмежень включає в себе обмеження за технічними характеристиками:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{i1}x_i + ... + a_{m1}x_m \ge b_1, \\ .... \\ a_{1j}x_1 + ... + a_{ij}x_i + ... + a_{mj}x_m \ge b_j, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + ... + a_{in}x_i + ... + a_{mn}x_m \ge b_n, \end{cases}$$

а також обмеження за обсягом сировини, які з урахуванням невід'ємності будуть мати вид:

$$0 \le x_i \le d_i, \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Запишемо **математичну модель** у компактній формі:

$$\boxed{F = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \min} \qquad \textbf{(2.11)}$$

при обмеженнях:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge b_j}, \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad \textbf{(2.12)}$$

$$\boxed{0 \le x_i \le d_i}, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right). \qquad \textbf{(2.13)}$$

§ 2.5. Задача про розкрій матеріалів

Задача оптимального розкрою матеріалів полягає у визначенні найбільш раціонального способу розкрою наявного матеріалу (колоди, сталеві смуги, шкіра і т.д.), при якому буде виготовлено найбільшу кількість готових виробів у заданому асортименті чи буде досягнуто найменшу кількість відходів. Нехай на обробку поступає а одиниць сировинного матеріалу одного виду (наприклад, а колод однієї довжини). З нього потрібно виготовити комплекти, в кожен з яких входить n видів виробів у кількості, пропорційній числах. Є m способів розкрою (обробки) даного матеріалу, тобто відомі величини визначають кількість одиниць j-х виробів при i-му способі розкрою одиниці сировинного матеріалу.

Визначити план розкрою, що забезпечує максимальну кількість комплектів. Згідно з умовами завдання маємо таблицю розкрою:

Вид виробу / Спосіб розкрою	1	...	j	...	n
1	a_{11}	. . .	a_{1j}	. . .	a_{1n}
…	…	…	…	…	…
i	a_{i1}	. . .	a_{ij}	. . .	a_{in}
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	. . .	a_{mj}	. . .	a_{mn}

Нехай x_i – кількість одиниць сировинного матеріалу, розкроюється i-м варіантом $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Тоді кількість виробів 1-го виду:

$$a_{11}x_1+\ldots+a_{i1}x_i+\ldots+a_{m1}x_m.$$

Беручи до уваги умову комплектності, маємо:

$$a_{11}x_1+\ldots+a_{i1}x_i+\ldots+a_{m1}x_m=b_1y,$$

де y – кількість комплектів.

Аналогічні рівності можна записати і для всіх інших видів виробів, тобто умова комплектності призводить до системи обмежень:

$$a_{1j}x_1+\ldots+a_{ij}x_i+\ldots+a_{mj}x_m=b_jy,\ \left(j=\overline{1,n}\right)$$

Очевидно, що

$$x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_m\le a$$

(на розкрій надходить a одиниць сировинного матеріалу), а також

$$x_i\ge 0,\ \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Мета задачі – максимізувати кількість комплектів:

$$F=y\to\max.$$

Отже, приходимо до **математичної моделі задачі про розкрій**:

$$\boxed{F=y\to\max}, \tag{2.14}$$

$$\boxed{\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i=b_jy,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_i\le a,\end{cases}}\qquad \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{2.15}$$

$$\boxed{x_i\ge 0},\ \left(i=\overline{1,m}\right). \tag{2.16}$$

Щоб виразити цільову функцію через змінні $x_1,\ldots,x_m$, достатньо скористуватися будь-яким із співвідношень:

$$\boxed{y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i}{b_j}},\ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{2.17}$$

§ 2.6. Форми запису задач лінійного програмування

Задача лінійного програмування може бути представлена в одній із трьох основних форм запису:

Канонічна	Симетрична	Загальна
Цільова функція		
$F=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max$	$F=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max(\min)$	$F=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max(\min)$
максимізується	максимізується чи мінімізується	
умови – обмеження змінних		
$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,$ $i=\overline{1,m}$ $n>m$ рівняння	$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i, \quad i=\overline{1,m}$ нерівності знаку ≤	$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\left\{\begin{matrix}\le\\=\\\ge\end{matrix}\right\}b_i, i=\overline{1,m}$ рівняння та нерівності довільних знаків
умови невід'ємності змінних		
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}$	$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}$	$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,k},\ (k\le n)$
усі змінні невід'ємні		частина змінних

Форму запису ЗЛП у вигляді (2.1) – (2.3) називають ***загальною***.

Однак існуючі методи розв'язування ЗЛП вимагають, щоб модель задачі була представлена в певній стандартизованій формі – ***канонічній*** або ***симетричній***. Всі три форми ЗЛП еквівалентні між собою: загальна задача легко зводиться до симетричної або канонічної, а останні можуть бути перетворені одна в другу за вказаними нижче правилами.

Перехід від задачі на максимум до задачі на мінімум і навпаки здійснюється так,

якщо $\boxed{F=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min,}$ то $\boxed{L=-F=-\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max.}$

Перехід від нерівності знаку «≥» до нерівності знаку «≤» і навпаки здійснюється шляхом множення усієї нерівності (її правої і лівої частини) на «-1».

Перехід від нерівності до рівняння. Нерівність $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i$

$x_{j+1}\ge 0$, яку будемо називати ***балансовою***, тобто $\boxed{\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{j+1}=b_i}$.

Аналогічно нерівність $\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \ge d_i}$ може бути зведена до рівняння шляхом віднімання в лівій частині змінної балансової змінної $y_{j+1} \ge 0$, тобто $\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j - y_{j+1} = d_i}$.

Перехід від рівнянь до нерівностей може бути здійснений шляхом заміни рівняння виду $\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i}$ двома нерівностями

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i}, \qquad \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i}.$$

Зрозуміло, при цьому вдвічі зросте кількість обмежень задачі. Така заміна може бути виправдана, якщо в подальшому задача розв'язуватиметься за допомогою ЕОМ. В противному випадку при зведенні задачі до симетричної форми користуються іншою методикою.

Нехай канонічна задача має m обмежень-рівнянь, серед яких може бути r лінійно незалежних $(r \le m < n)$. Значить, систему r рівнянь з n змінними $x_1, \ldots, x_n$ можна розв'язати відносно r базисних змінних, виразивши їх через решту $n - r$ вільних змінних. Оскільки всі змінні, в тому числі і базисні, невід'ємні, то, "опускаючи" базисні змінні, переходимо від рівнянь до нерівностей. При цьому одночасно базисні змінні виводяться також із цільової функції. При такому способі переходу від канонічної до стандартної задачі кількість змінних зменшується до $n - r$.

Підпорядкувати умові невід'ємності змінну можна також двома способами. Нехай потрібно підпорядкувати умові невід'ємності змінну x_k.

1-й спосіб. Змінну x_k слід представити у вигляді різниці $x_k = x'_k - x''_k$ змінних $x'_k \ge 0$ та $x''_k \ge 0$.

