5.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 \le 3; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

6.

$$F = 4 + 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 - 3x_2 \le -3; \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

7.

$$F = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 - 2x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_1, x_3 \ge 0.$$

8.

$$F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2; \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

9.

$$F = 2x_2 + x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 2, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12; \end{cases}$$
$$x_1, x_3 \ge 0.$$

10.

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_3 \le 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 8; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

11.

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$$
$$x_1, x_3 \ge 0.$$

12.

$$F = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \ge -4, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 0; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

13.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_2 + x_3 \le 3, \\ -x_1 + x_2 + x_4 \ge 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \ge 2; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

14.

$$F = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 3, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_4 \ge 0.$$

15.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \le 2, \\ \quad x_2 + x_3 \ge 3; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

16.

$$F = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ \quad 3x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 \le 9; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_4 \ge 0.$$

17.

$$F = 8x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ \quad 3x_1 - x_3 \le 3, \\ \quad x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases}$$

$$x_1, x_3 \ge 0.$$

18.

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 21, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 15; \end{cases}$$

$$x_1, x_3 \ge 0.$$

19.

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$$

$$x_1, x_3 \ge 0.$$

20.

$$F = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 \ge 2, \\ \quad x_2 + x_3 \le 3, \\ -x_1 + x_2 + x_4 \ge 1; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

21.

$$F = -2x_1 - x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} \quad x_2 + 2x_4 \ge 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 8; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

22.

$$F = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4, \\ \quad 3x_1 - x_2 + 2x_4 \le 15, \\ \quad x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 0; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

23.

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4; \end{cases}$$

$$x_1, x_3 \ge 0.$$

24.

$$F = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 + x_4 \le 1, \\ \quad x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

25.

$$F=-x_1+x_2-2x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3x_1+5x_2-12x_3=14, \\ 2x_1-x_2+6x_3 \le 12, \\ 3x_1-6x_2-4x_3 \ge -18; \end{cases}$$
$$x_2, x_3 \ge 0.$$

26.

$$F=-3x_1-2x_2+x_3+4 \to \min;$$
$$\begin{cases} -x_1+3x_2 \ge 3, \\ 3x_1+x_2 \ge 9, \\ x_1+x_2 \le 10, \\ -x_1+x_2+x_3=4; \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

27.

$$F=2x_1-2x_2+5x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=7, \\ 2x_1-x_2+3x_3 \le 5, \\ x_1-2x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_1, x_3 \ge 0.$$

28.

$$F=3x_1+x_2+2x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3 \ge 10, \\ 3x_1-2x_2+x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+x_3 \le -2; \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

29.

$$F=-2x_2-x_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} -x_1+3x_2-4x_3 \ge -10, \\ 4x_1+2x_2-2x_3 \ge 4, \\ 4x_1+2x_2+x_3=12; \end{cases}$$
$$x_1, x_3 \ge 0.$$

30.

$$F=x_1+x_2-x_3+x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_2-3x_3+2x_4 \le 8, \\ x_1-2x_3 \ge -2, \\ x_1-x_2-2x_3+x_4=6; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

2.4. Записати задачу лінійного програмування у симетричній формі

1.

$$F=4x_1-x_2+x_3+2x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3+2x_4=16, \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=18; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

2.

$$F=3x_1+2x_2-x_3+2x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4=15, \\ x_1+4x_2+3x_3-2x_4=10; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

3.

$$F=2x_1+2x_2+3x_3+2x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3+x_4=24, \\ x_1+4x_2+3x_3-2x_4=15; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

4.

$$F=3x_1+4x_2+x_3-2x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3-x_4=-12, \\ 4x_1-3x_2-2x_3+3x_4=-2; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

5.
$F = 3x_1 + x_3 + 2x_4 \to \max$;
$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 20, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 14; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

6.
$F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \min$;
$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -8, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 12; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

7.
$F = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max$
$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -21, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 14; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

8.
$F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min$;
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 30, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -10; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

9.
$F = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \to \max$
$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 40, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 10; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

10.
$F = -x_1 + x_3 + 2x_4 \to \max$;
$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + x_3 + 4x_4 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

11.
$F = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 \to \max$
$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

12.
$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$;
$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 18; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

13.
$F = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max$
$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -26, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 20; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

14.
$F = -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max$
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18, \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 30; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

15.
$F = -x_1 + x_2 + x_3 \to \min$;
$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 40, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 30; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

16.
$F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \to \max$;
$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -18, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 36; \end{cases}$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

17. $F = 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 12, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 40; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

18. $F = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -10; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

19. $F = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 18; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

20. $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 20; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

21. $F = 3x_1 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -10, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -26; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

22. $F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 18; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

23.

$F = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 25, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 40; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

24.

$F = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -18, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 36; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

25. $F = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 32, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 46; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

26. $F = -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 26, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 32; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

27. $F = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

28. $F = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

29.

$F = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

30.

$F = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 7; \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

РОЗДІЛ 3. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

§ 3.1. Основні теоретичні відомості

Допустимим розв'язком (***планом***) ЗЛП називають вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненти якого задовольняють умовам-обмеженням цієї задачі. ***Розв'язком*** ЗЛП називають ***оптимальний план*** $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ з усіх допустимих планів, при якому цільова функція досягає свого максимального (мінімального) значення.

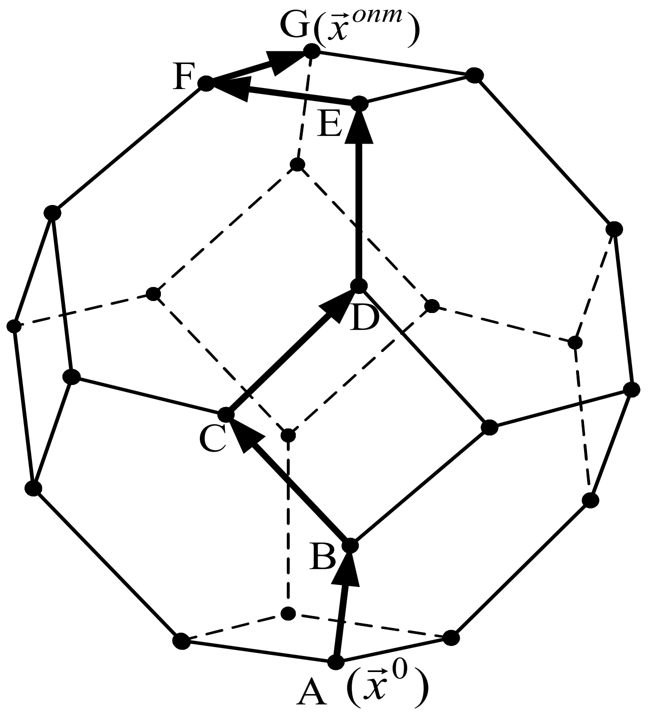


Рис. 3.1

Основним методом розв'язування ЗЛП є ***симплексний метод***. Перед його застосуванням ЗЛП зводиться до канонічної форми. Система рівнянь-обмежень канонічної задачі геометрично визначає границю многогранника допустимих розв'язків (рис. 2.1). Кутові точки (вершини) цього многогранника відповідають опорним розв'язкам системи. В основі симплекс-методу лежить впорядкований перехід від одного опорного плану (вершини) до іншого, так, щоб значення цільової функції зростало. Це досягається шляхом зміни базису за певним алгоритмом. Виходячи із будь-якого початкового опорного плану $\vec{x}^0$(вершина A), за скінчене число кроків (A→B→C→D→E→F→G), симплекс-метод приводить до оптимального розв'язку $\vec{x}^{опт}$ (вершина G) або встановлює відсутність такого розв'язку. Задача може мати і нескінченну кількість розв'язків (ребро або грань многогранника).

В окремих випадках ЗЛП може бути розв'язана графічно.

Графічний метод розв'язування ЗЛП

Головна ***перевага методу*** – простота і наочність, ***недолік*** – метод дозволяє розв'язати досить обмежений клас задач, а саме:

1. Задачі, задані в стандартній формі, що містять дві або три змінні, причому трьохвимірні задачі ($n = 3$) графічно розв'язуються рідко, оскільки геометричні побудови в тривимірному просторі досить складні, що призводить до втрати головної переваги методу.

2. Задачі, задані в канонічній формі, які після зведення до симетричної форми містять дві змінні. Для цього різниця $n-r$ між кількістю змінних n вихідної канонічної задачі та рангом системи рівнянь обмежень r, що дорівнює кількості її лінійно незалежних рівнянь, має дорівнювати 2 ($n-r=2$).

3. Будь-яка загальна задача, що може бути зведена до першого чи другого випадків.

Алгоритм графічного методу передбачає виконання таких етапів:

1) зведення ЗЛП до симетричної форми;

2) побудова многокутника допустимих розв‘язків ЗЛП;

3) побудова вектора-градієнта, що визначає напрямок найшвидшого зростання (спадання) цільової функції, ліній рівня та графічне знаходження розв’язку задачі;

4) аналітично обчислюють координати точки максимуму(мінімуму) цільової функції та знаходять її оптимальне значення.

Зупинимося більш детально на реалізації кожного з етапів.

1-й етап. Більшість моделей ЗЛП, на етапі написання математичної моделі, записуються у симетричній формі, або ж легко зводяться до неї (§ 2.6). Отже, будемо вважати, що в результаті виконання 1-го етапу ЗЛП представлена у вигляді:

$$\boxed{F=c_1x_1+c_2x_2\to\max(\min)}, \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\le b_m, \end{cases}} \qquad \textbf{(3.2)}$$

$$\boxed{x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0}. \qquad \textbf{(3.3)}$$

2-й етап. Область допустимих розв‘язків ЗЛП (3.1) - (3.3) співпадає з ***областю розв’язків системи лінійних нерівностей-обмежень*** (3.2), що є сукупністю усіх точок площини, які задовольняють кожну нерівність цієї системи.

Область розв‘язків кожної окремо взятої i-ї нерівності (i = 1, 2, ..., m)

$$\boxed{(i) \quad a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\le b_i} \qquad \textbf{(3.4)}$$

є півплощина, на яку поділяє всю площину гранична пряма

$$\boxed{l_i: \quad a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i}. \qquad \textbf{(3.5)}$$

Для геометричної побудови граничної прямої можна, наприклад, знайти точки перетину цієї прямої з осями координат.

Покладемо $x_2 = 0$, тоді з рівняння (3.5) маємо, що $x_1 = b_i / a_{i1}$.

Покладемо $x_1 = 0$, тоді з рівняння (3.5) маємо, що $x_2 = b_i / a_{i2}$.

Отже, точки перетину з осями абсцис та ординат відповідно є

$$\boxed{(b_i / a_{i1}; 0)} \quad \text{та} \quad \boxed{(0;\ b_i / a_{i2})}.$$

Зручно, також, користуватися рівнянням прямої у відрізках на осях. Для цього шляхом ділення всього рівняння на праву частину b_i зводимо його до вигляду $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$, де a та b – відрізки, що відтинає ця пряма на осях координат відповідно Ox_1 та Ox_2.

Однак, наведені вище способи побудови прямої справедливі якщо вона не проходить через початок координат, тобто, коли $b_i \neq 0$. Якщо ж це так, пряму проводимо через точку (0, 0), перпендикулярно до вектора $\vec{n}_i = (a_{i1}; a_{i2})$.

Для визначення по яку сторону від прямої l_i лежатиме область розв‘язків відповідної нерівності обирається контрольна точка, що не лежить на прямій, координати якої підставляються у нерівність. Якщо в результаті підстановки отримано істинний вираз – шукана область містить контрольну точку, якщо хибний – область розв‘язків нерівності лежить по іншу сторону прямої від контрольної точки. Якщо пряма не проходить через початок координат ($b_i \neq 0$), в якості контрольної точки доцільно обирати початок координат. Якщо проходить – будь яку іншу точку поза прямою.

Знайшовши переріз усіх побудованих вище півплощин отримуємо область допустимих розв‘язків ЗЛП. Зазвичай ця область має вигляд замкненого або незамкненого многокутника, тому дістала назву ***многокутника допустимих розв'язків ЗЛП.*** Лише в окремих випадках ця область може вироджуватися у півплощину, пряму, точку, або бути порожньою. В останньому випадку говорять, що система лінійних нерівностей (3.2) несумісна, область допустимих розв'язків ЗЛП порожня, отже, сама задача не має розв‘язку (рис. 3.2, г). Умова (3.3) невід'ємності змінних означає, що многокутник допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору.

2-й етап. Многокутник допустимих розв'язків ЗЛП містить нескінчену кількість точок - допустимих розв'язків. Постає задача обрати серед них таку (такі), де значення цільової функції максимальне(мінімальне) серед усіх можливих. Для цього необхідно визначити напрямок (вектор) вздовж якого цільова функція (3.1) зростає. З курсу вищої математики відомо, що вектор-градієнт деякої функції вказує напрям найскорішої зміни цієї функції. Розглянемо вектор-градієнт цільової функції F

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2) = \vec{N}}. \qquad \textbf{(3.6)}$$

З (3.6) випливає, що напрям найскорішої зміни цільової функції співпадає з напрямом вектора нормалі $\vec{N}$ до прямої $\boxed{F = c_1x_1 + c_2x_2}$, координати якого є коефіцієнтами при невідомих функції F. Будуємо вектор $\boxed{\vec{N} = (c_1, c_2)}$ в системі координат.

Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих (***ліній рівня***) $\boxed{c_1x_1 + c_2x_2 = const}$, перпендикулярних до вектора $\vec{N}$, кожній з яких відповідає певне значення функції F.

Зрозуміло, що ЗЛП матиме розв'язок лише у тих точках площини, де лінії рівня матимуть спільні точки з областю D. Тому будуємо стартову лінію рівня $F_0 = c_1x_1 + c_2x_2$, перпендикулярно до вектора $\vec{N}$, так, щоб вона перетинала область D.

Для пошуку точки максимуму подумки пересуваємо лінію рівня в напрямку вектора $\vec{N}$. Свого максимального значення $F_{\max}$ цільова функція набуває у вершині многокутника D, або вздовж його ребра, що останнім зустрінеться на шляху лінії рівня в області допустимих розв'язків.

Для пошуку мінімального значення $F_{\min}$ пересуваємо лінію рівня в напрямку $-\vec{N}$ (протилежному до $\vec{N}$), доки вона не досягне вершини (ребра), що останнім зустрінеться на її шляху в області допустимих розв'язків D, і визначить точку мінімуму.