2-й спосіб. Треба виключити змінну з задачі. Для цього за допомогою метода Жордана – Гаусса, виключимо змінну x_k з усіх рівнянь системи обмежень, окрім одного, обравши її базисною. Одночасно зручно перетворювати і цільову функцію, представивши її у вигляді рівняння. Надалі рівняння-обмеження, де $x_k \ne 0$, використовується тільки після знаходження розв'язку задачі.

Перший спосіб реалізується без будь-яких додаткових обмежень, але приводить до збільшення кількості змінних і тому до складніших обчислень. Другий спосіб більш громіздкий на початковому етапі, але він спрощує наступні розрахунки, оскільки зменшує кількість змінних і рівнянь.

§ 2.7. Приклади складання математичних моделей задач лінійного програмування

Умовне позначення (у.г.о) означає умовну грошову одиницю. Це може бути будь-яка відома валюта або інша міра вартості продукції.

Приклад 2.1 (задача про раціональне використання ресурсів).

Нафтопереробний завод виробляє бензин двох марок A та B. Бензин марки A містить 60% нафтопродуктів 1-го сорту та 40% – 2-го сорту. Бензин марки B містить 80% нафтопродуктів 1-го сорту та 20% – 2-го сорту. Вивчення попиту показало, що добовий попит на бензин марки B не перевищує попиту на бензин марки A більш як на 20 тон. Встановлено також, що попит на бензин марки B не перевищує 40 т. на добу. Вартість 1 т бензину марки A – 140 у.г.о, бензину марки B – 90 у.г.о. Скласти математичну модель задачі, що дозволить розрахувати план виробництва бензину, за якого буде досягнуто максимальний прибуток, якщо запас нафтопродуктів 1-го сорту – 50 т., 2-го сорту – 30 т.

Розв'язання.

1. Введемо змінні: x_1 – добовий об'єм виробництва бензину марки A та x_2 – добовий об'єм виробництва бензину марки B (в тонах). Виходячи із економічного змісту змінних робимо висновок про те, що вони задовольняють умови невід'ємності, тобто $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$;

Подамо дані у вигляді таблиці

Ресурси	Продукти		Запас ресурсів
нафтопродукти	бензин A	бензин B	Запас нафтопродуктів (т)
1-го сорту	60%	80%	50
2-го сорту	40%	20%	30
Вартість 1 т суміші (у.г.о)	140	90	
План виробництва	x_1	x_2	

2. Цільова функція F – це прибуток від виробництва бензину, який слід максимізувати. Виразимо її через введені змінні. Прибуток від продажу 1 т бензину марки A становитиме $140 \cdot x_1$ тис. грош. од., а від бензину марки B – $90 \cdot x_2$ тис. грош. од. Загальний прибуток дорівнює сумарному доходу від продажу кожної з марок бензину. Отже $F = 140x_1 + 90x_2 \to \max$.

3. Виразимо обмеження задачі через введені змінні.

Об'єм використання нафтопродуктів кожного сорту не може перевищити його запасу, отже маємо два обмеження:

$$\frac{60}{100}x_1 + \frac{80}{100}x_2 \le 50 \quad \Rightarrow \qquad \text{(для нафтопродуктів 1-го сорту)}$$

$$\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 \le 50.$$

$$\frac{40}{100}x_1 + \frac{20}{100}x_2 \le 30 \quad \Rightarrow \qquad \text{(для нафтопродуктів 2-го сорту)}$$

$$\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 30.$$

Врахуємо, що добовий попит на бензин марки B не перевищує попиту на бензину марки A більш як на 20 т: $x_2 \le x_1 + 20$, а також, що цей попит не перевищує 40 т : $x_2 \le 40$.

Помножимо 1-ше та 2-ге обмеження на 5 запишемо **математичну модель задачі**:

$$F = 140x_1 + 90x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 250, \\ 2x_1 + x_2 \le 150, \\ -x_1 + x_2 \le 20, \\ x_2 \le 40. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Приклад 2.2 (задача про суміш).

Нафтопереробна компанія щоб поліпшити експлуатаційні якості та зменшити точки замерзання дизельного пального, яке вона виробляє, додає у пальне певні присадки (хімічні добавки). У кожному паливному баку місткістю 1000 л повинно міститися не менше 40 мг хімічних добавок X, не менше 14 мг хімічних добавок Y та не менше 18 мг хімічних добавок Z. Необхідні хімічні добавки у вигляді сумішей поставляють хімічні компанії A та B. У таблиці наведено вміст хімічних добавок X, Y та Z у сировині від кожної з компаній-постачальників, а також вартість їх продукції.

Хімічні добавки (мг на л)	Сировина (мг на л)		Мінімальний вміст хімічної добавки
	A	B	
X	4	5	40
Y	2	1	14
Z	3	1	18
Вартість (у.г.о)	3	2	
План змішування	x_1	x_2	

Скласти математичну модель задачі, що дозволить знайти оптимальний план змішування продуктів від компаній A та B, щоб забезпечити необхідну якість пального ті мінімізувати загальну вартість доданих у паливо присадок.

Розв'язання.

1. Введемо змінні: x_1 – кількість продукції від компанії A та x_2 – кількість продукції від компанії B. Виходячи із економічного змісту змінних робимо висновок про те, що вони задовольняють умови невід'ємності, тобто $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

2. Цільова функція F – загальна вартість використаних ресурсів, яку слід мінімізувати. Виразимо її через введені змінні $F = 3x_1 + 2x_2 \to \min$.

3. Виразимо обмеження задачі через введені змінні.

Вміст хімічної добавки X у паливному баку не може бути меншим 40 мг на л, отже $4x_1 + 5x_2 \geq 40$, аналогічно

$2x_1 + x_2 \geq 14$ (для хімічної добавки Y),

$3x_1 + x_2 \geq 18$ (для хімічної добавки Z).

Маємо **математичну модель задачі**:

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \geq 40, \\ 2x_1 + x_2 \geq 14, \\ 3x_1 + x_2 \geq 18. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Приклад 2.3 (задача про раціональне використання ресурсів).

Для виготовлення автозапчастин трьох видів *A*, *B* та *C* використовується токарне, фрезерувальне, зварювальне та шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку однієї автозапчастини для кожного з типів обладнання вказані в таблиці. У ній також вказано загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного готового виробу кожного виду. Потрібно скласти математичну модель задачі для визначення, яку кількість автозапчастин кожного виду слід виготовити, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

<table>
<tr><td rowspan="2">Тип обладнання</td><td colspan="3">Витрати часу (станко-години) на обробку одного виробу кожного виду</td><td rowspan="2">Загальний фонд робочого часу обладнання (години)</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr>
<tr><td>Фрезерувальне</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>120</td></tr>
<tr><td>Токарне</td><td>1</td><td>8</td><td>6</td><td>280</td></tr>
<tr><td>Зварювальне</td><td>7</td><td>4</td><td>5</td><td>240</td></tr>
<tr><td>Шліфувальне</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>360</td></tr>
<tr><td>Прибуток (у.г.о)</td><td>10</td><td>14</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>План випуску</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td></td></tr>
</table>

Розв'язання.