В залежності від взаємного розташування лінії рівня та області D, а також геометричних особливостей цієї області, під час розв'язування ЗЛП графічно можливі різні випадки, зокрема:

а) цільова функція набуває мінімального значення в вершині А, отже $F_{\min} = F(\grave{A})$. Максимум цільової функції досягається у точці G, отже $F_{\max} = F(G)$ (рис. 3.2, а);

б) мінімум досягається у кожній точці відрізка ВС, отже $F_{\min} = F(D) = F(C)$. Цільова функція набуває максимального значення в вершині G, отже $F_{\max} = F(G)$. (рис. 3.2, б);

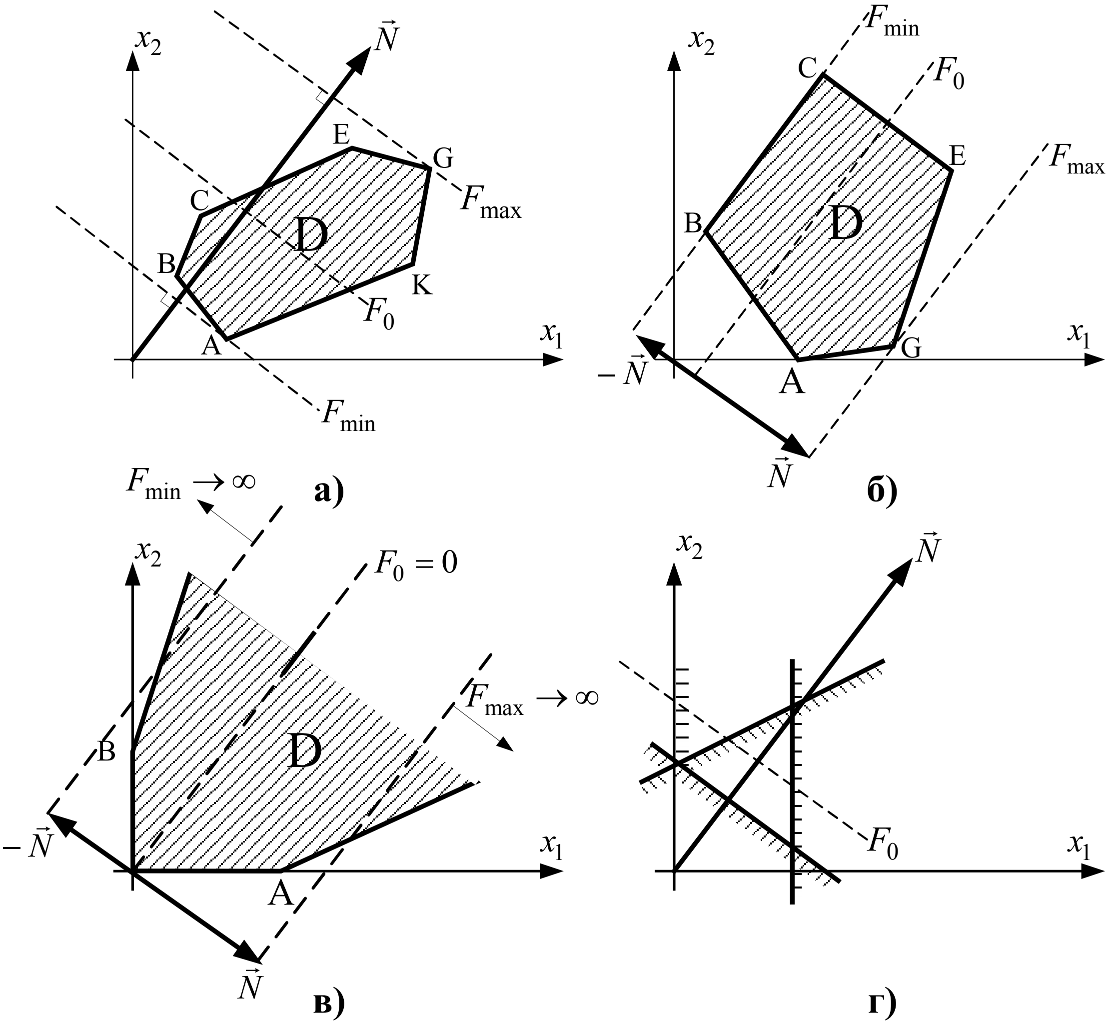


Рис. 3.2

в) функція необмежена зверху і знизу, тобто $F_{\min} = \infty$ та $F_{\max} = \infty$ (рис. 3.2, в);

г) задача не має розв'язку (система обмежень (3.2), (3.3) несумісна) (рис. 3.2, г).

На основі проведеної геометричної побудови можна зробити такі висновки щодо ***властивостей розв'язків ЗЛП***. Якщо ЗЛП має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній з вершин многокутника допустимих розв'язків D. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині многокутника D, то вона досягає його і в будь-якій точці відрізка, що з'єднує ці вершини. Тобто, розв'язок ЗЛП завжди лежить на границі області D. Зроблений висновок справедливий і для просторових задач.

§ 3.2. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 3.1. Розв'язати приклад 2.1 (§ 2.7) графічним методом.

Розв'язання.

1-й етап. Математична модель задачі, побудована у прикладі 2. 1, з самого початку представлена в симетричній формі і містить дві змінні, отже, може бути розв'язана графічно.

$$F = 140x_1 + 90x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 250, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 150, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 20, & (3) \\ \qquad x_2 \le 40. & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad (5)$$

$$x_2 \ge 0 \qquad (6)$$

2-й етап. Побудуємо многокутник допустимих розв'язків задачі, що є областю розв'язків системи нерівностей-обмежень з врахуванням умов невід'ємності змінних. Пронумеруємо кожну нерівність системи, побудуємо відповідні граничні прямі та визначимо область розв'язків кожної нерівності.

(1): Гранична пряма нерівності (1) – $l_1:\quad 3x_1 + 4x_2 = 250$, знайдемо точки її перетину з осями координат. Якщо $x_1 = 0$, то $x_2 = 250/4 \approx 62{,}3$, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 250/3 \approx 83{,}3$. Через точки (0; 62,3) та (83,3 ; 0) проводимо пряму l_1 (див. рис. 2.3). Визначимо, по яку сторону від граничної прямої l_1 лежить область розв'язку нерівності (1). Для цього поза прямою оберемо контрольну точку (К.Т.) О (0; 0) і підставимо її координати в нерівність (1): $3\cdot 0 + 4\cdot 0 = 0 \le 250$. Отримано істинний вираз, отже, півплощина розв'язків даної нерівності лежить по ту саму сторону від граничної прямої, що і контрольна точка. Цей факт на рисунку зображаємо стрілочками біля прямої, що напрямлені в сторону контрольної точки.

Аналогічно знаходяться півплощини розв'язку інших нерівностей:

(2): $l_2:\quad 2x_1 + x_2 = 150$.

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 150/2 = 75 \Rightarrow$ точка (0 ; 75),

$x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 150/1 = 150 \Rightarrow$ точка (150 ; 0),

К.Т. О(0;0) $\to$ (2) $\Rightarrow$ $0 \le 150$ - істина $\to$ в сторону К.Т.;

(3): $l_3:\quad -x_1 + x_2 = 20$,

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 20 \Rightarrow$ точка (0 ; 20),

$x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -20$ точка (-20 ; 0), К.Т. $O(0;0) \rightarrow (3) \Rightarrow 0 \le 20$ – істина → в сторону К.Т.;

(4): $l_4: \quad x_2 = 40$, – пряма паралельна осі абсцис і перетинає вісь ординат в точці $(0;40)$,

К.Т. $O(0;0) \rightarrow (4) \Rightarrow 0 \le 40$ – істина → в сторону К.Т.;

(5), (6), як згадувалось вище умови невід′ємності змінних (5) та (6) обмежують многокутник розв'язків 1-м квадрантом системи координат. Граничні прямі $l_5: \quad x_1 = 0$ та $l_6: \quad x_2 = 0$ співпадають з осями координат Ox_2 та Ox_1 відповідно.

Знаходимо переріз усіх побудованих вище півплощин. Отже, областю *D* допустимих розв'язків даної ЗЛП є замкнутий многокутник *OABCEG* (рис. 3.3).

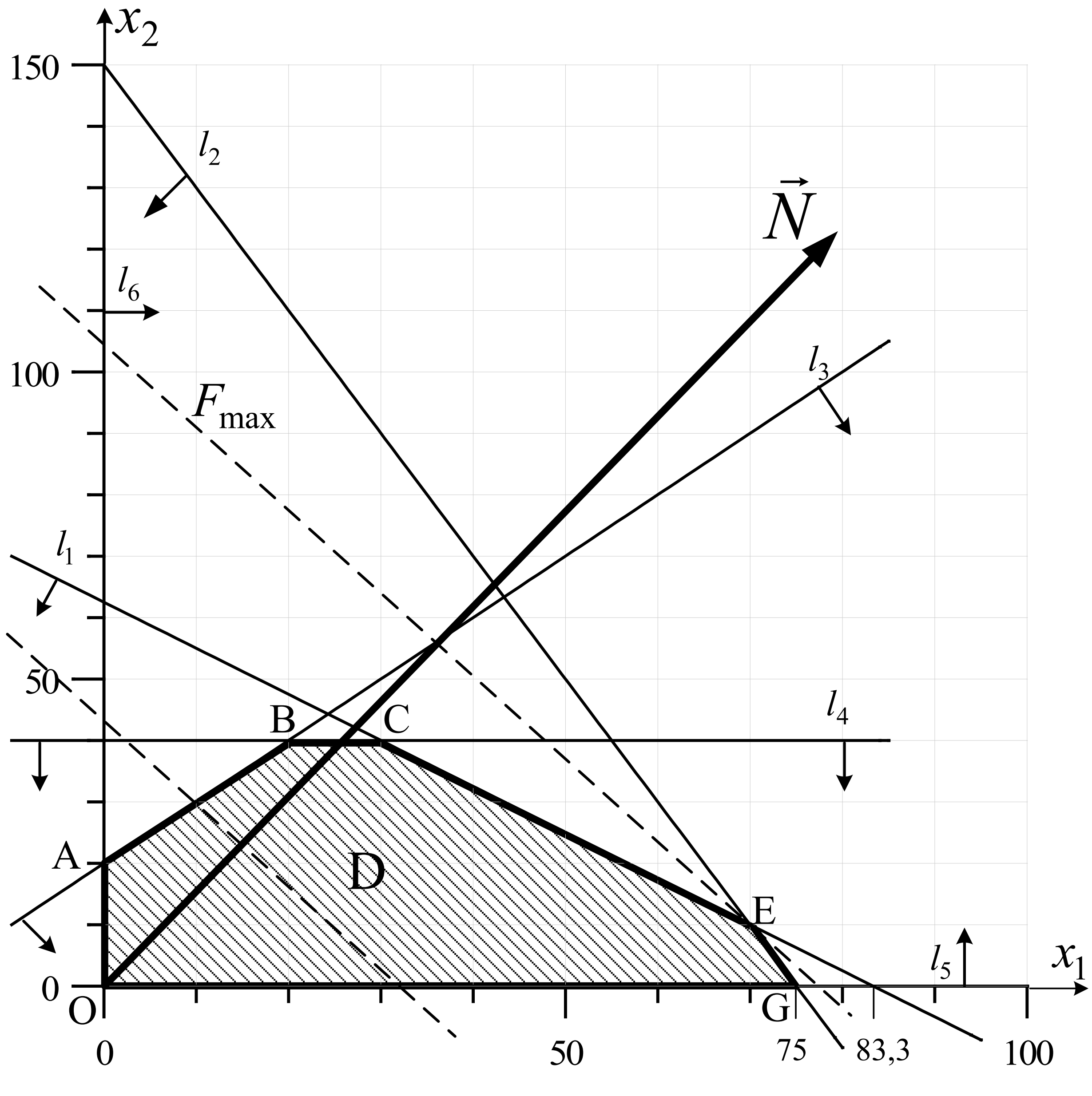


Рис. 3.3

3-й етап. Побудуємо вектор-градієнт, що вказує напрямок найшвидшого зростання цільової функції, лінії рівня та визначимо геометрично точку максимуму функції F.

Як було з'ясовано вище напрям вектора-градієнта $\overrightarrow{grad\,F}$ цільової функції співпадає з напрямом її вектора нормалі $\vec{N}$, а отже його координати є коефіцієнтами при відповідних невідомих цільової функції, тобто $\overrightarrow{grad\,F} = \vec{N} = (140, 90)$.

Лінії рівня – сімейство паралельних прямих, перпендикулярних до вектора $\vec{N}$, що геометрично інтерпретують цільову функцію. Побудуємо стартову лінію рівня F, так, щоб вона мала спільні точки з областю *D*. На рис. 3.3 лінії рівня зображені пунктиром.

Для пошуку точки максимуму будемо пересувати лінію рівня в напрямку вектора $\vec{N}$, доки вона не досягне останньої на своєму шляху спільної точки з областю *D*, яка і буде розв'язком задачі. В нашому випадку це вершина *E* многокутника допустимих розв'язків, якій відповідає граничне положення лінії рівня $F_{\max}$.

4-й етап. Знайдемо координати точки *E* та визначимо значення цільової функції у цій точці.

Оскільки точка *E* лежить на перетині граничних прямих l_1 та l_2 її координати знайдемо розв'язавши систему рівнянь, що складається з рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 250, \\ 2x_1 + x_2 = 150. \end{cases}$$

Для цього скористаємося методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 250 & 4 \\ 150 & 1 \end{vmatrix} = -350,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 250 \\ 2 & 150 \end{vmatrix} = -50,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-350}{-5} = 70,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-50}{-5} = 10.$$

Отже, координати точки максимуму *E*(70; 10), а максимальне значення цільової функції, яке досягається у цій точці

$$F_{\max} = F(E) = 140 \cdot 70 + 90 \cdot 10 = 10700.$$

Відповідь: максимального значення $F_{\max} = 10700$ функція досягає в точці *E*(70; 10).

Питання для самоконтролю

1. Які ЗЛП можна розв’язати графічно?

2. Назвіть основні етапи розв’язування ЗЛП графічним методом.

3. Що таке многокутник допустимих розв’язків, як він будується?

4. Як визначити напрямок найшвидшої зміни цільової функції?

5. Як геометрично інтерпретується цільова функція?

6. Назвіть основні властивості розв’язків ЗЛП.

7. Який зв’язок між кутовими точками многокутника розв’язків та опорними планами ЗЛП?

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

3.1. Розв’язати графічно, або встановити відсутність розв’язку.

1.

$$F = x_1 - 2x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, , \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3.

$$F = 2x_1 - 4x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 \le 8, \\ 7x_1 + 5x_2 \ge 32, \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 14, \\ -x_1 + 6x_2 \ge 0, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$

4.

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge -1, \\ x_2 \le -7, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

5.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 + 7x_2 \ge 7, \\ x_1 - 2x_2 \le 10, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 30, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

6.

$$F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

7.

$F = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_i \ge 0$, $(i = 1,2,3,4)$.

8.

$F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \min$;

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$.

9.

$F = 5x_1 - x_2 + x_3 \to \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$.

10.

$F = 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 16 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 28, \\ x_2 + x_4 = 16, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 = 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$.

3.2. Визначити при яких значеннях параметра λ задача має розв'язок, а при яких ні.

11. $F = 2x_1 + x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ \lambda x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

12. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 - 3x_2 \le 1, \\ \lambda x_1 - x_2 \le -2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Завдання для індивідуальної роботи

3.1. Розв'язати графічним методом завдання 2.1 згідно з варіантом.

3.2. Розв'язати задачі лінійного програмування графічним методом.

1) $z = 2x_1 + x_2 \quad (\max)$;

$x_1 - 2x_2 \ge 4$;

$5x_1 + 2x_2 \ge 10$;

$4x_1 - 3x_2 \le 12$;

$7x_1 + 4x_2 \le 28$;

$x_1, x_2 \ge 0$.

2) $z = 6x_1 + 3x_2 \quad (\min)$;

$2x_1 + x_2 \ge 4$;

$x_1 + 2x_2 \ge 4$;

$x_1 + x_2 \le 5$;

$x_1, x_2 \ge 0$.

3) $z = 3x_1 + 3x_2 \quad (\max)$;

4) $z = 2x_1 + x_2 \quad (\min)$;

$x_1 - 4x_2 \le 4;$
$3x_1 + 2x_2 \le 6;$
$-x_1 + x_2 \le 7;$
$x_1 + 2x_2 \ge 2;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

$x_1 + 2x_2 \le 8;$
$3x_1 + 5x_2 \ge 15;$
$-2x_1 + 5x_2 \le 10;$
$4x_1 + 3x_2 \ge 12;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

5) $z = 2x_1 + 2x_2 \quad (\max);$
$3x_1 - 2x_2 \ge -6;$
$x_1 + x_2 \ge 3;$
$x_1 \le 9;$
$x_2 \le 6;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

6) $z = 5x_1 - 3x_2 \quad (\min);$
$3x_1 + 2x_2 \ge 6;$
$2x_1 - 3x_2 \ge -6;$
$x_1 + x_2 \le 4;$
$4x_1 + 7x_2 \le 28;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

7) $z = 2x_1 + x_2 \quad (\max);$
$2x_1 - 3x_2 \le 6;$
$5x_1 + 6x_2 \le 30;$
$2x_1 + x_2 \ge 2;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

8) $z = -3x_1 + x_2 \quad (\min);$
$x_1 + 2x_2 \ge 10;$
$3x_1 + x_2 \ge 15;$
$x_1 \le 8;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

9) $z = 2x_1 + 5x_2 \quad (\max);$
$4x_1 + 5x_2 \le 40;$
$2x_1 + 3x_2 \ge 6;$
$-x_1 + x_2 \le 5;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

10) $z = -2x_1 + x_2 \quad (\min);$
$2x_1 + x_2 \le 8;$
$x_1 + x_2 \le 6;$
$-3x_1 + 2x_2 \ge 3;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

11) $z = 3x_1 + 3x_2 \quad (\max);$
$5x_1 + x_2 \ge 10;$
$x_1 + 7x_2 \ge 7;$
$x_1 - 2x_2 \le 10;$
$-5x_1 + 3x_2 \le 30;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

12) $z = 7x_1 - x_2 \quad (\min);$
$x_1 + x_2 \ge 3;$
$5x_1 + x_2 \ge 5;$
$x_1 + 5x_2 \ge 5;$
$x_1 \le 4, x_2 \le 4;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

13) $z = x_1 + x_2 \quad (\max);$

14) $z = -3x_1 + 6x_2 \quad (\min);$

$3x_1 + 5x_2 \le 15$;
$-x_1 + x_2 \le 2$;
$10x_1 + 7x_2 \le 35$;
$-x_1 - x_2 \le -1$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

$5x_1 - 2x_2 \le 4$;
$x_1 - 2x_2 \ge -4$;
$x_1 + x_2 \ge 4$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

15) $z = 3x_1 - 2x_2 \quad (\max)$;
$2x_1 + x_2 \le 11$;
$-3x_1 + x_2 \le 10$;
$3x_1 + 4x_2 \ge 20$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

16) $z = -2x_1 + 4x_2 \quad (\min)$;
$5x_1 + 2x_2 \le 10$;
$x_1 + x_2 \ge 3$;
$4x_1 + 3x_2 \le 12$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

17) $z = 2x_1 + x_2 \quad (\max)$;
$x_1 - 2x_2 \ge 4$;
$5x_1 + 2x_2 \ge 10$;
$4x_1 - 3x_2 \le 12$;
$7x_1 + 4x_2 \le 28$.
$x_1, x_2 \ge 0$.

18) $z = 5x_1 + 2x_2 \quad (\min)$;
$5x_1 + 2x_2 \ge 10$;
$2x_1 - 3x_2 \le 6$;
$x_1 + 2x_2 \ge 4$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

19) $z = x_1 + 2x_2 \quad (\max)$;
$2x_1 + x_2 \le 14$;
$-3x_1 + 2x_2 \le 9$;
$3x_1 + 4x_2 \ge 27$;
$6x_1 - x_2 \ge 18$.
$x_1, x_2 \ge 0$.

20) $z = -2x_1 + x_2 \quad (\min)$;
$2x_1 + x_2 \le 8$;
$x_1 + 3x_2 \ge 6$;
$3x_1 + x_2 \ge 3$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

21) $z = 3x_1 + 2x_2 \quad (\max)$;
$x_1 + 2x_2 \le 6$;
$2x_1 + x_2 \le 8$;
$-x_1 + x_2 \ge 1$;
$x_2 \le 2$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

22) $z = x_1 + 2x_2 \quad (\min)$;
$5x_1 - 2x_2 \le 20$;
$x_1 - 2x_2 \ge -20$;
$x_1 + x_2 \ge 16$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

23) $z = 3x_1 - 2x_2 \quad (\max)$;
$7x_1 + 2x_2 \geq 14$;
$-x_1 + 2x_2 \geq 2$;
$7x_1 + 10x_2 \leq 28$;
$x_1, x_2 \geq 0$.

24) $z = -2x_1 + 5x_2 \quad (\min)$;
$7x_1 + 2x_2 \geq 14$;
$5x_1 + 6x_2 \leq 30$;
$3x_1 + 8x_2 \geq 24$;
$x_1, x_2 \geq 0$.

25) $z = 2x_1 - 5x_2 \quad (\max)$;
$4x_1 + 3x_2 \leq 12$;
$3x_1 + 4x_2 \geq 24$;
$x_1, x_2 \geq 0$.

26) $z = 2x_1 - 10x_2 \quad (\min)$;
$x_1 - x_2 \geq 0$;
$x_1 - 5x_2 \geq -5$;
$x_1, x_2 \geq 0$;

27) $z = x_1 + x_2 \quad (\max)$;
$x_1 + 2x_2 \leq 9$;
$2x_1 + x_2 \leq 12$;
$-x_1 + 2x_2 \leq 1$;
$x_2 \leq 3$;
$x_1, x_2 \geq 0$.

28) $z = x_1 + x_2 \quad (\min)$;
$x_1 + x_2 \leq 8$;
$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$;
$2x_1 + 3x_2 \geq 12$;
$x_1, x_2 \geq 0$.

29) $z = 8x_1 + 3x_2 \quad (\max)$;
$2x_1 + 3x_2 \leq 36$;
$2x_1 + 5x_2 \leq 20$;
$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$;
$4x_1 - x_2 \geq 8$;
$x_1, x_2 \geq 0$.

30) $z = 4x_1 + 6x_2 \quad (\min)$;
$3x_1 + x_2 \geq 9$;
$x_1 + 2x_2 \geq 8$;
$x_1 + 6x_2 \geq 12$;
$x_1, x_2 \geq 0$.

РОЗДІЛ 4. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ДВОЇСТА ЗАДАЧА

§ 4.1. Етапи розв'язання злп симплексним методом

Виділимо такі етапи розв'язання ЗЛП симплексним методом:

1. Зведення ЗЛП до канонічної форми;

2. Знаходження початкового опорного плану;

3. Перевірка опорного плану на оптимальність.

З методикою виконання 1-го та 2-го етапів студенти ознайомились під час вивчення 1-го модуля.

Нехай, після виконання ***1-го етапу,*** ЗЛП зведено до канонічної форми:

$$\boxed{F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max}, \tag{4.1}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i=\overline{1,m}}, \tag{4.2}$$

$$\boxed{x_1 \ge 0},\ \boxed{x_2 \ge 0},\ \ldots,\ \boxed{x_n \ge 0} \tag{4.3}$$

В результаті виконання ***2-го етапу*** систему рівнянь обмежень (4.2) ЗЛП зведено до одиничного базису, тобто представлено у такому векторному вигляді:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \vec{A}_j x_j = \vec{b}}, \tag{4.4}$$

де $\vec{A}_j$ та $\vec{b}$ – r- вимірні вектори

$$\vec{A}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \vec{A}_r=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_{r+1}=\begin{pmatrix}\alpha_{1r+1}\\\alpha_{2r+1}\\\vdots\\\vdots\\\alpha_{rr+1}\end{pmatrix}, \ldots, \vec{A}_n=\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\\alpha_{2n}\\\vdots\\\vdots\\\alpha_{rn}\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\vdots\\\beta_{rn}\end{pmatrix},$$

так, щоб виконувалася умова невід'ємності компонент вектора $\vec{b}$: $\beta_1 \ge 0$, $\beta_2 \ge 0, \ldots, \beta_r \ge 0$. Систему (4.4) розв'язано відносно базисних змінних x_1, x_2, ..., x_r, а вільні змінні x_{r+1}, ... , x_n покладено рівними 0, в результаті чого знайдено початковий опорний план у вигляді $\vec{x}^0=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r,0,0,\ldots,0)$. Тут r – ранг системи ($r \le m$).

На ***3-му етапі*** для перевірки опорного плану $\vec{x}^0$ на оптимальність виконаємо наступну послідовність дій.

1. Складаємо ***симплексну таблицю***, в яку вносяться параметри задачі у порядку, вказаному нижче.

№ ітерації	номер рядка	коефіцієнти при базисних змінних	базисні змінні	значення базисних змінних	c_1	c_2	...	c_n	$\frac{\beta_i}{a_{ik} \geq 0}$
	i	$\vec{c}_{баз}$	$\vec{x}_{баз}$	$\vec{b}$	$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	...	$\vec{A}_n$	
0	1	c_1	x_1	β_1	1	0	...	α_{1n}	
	2	c_2	x_2	β_2	0	1	...	α_{2n}	
	...	...	...	...	...	...	...	...	
	r	c_r	x_r	β_r	0	0	...	α_{rn}	
	$r+1$	оцінки Δ_j		F_0	Δ_1	Δ_2	...	Δ_n	

При цьому в стовпчику $\vec{c}_{баз}$ записані коефіцієнти цільової функції, які відповідають базисним змінним із стовпця $\vec{x}_{баз}$. Останній (r+1)-й рядок таблиці відводиться для обрахунку цільової функції F та оцінок Δ_j, аналізуючи які, можна дати відповідь на питання чи є даний опорний план оптимальним.

2. Проведемо обрахунок цільової функції та оцінок за формулами:

$$\boxed{F = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{b}}, \quad \boxed{\Delta_j = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{A}_j - c_j}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Нагадаємо, що скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ розписується як $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n}$.

Оцінки, що відповідають базисним змінним, завжди нульові, наприклад, $\Delta_1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \ldots c_r \cdot 0 - c_1 = c_1 - c_1 = 0$, отже їх можна не обраховувати.

3. Перевіряємо виконання ***критерію оптимальності опорного плану***: якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то опорний план оптимальний, при цьому наявність серед оцінок вільних змінних нульових свідчить, що оптимальний план не єдиний.

Якщо критерій оптимальності виконується - задача розв'язана, маємо оптимальний базисний розв'язок і $F_{\max} = F_0$.

Якщо ж серед оцінок Δ_j вільних змінних є від'ємні (критерій оптимальності не виконується), переходимо до наступного пункту.

4. Серед значень $\Delta_j < 0$ знаходимо найбільше за абсолютною величиною і відповідний стовпчик обираємо ключовим. Нехай це буде *k*-тий стовпчик. Це означає, що змінна x_k буде виводитися з базису. Якщо в цьому стовпчику всі елементи $\alpha_{ik} \le 0$, то цільова функція необмежена: $F_{\max} = \infty$ і розв'язок закінчено. Якщо серед α_{ik} є додатні, то переходимо до наступного пункту.

5. Для кожного $\alpha_{ik} > 0$ ключового стовпця обчислюємо відношення β_i / α_{ik}. Отримані значення записуємо у відповідних рядках останнього стовпця симплексної таблиці. Рядок, що відповідає найменшому з цих значень обираємо ключовим. Нехай це буде рядок за номером *r*. Це означає, що змінна x_r буде введена до базису замість x_k. Елемент α_{rk}, який знаходиться на перетині ключових рядка і стовпця буде ключовим. У таблиці беремо його в квадратну рамку.

6. Над усіма рядками таблиці, включаючи рядок оцінок (*i+1*)-*й*, виконуємо перетворення Жордана–Гаусса. Отримані результати записуємо у наступній таблиці.

7. Для перевірки оптимальності отриманого покращеного опорного плану повертаємось до пункту 3.

Рекомендації щодо контролю правильності розрахунків

1. Після проведення ітерації результати розрахунків у рядку оцінок за методом Жордана-Гаусса та за формулами (4.5) повинні співпадати.

2. Значення цільової функції після кожної ітерації повинно бути не меншим її значення з попередньої ітерації.

3. Значення базисних змінних (елементи стовпчика $\vec{b}$) завжди мають бути невід’ємними. Поява від’ємних значень після проведення ітерації свідчить про неправильно обраний ключовий елемент.

4. Підстановка отриманого опорного плану у рівняння системи обмежень перетворює кожне з них на тотожність.

Під час проведення перерахунків за методом Жордана – Гаусса доцільно притримуватися такої послідовності:

– перерахувати значення базисних змінних та цільової функції, впевнитися, що серед перших немає від’ємних, а остання не зменшилася.

– перерахувати рядок оцінок. Якщо виконується критерій оптимальності (серед оцінок немає від’ємних) виписати оптимальний розв’язок, при цьому немає необхідності виконувати перерахунки в інших клітинах симплексної таблиці.

§ 4.2. Метод штучного базису

Виконання 2-го етапу вищеописаного алгоритму не викликає ускладнень, якщо усі обмеження вихідної задачі задані у вигляді нерівностей із знаками ”≤” і мають невід’ємні праві частини. Тоді під час зведення задачі до канонічної форми (1-й етап) кожна введена до неї балансова змінна стає базисною і початковий опорний план очевидний. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, для пошуку початкового опорного розв’язку слід застосовувати методи лінійної алгебри (Розділ 1).

Однак, в лінійному програмуванні, якщо канонічна задача не має опорного плану або він не очевидний, на 2-му етапі зазвичай застосовують «***Метод штучного базису***» або «***М метод***». У кожне з рівнянь системи обмежень (3.2), в якому немає чітко вираженої базисної змінної, додатково вводиться ще одна невід’ємна змінна, яку будемо називати *штучною змінною*. Усі штучні змінні, введені до системи обмежень, слід також ввести і до цільової функції (3.1) з коефіцієнтом «-*M*», де *M* – досить велике додатне число, що значно перевищує інші коефіцієнти c_j.

В результаті таких дій приходимо до задачі з $n+k$ змінними, яку називають ***розширеною задачею*** або ***М-задачею***:

$$\boxed{F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \cdot \sum_{i=1}^{k} x_{n+i}}, \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i}, \quad \left(i = \overline{1,k}\right), \qquad \textbf{(4.7)}$$

$$\boxed{x_j \ge 0}, \quad \left(j = \overline{1,k+n}\right), \qquad \textbf{(4.8)}$$

де n – кількість змінних початкової задачі, k – кількість введених до неї штучних змінних. Одиничні вектори–стовпці $\vec{A}_{n+1}, \vec{A}_{n+1}, \dots, \vec{A}_{n+k}$ матриці системи рівнянь (4.7), які відповідають штучним змінним, утворюють штучний одиничний базис. Йому відповідає початковий опорний план та значення цільової функції відповідно

$$\vec{x}^0 = (\underbrace{0,\dots,0}_{\text{n}}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \quad \text{і} \quad F = -M \sum_{i=1}^{k} x_{n+i}.$$

Для перевірки початкового плану на оптимальність використовується вищеописаний алгоритм 3-го етапу.

Особливості розрахунків у симплексній таблиці при розв'язуванні розширеної задачі.

1. Виведена з базисних штучна змінна не може більше туди потрапити. Тому надалі такий штучний вектор можна не розглядати. Відповідний йому стовпчик симплексної таблиці викреслюється.

2. Останній Δ-рядок таблиці зручно розділити на два, у першому ($i+1$)-му записується доданок без коефіцієнта M, у другому (i+2)-му – з ним. При цьому по мірі виведення штучних змінних з базису останній рядок обнулятиметься. Нехай, на деякій k-й ітерації (i+2)-й рядок складається з самих нулів. Тоді, опорний план $\vec{x}^k$ буде початковим опорним планом вихідної канонічної задачі, а (i+2)-й рядок у наступній таблиці вже не розглядається.

За результатами розв'язування розширеної задачі робимо висновок ***про наявність чи відсутність розв'язків*** прямої задачі:

Розширена задача	**Початкова канонічна задача**
Знайдено оптимальний план $\vec{x}^{опт} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \underbrace{0,\ldots,0}_{\text{k}})$, в якому всі штучні змінні дорівнюють нулю	Має розв'язок $\vec{x}^{опт} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$.
Оптимальний план містить хоча б одну штучну змінну.	Не має розв'язків, оскільки її умови суперечливі.
Не має розв'язків.	Не має розв'язків.

§ 4.3. Геометрична інтерпретація симплексного методу

Розглянемо спрощену геометричну інтерпретацію симплексного методу, спроектувавши область допустимих розв'язків на площину. Нехай областю допустимих розв'язків ЗЛП є границя многогранника D з вершинами у точках $\vec{x}^1$, $\vec{x}^2$, $\vec{x}^3$, $\vec{x}^4$, $\vec{x}^5$, $\vec{x}^6$. Тоді ці точки будуть опорними планами даної ЗЛП, серед яких потрібно знайти той, за якого значення цільової функції максимальне. Проекцію многогранника D на площину x_1Ox_2 зображено на рис. 4.1.

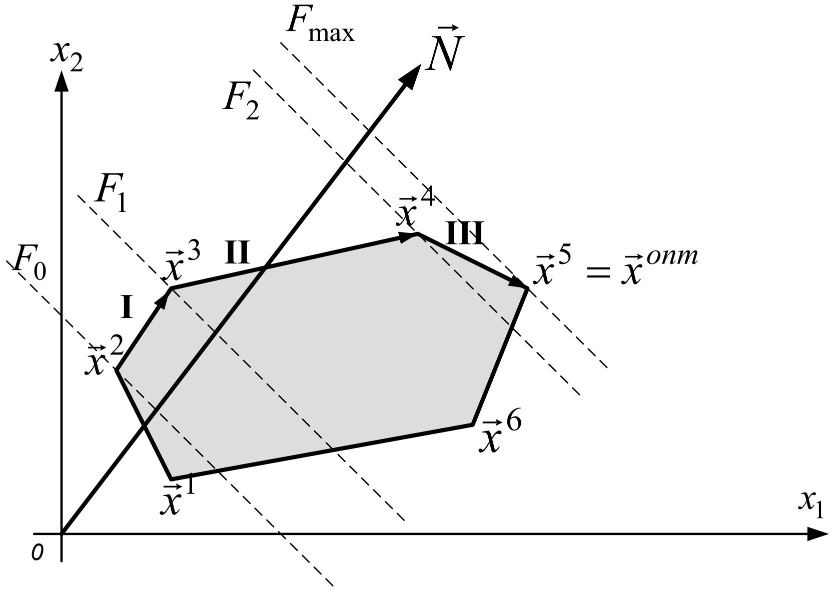


Рис. 4.1

Дві вершини многогранника розв'язків будемо називати ***сусідніми***, якщо вони лежать на одному ребрі цього многогранника. Наприклад, для вершини $\vec{x}^1$ сусідніми є $\vec{x}^2$ та $\vec{x}^6$.