1. Введемо змінні: x_1 – кількість одиниць автозапчастин виду А; x_2 – кількість одиниць автозапчастин виду В; x_3 – кількість одиниць автозапчастин виду С, що слід виготовити

Зрозуміло, що ці кількості не можуть бути від'ємними, отже виконується умова $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

2. Цільова функція F – прибуток від реалізації виготовлених автозапчастин може бути виражена через введені змінні у вигляді

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max .$$

3. Виразимо через змінні умови-обмеження задачі.

Для виробництва необхідної кількості виробів слід використати $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станко-годин фрезерувального обладнання. Оскільки загальний фонд робочого часу станків такого типу не може перевищити 120, то має виконуватись нерівність $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120$. Аналогічні роздуми щодо можливого використання токарного, зварювального та шліфувального обладнання приведуть до нерівностей:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280 \quad \text{(токарного)},$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240 \quad \text{(зварювального)},$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360 \quad \text{(шліфувального)}.$$

Маємо **математичну модель задачі**:

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Приклад 2.4 (про план товарообігу).

Торгівельна організація планує реалізацію за двома групами товарів: автомобільні шини та колісні диски. Виділені фонди за цими товарами складають відповідно 60 тис. у.г.о та 16 тис. у.г.о. Рівень витрат, пов'язаних із зберіганням шин – 2%, дисків – 1%. Рівень прибутку, відповідно, 3% та 2%. Гранично допустимі витрати, пов'язані із зберіганням товару 1,4 тис у.г.о. З врахуванням закупки товарів зверх виділених фондів необхідно скласти математичну модель задачі, що дозволить вирахувати план товарообігу, за якого торгівельна організація отримає максимальний прибуток.

Розв'язання.

1. Введемо змінні x_1 та x_2, що означатимуть товарообіг (тис у.г.о). відповідно для шин та дисків. Очевидно, що $x_1 \geq 0$ та $x_2 \geq 0$.

2. Цільова функція F – прибуток від реалізації товарів, який слід максимізувати. Прибуток від реалізації шин становитиме $\frac{3}{100}x_1 = 0{,}03x_1$ тис. у.г.о, дисків – $\frac{2}{100}x_1 = 0{,}02x_2$. Цільова функція F може бути виражена через введені змінні у вигляді $F = 0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 \to \max$.

3. Виразимо через введені змінні умови-обмеження задачі.

Оскільки торгова організація може здійснювати закупівлю товарів зверх виділених фондів, обмеження за об'ємом товарообігу такі $x_1 \geq 60$; $x_2 \geq 16$.

Витрати на зберігання шин та дисків складають відповідно $\frac{2}{100}x_1 = 0{,}02x_1$ та $\frac{1}{100}x_2 = 0{,}01x_2$. Сумарна кількість витрат за умовою не повинна перевищувати 1,4 тис у.г.о, отже

$$0{,}02x_1 + 0{,}01x_2 \leq 1{,}4 \text{ або } 2x_1 + x_2 \leq 140.$$

Маємо **математичну модель задачі**:

$$F = 0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 60; \\ x_2 \geq 16; \\ 2x_1 + x_2 \leq 140. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Приклад 2.5 (задача про розкрій).

Підприємство машинобудування в якості сировини отримує металеві прути довжиною 3 м. Для виготовлення певної металоконструкції їх необхідно розрізати на заготовки довжиною 0,6 м – 2 шт., 1,5 м – 1 шт. та 2,5 м – 3 шт. Скласти математичну модель задачі, яка дозволить обрахувати оптимальний план розрізання, що забезпечить виготовлення максимальної кількості вищезгаданих металоконструкцій.

Розв'язання.

Визначимо усі можливі способи розрізання прутів, вказавши скільки при цьому можна отримати заготовок певного розміру:

Спосіб розрізання	Отримані заготовки			Кількість прутів
	0,6	1,5	2,5	
1	5	–	–	x_1
2	2	1	–	x_2
3	–	2	–	x_3
4	–	–	1	x_4

1. Введемо змінні x_i – кількість прутів, розрізаних за i-м (i = 1, 2, 3, 4) способом.

2. Цільова функція F – кількість виготовлених комплектів заготовок кожного розміру, яку слід максимізувати.

3. Позначимо a – кількість прутів, що підлягають розрізанню. Оскільки усі прути мають бути розрізані $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$.

Крім того кількість заготовок кожного розміру повинна задовольняти умовам комплектності, тобто

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a,$$
$$x_2 + 2x_3 = F,$$
$$x_4 = 3F.$$

Виразивши F з останнього рівняння і підставивши в усі інші вирази, приходимо до математичної моделі задачі:

$$F = \frac{1}{3}x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a, \\ 5x_1 + 2x_2 - \frac{2}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Приклад 2.6 (транспортна задача).

Для будівництва чотирьох доріг використовується гравій з трьох кар'єрів. Запаси гравію у кожному з кар'єрів відповідно 150, 60 та 80 тон. Необхідна кількість гравію для будівництва кожної з доріг складає відповідно 110, 40, 60, 80 тон. Тарифи перевезень 1 тони гравію від кожного з кар'єрів до кожної з доріг, що будуються, подано у таблиці

	Дорога D_1	Дорога D_2	Дорога D_3	Дорога D_4
Кар'єр K_1	4	4	2	5
Кар'єр K_2	5	3	1	2
Кар'єр K_3	2	1	4	2

Скласти математичну модель задачі, що дозволить визначити оптимальний план перевезення гравію, за якого буде вивезено увесь гравій та задоволено потреби кожної з доріг у гравії при найменших загальних витратах на перевезення.

Розв'язання.

Введемо змінні: x_{ij} – кількість гравію, що слід доставити з кар'єру K_i відповідно до j-ї дороги $\left(i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}\right)$. Оскільки така кількість не може буде від'ємною, вводимо умову невід'ємності змінних $x_{ij}\geq 0$ $\left(i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}\right)$.

Складемо таблицю перевезень:

Дороги D_j / Кар'єри K_i	D_1	D_2	D_3	D_4	Запаси гравію (т)
K_1	4 x_{11}	4 x_{12}	2 x_{13}	5 x_{14}	150
K_2	5 x_{21}	3 x_{22}	1 x_{23}	2 x_{24}	60
K_3	2 x_{31}	1 x_{32}	4 x_{33}	2 x_{34}	80
Потреби у гравії (т)	110	40	60	80	

Цільова функція F – загальна вартість перевезень, яку слід мінімізувати, виражається через введені змінні у вигляді

$$F=4x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+5x_{14}+5x_{21}+3x_{22}+x_{23}+2x_{24}+$$
$$+2x_{31}+x_{32}+4x_{33}+2x_{34}\rightarrow\min.$$

Умови обмеження випишемо з міркувань, що кількість вивезеного гравію з кар'єру дорівнює його запасам K_i

$$4x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+5x_{14}=150,$$
$$5x_{21}+3x_{22}+x_{23}+2x_{24}=60,$$
$$2x_{31}+x_{32}+4x_{33}+2x_{34}=80,$$

а кількість доставленого гравію до кожної з доріг має дорівнювати їх потребам

$$4x_{11}+5x_{21}+2x_{31}=110,$$
$$4x_{12}+3x_{22}+x_{32}=40,$$
$$2x_{13}+2x_{23}+4x_{33}=60,$$
$$5x_{14}+2x_{24}+2x_{34}=80.$$

Умова невід'ємності

$$x_{ij}\geq 0 \quad (i=\overline{1,3},\, j=\overline{1,4}).$$

Приклад 2.7 Звести до канонічної форми ЗЛП:

$$F=x_1-x_2-2x_3\to\min;$$
$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3\geq 4,\\ -3x_1+x_2+x_3\leq 9,\\ 2x_1+3x_2+3x_3=10,\end{cases}$$
$$x_1\geq 0,\ x_3\geq 0.$$

Розв'язання.

1. Перейдемо від задачі мінімізації до задачі максимізації шляхом введення функції

$$Z=-F=-x_1+x_2+2x_3\to\max. \qquad \textbf{(2.17)}$$

2. Перетворимо мішану систему обмежень у систему рівнянь. Для цього у лівій частині 1-ї нерівності віднімемо балансову змінну $x_4\geq 0$, на яку ліва частина більша за праву; у ліву частину 2-ї нерівності додамо балансову змінну $x_5\geq 0$, якої не дістає для врівноваження її з правою частиною; третє обмеження перепишемо без змін

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=4,\\ -3x_1+x_2+x_3+x_5=9,\\ 2x_1+3x_2+3x_3=10,\end{cases} \qquad \textbf{(2.18)}$$

3. Змінну x_2 потрібно підпорядкувати умові невід'ємності. Це можна зробити 2-ма способами.

I спосіб. Замість довільної змінної x_2 вводяться дві невід'ємні змінні $x_2'\geq 0$ та $x_2''\geq 0$ так, щоб $x_2=x_2'-x_2''$. Таким чином, дістанемо ЗЛП, що містить не п'ять, а шість змінних.

$$Z = -x_1 - x_2' - x_2'' + 2x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + x_3 - x_4 = 4, \\ -3x_1 + x_2' - x_2'' + x_3 + x_5 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + 3x_3 = 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

II спосіб. Знайдемо з будь-якого рівняння системи (2.18) "довільну" змінну x_2, виразивши її через решту змінних, і виключимо за допомогою знайдених виразів цю змінну з інших рівнянь системи та лінійної функції (2.17).

Це можна зробити за допомогою метода Жордана – Гаусса, вибравши за ключовий стовпчик при x_2. Для того, щоб одночасно з системою обмежень перетворювати цільову функцію Z представимо її у вигляді $Z + x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ і допишемо отримане рівняння до системи рівнянь-обмежень, розглядаючи Z як одну із змінних. Отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} Z + x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Випишемо стартову розрахункову таблицю, що складається з елементів розширеної матриці даної системи. Оберемо ключовим третій стовпчик, що відповідає змінній x_2. Ключовим рядком можна обрати будь-який, окрім 1-го, так, щоб отриманий на їх перетині ключовий елемент був відмінним від нуля. В даному випадку ключовим елементом зручно обрати елемент $a_{13} = 1$. Щоб виключити змінну з усіх рівнянь системи, окрім третього, виконаємо ітерацію метода Жордана-Гаусса

№ ітерації	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	**1**	1	-1	-2	0	0	0
	0	1	-2	1	-1	0	4
	0	-3	$\boxed{1}$	1	0	1	9
	0	2	3	3	0	0	10
I	**1**	-2	**0**	-1	0	1	9
	0	-5	**0**	3	-1	2	22
	0	-3	**1**	1	0	1	9
	0	11	**0**	0	0	-3	-17

Після чого третє рівняння системи набуде вигляду

$$x_2 = 9 + 3x_1 - x_3 - x_5, \qquad \textbf{(2.19)}$$

а функція Z і решта рівнянь не залежатимуть від змінної x_2.

Маємо канонічну задачу з 4-ма змінними, замість 5:

$$Z = 2x_1 + x_3 - x_5 + 9 \to \max,$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_3 - 1x_4 + 2x_5 = 22, \\ 11x_1 - 3x_5 = -17. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Після того, як буде знайдено розв'язок отриманої канонічної задачі, змінна x_2 визначиться з рівності (2.19).

Приклад 2.8 Звести до симетричної форми ЗЛП:

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 + 6 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 9x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Розв'язання.

Приведемо систему обмежень задачі до одиничного базису за допомогою метода Жордана – Гаусса. Одночасно перетворимо і вираз лінійної функції, записаний у вигляді рівняння $F - 2x_1 - 3x_2 + x_4 - 2x_5 = 6$. Під час розв'язування рядок, що відповідає цьому рівнянню, не слід вибирати за ключовий. Таким чином, змінна F залишатиметься базисною.

№	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
I	**1**	-2	-3	0	1	-2	6
	0	3	9	$\boxed{5}$	-2	-2	7
	0	2	-2	-2	1	-1	1
	0	9	-8	-7	3	-4	3
II	**1**	-2	-3	**0**	1	-2	6
	0	$3/5$	$9/5$	**1**	$-2/5$	$-2/5$	$7/5$
	0	$16/5$	$8/5$	**0**	$\boxed{1/5}$	$-9/5$	$19/5$
	0	$66/5$	$23/5$	**0**	$1/5$	$-34/5$	$64/5$

III	**1**	-18	-11	**0**	**0**	7	-13
	0	7	5	**1**	**0**	-4	9
	0	16	8	**0**	**1**	-9	19
	0	10	3	**0**	**0**	$\boxed{-5}$	9
IV	**1**	-4	$-\frac{34}{5}$	**0**	**0**	**0**	$-\frac{2}{5}$
	0	-1	$\frac{13}{5}$	**1**	**0**	**0**	$\frac{9}{5}$
	0	-2	$\frac{13}{5}$	**0**	**1**	**0**	$\frac{14}{5}$
	0	-2	$-\frac{3}{5}$	**0**	**0**	**1**	$-\frac{9}{5}$

Після III ітерації систему рівнянь розв'язано відносно базисних змінних x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{13}{5}x_2 + x_3 = \frac{9}{5}, \\ -2x_1 - \frac{13}{5}x_2 + x_4 = \frac{14}{5}, \\ -2x_1 - \frac{3}{5}x_2 + x_5 = -\frac{9}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 - \frac{13}{5}x_2 + \frac{9}{5}, \\ x_4 = 2x_1 - \frac{13}{5}x_2 + \frac{14}{5}, \\ x_5 = 2x_1 + \frac{3}{5}x_2 - \frac{9}{5}. \end{cases}$$

Одночасно ці змінні виключено з цільової функції F:

$$F - 4x_1 - \frac{34}{5}x_2 = -\frac{2}{5} \qquad \Rightarrow \qquad F = 4x_1 + \frac{34}{5}x_2 - \frac{2}{5}.$$