Перетворенням, виконаним симплексним методом, відповідає переміщення від деякої вершини до сусідньої, у якій значення цільової функції зростає. Згідно з рисунком свого оптимального значення $F_{\max}$ цільова функція, напрямок зростання якої визначається вектором $\vec{N}$, набуває в точці $\vec{x}^5 = \vec{x}^{опт}$.

Нехай початковий опорний план обрано у точці $\vec{x}^2$, тоді на шляху до оптимального розв'язку потрібно виконати три ітерації

I ітерація – перейти від $\vec{x}^2$ до $\vec{x}^3$;

II ітерація – перейти від $\vec{x}^3$ до $\vec{x}^4$;

III ітерація – перейти від $\vec{x}^4$ до $\vec{x}^5 = \vec{x}^{опт}$.

§ 4.4. Двоїста задача

З кожною задачею лінійного програмування пов'язана інша задача, що називається ***двоїстою***. При цьому вихідна задача називається ***прямою***. Пряма і двоїста задачі називаються ***взаємноспряженими***. ***Розв'язок однієї із таких взаємноспряжених задач можна знайти безпосередньо із розв'язку другої***. Тому, перш ніж розв'язувати ЗЛП, корисно проаналізувати чи не буде простішою спряжена до неї.

Пряма задача	**Двоїста задача**
$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$	$Q(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, (i=\overline{1,m_1}, m_1\le m);$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j, (j=\overline{1,n_1}, n_1\le n);$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i=\overline{(m_1+1),m});$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, (j=\overline{(n_1+1),n});$
$x_j \ge 0$, $(j=\overline{1,n_1}, n_1\le n)$.	$y_i \ge 0$, $(i=\overline{1,m_1}, m_1\le m)$.

Правило переходу від прямої задачі до двоїстої

1. Кожному і-му обмеженню прямої задачі відповідає змінна y_i двоїстої задачі і навпаки.

2. Матриця системи обмежень двоїстої задачі отримується з матриці системи обмежень прямої задачі транспонуванням (заміною рядків стовпчиками із збереженням їх порядку).

3. Праві частини умов–обмежень прямої задачі стають коефіцієнтами при відповідних змінних цільової функції двоїстої задачі, аналогічно коефіцієнти цільової функції прямої задачі співпадають з вільними членами умов–обмежень двоїстої.

4. Задача максимізації переходить у задачу мінімізації і навпаки.

5. Умови обмеження із знаком «≤» прямої задачі слід записувати із протилежним знаком «≥» у двоїстій.

6. Якщо *j*-та змінна прямої задачі підпорядкована умовам невід’ємності, то *j*-те обмеження двоїстої буде нерівністю, якщо ні – рівнянням.

Правила знаходження розв'язку однієї із взаємно спряжених задач за відомим розв‘язком другої базуються на теоремах двоїстості.

1. Якщо одна із спряжених задач має оптимальний розв’язок, то його має і друга задача, причому, оптимальні значення співпадають: $F_{\max}=Q_{\min}$.

2. Якщо цільова функція однієї із задач не обмежена, то друга задача не має допустимих планів.

3. Для оптимальності допустимих планів $\vec{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ прямої та $\vec{y}^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right)$ двоїстої задач необхідно і достатньо, щоб вони задовольняли системі рівнянь:

$$\boxed{x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right)}; \quad \boxed{y_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0, \quad \left(i = \overline{1,m}\right)}.$$

Таким чином, немає необхідності окремо розв'язувати кожну із взаємно спряжених задач, оскільки, розв'язок обох можна знайти за останньою симплекс-таблицею розв'язування однієї із задач.

Крім того, двоїсті задачі відіграють важливу роль в економічному аналізі результатів розрахунків. Так, двоїсту до задачі про раціональне використання ресурсів (§ 2.2.), можна інтерпретувати так: якою має бути ціна y_i одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих запасах b_i і прибутках від продажу одиниці продукції c_j мінімізувались загальні витрати. Змінні y_i називають також ***двоїстими оцінками***, або ***неявними обліковими цінами***. Більшій із них відповідає більш дорогий, а значить і більш дефіцитний ресурс. Ресурс, для якого $y_i = 0$, вважається недефіцитним.

§ 4.5. Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. Розв'язати задачу прикладу 2.1 (§ 2.7):

1) симплексним методом;

2) дати геометричну інтерпретацію аналітичного розв′язку;

3) до заданої задачі побудувати двоїсту;

4) виписати розв'язок двоїстої задачі з останньої симплексної таблиці та розкрити його економічний зміст.

Розв'язання. Математична модель задачі, побудована у прикладі 2.1 представлена в симетричній формі.

$$F = 140x_1 + 90x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 250, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 150, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 20, & (3) \\ \qquad\quad x_2 \le 40. & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad (5)$$

$$x_2 \ge 0 \qquad (6)$$

1) Розв'яжемо задачу симплексним методом.

1-й етап. Представимо модель задачі у канонічній формі. Для цього систему нерівностей-обмежень слід звести до системи рівнянь, додавши у правій частині кожної нерівності системи обмежень (1) – (4) невід'ємну балансову змінну. При цьому праві частини мають бути додатними.

$$F = 15x_1 + 10x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 250, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 150, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 20, \\ x_2 + x_6 = 40. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0.$$

2-й етап. Побудуємо початковий опорний план. Випишемо вектори з коефіцієнтів при невідомих системи та з вільних членів.

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\vec{A}_3$, $\vec{A}_4$, $\vec{A}_5$, $\vec{A}_6$ утворюють одиничну підматрицю у системі рівнянь обмежень, отже, відповідні змінні x_3, x_4, x_5, x_6 базисні. Інші змінні x_1 та x_2 - вільні. Покладемо у системі рівнянь обмежень вільні змінні рівними нулю $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ і знайдемо відповідні значення базисних змінних $(x_3 = 250, x_4 = 150,\ x_5 = 20,\ x_6 = 40)$. Отриманий невід'ємний базисний розв'язок (опорний розв'язок) приймемо за ***початковий опорний план*** $\vec{x}^0 = (0, 0, 250, 150, 20, 40)$.

3-й етап. Для перевірки цього опорного плану на оптимальність складаємо симплексну таблицю

№ ітерац	i	$\vec{c}_{баз}$	$\vec{x}_{баз}$	$\vec{b}$	140	90	0	0	0	0	β_i
					$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$	$a_{ik} > 0$
0	1	0	x_3	250	3	4	**1**	**0**	**0**	**0**	$\frac{250}{3} \approx 83{,}3$
	2	0	x_4	150	$\boxed{2}$	1	**0**	**1**	**0**	**0**	$\frac{150}{2} = 75\min$
	3	0	x_5	20	-1	1	**0**	**0**	**1**	**0**	
	4	0	x_6	40	0	1	**0**	**0**	**0**	**1**	

	5	Δ_j		0	-140	-90	0	0	0	0	
I	1	0	x_3	25	**0**	$\boxed{\frac{5}{2}}$	**1**	$-\frac{3}{2}$	**0**	**0**	$25:\frac{5}{2}=10$ min
	2	140	x_1	75	**1**	$\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$	**0**	**0**	$75:\frac{1}{2}=150$
	3	0	x_5	95	**0**	$\frac{3}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$	**1**	**0**	$95:\frac{3}{2}\approx 63$
	4	0	x_6	40	**0**	1	**0**	0	**0**	**1**	$40:1=40$
	5	Δ_j		10500	0	-20	0	0	0	0	
II	1	90	x_2	10	**0**		**1**		**0**	**0**	
	2	140	x_1	70	**1**		**0**		**0**	**0**	
	3	0	x_5	80	**0**		**0**		**1**	**0**	
	4	0	x_6	30	**0**		**0**		**0**	**1**	
	5	Δ_j		10700	0	0	8	58	0	0	
Змінні двоїстої задачі				$Z_{\min}$	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	

Пояснення до таблиць.

Табл.0. Обрахунок цільової функції та оцінок проведемо за формулами (4.5).

$$F_0 = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 250 + 0 \cdot 150 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 40 = 0;$$

$$\Delta_1 = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{A}_1 - c_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 - 140 = 0 - 140 = -140;$$

$$\Delta_2 = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{A}_2 - c_2 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 90 = 0 - 90 = -90.$$

Як відмічалося вище оцінки, що відповідають базисним змінним, завжди нульові. В цьому неважко переконатися безпосередньою перевіркою за формулою (4.5). Отже $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 = 0$. Запишемо обраховані значення в нижньому (5-му) рядку таблиці. Серед оцінок є від'ємні $\Delta_1 = -140$ та $\Delta_2 = -90$, отже, початковий опорний план $\vec{x}^0$ не оптимальний. Щоб його покращити стовпчик , що відповідає найбільшій за модулем від'ємній оцінці $\Delta_1 = -140$, оберемо ключовим. Це означає, що змінну x_1 слід ввести до базису. Визначимо, яку змінну натомість треба вилучити з базису. Для кожного $\alpha_{i1} > 0$ ключового стовпця обчислюємо відношення β_i / α_{i1}, де i – номер рядка. Отримані значення записуємо у відповідних рядках останнього стовпця симплексної таблиці.

Так, $\dfrac{\beta_1}{\alpha_{11}} = \dfrac{250}{3} \approx 83{,}3$, $\dfrac{\beta_2}{\alpha_{21}} = \dfrac{150}{2} = 75$.

Відношення $\dfrac{\beta_3}{\alpha_{31}}$ та $\dfrac{\beta_4}{\alpha_{41}}$ не обчислюємо, оскільки $\alpha_{31} = -1$, $\alpha_{41} = 0$ (не виконується умова $\alpha_{i1} > 0$). Другий рядок, що відповідає найменшому з обрахованих значень, обираємо ключовим. Це означає, що змінну x_4 слід вивести з базису. На перетині ключового рядка та стовпця відмічаємо ключовий елемент $\alpha_{21} = 2$.

У табл. 0 виконаємо перерахунки за методом Жордана–Гаусса, результати яких запишемо у табл.1.

Табл. I. Отриманий опорний план $\vec{x}_1 = (75, 0, 25, 0, 95, 40)$, якому відповідає значення цільової функції $F_1 = 10500$, також не оптимальний, оскільки присутня від'ємна оцінка $\Delta_2 = -20$. Для його покращення змінну x_2 слід ввести до базису. Відповідний стовпчик обираємо ключовим. Натомість з базису виведемо змінну x_3, якій відповідає найменше обраховане в останньому стовпці відношення. Перший рядок обираємо ключовим. На перетині ключового рядка та стовпця відмічаємо ключовий елемент $\alpha_{12} = 5/2$. У табл. I виконаємо обрахунки за методом Жордана–Гаусса, результати яких запишемо у табл. II.

Табл. II. Отриманий опорний план $\vec{x}_2 = (70, 10, 0, 0, 80, 30)$, якому відповідає значення цільової функції $F_2 = 10700$, оптимальний, оскільки, серед оцінок немає від'ємних. Тому проміжні перерахунки у таблиці не виконувались.

Висновок: Розв'язок поставленої канонічної задачі: $\vec{x}_{кан}^{опт} = (70, 10, 0, 0, 80, 30)$ за якого $F_{опт} = 10700$.

Відкинувши балансові змінні випишемо розв'язок вихідної задачі:

$$\vec{x}^{опт} = (75, 0) \text{ за якого } F_{опт} = 10700.$$

2) Геометрична інтерпретація аналітичного розв'язку

Дослідимо відповідність між опорними планами у симплексній таблиці та точками многокутника допустимих розв'язків D. Результати досліджень оформлено у вигляді наступної таблиці:

Опорний план	Канонічна задача	Вихідна задача	Точка області D	Значення функції F
$\vec{x}^0$	$(0, 0, 250, 150, 20, 40)$	$(0, 0)$	$O(0, 0)$	0
$\vec{x}^1$	$(75, 0, 25, 0, 95, 40)$	$(75, 0)$	$G(75, 0)$	10500
$\vec{x}^2$	$(70, 10, 0, 0, 80, 30)$	$(70, 10)$	$E(70, 10)$	10700

Початковому опорному плану $\vec{x}^0$ відповідає вершина O многокутника розв'язків. Опорним планам $\vec{x}^1$ та $\vec{x}^2$ – відповідно вершини G та E.

Під час аналітичного розв'язування поставленої ЗЛП для досягнення оптимального розв'язку було виконано 2 ітерації:

ітерація I – перехід від плану $\vec{x}^0$ до плану $\vec{x}^1$ (геометрично - від точки O до точки G);

ітерація II – перехід від плану $\vec{x}^1$ до плану $\vec{x}^2$ (геометрично від точки G до точки E) , де і було досягнуто оптимального розв'язку задачі.

Результати аналітичного та графічного розв'язків співпали.

3) ***До заданої задачі побудуємо двоїсту.***

Для цього випишемо матрицю A з коефіцієнтів при невідомих системи нерівностей-обмежень та транспоновану до неї матрицю A^T, матрицю В з правих частин системи обмежень і матрицю С з коефіцієнтів при невідомих цільової функції.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 250 \\ 150 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 140 & 90 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами побудови двоїстої задачі елементи матриці В будуть коефіцієнтами при невідомих y_1, y_2, y_3, y_4 цільової функції, що мінімізується (оскільки вихідна задача на максимум)

$$Z = 250y_1 + 150y_2 + 20y_3 + 40y_4 \to \min .$$

Елементи матриці A^T будуть коефіцієнтами при невідомих системи обмежень двоїстої задачі, елементи матриці C – її вільними членами. Причому знаки нерівностей двоїстої задачі протилежні знакам нерівностей прямої задачі, отже маємо систему обмежень:

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 140, \\ 4y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \ge 90. \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0, y_4 \ge 0.$$

4) Випишемо оптимальний розв'язок двоїстої задачі з останньої симплексної таблиці прямої задачі.

Змінні двоїстої задачі визначаються із рядка оцінок прямої задачі за ***правилами***:

1. Оцінки, що відповідають балансовим змінним прямої задачі, є значеннями основних змінних двоїстої, тобто

$$\Delta_3 \leftrightarrow y_1,\ \Delta_2 \leftrightarrow y_4,\ \Delta_3 \leftrightarrow y_5,\ \Delta_4 \leftrightarrow y_6;$$

2. Оцінки, що відповідають основним змінним прямої задачі, є значеннями балансових змінних двоїстої, тобто $\Delta_1 \leftrightarrow y_5$, $\Delta_2 \leftrightarrow y_6$, які слід було б ввести при зведенні задачі до канонічної форми.

Для зручності запишемо змінні двоїстої задачі під рядком оцінок останньої симплексної таблиці. Маємо розв'язок двоїстої задачі $y_1 = 8$, $y_2 = 58$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$. При цьому $Z_{\min} = F_{\max} = 10700$.

Оскільки $y_2 > y_1$ нафтопродукти 2-го сорту є більш дефіцитними. Переконаємося у правильності отриманого розв'язку двоїстої задачі безпосередньою підстановкою:

$$Z = 250 \cdot 8 + 150 \cdot 58 + 20 \cdot 0 + 40 \cdot 0 = 10700,$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 8 + 2 \cdot 58 - 0 = 140 \geq 140 & - \quad \textit{істина}, \\ 4 \cdot 8 + 58 + 0 + 0 = 90 \geq 90 & - \quad \textit{істина}. \end{cases}$$

Відповідь: Максимального прибутку у розмірі 10700 тис. у.г.о нафтопереробна компанія досягне, якщо з наявних ресурсів з врахуванням попиту, виготовить 70 тон бензину марки *A* та 10 тон бензину марки *B*.

Приклад 4.2. Розв'язати задачу прикладу 2.4 (§ 2.7.) методом штучного базису

У прикладі 2.4 була побудована математична модель задачі:

$$F = 0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 60; \\ x_2 \geq 16; \\ 2x_1 + x_2 \leq 140. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язання.