Використаємо умови невід'ємності змінних x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 - \frac{13}{5}x_2 + \frac{9}{5} \ge 0, \\ x_4 = 2x_1 - \frac{13}{5}x_2 + \frac{14}{5} \ge 0, \\ x_5 = 2x_1 + \frac{3}{5}x_2 - \frac{9}{5} \ge 0. \end{cases} \text{звідки} \begin{cases} -x_1 + \frac{13}{5}x_2 \le \frac{9}{5}, \\ -2x_1 + \frac{13}{5}x_2 \le \frac{14}{5}, \\ -2x_1 - \frac{3}{5}x_2 \le -\frac{9}{5}, \end{cases}$$

Кожну нерівність останньої системи помножимо на 5 і запишемо ЗЛП у симетричній формі:

$$F = 4x_1 + \frac{34}{5}x_2 - \frac{2}{5} \to \max;$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 13x_2 \le 9, \\ -10x_1 + 13x_2 \le 14, \\ -10x_1 - 3x_2 \le -9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Таким чином кількість змінних отриманої задачі зменшилась з 5-ти до 2-х.

Питання для самоконтролю

1. Назвіть основні етапи розв'язування оптимізаційних задач.

2. Що являє собою математична модель задачі математичного програмування? Назвіть основні етапи її побудови.

3. Які розв'язки задачі математичного програмування називаються допустимими, оптимальними? Що таке область допустимих розв'язків?

4. За яким параметрами виконується класифікація задач математичного програмування?

5. Які типи економічних задач можуть бути розв'язані методами лінійного програмування?

6. Сформулюйте задачу про раціональне використання ресурсів та запишіть її математичну модель.

7. Сформулюйте транспортну задачу та запишіть її математичну модель.

8. Назвіть основні форми запису задачі лінійного програмування. В чому їх схожість та відмінності?

9. Як перейти від задачі максимізації до задачі мінімізації?

10. Як перейти від обмежень у вигляді нерівностей до обмежень у вигляді рівнянь і навпаки?

11. Що таке умова невід'ємності змінних? Які способи підпорядкування змінної цій умові існують? Назвіть їх переваги та недоліки.

12. Який алгоритм переходу від канонічної форми до стандартної?

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

2.1 З трьох видів продуктів – I, II, III складають суміш. До складу суміші має входити не менш як 6 од. хімічної речовини A, 8 од. – речовини B та не менш як 12 од. речовини C. Структура хімічних речовин наведена у наступній таблиці:

Продукт	Склад хімічної речовини в 1 од. продукції			Вартість од. продукції
	A	B	C	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Складіть математичну модель задачі, що дозволить виготовити найбільш дешеву суміш необхідної якості.

2.2 У заводській лабораторії створюється антифрикційний сплав (олов'янистий бабіт) до складу якого повинні входити: олова – не менше 15%, сурми - не менше 15%, свинцю – майже 70%. В розпорядженні лабораторії є чотири види сировини у вигляді сплавів, процентний склад необхідних металів у яких та їх ціни наведено у таблиці. Розрахувати кількість елементів для сплаву кожного виду, необхідну для 1 кг суміші, яка б забезпечила мінімальні витрати.

Елементи	Сплав			
	1	2	3	4
Олово	12	20	12	20
Сурма	12	18	18	14
Свинець	76	62	70	66
Ціна за 1 кг	3,5	5,2	4,0	4,6

2.3 Автотранспортне підприємство зобов'язане забезпечити водіїв міжміських автобусних маршрутів харчовими пайками. Відомо, що для нормальної життєдіяльності людина повинна за добу спожити білків не менше 100 ум. од., жирів – не менше 80 ум. од. та вітамінів – не менше 12 ум. од. Вміст цих поживних речовин у продуктах P_1, P_2, P_3, а також вартість одиниці кожного продукту наведені у таблиці:

Поживні речовини	Вміст поживних речовин в од. продукту			Мінімальна норма споживання
	P_1	P_2	P_3	
Білки	5	1,6	2,5	100
Жири	3	0,8	1	80
Вітаміни	1	3,5	2,8	12
Вартість од. продукту, у.г.о.	40	24	15	

Скласти математичну модель задачі, що забезпечить отримання організмом водія необхідної кількість поживних речовин при мінімальній вартості пайка.

2.4 Нафтопереробний завод одержує чотири напівфабрикати: 400 тис. л алкілату; 250 тис. л крекінг-бензину; 350 тис. л бензину прямої перегонки та 100 тис. л ізопентанолу. В результаті змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюються три сорти авіаційного бензину: марки A – 2:3:5:2; марки B – 3:1:2:1 та C – 2:2:1:3 відповідно. Вартість 1 тис. л вказаних сортів бензину: A – 120 у.г.о., B – 100 у.г.о, C – 150 у.г.о. Потрібно представити дані у вигляді таблиці, а також визначити план змішування компонентів, при якому досягається мінімальна вартість усієї продукції.

2.5 Нафтопереробне підприємство виготовляє 2 види пального: бензин вищого сорту та бензин нижчого сорту, для виробництва яких використовується два види нафтопродуктів (сировини) – A та B. Максимально можливі добові запаси цих продуктів A – 6 тонн, B – 8 тонн. Витрати сировини A та B на 1 тонну пального, а також оптові ціни 1 тонни бензину кожного сорту наведені у таблиці. Відомо також, що добовий попит на бензин нижчого сорту не перевищує попиту на бензин нижчого сорту більш, як на 1 тонну, а попит на бензин вищого сорту не перевищує 2 тонни.

Сировина	Бензин вищого сорту	Бензин нижчого сорту	Запас сировини
A	1	2	6
B	2	1	8
Оптові ціни	3	2	

Скласти математичну задачу, що дозволить обрахувати оптимальний план виробництва бензину.

2.6 Цех випускає трансформатори для електродвигунів двох видів. Для виготовлення трансформаторів обох видів використовується залізо та проволока. Загальний запас заліза становить 3 тони, проволоки – 18 тон. На один трансформатор 1-го виду використовується 5 кг заліза та 3 кг проволоки, а на трансформатор 2-го виду використовується 3 кг заліза та 2 кг проволоки. За кожен реалізований трансформатор підприємство отримує прибуток 3 у.г.о., другого – 4 у.г.о. Потрібно скласти математичну модель задачі, що дозволить обрахувати план випуску трансформаторів, що забезпечить заводу максимальний прибуток.

2.7 Автомобільний завод випускає автомобілі двох типів A та B. Виробничі потужності окремих цехів та відділів та прибуток від виробництва одного автомобіля наведені в таблиці.

№	Найменування цехів та ділянок	Кількість автомобілів за рік	
		Тип A	Тип B
1	Підготовка до виробництва	125	110
2	Кузовний	80	320
3	Виготовлення шассі	119	110
4	Виготовлення двигунів	240	120
5	Складальний	160	80
6	Ділянка випробувань	280	70
Прибуток від виробництва (у.г.о.)		2000	2400

Скласти математичну модель задачі для визначення найбільш рентабельної виробничої програми за умов, що вона обмежена умовами: автомобілів типу A не більш як 50, а типу B – не більше 60 одиниць.