1-й етап. Зведемо задачу до канонічної форми. Для цього систему нерівностей-обмежень перетворимо у систему рівнянь, ввівши у ліву частину нерівності невід'ємні балансові змінні $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ з відповідними знаками, так, щоб праві частини залишалися невід'ємними

$$F = 0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 60; \\ x_2 - x_4 = 16; \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 140. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

2-й етап. Побудуємо початковий опорний план. Випишемо вектори з коефіцієнтів при невідомих системи та з правих частин.

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 60 \\ 16 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

Серед виписаних векторів є лише один базисний – $\vec{A}_5$.

Для побудови одиничної підматриці у системі обмежень не вистачає ще двох. Згідно з методом штучного базису у другому й третьому рівняннях системи введемо штучні базисні змінні $x_6 \geq 0$, $x_7 \geq 0$. Ці ж змінні введемо і до цільової функції з коефіцієнтом *–M*, де *M* – додатне число, що значно перевищує інші коефіцієнти при невідомих цільової функції.

В результаті таких дій отримаємо розширену задачу (***М-задачу***):

$$F = 0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 - Mx_6 - Mx_7 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_6 = 60; \\ x_2 - x_4 + x_7 = 16; \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 140. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0,$$

де вектори $\vec{A}_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\vec{A}_7 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ утворюють одиничну підматрицю.

Таким чином, змінні x_5, x_6, x_7 – базисні, а змінні x_1, x_2, x_3, x_4 – вільні. Покладемо у системі рівнянь обмежень розширеної задачі вільні змінні рівними нулю $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0)$ і знайдемо відповідні значення базисних змінних $(x_5 = 140,\ \ x_6 = 60,\ \ x_7 = 16)$. Отриманий невід'ємний базисний розв'язок (опорний розв'язок) приймемо за ***початковий опорний план*** $\vec{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 140, 60, 16)$.

3-й етап. Для перевірки плану на оптимальність складаємо таблицю

№ ітер	i	$\vec{c}_{баз}$	$\vec{x}_{баз}$	$\vec{b}$	0,03	0,02	0	0	0	-M	-M	β_i
					$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$	$\vec{A}_7$	$a_{ik} > 0$
0	1	*-M*	x_6	60	$\boxed{1}$	0	-1	0	**0**	**1**	**0**	60:1=60 min
	2	*-M*	x_7	16	0	1	0	-1	**0**	**0**	**1**	
	3	0	x_5	140	2	1	0	0	**1**	**0**	**0**	140:2=70
	4	Δ_j		0	-0,03	-0,02	0	0	0	0	0	доданок без *M*
	5			-76	-1	-1	1	1	0	0	0	доданок з *M*
I	1	0,03	x_1	60	**1**	0	-1	0	**0**		**0**	
	2	-M	x_7	16	**0**	$\boxed{1}$	0	-1	**0**		**1**	16:1=16 min
	3	0	x_5	20	**0**	1	0	0	**1**		**0**	20:1=10
	4	Δ_j		1,8	0	-0,02	-0,03	0	0		0	доданок без *M*
	5			-16	0	-1	1	1	0		0	доданок з *M*
II	1	0,03	x_1	60	**1**	**0**	-1	0	**0**			
	2	0,02	x_2	16	**0**	**1**	0	-1	**0**			
	3	0	x_5	4	**0**	**0**	$\boxed{2}$	1	**1**			
	4	Δ_j		2,12	0	0	-0,03	-0,02	0			доданок без *M*
	5			0	0	0	0	0	0			доданок з *M*
III	1	0,03	x_1	62	**1**	**0**	**0**	1/2	1/2			$62 : \frac{1}{2} = 124$
	2	0,02	x_2	16	**0**	**1**	**0**	-1	0			
	3	0	x_3	2	**0**	**0**	**1**	$\boxed{1/2}$	1/2			$2 : \frac{1}{2} = 4$ min
	4	Δ_j		2,18	0	0	0	-0,005	0,015			доданок без М
IV	1	0,03	x_1	60	**1**	**0**		**0**				
	2	0,02	x_2	20	**0**	**1**		**0**				
	3	0	x_4	4	**0**	**0**		**1**				
	4	Δ_j		2,2	0	0	0,01	0	0,02			

Пояснення до таблиць

Табл. 0. У таблицю заносимо вихідні дані розширеної задачі. Для перевірки оптимальності початкового опорного плану $\vec{x}^0$ обчислюємо оцінки Δ_j. Обрахунок цільової функції та оцінок проведемо за формулами (4.5).

$$F_0 = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{b} = -M \cdot 60 + (-M) \cdot 16 + 0 \cdot 140 = 0 - 76M;$$

$$\Delta_1 = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{A}_1 - c_1 = -M \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 0{,}03 = -0{,}03 - M;$$

$$\Delta_2 = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{A}_2 - c_2 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 0{,}02 = -0{,}02 - M;$$

$$\Delta_3 = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{A}_3 - c_3 = -M \cdot (-1) + (-M) \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0 + M;$$

$$\Delta_4 = \vec{c}_{баз} \cdot \vec{A}_4 - c_4 = -M \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 - 0 = 0 + M.$$

Оцінки, що відповідають базисним змінним завжди нульові. В цьому неважко переконатися безпосередньою перевіркою за формулою (4.5). Отже $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 = 0$, $\Delta_7 = 0$.

Оскільки оцінки можуть складатися з двох доданків (доданку, що містить коефіцієнт M, та доданку, що його не містить), рядок оцінок Δ_j для зручності обчислень розбиваємо на два: перший – для підрахунку доданку оцінки (4-й рядок таблиці) , що не містить коефіцієнта M, другий – для доданку з M (5-й рядок таблиці).

Серед оцінок є від'ємні $\Delta_1 = -0{,}03 - M$ та $\Delta_2 = -0{,}02 - M$, отже, початковий опорний план $\vec{x}^0$ не оптимальний. Щоб його покращити стовпчик, що відповідає найбільшій за модулем від'ємній оцінці $\Delta_1 = -0{,}03 - M$, оберемо ключовим. Це означає, що змінну x_1 слід ввести до базису. Визначимо, яку змінну натомість необхідно вилучити з базису. Для кожного $\alpha_{i1} > 0$ ключового стовпця обчислюємо відношення β_i / α_{i1}, де i – номер рядка. Отримані значення записуємо у відповідних рядках останнього стовпця симплексної таблиці.

Так $\dfrac{\beta_1}{\alpha_{11}} = 60 : 1 = 60$, $\dfrac{\beta_3}{\alpha_{31}} = 140 : 2 = 70$.

Відношення $\dfrac{\beta_2}{\alpha_{21}}$ не обчислюємо, бо $\alpha_{21} = 0$ (не виконується умова $\alpha_{21} > 0$). Перший рядок, що відповідає найменшому з обрахованих відношень, обираємо ключовим. Це означає, що змінну x_6 слід вивести з базису. На перетині ключового рядка та стовпця відмічаємо ключовий елемент $\alpha_{11} = 1$. У табл. 0 виконаємо перерахунки за методом Жордана–Гаусса (включаючи 4-й та 5-й рядки), результати яких запишемо у табл.1.

При цьому стовпчик, що відповідає виведеній з базису штучній змінній x_6 не перераховується і взагалі надалі не розглядається.

Табл. I. Отриманий опорний план $\vec{x}_1 = (60, 0, 0, 0, 20, 0,16)$, якому відповідає значення цільової функції $F_1 = -76M$, також не оптимальний, оскільки присутня від'ємна оцінка $\Delta_2 = -0,02 - M$. Для його покращення змінну x_2 слід ввести до базису. Відповідний стовпчик обираємо ключовим. Натомість з базису виведемо штучну змінну x_7, якій відповідає найменше обраховане в останньому стовпці відношення. Перший рядок обираємо ключовим. На перетині ключового рядка та стовпця відмічаємо ключовий елемент $\alpha_{22} = 1$. У табл. I виконаємо обрахунки за методом Жордана–Гаусса, результати яких запишемо у табл.II. Причому стовпчики x_6 та x_7, що відповідають виведеним з базису штучним змінним більше не розглядаємо.

Табл. II. Отримано опорний план $\vec{x}_2 = (60, 16, 0, 0, 4, 0,0)$, якому відповідає значення цільової функції $F_2 = 2,12$. Слід зазначити, що усі штучні змінні вже виведені з базису, тому останній 5-й рядок оцінок, де записувались доданки з коефіцієнтом *M*, обнулився. Це означає, що цільова функція та оцінки Δ_j вже не містять коефіцієнта М і не міститимуть його надалі. Тому при проведенні наступних ітерацій 5-й рядок не розглядається.

Отриманий опорний план можна розглядати як початковий опорний план вихідної канонічної задачі.

Оскільки серед оцінок у 4-му рядку є від'ємні $\Delta_3 = -0,03$ та $\Delta_2 = -0,02$, цей опорний план можна покращити, ввівши до базису змінну x_3, якій відповідає більша за модулем від'ємна оцінка $\Delta_3 = -0,03$. Натомість з базису виведемо змінну x_5. Виконаємо у табл. II перетворення Жордана–Гаусса з ключовим елементом $\alpha_{33} = 2$.

Табл. III. Отриманий опорний план $\vec{x}_3 = (62, 16, 2, 0, 0, 0,0)$, якому відповідає значення цільової функції $F_1 = 2,18$, також не оптимальний, оскільки присутня від'ємна оцінка $\Delta_4 = -0,005$. Для його покращення змінну x_4 слід ввести до базису. Відповідний стовпчик обираємо ключовим. Натомість з базису виведемо змінну x_5, якій відповідає найменше обраховане в останньому стовпці відношення. Третій рядок обираємо ключовим. На перетині ключового рядка та стовпця відмічаємо ключовий елемент $\alpha_{34} = 1/2$. У табл. III виконаємо перерахунки за методом Жордана–Гаусса, результати яких запишемо у табл. IV.

Табл. IV. Отриманий опорний план $\vec{x}_4 = (60, 20, 0, 4, 0, 0,0)$, якому відповідає значення цільової функції $F_4 = 2{,}2$, оптимальний, оскільки, серед оцінок немає від'ємних. Тому проміжні перерахунки у таблиці не виконувались.

Висновок. За IV ітерації методом штучного базису отримано оптимальний розв'язок розширеної *M*-задачі.

$$\vec{x}^{\,опт}_{розшир} = (60, 20, 0, 4, 0, 0,0), \qquad F_{\max} = 2{,}2 .$$

Під час розв'язування штучні змінні x_6 та x_7 були виведені з базису, а тому в отриманому розв'язку мають нульові значення. Отже поставлена канонічна задача також має розв'язок

$$\vec{x}^{\,опт}_{канон} = (60, 20, 0, 4, 0), \qquad F_{\max} = 2{,}2 .$$

Відкинувши балансові змінні, запишемо розв'язок вихідної задачі

$$\vec{x}^{\,опт} = (60, 20), \qquad F_{\max} = 2{,}2 .$$

Відповідь: торгова організація отримає максимальний прибуток к розмірі 2,2 тис. у.г.о, якщо продаватиме автомобільних шин на 60 тис. у.г.о, а колісних дисків – на 20 тис. у.г.о. Також, аналізуючи оптимальні значення введених балансових змінних, робимо висновок, що організації слід закупити колісних дисків на 4 тис. у.г.о понад виділені фонди ($x_4 = 4$). Автомобільні шини понад виділені фонди закупати не варто ($x_3 = 0$).

Питання для самоконтролю

1. Які ЗЛП можна розв'язати графічно?

2. Назвіть основні етапи розв'язування ЗЛП графічним методом.

3. Що таке многокутник допустимих розв'язків, як він будується?

4. Як визначити напрямок найшвидшої зміни цільової функції?

5. Як геометрично інтерпретується цільова функція?

6. Назвіть основні властивості розв'язків ЗЛП.

7. Який зв'язок між кутовими точками многокутника розв'язків та опорними планами ЗЛП?

8. В чому полягає основна ідея симплексного методу?

9. Назвіть етапи розв'язування ЗЛП симплексним методом.

10. Назвіть критерій оптимальності опорного плану. В якому випадку ЗЛП не має розв'язку?

11. В чому полягає метод штучного базису?

12. Що таке розширена задача (М-задача)? Як вона будується?

13. Яким повинен бути розв'язок розширеної задачі, щоб вихідна задача мала розв'язок?

14. Що таке взаємно спряжені задачі?

15. Сформулюйте правила побудови двоїстої задачі.

16. Як знайти розв'язок однієї із спряжених задач, знаючи розв'язок іншої?

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

4.1. Розв'язати симплексним методом задачі, дати геометричну інтерпретацію процесу пошуку оптимального плану.

13.

$$F = -x_1 + x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

14.

$$F = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

15.

$$F = -2x_1 - 4x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

16.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.2. Розв'язати симплексним методом задачі, не вводячи штучного базису.

17.

$$F = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12, \\ 6x_1 + 3x_3 + x_4 \le 35, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

18.

$$F = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

19.

$F = 3x_1 - 2x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4} \right).$

20.

$F = x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5} \right).$

4.3. Розв’язати симплексним методом слідуючі задачі, використовуючи метод штучного базису.

21.

$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4} \right).$

22.

$F = -x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 40, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 30, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 45, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,3} \right).$

23.

$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4} \right).$

24.

$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4} \right).$

4.4. До ЗЛП скласти двоїсту. Розв'язати одну з них симплексним методом і за знайденим розв'язком одержати розв'язок іншої.

25.

$F = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,3} \right).$

26.

$F = 7x_1 + 8x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \ge 15, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5} \right)$

27.

$F = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max$;

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 (j = 1,2,3)$

28.

$F = 3x_1 + 42x_2 + 6x_3 - 4x_4 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 - x_4 \ge -1, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 (j = \overline{1,4})$.

29.

$F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 (j = 1,2,3)$.

30.

$F = 3x_1 + 5x_2 + 8 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

Завдання для індивідуальної роботи

4.1. Побудовані математичні моделі задач 2.2 – 2.4 розв'язати згідно з варіантом:

1) симплексним методом;
2) дати геометричну інтерпретацію аналітичного розв'язку;
3) до заданої задачі побудувати двоїсту,
4) виписати оптимальний план двоїстої задачі з останньої симплексної таблиці розв'язаної задачі;
5) розкрити економічний зміст двоїстої задачі.

4.2. Розв'язати задачі лінійного програмування згідно з варіантом симплексним методом.

1) $z = 2x_1 + x_2 \quad (\max)$;
$x_1 - 2x_2 \ge 4$;
$5x_1 + 2x_2 \ge 10$;
$4x_1 - 3x_2 \le 12$;
$7x_1 + 4x_2 \le 28$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

2) $z = 6x_1 + 3x_2 \quad (\min)$;
$2x_1 + x_2 \ge 4$;
$x_1 + 2x_2 \ge 4$;
$x_1 + x_2 \le 5$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

3) $z = 3x_1 + 3x_2 \quad (\max)$;
$x_1 - 4x_2 \le 4$;
$3x_1 + 2x_2 \le 6$;
$-x_1 + x_2 \le 7$;
$x_1 + 2x_2 \ge 2$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

4) $z = 2x_1 + x_2 \quad (\min)$;
$x_1 + 2x_2 \le 8$;
$3x_1 + 5x_2 \ge 15$;
$-2x_1 + 5x_2 \le 10$;
$4x_1 + 3x_2 \ge 12$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

5) $z = 2x_1 + 2x_2 \quad (\max)$;
$3x_1 - 2x_2 \ge -6$;
$x_1 + x_2 \ge 3$;
$x_1 \le 9$;
$x_2 \le 6$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

6) $z = 5x_1 - 3x_2 \quad (\min)$;
$3x_1 + 2x_2 \ge 6$;
$2x_1 - 3x_2 \ge -6$;
$x_1 + x_2 \le 4$;
$4x_1 + 7x_2 \le 28$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

7) $z = 2x_1 + x_2 \quad (\max)$;
$2x_1 - 3x_2 \le 6$;
$5x_1 + 6x_2 \le 30$;
$2x_1 + x_2 \ge 2$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

8) $z = -3x_1 + x_2 \quad (\min)$;
$x_1 + 2x_2 \ge 10$;
$3x_1 + x_2 \ge 15$;
$x_1 \le 8$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

9) $z = 2x_1 + 5x_2 \quad (\max)$;
$4x_1 + 5x_2 \le 40$;
$2x_1 + 3x_2 \ge 6$;
$-x_1 + x_2 \le 5$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

10) $z = -2x_1 + x_2 \quad (\min)$;
$2x_1 + x_2 \le 8$;
$x_1 + x_2 \le 6$;
$-3x_1 + 2x_2 \ge 3$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

11) $z = 3x_1 + 3x_2 \quad (\max)$;
$5x_1 + x_2 \ge 10$;
$x_1 + 7x_2 \ge 7$;
$x_1 - 2x_2 \le 10$;
$-5x_1 + 3x_2 \le 30$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

12) $z = 7x_1 - x_2 \quad (\min)$;
$x_1 + x_2 \ge 3$;
$5x_1 + x_2 \ge 5$;
$x_1 + 5x_2 \ge 5$;
$x_1 \le 4,\ x_2 \le 4$;
$x_1, x_2 \ge 0$.