2.8 Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки для дорожніх машин. На виробництво одного вала робітник витрачає 3 год., однієї втулки – 2 год. Від реалізації одного вала підприємство одержує прибуток 800 тис. у.г.о, а від реалізації втулки – 600 у.г.о. Цех має виготовляти не менш як 100 валів і 200 втулок. Представити дані у вигляді таблиці. Скласти математичну модель задачі, що дасть змогу визначити скільки валів і втулок потрібно випустити, щоб одержати найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу цеху становить 900 людино-годин.

2.9 Автосалон продає автомобілі трьох марок (A, B, C), використовуючи такі ресурси: час і площа торгових залів. Витрати ресурсів на продаж однієї партії автомобілів кожної марки наведені у таблиці. Прибуток, одержаний від реалізації однієї партії автомобілів марки A становить 500 млн. у.г.о., марки B – 800 млн. у.г.о., марки C – 600 млн. у.г.о. Скласти математичну модель задачі для визначення оптимальної структури товарообігу, що забезпечить максимальний прибуток.

Ресурси	Марка автомобіля			Запаси ресурсів
	A	B	C	
Час (Люд.-години)	0,5	0,7	0,6	2
Торгова площа (м^2)	10	30	20	900

2.10 Для перевезення вантажу використовують машини типів A та B. Вантажопідйомність машин кожного типу – 3 т. За один рейс машина A витрачає 1,5 кг мастильний матеріалів і 50 л бензину, а машина B – відповідно 2 кг та 30 л. На базі є 35 кг мастильних матеріалів і 900 л бензину. Витрати на експлуатацію машини A становлять 8 у.г.о., B – 5 у.г.о. Потрібно перевезти 60 т. вантажу. Скласти математичну модель задачі, що дозволить обрахувати план використання машин типів A і B, що мінімізує експлуатаційні витрати.

2.11 Перед проектувальниками автомобіля поставлена задача сконструювати найбільш дешевий кузов, використовуючи листовий метал, скло та пластмасу. Основні характеристики матеріалів наведені у таблиці. Загальна поверхня кузова (разом з вікнами та дверима) повинна складати 14 м^2; з них не менше як 4 м^2 і не більше як 5 м^2 слід відвести під скло. Маса кузова не повинна перевищувати 150 кг.

Ресурси	Матеріали		
	Метал	Скло	Пластмаса
Маса (кг/м^2)	10	15	3
Вартість (у.г.о/м^2)	25	20	40

Скласти математичну модель задачі для обрахунку плану використання металу, скла та пластмаси, для найбільш вигідного проєкту.

2.12 Автодилер планує представити на ринку нову марку автомобіля. Для цього він збирається рекламувати товар за допомогою місцевих радіо і телевізійних каналів. Витрати на рекламу в бюджеті компанії обмежені 20 тис. у.г.о на місяць. Одна хвилина радіореклами коштує 100 у.г.о., телереклами 1000 у.г.о.. Із попередніх років відомо, що обсяг збуту, що забезпечує одна хвилина телереклами, у 10 разів більший, ніж обсяг збуту від радіореклами, однак, автодилер бажає використовувати радіоканали принаймі в чотири рази частіше від телебачення. Скласти такий план рекламної кампанії, що дозволить досягти максимальних об’ємів збуту.

2.13 Під час будівництва дороги використовуються дорожні машини чотирьох типів, кожна з яких може виконувати кожен з чотирьох типів дорожніх робіт. Продуктивність машин різного виду за кожним видом роботи наведено у таблиці.

Тип дорожньої машини	Види робіт			
	1	2	3	4
1	1,2	0,9	1,0	1,4
2	0,6	0,8	0,2	1,0
3	1,0	0,6	0,6	1,2
4	0,5	0,6	0,1	0,7

Скласти математичну модель задачі, що дозволить розділити дорожні машини за видами робіт, забезпечивши максимальну продуктивність будівельної дільниці.

2.14 Підприємству машинобудування листи металу розміром 6×13 м^2 потрібно розкроїти на заготовки двох типів: 800 одиниць заготовок розміру 4×5 м^2 та 400 одиниць заготовок розміру 2×3 м^2 . Можливі способи розкрою матеріалу та кількість заготовок кожного типу, що отримують при розкрої одного листа, наведено у таблиці.

Розмір заготовки, м^2	Спосіб розкроювання			
	I	II	III	IV
4×5	3	2	1	0
2×3	1	6	9	13

Скласти математичну модель задачі, що дозволить обрахувати план розкроювання з мінімальними витратами матеріалу.

2.15 Для виготовлення певної автозапчастини потрібні три планки: одна завдовжки 2м і дві по 1,5 м кожна. Запас рейок становить: 400 завдовжки 5м кожна та 100 завдовжки 6,5 м кожна. Скласти математичну модель задачі, що дозволить визначити, як різати рейки на заготовки, щоб отримати найбільшу кількість вказаних вище автозапчастин.

2.16 З пункту А до пункту В щоденно відправляються пасажирські та швидкі поїзди. Дані про організацію перевезень наведено у таблиці.

Поїзди	Кількість вагонів у поїзді				
	багажний	поштовий	плацкартний	купейний	СВ
швидкий	1	1	5	6	3
пасажирський	1	-	8	4	1
кількість пасажирів	-	-	58	40	32
парк вагонів	12	8	81	70	26

Скласти математичну модель задачі, що дозволить обрахувати скільки потрібно сформувати швидких та пасажирських поїздів, щоб перевезти найбільшу кількість пасажирів?

2.17 Бригада одержала термінове замовлення на виготовлення 50 од. автозапчастин $З_1$, 30 од. автозапчастин $З_2$ і 45 од. автозапчастин $З_3$. Автозапчастини виготовляються двома лініями A і B. Для випуску лінією A автозапчастини $З_1$ потрібно 4 од. часу, автозапчастини $З_2$ – 40 од., автозапчастини $З_3$ – 10 од., лінією В – відповідно 6; 8 і 20 од. часу. Скласти математичну модель задачі для визначення мінімального часу виконання замовлення.

2.18 У місті є три спеціалізовані майстерні по ремонту двигунів. Їх виробничі потужності рівні відповідно 100, 700, 980 ремонтів на рік. У п'яти районах, що обслуговуються цими майстернями, потреби у ремонтах дорівнюють відповідно 90, 180, 150, 120, 80 двигунів на рік. Витрати (в у.г.о) на перевезення двигуна з району до майстерень наступні

Райони	Майстерні		
	1	2	3
1	4,5	3,7	8,3
2	2,1	4,3	2,4
3	7,5	7,1	4,2
4	5,3	1,2	6,2
5	4,1	6,7	3,1

Потрібно спланувати кількість ремонтів кожної з майстерень для кожного з районів, що мінімізує загальні транспортні витрати.