13) $z = x_1 + x_2 \quad (\max);$
$3x_1 + 5x_2 \le 15;$
$-x_1 + x_2 \le 2;$
$10x_1 + 7x_2 \le 35;$
$-x_1 - x_2 \le -1;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

14) $z = -3x_1 + 6x_2 \quad (\min);$
$5x_1 - 2x_2 \le 4;$
$x_1 - 2x_2 \ge -4;$
$x_1 + x_2 \ge 4;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

15) $z = 3x_1 - 2x_2 \quad (\max);$
$2x_1 + x_2 \le 11;$
$-3x_1 + x_2 \le 10;$
$3x_1 + 4x_2 \ge 20;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

16) $z = -2x_1 + 4x_2 \quad (\min);$
$5x_1 + 2x_2 \le 10;$
$x_1 + x_2 \ge 3;$
$4x_1 + 3x_2 \le 12;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

17) $z = 2x_1 + x_2 \quad (\max);$
$x_1 - 2x_2 \ge 4;$
$5x_1 + 2x_2 \ge 10;$
$4x_1 - 3x_2 \le 12;$
$7x_1 + 4x_2 \le 28.$
$x_1, x_2 \ge 0.$

18) $z = 5x_1 + 2x_2 \quad (\min);$
$5x_1 + 2x_2 \ge 10;$
$2x_1 - 3x_2 \le 6;$
$x_1 + 2x_2 \ge 4;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

19) $z = x_1 + 2x_2 \quad (\max);$
$2x_1 + x_2 \le 14;$
$-3x_1 + 2x_2 \le 9;$
$3x_1 + 4x_2 \ge 27;$
$6x_1 - x_2 \ge 18.$
$x_1, x_2 \ge 0.$

20) $z = -2x_1 + x_2 \quad (\min);$
$2x_1 + x_2 \le 8;$
$x_1 + 3x_2 \ge 6;$
$3x_1 + x_2 \ge 3;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

21) $z = 3x_1 + 2x_2 \quad (\max);$
$x_1 + 2x_2 \le 6;$
$2x_1 + x_2 \le 8;$
$-x_1 + x_2 \ge 1;$
$x_2 \le 2;\ .$
$x_1, x_2 \ge 0$

22) $z = x_1 + 2x_2 \quad (\min);$
$5x_1 - 2x_2 \le 20;$
$x_1 - 2x_2 \ge -20;$
$x_1 + x_2 \ge 16;$
$x_1, x_2 \ge 0.$

23) $z = 3x_1 - 2x_2 \quad (\max);$
$7x_1 + 2x_2 \geq 14;$
$-x_1 + 2x_2 \geq 2;$
$7x_1 + 10x_2 \leq 28;$
$x_1, x_2 \geq 0.$

24) $z = -2x_1 + 5x_2 \quad (\min);$
$7x_1 + 2x_2 \geq 14;$
$5x_1 + 6x_2 \leq 30;$
$3x_1 + 8x_2 \geq 24;$
$x_1, x_2 \geq 0.$

25) $z = 2x_1 - 5x_2 \quad (\max);$
$4x_1 + 3x_2 \leq 12;$
$3x_1 + 4x_2 \geq 24;$
$x_1, x_2 \geq 0.$

26) $z = 2x_1 - 10x_2 \quad (\min);$
$x_1 - x_2 \geq 0;$
$x_1 - 5x_2 \geq -5;$
$x_1, x_2 \geq 0;$

27) $z = x_1 + x_2 \quad (\max);$
$x_1 + 2x_2 \leq 9;$
$2x_1 + x_2 \leq 12;$
$-x_1 + 2x_2 \leq 1;$
$x_2 \leq 3;$
$x_1, x_2 \geq 0.$

28) $z = x_1 + x_2 \quad (\min);$
$x_1 + x_2 \leq 8;$
$-2x_1 + 3x_2 \leq 6;$
$2x_1 + 3x_2 \geq 12;$
$x_1, x_2 \geq 0.$

29) $z = 8x_1 + 3x_2 \quad (\max);$
$2x_1 + 3x_2 \leq 36;$
$2x_1 + 5x_2 \leq 20;$
$-3x_1 + 2x_2 \leq 6;$
$4x_1 - x_2 \geq 8;$
$x_1, x_2 \geq 0.$

30) $z = 4x_1 + 6x_2 \quad (\min);$
$3x_1 + x_2 \geq 9;$
$x_1 + 2x_2 \geq 8;$
$x_1 + 6x_2 \geq 12;$
$x_1, x_2 \geq 0.$

.

РОЗДІЛ 5. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

§ 5.1. Основні теоретичні відомості

Важливе місце в лінійному програмуванні посідає транспортна задача, яка полягає в мінімізації загальної вартості перевезень деякої кількості однорідної продукції із m пунктів відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ у n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$, коли відомі запаси a_i продукції в пунктах відправлення A_i $(i = \overline{1, m})$, попит b_j в кожному пункті споживання B_j $(j = \overline{1, n})$ і вартість C_{ij} перевезення одиниці продукції із пункту A_i в пункт B_j. У § 2.3 розглядалася постановка та математична модель такої задачі.

Отже, **математично транспортна задача** зводиться до пошуку сукупності з $m \times n$ невідомих x_{ij} $(i = \overline{1, m},\ \ j = \overline{1, n})$, за яких досягає ***мінімуму лінійна цільова функція***

$$\boxed{F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min}, \qquad \textbf{(5.1)}$$

також задовольняються ***умови–обмеження*** на змінні:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i}, \quad (i = \overline{1, m}); \qquad \textbf{(5.2)}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j}, \quad (j = \overline{1, n}); \qquad \textbf{(5.3)}$$

та ***умови невід'ємності***:

$$\boxed{x_{ij} \ge 0}, \quad (i = \overline{1, m},\ \ j = \overline{1, n}). \qquad \textbf{(5.4)}$$

Якщо загальний запас продукції у всіх пунктах відправлення (ПВ) дорівнює сумарній потребі усіх пунктів споживання (ПС)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j}, \qquad \textbf{(5.5)}$$

то задачу називають ***збалансованою*** або ***закритою***. Якщо ж умова балансу (5.5) не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою*** або ***відкритою***.

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість.

Запишемо дані задачі у **таблицю перевезень**

ПС – B_j / ПВ – A_i	B_1		B_2		. . .	B_n		Запаси a_i
A_1		c_{11}		c_{12}	. . .		c_{1n}	a_1
	x_{11}		x_{12}			x_{1n}		
A_2		c_{21}		c_{22}	. . .		c_{2n}	a_2
	x_{21}		x_{22}			x_{2n}		
. . .								. . .
A_m		c_{m1}		c_{m2}	. . .		c_{mn}	a_m
	x_{m1}		x_{m2}			x_{mn}		
Потреби b_j	b_1		b_2		. . .	b_n		

Кожній клітині таблиці, розміщеній на перетині i-го рядка та j-го стовпчика відповідає ***маршрут перевезення*** $(i,\ j)$ вантажу від i-го постачальника до j-го споживача. При цьому c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції (питома вартість перевезення), а x_{ij} – кількість перевезеної продукції за цим маршрутом.

Ранг системи рівнянь-обмежень з $m \times n$ невідомими x_{ij} закритої транспортної задачі дорівнює $m+n-1$, оскільки вона містить $m+n-1$ лінійно незалежних рівнянь. Отже, усякий ***невироджений*** опорний розв'язок (план) транспортної задачі повинен містити $m+n-1$ додатних компонент. Відповідні таким компонентам змінні будуть базисними. Маршрути (клітини таблиці) з ненульовими змінними називають ***завантаженими***. Решту маршрутів називають ***вільними***. Їм відповідають нульові небазисні (вільні) змінні, які у таблицю перевезень не записуються.

Транспортна задача вважається розв'язаною, якщо знайдено її ***оптимальний план*** – такий розв'язок (план) з усіх можливих, вартість перевезень за якого буде найменшою, тобто для якого цільова функція (5.1) набуває мінімального значення.

Транспортну задачу, як і всяку задачу лінійного програмування, можна розв'язувати класичним симплекс-методом, однак, можна помітити, що порівняно з іншими ЗЛП, що вивчалися, **математична модель транспортної задачі має ряд особливостей**:

– розподілу підлягають однорідні ресурси;
– умови задачі описуються лише рівняннями;
– усі змінні задачі мають однакові одиниці виміру;
– коефіцієнти при невідомих в усіх рівняннях-обмеженнях рівні 1;
– кожна невідома зустрічається лише у двох рівняннях системи обмежень.

Перелічені особливості дають можливість застосовувати для розв'язування транспортних задач більш просту модифікацію симплексного методу – ***метод потенціалів***.

Розв'язування транспортної задачі **методом потенціалів** включає етапи:

1) зведення задачі до закритої;
2) знаходження початкового опорного плану перевезень;
3) дослідження плану на оптимальність;
4) удосконалення опорного плану.

Розглянемо детально кожний етап.

1-й етап. Якщо під час перевірки умов балансу (5.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно **звести до закритого типу**.

Це здійснюється введенням ***фіктивного умовного постачальника*** $\boxed{A_{m+1}}$ у разі перевищення загального попиту над запасами $\boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)}$, із запасом $\boxed{a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i}$.

Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)}$, то до закритого типу задача зводиться введенням ***фіктивного умовного споживача*** $\boxed{B_{n+1}}$ з потребою $\boxed{b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j}$.

При цьому вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} ***або фіктивного споживача*** B_{n+1} ***вважається рівною нулю.***

2-й етап. Для знаходження початкового опорного плану перевезень існує декілька способів. Найпростіший із них ***метод північно-західного кута,*** згідно з яким побудова опорного плану починається з лівої верхньої клітини $(1,1)$ таблиці перевезень. Продукцію першого пункту відправлення розподіляють таким чином, щоб спочатку максимально врахувати потреби першого споживача, потім другого і т.д. до повного вичерпування запасу пункту A_1. Аналогічно послідовно розподіляється продукція пунктів відправлення A_2, A_3, ... , A_m. При цьому пункти споживання B_j, потреби яких повністю враховані, вже не розглядаються. Заповнені зазначеним способом клітини утворюють східчасту фігуру, яка починається у клітині $(1,1)$, а закінчується у клітині (m,n) транспортної таблиці.

Оскільки, при побудові початкового опорного плану розглянутим методом вартості перевезень не враховуються, такий план, зазвичай, буває далеким від оптимального. Врахувати тарифи перевезень при виборі пунктів відправлення і споживання дозволяє ***метод мінімальної вартості***. Суть цього методу полягає у тому, що вибирається клітина (i, j) таблиці перевезень із мінімальною вартістю і приймається $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Якщо запаси продукції A_i пункту відправлення повністю вичерпані або повністю враховані потреби B_j пункту споживання, то відповідний i-й рядок або j-й стовпець транспортної таблиці не враховується при подальшому аналізі. У частині таблиці, що залишилась, знову вибирають найменшу вартість і продовжують розподіл запасів. Процес триває доти, поки не будуть вичерпані запаси усіх пунктів відправлення і повністю задоволений попит усіх пунктів споживання.

3-й етап. Для перевірки оптимальності отриманого опорного плану за ***методом потенціалів*** в кожному із пунктів A_i та B_j вводяться потенціали відповідно u_i та v_j, значення яких визначаються із системи $m+n-1$ рівнянь:

$$\boxed{u_i + v_j = c_{ij}}, \qquad \mathbf{(5.6)}$$

складеної для базисних (заповнених) клітин транспортної таблиці. Оскільки система (5.6) містить $m+n$ невідомих, то одній з них можна надати довільного значення, наприклад $u_1 = 0$. Після цього послідовно визначаються значення решти потенціалів.

Для кожної вільної клітини (i, j) обчислюються оцінки

$$\boxed{\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}}. \qquad \mathbf{(5.7)}$$

Критерій оптимальності опорного плану:

Якщо серед оцінок Δ_{ij} ***немає додатних*** $\boxed{(\Delta_{ij} < 0)}$, то знайдений опорний **план є оптимальним**.

Якщо в цьому випадку серед оцінок Δ_{ij} ***є нульові*** $\boxed{(\Delta_{ij} = 0)}$, то **оптимальний план не єдиний**.

Якщо ж хоча б для однієї вільної клітини $\boxed{\Delta_{ij} > 0}$, то **план не є оптимальним**, переходять до наступного етапу.

4-й етап. Серед оцінок $\Delta_{ij} > 0$ вибирають максимальну $\max\limits_{\Delta_{ij}>0}\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{kl}$. Вільну змінну x_{kl}, що відповідає найбільшій додатній оцінці слід ввести до базису. Для цього у транспортній таблиці будують цикл перерахунку <u>одна з вершин якого міститься у вільній клітині</u> $(k,\, l)$, а решта – у базисних.

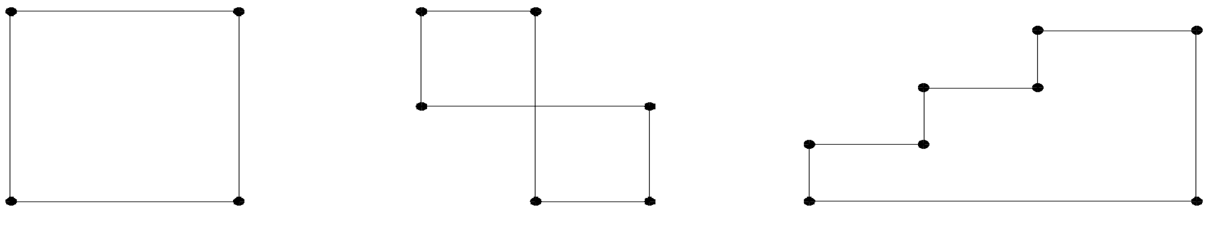
Циклом перерахунку будемо називати замкнену ламану лінію, вершини якої розміщені в клітинах таблиці так, що з кожної вершини виходять два відрізки, один по рядку, другий – по стовпчику. Вершини одного і того самого відрізка циклу називають ***сусідніми***.

Отже, тільки дві сусідні вершини циклу можуть лежати в одному стовпці або одному рядку таблиці.

Приклади можливих циклів зображені на рис. 5.1.

Відрізки, які з'єднують вершини циклу, можуть перетинатися під прямим кутом (рис. 5.1, б), але точки перетину не будуть вершинами циклу.

Доведено, що для кожної вільної клітини транспортної таблиці можна побудувати лише один цикл перерахунку.



а) б) в)

Рис. 5.1.

Вершину циклу у клітині $(k,\, l)$ позначаємо знаком "+", всі інші по черзі знаками "–" і "+". У вершинах із знаком "–" визначаємо найменше з чисел x_{ij}. Нехай $\min\{x_{ij}\} = \theta$. У таблиці проводимо перерахунок, додаючи число θ до елементів у вершинах із знаком "+" і одночасно віднімаючи θ від елементів у вершинах із знаком "–". **Елементи таблиці перевезень поза вершинами циклу лишають без змін.**

В результаті такого ***зсуву по циклу*** одержують новий опорний план, який записують у нову таблицю.

Для контролю правильності обрахунків бажано обрахувати значення цільової функції, що відповідає новому опорному плану, і переконатися, що воно не збільшилося.

Процес повторюється доти, поки розв'язок не стане оптимальним. Для оптимального плану обчислюється мінімальне значення цільової функції.

При розв'язуванні транспортної задачі можлива поява ***виродженого опорного плану***. Щоб уникнути у цьому разі зациклювання, у вільну клітину (бажано з найменшим c_{ij}) слід записати нульове перевезення $\left(c_{ij} = 0\right)$ і вважати її базисною.

§ 5.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1 Розв'язати транспортну задачу прикладу 2.6 (§ 2.7).