2.19 Компанія випускає охолоджувальну рідину (тосол) для автомобілів на двох заводах A і B. Пляшки на кожний з них поставляють дві фірми P і Q. На поточний місць заводу A потрібно 5000 пляшок, а заводу B – 3500 пляшок. Фірма P спроможна поставити 7500 пляшок, а фірма Q – 4000 пляшок. Дані про вартість перевезення однієї пляшки (в у.г.о) від кожного постачальника до кожного заводу наведені в таблиці:

Постачальник	Вартість перевезення однієї пляшки, грн.		Можливий обсяг постачання
	A	*B*	
P *Q*	0,04 0,03	0,04 0,02	7500 4000
Попит	5000	3500	

Скласти математичну модель задачі визначення плану постачання пляшок, при якому загальна вартість перевезень буде мінімальною.

2.20 Три хлібозаводи Z_1, Z_2, Z_3 щоденно постачають хліб до чотирьох магазинів M_1, M_2, M_3, M_4. Дані про попит на продукцію, її наявність і транспортні витрати (в у.г.о) на перевезення 1 т продукції наведені в таблиці

Завод	Транспортні витрати, грн.				Пропозиція
	M_1	M_2	M_3	M_4	
Z_1 Z_2 Z_3	15 20 10	25 30 15	10 20 25	20 15 30	700 650 800
Потреба	400	500	350	1000	

Скласти математичну модель задачі лінійного програмування за критерієм оптимальності – мінімум загальних транспортних витрат.

Записати задачі 2.21 –2. 25. у канонічній формі:

2.21 $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8; \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right)$.

2.22 $F = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18; \end{cases}$$

$x_2, x_3 \ge 0$.

2.23 $F = -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

2.24 $F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \min$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 16, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 18; \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

2.25 $F = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \ge 2; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$.

Записати задачі 2.26 – 2.30 у симетричній формі:

2.26 $F = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4} \right)$.

2.27 $F = -x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \to \min$;

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 12, \\ -x_1 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 8, \\ -x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 18; \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5} \right)$.

2.28 $F = 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 + 2x_5 \to \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 16, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 30, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 8; \end{cases}$$

$x_j \geq 0\left(j = \overline{1,5}\right)$.

2.29 $F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0\left(j = \overline{1,5}\right)$.

2.30 $F = 2x_1 - x_2 + 3x_4 + 2x_5 + 4 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4; \end{cases}$$

$x_j \geq 0\left(j = \overline{1,5}\right)$.

Завдання для індивідуальної роботи

2.1. Скласти математичну модель оптимального плану виробництва.

Варіант 1 – 10

На виготовлення двох видів продукції ($П_1$ та $П_2$) витрачаються три види ресурсів A_1, A_2, A_3. Запаси ресурсів, норми їх витрат та прибуток в гривнях від реалізації одиниці продукції задано у таблиці згідно з варіантом. Скласти математичну модель задачі, що дасть можливість знайти такий план виробництва, який забезпечив би підприємству найбільший прибуток.

№ варіанту	Ресурси	Продукти		Запаси ресурсів
		$П_1$	$П_2$	
1	A_1	13	7	361
	A_2	17	16	520
	A_3	4	9	248
	Прибуток	11	8	

2	A_1	1	1	18
	A_2	4	7	93
	A_3	1	4	48
	Прибуток	24	36	
3	A_1	3	2	101
	A_2	2	3	99
	A_3	1	1	37
	Прибуток	27	24	
4	A_1	4	13	379
	A_2	5	6	197
	A_3	11	5	335
	Прибуток	25	12	
	A_1	3	1	45
	A_2	9	4	144
	A_3	3	4	96
	Прибуток	9	8	
6	A_1	14	15	400
	A_2	1	2	49
	A_3	9	5	220
	Прибуток	21	18	
7	A_1	11	6	324
	A_2	1	2	60
	A_3	15	14	500
	Прибуток	10	7	
8	A_1	2	1	48
	A_2	3	5	100
	A_3	4	15	225
	Прибуток	12	9	
9	A_1	3	8	187
	A_2	7	2	143
	A_3	1	1	29
	Прибуток	10	6	
10	A_1	2	7	126
	A_2	1	1	30
	A_3	6	1	120
	Прибуток	20	15	

Варіант 11 – 20

Підприємство виробляє два види продукції ($П_1$ та $П_2$), для чого використовує сировину А та В. З попереднього досвіду відомо, що попит на продукцію $П_1$ не перевищує попит на продукцію $П_2$ більше ніж на a тон , а попит на продукцію $П_2$ ніколи не перевищував b тон на добу. Максимально можливі добові запаси сировини, її витрати для виготовлення 1 т відповідної продукції, оптові ціни в гривнях 1 тони продукції, а також значення параметрів a та b наведені у таблиці згідно з варіантом. Скласти математичну модель оптимального плану виробництва, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

№ варіанту	Сировина	Продукція		Запаси сировини
		$П_1$	$П_2$	
11	A	1	2	6
	B	2	1	9
	Оптові ціни	3	2	
	a= 0,1 , b= 1,5			
12	A	1	2	6,1
	B	2	1	9
	Оптові ціни	3,1	2	
	a= 0,2 , b= 1,6			
13	A	1	2	6,2
	B	2	1	8,1
	Оптові ціни	3,2	2	
	a= 0,3 , b= 1,7			
14	A	1	2	6,3
	B	2	1	8,2
	Оптові ціни	3,3	2	
	a= 0,4 , b= 1,8			
15	A	1	2	6,4
	B	2	1	8,3
	Оптові ціни	3,4	2	
	a= 0,5 , b= 1,9			
16	A	1	2	6,5
	B	2	1	8,4
	Оптові ціни	3,5	2	
	a= 0,6 , b= 2			
17	A	1	2	6,6
	B	2	1	8,5
	Оптові ціни	3,6	2	
	a= 0,7 , b= 2,1			

18	A	1	2	6,7
	B	2	1	8,6
	Оптові ціни	3,7	2	
	a= 0,8 , b= 2,2			
19	A	1	2	6,8
	B	2	1	8,7
	Оптові ціни	3,8	2	
	a= 0,9 , b= 1,9			
20	A	1	2	6,9
	B	2	1	8,8
	Оптові ціни	3,9	2	
	a= 1 , b= 1,5			

Варіант 21 – 30

При виробництві продукції $П_1$ і $П_2$ використовують 4 групи обладнання A, B, C, D. Витрати робочого часу кожного з типів обладнання на виготовлення однієї одиниці продукції вказані в таблиці згідно з варіантом. У ній також вказано загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток в гривнях від реалізації одиниці готової продукції кожного виду. Потрібно скласти математичну модель задачі для визначення плану виготовлення продукції, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

№ варіанту	Обладнання	Продукція		Фонд робочого часу обладнання
		$П_1$	$П_2$	
21	A	2	3	19
	B	2	1	13
	C	1	0	6
	D	1	1	6
	Прибуток	7	8	
22	A	1	1	6
	B	1	2	8
	C	1	0	4
	D	0	1	3
	Прибуток	2	3	
23	A	1	1	18
	B	0,5	1	12
	C	1	0	12
	D	0	1	9
	Прибуток	4	6	