Нагадуємо, що мова йшла про складання плану перевезень гравію з трьох кар'єрів $K_i (i = \overline{1,3})$ на будівництво чотирьох доріг $D_j (j = \overline{1,4})$ з відомими запасами в тонах постачальників $a = (150; 60; 80)$, потребами споживачів $b = (110; 40; 60; 80)$ і матрицею вартостей перевезень

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Цільова функція F – загальна вартість перевезень, яку слід мінімізувати мала вигляд

$$F = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} +$$
$$+ x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \to \min$$

Розв'язання.

1. Визначаємо тип даної транспортної задачі.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 150 + 60 + 80 = 290;$$
$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 110 + 40 + 60 + 80 = 290.$$

Оскільки загальний запас продукції у всіх пунктах відправлення дорівнює сумарній потребі усіх пунктів споживання, то задача ***збалансована*** або ***закрита:***
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. Початковий опорний план перевезень побудуємо методом мінімальної вартості.

Для цього, заповнення таблиці починаємо з клітини, якій відповідає найменша вартість c_{ij} з усієї матриці вартостей. Такими у нашому випадку є маршрути (2,3) та (3,2), де $c_{23} = c_{32} = 1$.

У клітину (2,3) вписуємо число $x_{23} = \min\{a_2, b_3\} = \min\{60,60\} = 60$ і виключаємо з подальшого розгляду 2-й рядок і 3-й стовпець.

У клітину (3,2) вписуємо число $x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = \min\{80,40\} = 40$ і виключаємо з подальшого розгляду 2-й стовпець.

Решту частину запасу пункту A_3 розміщуємо у клітину (3,4) $x_{34} = \min\{(a_3 - x_{32}); b_4\} = \min\{(80-40); 80\} = 40$.

У частині таблиці, що залишилась, найменшою є вартість $c_{11} = 4$, тому, у клітину (1,1) вписуємо число $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{150,110\} = 110$ і виключаємо з подальшого розгляду 1-й стовпець.

Решту частину запасу пункту A_1 розміщуємо у клітину (1,4) $x_{14} = (a_1 - x_{11}) = (150-110) = 40$. Отриманий початковий опорний план запишемо у нульову таблицю перевезень (табл.0).

Табл. 0

ПС / ПВ	D1	D2	D3	D4	a_i	U_i
K1	$\boxed{4}$ **110**	0 $\boxed{4}$	2 $\boxed{2}$ ⊕	$\boxed{5}$ ⊖ **40**	150	0
K2	-4 $\boxed{5}$	-2 $\boxed{3}$	$\boxed{1}$ ⊖ **60**	$\boxed{2}$ ⊕ **0**	60	-3
K3	-1 $\boxed{2}$	$\boxed{1}$ **40**	-3 $\boxed{4}$	$\boxed{2}$ **40**	80	-3
b_j	110	40	60	80	$F_0 = 820$	
V_j	4	4	4	5		

Початковий опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки $m+n-1 = 3+4-1 = 6$, а кількість заповнених клітин у таблиці дорівнює 5 < 6. Щоб позбутися виродженості плану і уникнути зациклювання у подальших розрахунках введемо до базису одну з вільних клітин, записавши до неї ”нульове перевезення”. Наприклад, введемо до базисних маршрут (2,4), вартість перевезень на якому $c_{24} = 2$ одна з найменших.

Таким чином, у табл.0 отримано опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 40 \end{pmatrix},$$

вартість перевезень за якого

$$F_0 = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 820 \text{ (у.г.о).}$$

Для зручності її можна записати у нижньому правому кутку таблиці.

3. Перевіримо опорний план на оптимальність.

Для перевірки оптимальності опорного плану X_0 згідно з методом потенціалів обчислимо потенціали u_i та v_j відповідно для пунктів відправлення (ПВ) та пунктів споживання (ПС), а також оцінки Δ_{ij} для вільних маршрутів транспортної таблиці (табл. 0).

Система (5.6) визначення потенціалів, виписана для завантажених маршрутів, має 6 рівнянь і 7 невідомих, тому одному з невідомих потенціалів можна надати довільне значення.

Нехай u_1=0, тоді

$u_1+v_1=4 \Rightarrow v_1=4$; $u_1+v_4=5 \Rightarrow v_4=5$;

$u_2+v_3=1 \Rightarrow v_3=4$; $u_2+v_4=2 \Rightarrow u_2=-3$;

$u_3+v_2=1 \Rightarrow v_2=4$; $u_3+v_4=2 \Rightarrow u_3=-3$.

Записуємо обраховані потенціали у табл. 0:

u_i – у її крайньому правому стовпці навпроти відповідних (ПВ);

v_j – у її нижньому рядку навпроти відповідних (ПС).

За формулою (5.7) обчислюємо оцінки для небазисних клітин і записуємо їх значення у верхньому лівому кутку відповідних клітин.

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 4 - 4 = 0;$$
$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 2 = 2 > 0;$$
$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 4 - 5 = -4;$$
$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -3 + 4 - 3 = -2;$$
$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -3 + 4 - 2 = -1;$$
$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -3 + 4 - 4 = -3.$$

Згідно з критерієм оптимальності опорного плану серед обчислених оцінок не повинно бути додатних. Однак, в нашому випадку, ця умова не виконується на маршруті (1,3), оскільки $\Delta_{13} = 2 > 0$.

4. Щоб покращити опорний план X_0 змінну x_{13} слід ввести до базису. Для цього у табл.0 будуємо цикл перерахунку з вершиною із знаком "+" у клітині (1, 3). Інші вершини циклу розміщені у базисних маршрутах, причому знаки у сусідніх вершинах циклу чергуються. Означений цикл у табл.1 зображено пунктиром. Виключаємо з базису змінну, що має найменше значення θ_0 з усіх, позначених знаком "–". Для цього слід виконати зсув по циклу, віднімаючи це значення від змінних у вершинах із знаком "–" і додаючи його до змінних у вершинах із знаком "+". У нашому випадку таке мінімальне значення $\theta_0 = \min\{60; 40\} = 40$, що знаходиться на маршруті (1; 4), отже, змінну x_{14} вводимо до базисних, виконавши зсув по циклу. Отриманий результат записуємо у табл. 1.

табл. I

пс \ пв	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	U_i
K_1	4; ⊖ **110**	-2; 4	2; ⊕ **40**	-2; 5	150	0
K_2	-2; 5	-2; 3	1; ⊖ **20**	2; ⊕ **40**	60	-1
K_3	1; 2; ⊕	1; **40**	-3; 4	2; ⊖ **40**	80	-1
b_j	110	40	60	80	$F_1 = 740$	
V_j	4	2	2	3		

Таким чином, у табл.1 отримано невироджений опорний план

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 40 \end{pmatrix},$$

вартість перевезень $F_1 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$(у.г.о), що на $F_0 - F_1 = 820 - 740 = 80$ у.г.о менше порівняно з вартістю попереднього плану. Для перевірки оптимальності плану X_1 обрахуємо потенціали та оцінки безпосередньо у таблиці.

Покладемо $u_1 = 0$. У першому рядку є дві завантажені клітини – (1;1) та (1;3). З відомим u_1 це дасть змогу обрахувати потенціали v_1 та v_3. Розглянемо клітину (1;1). Щоб $0 + v_1 = 4$ потенціал $v_1 = 4$.

Аналогічно для клітини (1;3) $0+v_3=2$, отже $v_3=2$. Наявність базисного елемента у клітині (2;3) дозволить обрахувати потенціал u_2 з міркувань, що $u_2+3=2$, звідки $u_2=-1$.

У другому рядку є базисна клітина (2;4), що дасть змогу знайти v_4, знаючи u_2, $-1+v_4=2$, звідки $v_4=3$.

З аналогічних міркувань знаходимо потенціал клітини (3;4). Клітина (3;4) також завантажена, отже, потенціал u_3 знаходимо з міркувань, що $u_3+3=2$, звідки знаходимо, що $u_3=-1$.

Залишилося обрахувати потенціал v_2. Це можна зробити, оскільки клітина (3;2) базисна, з міркувань, $-1+v_2=1$, звідки $v_2=2$.

Після того, як усі потенціали знайдені, обчислимо оцінки для вільних клітин за формулами (5.7), також, безпосередньо у таблиці:

$\Delta_{12}=2+0-4=-2$; $\Delta_{14}=0+3-5=-2$; $\Delta_{21}=-1+4-5=-2$, і т.д.

Усі розрахунки робимо подумки, записуючи результат у верхньому правому куті відповідної вільної клітини.

Аналізуючи оцінки, обраховані у табл.1, помічаємо, що серед них є додатна $\Delta_{31}=1$. Отже, опорний план X_1 не оптимальний. Для його покращення змінну x_{31} вводимо до базису, будуючи цикл перерахунку з вершиною із знаком "+" у цій клітині (штрихова лінія у табл. 1).

Шукаємо $\theta_1=\min\{110;20;40\}=20=x_{23}$. Виконаємо зсув по циклу, додаючи 20 до змінних у вершинах із знаком "+" і віднімаючи це число у вершинах із знаком "–". Після перерахунків отримаємо новий опорний план, в якому змінна x_{23} вже не є базисною (табл. 2).

Табл.2

ПС / ПВ	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	U_i
K_1	4 **90**	-1 4	2 **60**	-1 5	150	0
K_2	-3 5	-2 3	-1 1	2 **60**	60	-2
K_3	2 **20**	1 **40**	-4 4	2 **20**	80	-2
b_j	110	40	60	80	$F_1=740$	
V_j	4	3	2	4		

У табл. 2 отримано невироджений опорний план:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

вартість перевезень за якого

$$F_2 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720 \text{(у.г.о)},$$

що на 20 у.г.о. дешевше, ніж при попередньому плані X_1.

Обчисливши безпосередньо у таблиці потенціали u_i та v_j, а також оцінки Δ_{ij} приходимо до висновку, що цей план оптимальний, оскільки серед оцінок немає додатних.

Відповідь: мінімальних витрат у розмірі 720 у.г.о. при перевезенні гравію з кар'єрів до доріг, що будуються, можна досягти за такого плану перевезень:

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.2. Розв'язати транспортну задачу, якщо відомі запаси постачальників $a = (60, \quad 90, \quad 120)$, потреби споживачів $b = (70, \quad 55, \quad 190, \quad 10)$ і матриця вартостей перевезень

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Визначаємо тип заданої транспортної задачі.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 90 + 120 = 270;$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 70 + 55 + 190 + 10 = 325.$$

Одержали, що попит перевищує пропозицію. Отже, перш ніж розв'язувати задачу її необхідно збалансувати (звести до закритого типу). Для цього вводимо фіктивного постачальника з потужністю $A_{4,ф} = 325 - 270 = 55$ (у.о) і нульовими питомими витратами $c_{4j} = 0$.

2. Початковий опорний план перевезень побудуємо методом північно-західного кута.

Для цього, починаючи з верхньої лівої клітини розподіляємо вантаж за потребами, максимально враховуючи попит споживачів:

маршрут (1;1): $x_{11} = \min\{60;\, 70\} = 60$;

маршрут (2;1): $x_{21} = \min\{120;\, (70-60)\} = 10$;

маршрут (2;1): $x_{21} = \min\{120;\, (70-60)\} = 10$;

маршрут (2;2): $x_{22} = \min\{(90-10);\, 55\} = 55$;

маршрут (2;3): $x_{23} = \min\{(90-10-55);\, 190\} = 25$;

маршрут (3;3): $x_{33} = \min\{120;\, (190-25)\} = 120$;

маршрут (4;3): $x_{43} = \min\{55;\, (190-25-120)\} = 45$;

маршрут (4;4): $x_{44} = \min\{(55-45);\, 10\} = 10$.

Таким чином, отримано початковий опорний план X_0 (табл. 0)

$$X_0 = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 55 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 45 & 10 \end{pmatrix},$$

вартість перевезень якого

$$F_0 = 60\cdot 3 + 10\cdot 1 + 55\cdot 4 + 25\cdot 5 + 120\cdot 3 + 45\cdot 0 + 10\cdot 0 = 895 \text{ у.г.о.}$$

Табл. 0

ПС / ПВ	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	U_i
A_1	$\boxed{3}$ ⊖ **60**	-1 $\boxed{7}$	1 $\boxed{6}$	6 $\boxed{1}$ ⊕	60	0
A_2	$\boxed{1}$ ⊕ **10**	$\boxed{4}$ **55**	$\boxed{5}$ ⊖ **25**	-4 $\boxed{9}$	90	-2
A_3	-7 $\boxed{6}$	-10 $\boxed{8}$	$\boxed{3}$ **120**	1 $\boxed{2}$	120	-4
$A_{4,ф}$	-4 $\boxed{0}$	-1 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$ ⊕ **45**	$\boxed{0}$ ⊖ **10**	55	-7
b_j	70	55	190	10	$F_0 = 895$	
V_j	3	6	7	7		

Опорний план X_0 не вироджений, оскільки містить 7 додатних компонент, що дорівнює кількості лінійно незалежних рівнянь-обмежень задачі ($m+n-1=4+4-1=7$).

3. Перевіряємо отриманий план на оптимальність.

Згідно методу потенціалів *i*-му рядку та *j*-му стовпчику транспортної таблиці ставимо у відповідність числа u_i та v_j, які називають потенціалами пунктів відправлення і пунктів призначення відповідно.

Складаємо систему рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$ для визначення потенціалів плану X_0. Ця система має 7 рівнянь і 8 невідомих потенціалів. Для знаходження 8-ми потенціалів одному з них надаємо довільного значення, нехай, наприклад, u_1=0, тоді

$u_1+v_1=3 \Rightarrow v_1=3$; $u_2+v_1=1 \Rightarrow u_2=-2$;

$u_2+v_2=4 \Rightarrow v_2=6$; $u_1+v_3=5 \Rightarrow v_3=7$;

$u_3+v_3=3 \Rightarrow u_3=-4$; $u_4+v_3=0 \Rightarrow u_4=-7$;

$$u_4+v_4=0 \Rightarrow v_4=7.$$

Обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ <u>для вільних клітин</u> табл. 1, значення яких записуємо у верхньому лівому куті відповідних клітин:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0+6-7 = -1;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0+7-6 = 1 > 0;$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0+7-1 = 6 > 0;$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -2+7-9 = -4;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -4+3-6 = -7;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -4+6-8 = -6;$$

$$\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -4+7-2 = 1 > 0;$$

$$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -7+3-0 = -4;$$

$$\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -7+6-0 = -1.$$

Серед оцінок є додатні – $\Delta_{13}=1$, $\Delta_{14}=6$, $\Delta_{34}=1>0$, тому отриманий план не оптимальний.

4. Удосконалюємо опорний план.

Визначимо найбільшу з додатних оцінок:

$$\max\{\Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{34}\} = \max\{1; 6; 1\} = 6 = \Delta_{14}.$$

Оцінка $\Delta_{14}=6$ є найбільшою, отже для покращення опорного плану змінну x_{14} включаємо у базис. Будуємо цикл перерахунку з вершиною із знаком «+» у вільній клітині (1, 4). Інші вершини циклу – у базисних маршрутах, причому їх знаки чергуються.

Виключаємо з базису змінну, що позначена знаком "–" і має найменше числове значення $\theta_0 = \min\{10; 25; 60\} = 10$. Виконаємо зсув по циклу перерахунку, додаючи до кількості вантажу, позначеного знаком "+", число 10, і віднімаючи це число від кількості вантажу, позначеного знаком "–".

В результаті перерахунків отримуємо новий базисний розв’язок, що записуємо у таблиці 1.

Табл. 1

ПС / ПВ	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	U_i
A_1	$\boxed{3}$ $\ominus$ **50**	-1 $\boxed{7}$	1 $\boxed{6}$ $\oplus$	$\boxed{1}$ **10**	60	0
A_2	$\boxed{1}$ $\oplus$ **20**	$\boxed{4}$ **55**	$\boxed{5}$ $\ominus$ **15**	-10 $\boxed{9}$	90	-2
A_3	-7 $\boxed{6}$	-10 $\boxed{8}$	$\boxed{3}$ **120**	-5 $\boxed{2}$	120	-4
$A_{4,ф}$	-4 $\boxed{0}$	-1 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$ **55**	-6 $\boxed{0}$	55	-7
b_j	70	55	190	10	$F_1 = 835$	
V_j	3	6	7	1		

У таблиці 1 отримано невироджений опорний план

$$X_1 = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 10 \\ 20 & 55 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 0 \end{pmatrix},$$

вартість перевезень за якого

$$F_1 = 3 \cdot 50 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 4 \cdot 55 + 5 \cdot 15 + 3 \cdot 120 + 0 \cdot 55 = 835 \text{ у.г.о.},$$

що на 60 у.г.о менше вартості попереднього плану X_0.

Для перевірки оптимальності плану X_1 обчислимо потенціали u_i та v_j, а також оцінки Δ_{ij} безпосередньо у таблиці. Серед обчислених оцінок для вільних маршрутів є додатна $\Delta_{13} = 1$, отже, опорний план X_1 можна покращити. Для цього змінну x_{13} слід ввести до базису.

Будуємо цикл перерахунку з вершиною із знаком "+" на маршруті (1; 3) (пунктирна лінія у табл.1). Визначаємо найменше із значень змінних у від'ємних вершинах циклу: $\theta_1 = \min\{50; 15\} = 15 = x_{23}$. Виконуємо зсув по циклу, додаючи 15 до змінних у вершинах із знаком "+" і віднімаючи це число у вершинах із знаком "–".

Після перерахунків отримаємо новий опорний план, в якому змінна x_{23} вже не є базисною (табл. 2).

Табл.2

ПС / ПВ	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	U_i
A_1	3 **35**	-1 7	1 6 **15**	1 **10**	60	0
A_2	1 **35**	4 **55**	-1 5	-10 9	90	-2
A_3	-6 6	-5 8	3 **120**	0 2	120	-3
$A_{4,ф}$	-3 0	0 0	0 0 **55**	-5 0	55	-6
b_j	70	55	190	10	$F_2 = 820$	
V_j	3	6	6	1		

У табл. 2 отримано невироджений опорний план:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 15 & 10 \\ 35 & 55 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 0 \end{pmatrix},$$

вартість перевезень за якого

$$F_2 = 3 \cdot 35 + 6 \cdot 15 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 35 + 4 \cdot 55 + 3 \cdot 120 + 0 \cdot 55 = 820 \text{ (у.г.о)},$$

що на 15 у.г.о. дешевше, ніж при попередньому плані X_1 та на 75 у.г.о менше вартості початкового плану X_0.

Обчисливши безпосередньо у таблиці потенціали u_i , v_j та Δ_{ij} приходимо до висновку, що цей план оптимальний, оскільки серед оцінок немає додатних. Наявність нульових оцінок на вільних маршрутах свідчить про те, що оптимальний план не єдиний.

Відповідь:

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 15 & 10 \\ 35 & 55 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \end{pmatrix}, \ F_{\min} = 820 \text{ у.г.о},$$

при цьому до пункту B_3 буде недопоставлено 55 у.о. вантажу.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте транспортну задачу (ТЗ) лінійного програмування і запишіть її математичну модель.

2. Яку кількість невідомих містить ТЗ?

3. Чим відрізняється відкрита ТЗ від закритої?

4. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування розв'язку ТЗ.

5. Як звести відкриту ТЗ до закритої?

6. Для чого записують таблицю перевезень?

7. Як інтерпретують клітини таблиці перевезень? Які клітини називають завантаженими, а які вільними?

8. Який опорний план ТЗ називають виродженим, невиродженим?

9. Як позбутися виродженості опорного плану під час розв'язування задачі?

10. В чому особливості ТЗ і які це має позитивні наслідки?

11. Виділіть основні етапи розв'язування транспортної задачі.

12. Які існують методи побудови початкового опорного плану?

13. Розкрийте суть методу потенціалів, як порахувати потенціали, оцінки?

14. Яка умова оптимальності опорного плану ТЗ?

15. Що називають циклом перевезень, зсувом по циклу?

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

5.1. Розв'язати транспортну задачу якщо відомі запаси постачальників $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$, потреби споживачів $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ та матриця питомих вартостей перевезень:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Початковий опорний план перевезень побудувати методом північно-західного кута.

1. $a = (30, \quad 35, \quad 60)$;
$b = (25, \quad 25, \quad 40, \quad 30)$;
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $a = (30, \quad 40, \quad 20)$;
$b = (40, \quad 30, \quad 20, \quad 40)$;
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. $a = (10, \quad 20, \quad 80, \quad 50)$;
$b = (30, \quad 10, \quad 60, \quad 50)$;
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. $a = (40, \quad 20, \quad 50, \quad 20)$;
$b = (20, \quad 45, \quad 35, \quad 40)$;
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. $a = (8, \quad 10, \quad 5)$;
$b = (5, \quad 5, \quad 10)$;
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. $a = (8, \quad 7, \quad 6)$;
$b = (7, \quad 10, \quad 6)$;
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. $a = (15, \quad 10, \quad 5, \quad 20)$;
$b = (10, \quad 20, \quad 15)$;
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 12 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. $a = (80, \quad 40, \quad 60, \quad 40)$;
$b = (70, \quad 60, \quad 80)$;
$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. $a = (10, \quad 20, \quad 40)$;
$b = (30, \quad 10, \quad 60)$;
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

10. $a = (5, \quad 20, \quad 10)$;
$b = (10, \quad 25, \quad 15)$;
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. $a=(30,\quad 40,\quad 50)$;
$b=(35,\quad 30,\quad 60)$;
$$C=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 6 & 2 & 5\\ 5 & 3 & 7\end{pmatrix}.$$

12. $a=(10,\quad 80,\quad 15)$;
$b=(75,\quad 20,\quad 50)$;
$$C=\begin{pmatrix}5 & 1 & 7\\ 6 & 4 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

13. $a=(8,\quad 7,\quad 15,\quad 15)$;
$b=(6,\quad 9,\quad 20,\quad 22)$;
$$C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 7 & 4\\ 9 & 1 & 2 & 7\\ 1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

14. $a=(30,\quad 40,\quad 70,\quad 60)$;
$b=(35,\quad 80,\quad 25,\quad 70)$;
$$C=\begin{pmatrix}1 & 9 & 7 & 2\\ 3 & 1 & 5 & 5\\ 6 & 8 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

15. $a=(10,\quad 20,\quad 10,\quad 30)$;
$b=(20,\quad 10,\quad 10,\quad 20)$;
$$C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 5\\ 2 & 6 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 8\end{pmatrix}.$$

16. $a=(5,\quad 18,\quad 12,\quad 25)$;
$b=(1,\quad 16,\quad 18,\quad 24)$;
$$C=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4 & 2\\ 3 & 6 & 1 & 7\\ 2 & 4 & 8 & 2\\ 1 & 3 & 6 & 8\end{pmatrix}.$$

17. $a=(40,\quad 30,\quad 50)$;
$b=(20,\quad 18,\quad 44,\quad 75)$;
$$C=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\ 3 & 8 & 4 & 1\\ 6 & 3 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

18. $a=(30,\quad 70,\quad 50)$;
$b=(10,\quad 40,\quad 20,\quad 60)$;
$$C=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3 & 6\\ 9 & 4 & 5 & 7\\ 5 & 7 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

19. $a=(10,\quad 12,\quad 8,\quad 10)$;
$b=(20,\quad 10,\quad 17,\quad 18)$;
$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 5 & 8 & 7 & 6\\ 6 & 4 & 2 & 5\\ 9 & 8 & 5 & 4\end{pmatrix}.$$

20. $a=(10,\quad 12,\quad 10,\quad 18)$;
$b=(17,\quad 13,\quad 15,\quad 5)$;
$$C=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 3 & 6 & 7 & 4\\ 2 & 5 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

21. $a=(5,\quad 3,\quad 8,\quad 6)$;
$b=(4,\quad 2,\quad 6,\quad 4)$;
$$C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

22. $a=(30,\quad 35,\quad 65,\quad 110)$;
$b=(20,\quad 45,\quad 90,\quad 100)$;
$$C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. $a=(5,\quad 6,\quad 7,\quad 5)$;
$b=(4,\quad 8,\quad 3,\quad 7)$;
$$C=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

24. $a=(8,\quad 9,\quad 11,\quad 22)$;
$b=(7,\quad 7,\quad 14,\quad 12)$;
$$C=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 12 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

25. $a=(10,\quad 10,\quad 20,\quad 10)$;
$b=(20,\quad 10,\quad 10,\quad 20)$;
$$C=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

26. $a=(10,\quad 10,\quad 12,\quad 13)$;
$b=(10,\quad 10,\quad 15,\quad 15)$;
$$C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

27. $a=(40,\quad 60,\quad 50)$;
$b=(90,\quad 10,\quad 70)$;
$$C=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 6 & 8 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

28. $a=(100,\quad 80,\quad 120)$;
$b=(40,\quad 55,\quad 35,\quad 85)$;
$$C=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. $a=(10,\quad 20,\quad 10,\quad 15)$;
$b=(10,\quad 20,\quad 10,\quad 20)$;
$$C=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

30. $a=(40,\quad 90,\quad 35,\quad 100)$;
$b=(80,\quad 35,\quad 10,\quad 70)$;
$$C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2. Розв’язати транспортну задачу 5.1. Початковий опорний план перевезень побудувати методом мінімальної вартості.

Завдання для індивідуальної роботи

5.1. Розв'язати транспортну задачу, якщо відомі запаси постачальників $a=(a_1, a_2, ..., a_m)$, потреби споживачів $b=(b_1, b_2, ..., b_n)$ та матриця вартостей перевезень

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Початковий опорний план перевезень побудувати методом північно-західного кута.

1. $a=(60, \quad 50, \quad 40)$;
   $b=(20, \quad 30, \quad 40, \quad 60)$;
   $$C=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. $a=(30, \quad 50, \quad 20)$;
   $b=(15, \quad 15, \quad 40, \quad 30)$;
   $$C=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. $a=(60, \quad 70, \quad 20)$;
   $b=(40, \quad 30, \quad 30, \quad 50)$;
   $$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. $a=(20, \quad 50, \quad 70)$;
   $b=(10, \quad 20, \quad 30, \quad 80)$;
   $$C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. $a=(30, \quad 40, \quad 20)$;
   $b=(20, \quad 30, \quad 30, \quad 10)$;
   $$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. $a=(50, \quad 30, \quad 60)$;
   $b=(20, \quad 40, \quad 30, \quad 50)$;
   $$C=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. $a=(35, \quad 40, \quad 50)$;
   $b=(25, \quad 20, \quad 30, \quad 50)$;
   $$C=\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 5 \\ 12 & 13 & 10 & 11 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

8. $a=(60, \quad 65, \quad 70)$;
   $b=(40, \quad 60, \quad 70, \quad 25)$;
   $$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. $a = (40, \quad 25, \quad 35)$;
$b = (25, \quad 20, \quad 30, \quad 50)$;
$$C = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 & 5 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \\ 12 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

10. $a = (60, \quad 80, \quad 100)$;
$b = (40, \quad 60, \quad 80, \quad 60)$;
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. $a = (50, \quad 40, \quad 20)$;
$b = (30, \quad 25, \quad 35, \quad 20)$;
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. $a = (60, \quad 70, \quad 20)$;
$b = (40, \quad 30, \quad 30, \quad 50)$;
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 22 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. $a = (40, \quad 30, \quad 20)$;
$b = (30, \quad 25, \quad 15, \quad 20)$;
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. $a = (60, \quad 80, \quad 100)$;
$b = (40, \quad 50, \quad 90, \quad 60)$;
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. $a = (60, \quad 80, \quad 100)$;
$b = (40, \quad 60, \quad 80, \quad 60)$;
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. $a = (80, \quad 70, \quad 20)$;
$b = (30, \quad 20, \quad 70, \quad 50)$;
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. $a = (20, \quad 40, \quad 80)$;
$b = (10, \quad 20, \quad 30, \quad 80)$;
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

18. $a = (35, \quad 40, \quad 70)$;
$b = (25, \quad 20, \quad 30, \quad 70)$;
$$C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 5 \\ 2 & 13 & 10 & 1 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

19. $a = (200, \quad 175, \quad 225)$;
$b = (100, \quad 130, \quad 270, \quad 100)$;
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

20. $a = (200, \quad 250, \quad 200)$;
$b = (290, \quad 120, \quad 110, \quad 130)$;
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. $a=(60,\quad 50,\quad 40)$;
$b=(35,\quad 50,\quad 25,\quad 40)$;
$$C=\begin{pmatrix}1 & 10 & 11 & 12\\ 2 & 9 & 8 & 11\\ 1 & 12 & 14 & 9\end{pmatrix}.$$

22. $a=(30,\quad 190,\quad 250)$;
$b=(70,\quad 120,\quad 150,\quad 130)$;
$$C=\begin{pmatrix}4 & 7 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 4\\ 5 & 6 & 3 & 7\end{pmatrix}.$$

23. $a=(150,\quad 60,\quad 80)$;
$b=(110,\quad 40,\quad 60,\quad 80)$;
$$C=\begin{pmatrix}4 & 4 & 2 & 5\\ 5 & 3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

24. $a=(225,\quad 200,\quad 175)$;
$b=(100,\quad 190,\quad 80,\quad 230)$;
$$C=\begin{pmatrix}5 & 7 & 4 & 2\\ 7 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 6 & 8\end{pmatrix}.$$

25. $a=(180,\quad 240,\quad 160)$;
$b=(200,\quad 160,\quad 100,\quad 120)$;
$$C=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6 & 5\\ 8 & 4 & 6 & 7\\ 7 & 6 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

26. $a=(300,\quad 300,\quad 250)$;
$b=(150,\quad 140,\quad 340,\quad 220)$;
$$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 1\\ 9 & 1 & 6 & 7\\ 6 & 1 & 2 & 8\end{pmatrix}.$$

27. $a=(350,\quad 200,\quad 300)$;
$b=(310,\quad 200,\quad 195,\quad 145)$;
$$C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & 8\\ 9 & 7 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 9\end{pmatrix}.$$

28. $a=(350,\quad 330,\quad 270)$;
$b=(200,\quad 360,\quad 170,\quad 220)$;
$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 9 & 6\\ 2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

29. $a=(40,\quad 30,\quad 20)$;
$b=(30,\quad 25,\quad 15,\quad 20)$;
$$C=\begin{pmatrix}5 & 5 & 6 & 2\\ 1 & 7 & 4 & 2\\ 6 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

30. $a=(35,\quad 40,\quad 70)$;
$b=(25,\quad 20,\quad 30,\quad 70)$;
$$C=\begin{pmatrix}5 & 7 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 3 & 7\end{pmatrix}.$$

5.2. Розв’язати транспортну задачу 5.1. Початковий опорний план перевезень побудувати методом мінімальної вартості.

5.3. Розв’язати транспортну задачу 2.2 для індивідуальної роботи з розділу 2 згідно з варіантом. Початковий опорний план побудувати двома методами: північно-західного кута та мінімальної вартості. Обрати для подальшої перевірки кращий початковий опорний план.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бугір М.К. Математика для економістів: посібник / М.К. Бугір – К.: ВЦ «Академія», 2003. – 520 с.

2. Глушик М.М. Математичне програмування: навч. посібник / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак – Львів: «Новий світ-2000», 2006. – 216 с.

3. Дацко М.В. Дослідження операцій: навч. посіб. / М.В. Дацко, М.М. Карбовник – Львів, 2009. – 288 с.

4. Катренко А.В. Дослідження операцій: підручник / А.В. Катренко – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 549 с.

5. Тарасюк Г. М. Шваб Л. І. Планування діяльності підприємства. навч. посібник / Г. М. Тарасюк, Л. І. Шваб – «Каравела», 2003 – 432с.

6. Тарасюк Г.М. Планова діяльність як системний процес управління підприємством: монографія / Г. М. Тарасюк. – Житомир : ЖДТУ, 2006. – 469 с.

7. Швайка Л. А. Планування діяльності підприємства: навч. посіб. / Л. А. Швайка – Львів : «Новий Світ - 2000», 2004. – 268 с.

8. Мазник Л.В. Оптимізаційні методи та моделі: навчально-методичний посібник до вивчення дисципліни, виконання лабораторних та контрольних робіт для студентів напряму підготовки 6.030505 «Управління персоналом та економіка праці», 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030509 «Облік і аудит», 6.030507 «Маркетинг» всіх форм навчання / Укл.: Л.В. Мазник, Ю.М. Гринюк – К.: НУХТ, 2013. – 100 с.

9. Лавренчук В.П., Готинчак Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. Вища математика Частина 3.-Чернівці , в-во Рута, 2007.

10. Збірник задач з курсу “Математичне програмування” /Укл. С.І. Наконечний, В.В. Вітлінський та ін. – К.:КНЕУ, 1998. – Ч.2.

11. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001.

12. Цегелик. Г.Г. Математичне програмування. Львів, 1995.