24	A	2	2	18
	B	1	2	12
	C	3	1	12
	D	1	4	28
	Прибуток	2	3	
25	A	4	5	22
	B	3	1	12
	C	1	0	3
	D	0	1	3
	Прибуток	5	2	
26	A	3	2	17
	B	5	1	19
	C	1	0	3
	D	0	1	7
	Прибуток	2	1	
27	A	2	1	9
	B	3	2	16
	C	1	0	3
	D	0	1	6
	Прибуток	3	2	
28	A	1	2	11
	B	1	1	8
	C	1	0	7
	D	0	1	5
	Прибуток	3	8	
29	A	2	3	24
	B	2	5	19
	C	2	0	11
	D	2	1	14
	Прибуток	2	6	
30	A	1	2	18
	B	3	1	24
	C	1	1	15
	D	0	1	7
	Прибуток	3	2	

2.2. Скласти математичну модель оптимального плану перевезень (транспортна задача).

На підприємствах A_i (i=1,2,3) виготовляється однорідна продукція обсягом a_i одиниць. Готова продукція доставляється у пункти B_j (j=1,2,3,4), потреби яких становлять b_j одиниць. Транспортні витрати при перевезенні одиниці продукції з пункту A_i до пункту B_j становлять c_{ij} у.г.о. Скласти математичну модель задачі, що дозволить обрахувати план перевезень продукції, за якого буде перевезена уся вироблена продукція з мінімальними сумарними затратами. Числові дані до задачі наведені у таблиці згідно з варіантом.

№ варіанту	B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
1.	A_1	2	4	3	2	60
	A_2	3	1	2	3	65
	A_3	5	4	1	5	70
	Потреби b_j	40	60	70	25	
2.	A_1	1	2	1	4	60
	A_2	4	0	5	3	80
	A_3	3	5	2	2	100
	Потреби b_j	40	60	80	60	
3.	A_1	11	8	7	5	35
	A_2	12	13	10	11	40
	A_3	6	9	7	8	50
	Потреби b_j	25	20	30	50	
4.	A_1	10	8	7	5	35
	A_2	6	9	7	8	50
	A_3	12	3	8	6	40
	Потреби b_j	25	20	30	50	
5.	A_1	3	2	4	3	20
	A_2	2	1	2	4	50
	A_3	1	3	3	2	70
	Потреби b_j	10	20	30	80	

6.	A_1	2	1	1	3	80
	A_2	1	2	3	2	70
	A_3	2	3	4	1	20
	Потреби b_j	30	20	70	50	
7.	A_1	1	5	2	3	50
	A_2	6	2	3	4	30
	A_3	4	2	3	2	60
	Потреби b_j	20	40	30	50	
8.	A_1	4	5	6	5	180
	A_2	8	4	6	7	240
	A_3	7	6	4	0	160
	Потреби b_j	200	160	100	120	
9.	A_1	9	2	5	6	45
	A_2	2	1	4	7	25
	A_3	1	8	6	3	20
	Потреби b_j	15	20	30	25	
10.	A_1	3	2	4	3	20
	A_2	2	1	2	4	50
	A_3	1	3	3	2	70
	Потреби b_j	10	20	30	80	
11.	A_1	3	2	4	5	20
	A_2	2	1	2	4	40
	A_3	1	5	3	3	80
	Потреби b_j	10	20	30	80	
12.	A_1	1	2	1	4	60
	A_2	2	1	2	4	80
	A_3	1	3	3	2	100
	Потреби b_j	40	60	80	60	

13.	A_1	2	3	2	4	30
	A_2	3	2	5	1	40
	A_3	4	3	2	6	20
	Потреби b_j	20	30	30	10	
14.	A_1	5	7	4	2	225
	A_2	7	1	3	1	200
	A_3	2	3	6	8	175
	Потреби b_j	100	190	80	230	
15.	A_1	11	8	7	5	35
	A_2	2	13	10	1	40
	A_3	6	9	7	8	70
	Потреби b_j	25	20	30	70	
16.	A_1	9	17	22	10	210
	A_2	2	11	2	11	450
	A_3	5	4	8	7	290
	Потреби b_j	200	220	170	360	
17.	A_1	7	2	5	9	270
	A_2	6	9	3	9	450
	A_3	1	10	9	4	330
	Потреби b_j	400	200	230	220	
18.	A_1	5	7	4	2	200
	A_2	7	1	3	1	175
	A_3	2	3	6	8	225
	Потреби b_j	100	130	270	100	
19.	A_1	1	2	4	1	350
	A_2	3	2	9	6	330
	A_3	2	7	5	3	270
	Потреби b_j	200	360	170	220	

20.	A_1	1	3	5	2	300
	A_2	6	2	1	9	350
	A_3	4	3	2	3	200
	Потреби b_j	340	200	140	170	
21.	A_1	2	3	4	1	300
	A_2	9	1	6	7	300
	A_3	6	1	2	8	250
	Потреби b_j	150	140	340	220	
22.	A_1	5	8	7	3	250
	A_2	4	2	5	6	200
	A_3	7	3	9	2	450
	Потреби b_j	225	325	250	100	
23.	A_1	1	4	6	8	350
	A_2	9	7	1	2	200
	A_3	2	3	2	9	300
	Потреби b_j	310	200	195	145	
24.	A_1	1	7	8	4	200
	A_2	8	6	1	2	250
	A_3	7	2	3	1	200
	Потреби b_j	290	120	110	130	
25.	A_1	1	2	1	4	60
	A_2	4	3	5	3	80
	A_3	6	2	2	3	100
	Потреби b_j	40	50	90	60	
26.	A_1	1	5	2	3	60
	A_2	6	2	4	1	50
	A_3	4	1	1	2	40
	Потреби b_j	20	30	40	60	

27.	A_1	2	4	5	1	60
	A_2	2	3	9	4	70
	A_3	3	4	2	5	20
	Потреби b_j	40	30	30	50	
28.	A_1	1	8	2	3	30
	A_2	4	7	5	1	50
	A_3	5	3	4	4	20
	Потреби b_j	15	15	40	30	
29.	A_1	10	5	7	4	40
	A_2	7	4	9	10	25
	A_3	6	14	8	7	35
	Потреби b_j	15	40	30	15	
30.	A_1	3	2	4	1	50
	A_2	2	3	1	5	40
	A_3	3	2	7	4	20
	Потреби b_j	30	25	35	20	

2.3. Звести до канонічної форми ЗЛП

Задачу лінійного програмування записати у канонічній форми.

1. $F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$$

$x_1, x_3 \ge 0$.

2. $F = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 21, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 15; \end{cases}$$

$x_1, x_3 \ge 0$.

3.

$F = 2x_1 + x_4 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \ge 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 8; \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

4.

$F = 6x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + 4x_4 \to \max$
;

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 \le 1000, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 21, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 156; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_4 \ge 0$.